

探究作业 1: 高斯波包耗散

梁伟德

21215193

2021 年 10 月 15 日

问题如图 1。

图 1: 作业

探究性作业1 (选做)

研究一个没有外场的耗散系统 ($H_{eff} = e^{-\frac{\gamma t}{m}} \frac{p^2}{2m}$)
中的高斯波包如何演化?

提示: 求解如下薛定谔方程 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H_{eff}(t) \psi(t)$,
作时间变量代换 $t \rightarrow t_\gamma = \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma t}{m}})$, 再看 $t \rightarrow \infty$ 时,
波包会否扩散?

对于系统的薛定谔方程有:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H}_{eff} |\psi\rangle \quad (1)$$

对于这种不同时间哈密顿量相互对易的方程，演化算符有简单形式的解：

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, 0) &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{\frac{\gamma t'}{m}} \frac{p^2}{2m}\right\} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} t_\gamma} \\ \text{where } t_\gamma &= \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma t}{m}})\end{aligned}\quad (2)$$

从这里可以看出， $t \rightarrow \infty, t_\gamma \rightarrow \frac{m}{\gamma}$ 。所以在这个近似哈密顿量的描述下，波包永远不会耗散消失，最终只会趋于一个较宽的分布。

已知高斯波包在动量表象下的形式为：

$$\psi(p) = \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{p^2 d^2}{2\hbar^2}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} t_\gamma} |\psi\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} t_\gamma} \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{p^2 d^2}{2\hbar^2}} \\ &= \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}} e^{-p^2 (\frac{it_\gamma}{2m\hbar} + \frac{d^2}{2\hbar^2})}\end{aligned}\quad (4)$$

再将动量波函数做逆傅立叶变换回到坐标波函数：

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx/\hbar} \psi(p) \\ &= \sqrt{\frac{d}{2\sqrt{\pi}}} \sqrt{\frac{2m}{it_\gamma\hbar + md^2}} e^{-\frac{x^2}{4c\hbar^2}}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\text{where } c = \frac{it_\gamma}{2m\hbar} + \frac{d^2}{2\hbar^2} \quad (6)$$