# 探究作业 1:
# 高斯波包耗散

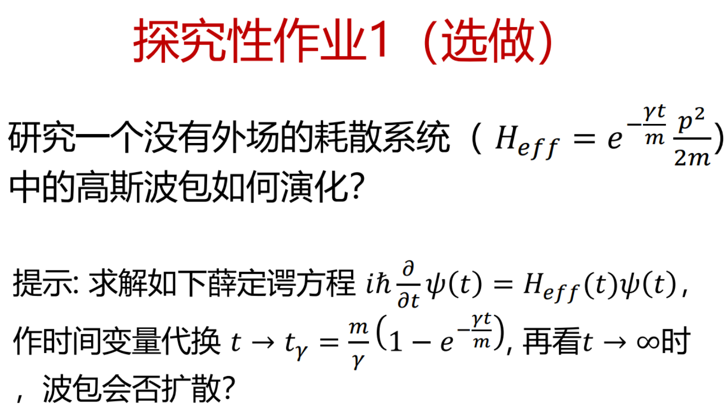
梁伟德

21215193

2021 年 10 月 15 日

问题如图 1。

图 1: 作业




对于系统的薛定谔方程有：

$$i\hbar = \frac{\partial}{\partial}|\Psi\rangle = \hat{H}_{eff}|\psi\rangle \tag{1}$$

对于这种不同时间哈密顿量相互对易的方程，演化算符有简单形式的解：

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(t,0) &= exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' e^{\frac{\gamma t'}{m}} \frac{p^2}{2m}\} \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}t_\gamma} \qquad (2)\\
where \quad t_\gamma &= \frac{m}{\gamma}(1-e^{-\frac{\gamma t}{m}})
\end{aligned}
$$

从这里可以看出，$t \to \infty, t_\gamma \to \frac{m}{\gamma}$。所以在这个近似哈密顿量的描述下，波包永远不会耗散消失，最终只会趋于一个较宽的分布。

已知高斯波包在动量表象下的形式为：

$$
\psi(p) = \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}}\ e^{-\frac{p^2 d^2}{2\hbar^2}} \qquad (3)
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}t_\gamma}|\psi\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}t_\gamma}\sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{p^2 d^2}{2\hbar^2}} \\
&= \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}}\ e^{-p^2(\frac{it_\gamma}{2m\hbar}+\frac{d^2}{2\hbar^2})} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

再将动量波函数做逆傅立叶变换回到坐标波函数：

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\ e^{ipx/\hbar}\ \psi(p) \\
&= \sqrt{\frac{d}{2\sqrt{\pi}}}\sqrt{\frac{2m}{it_\gamma\hbar + md^2}}\ e^{-\frac{x^2}{4c\hbar^2}} \qquad (5)\\
where \qquad c &= \frac{it_\gamma}{2m\hbar}+\frac{d^2}{2\hbar^2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$