Soluzioni Foglio 3 - Matrici e loro Operazioni

Esercizio 3.1 Date le seguenti matrici a coefficienti complessi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 2 & 1+i & -i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -i & 3 & -1-i \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

dire se per ogni coppia $X, Y \in \{A, B, C, D, E\}$ ha senso la matrice XY e, in caso affermativo, calcolarla.
Soluzione Esercizio 3.1 Le matrici per le quali ha senso calcolare il prodotto sono:

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2i \end{pmatrix}, \quad AE = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1-2i \end{pmatrix}, \\
BD &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3i & -1+i \\ -i & 3-1-i & \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \\
DB &= \begin{pmatrix} -1-4i \end{pmatrix}, \quad DE = \begin{pmatrix} 1-2i & -2+i \end{pmatrix} \\
EA &= \begin{pmatrix} -2i & 2-i & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad EC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.2 Date le seguenti matrici a coefficienti complessi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

determinare:

(a) $B + 2C$.

(b) $A - B^T + 4C$.

(c) $A - (4D - B)^T$.

Soluzione Esercizio 3.2

(a) $B + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A - B^T + 4C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

(c) $A - (4D - B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.3 Calcolare e scrivere esplicitamente l'inversa delle seguenti matrici:

(a) $A = E_{23} E_2(i) E_{41}\left(-\frac{1}{2}\right) \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

(b) $B = E_2\left(-\frac{1}{3}\right) E_{13}(1+i) \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

(c) $C = E_2(i)E_{12}(1-i) \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Soluzione Esercizio 3.3

(a) $A^{-1} = E_{41}\left(\frac{1}{2}\right) E_2(-i)E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $B^{-1} = E_{13}(-1-i)E_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $C^{-1} = E_{12}(-1+i)E_2(-i) = \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.4 Considerare la seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare una forma ridotta U di M.

(b) Trovare una matrice E tale che $U = EA$.

(c) Trovare una matrice E' tale che $A = E'U$.

Soluzione Esercizio 3.4

(a) Per trovare una forma ridotta, eseguiamo l'algoritmo EG:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{i})=E_3(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Dato che ogni operazione elementare corrisponde alla pre-moltiplicazione per la matrice elementare corrispondente, possiamo concludere dal procedimento EG che $U = E_3(i)E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})M$. Dunque la matrice E coincide con il prodotto $E_3(i)E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})$.

Per definizione, la matrice $E_{31}(-\frac{1}{2})$ è la matrice ottenuta da I_3 sommando alla terza riga la prima riga moltiplicata per $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{31}(-\frac{1}{2})$$

Il prodotto $E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})$ coincide con la matrice ottenuta da $E_{31}(-\frac{1}{2})$ scambiando la seconda riga con la terza riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})$$

Il prodotto $E_3(i)E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})$ è ottenuta da $E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})$ moltiplicando la terza riga per i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = E_3(i)E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})$$

Concludiamo che $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Notiamo che possiamo invertire il metodo di EG per ottenere M da U:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(i)^{-1}=E_3(\frac{1}{i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}^{-1}=E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{31}(-\frac{1}{2})^{-1}=E_{31}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{pmatrix} = M$$

Quindi $M = E_{31}(\frac{1}{2})E_{23}E_3(\frac{1}{i})U = E_{31}(\frac{1}{2})E_{23}E_3(-i)U$ e la matrice E' coincide con il prodotto $E_{31}(\frac{1}{2})E_{23}E_3(-i)$. Calcoliamo il prodotto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{31}(\frac{1}{2})E_{23}E_3(-i)$$

Concludiamo che $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$.