Analyse Statistique Univariée et Bivariée

Mastère Data & Intelligence artificielle Chef de projet data et IA

Badmavasan KIROUCHENASSAMY

Sorbonne Université

15, Octobre, 2025

Objet de la statistique descriptive

Objectif

La statistique descriptive sert à décrire une population [**un (gros) ensemble dunités statistiques élémentaires**] à laide dindicateurs numériques ou de techniques graphiques.

Population, Individu

Définition

Lindividu est **lunité** statistique à laquelle on sintéresse.

Définition

La population est **lensemble fini des individus** statistiques que lon s'apprête à décrire.

- Les individus statistiques peuvent être des humains, des êtres vivants (animaux, végétaux), mais aussi des objets (voitures, livres, ...), des entités juridiques (entreprises, départements, pays,...)
- **Exemple** : population composée des livres catalogués à la bibliothèque centrale de lUniversité de Lille.
- **Notation** : On désigne par N le nombre dindividus (distincts) de la population. Ce nombre est appelé taille de la population.

Variable

Définition

Une variable statistique est un moyen de **décrire chacun des individus de la population**. Caractère est synonyme de variable.

- Une même population peut être décrite à laide de plusieurs variables.
- **Exemple** : chacun des livres catalogués à la bibliothèque peut être décrit par son année de publication, la couleur de sa couverture, son nombre de pages, la discipline dont il traite, ses dimensions, son prix à lachat, ...
- **Notation** : On désigne les variables statistiques par des lettres latines majuscules. On parlera des variables X, Y, ...

Modalité ou valeur

Définition

Une **modalité** dune variable est une des façons possibles deffectuer la description dun individu au moyen de cette variable. Valeur est synonyme de modalité.

- On évitera la terminologie ńvaleurż et on lui préfèrera ńmodalitéż car une valeur dune variable statistique nest pas nécessairement une valeur numérique.
- **Exemple** : si on décrit les livres de la bibliothèque à laide de la variable ńcouleur de la couvertureż, une modalité possible est ńbleuż. Si on décrit ces livres à laide du nombre de pages, une modalité possible est 436.

L'ensemble des modalités d'une variable

Définition

L'ensemble des modalités dune variable est l'ensemble des différentes façons possibles de décrire les individus de la population avec la variable.

- **Notation** : Si $\mathbf{X}$ dénote une variable statistique, l'ensemble de ses modalités est noté $\boldsymbol{M}_{\mathbf{X}}$. Un élément typique de cet ensemble est noté x.
- On dit qu'un individu de la population présente la modalité $x \in \boldsymbol{M}_{\mathbf{X}}$ de la variable $\mathbf{X}$ si cet individu est décrit par x au moyen de la variable $\mathbf{X}$.
- **Exemple** : Si on décrit les livres de la bibliothèque par leur dimension (variable $\mathbf{X}$), une modalité $\boldsymbol{x}$ de $\mathbf{X}$ sera un triplet de nombres positifs $\boldsymbol{x} = (x_b, x_l, x_e)$ dont les composantes désignent la hauteur, la largeur et lépaisseur du livre.

La constitution de l’ensemble des modalités

Principe

Il faut apporter un soin particulier à la constitution de cet ensemble. Pour chaque variable servant à décrire la population, l’ensemble de ses modalités doit être constitué de sorte qu’à chaque individu de la population on puisse assigner une modalité et une seule de la variable.

- Cela signifie deux choses :
  1. Il ne doit pas y avoir dindividu dans la population ne présentant aucune modalité de lune des variables.
  2. Il ne doit pas y avoir dindividu dans la population présentant plusieurs modalités dune même variable.
- **Exemple** : Pour la variable ńdiscipline traitéeż, il faut choisir la discipline la plus pertinente pour les livres pouvant appartenir à plusieurs disciplines.

Classification des variables : discrètes

Variables discrètes

Une variable **X** est dite **discrète** si $M_{\mathbf{X}}$ est un ensemble dénombrable.

- **Exemples** : Les livres décrits selon leur nombre de pages ; les livres décrits selon la discipline à laquelle ils sont rattachés.

Classification des variables : continues

Variables continues

Une variable **X** est une variable **continue** si M_X est un ensemble non-dénombrable.

- **Exemple** : Les variables qui décrivent des grandeurs liées au temps, à lespace, à la masse, etc.
- **Propriété** : Si on choisit deux modalités, toutes les valeurs comprises entre ces deux modalités sont aussi des modalités de la variable.

Classification des variables : qualitatives

Variables qualitatives

Une variable est dite **qualitative** si ses modalités ne sont pas quantifiables à l'aide d'une échelle quelconque.

- **Exemple** : Les modalités de la variable ńdiscipline traitéeż.

Classification des variables : quantitatives

Variables quantitatives

Une variable est dite **quantitative** si ses modalités peuvent être considérées comme des quantités exprimées dans une échelle de valeurs.

- **Exemple** : Les modalités de la variable ńnombre de pagesż.

Classification des variables : Variables quantitatives, Variables qualitatives

Comparaison des approches

Le même phénomène (le prix) peut donner deux variables différentes selon la façon dont on définit les modalités :

- **Variable quantitative** : par une valeur numérique (p. ex. 23,50 €).
- **Variable qualitative** : par des catégories (bon marché / cher / très cher).

Classification des variables : Variables quantitatives, Variables qualitatives

Remarque

En pratique, lorsquon est en présence dune variable répondant à la définition dune variable statistique continue, la précision avec laquelle les modalités de cette variable sont relevées rend la variable discrète.

- **Exemple** : Lépaisseur "vraie" est continue, mais linstrument de mesure ne lest pas : il mesure par pas (p. ex. au mm). Toute valeur est donc arrondie au pas de mesure $\rightarrow$ quantification.

Classification des variables : Variable nominale

Définition

On dit que $\mathbf{X}$ est une variable **nominale** s'il n'est pas possible de définir de façon naturelle un ordre sur l'ensemble $\boldsymbol{M}_{\mathbf{X}}$ de ses modalités.

- Pour de telles variables, on pourra toujours sélectionner deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}'$ de $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$ pour lesquels aucune comparaison ayant un sens n'est possible.
- **Exemples** :
  - Pour la variable ń discipline ż servant à décrire les livres de la bibliothèque, il n'y a aucune façon naturelle de comparer ń sociologie ż et ń littérature anglaise ż.
  - Typiquement, toute variable dont les modalités sont formées sur la base d'un système de codage sont des variables nominales : sexe (codage 0,1), catégories socioprofessionnelles (nomenclature de l'INSEE), etc.

Traitements statistiques : Variable nominale

Traitements possibles

Les seuls traitements dont les résultats ont un sens sont ceux qui consistent en des opérations de dénombrement (comptage), ou qui reposent sur de telles opérations.

- On peut donc calculer des effectifs, des fréquences des modalités de la variable et utiliser le mode de la variable.

Traitements statistiques : Variable nominale

Traitements impossibles

L'absence de relation d'ordre implique qu'il est impossible d'utiliser tout outil statistique construit à partir de l'existence d'une relation d'ordre (cumuls, quantiles, ...).

- Les opérations usuelles sur les nombres réels $(+, -, \times)$ ne peuvent pas être définies (par exemple dans le cas des livres décrits selon leur discipline), ou bien produisent des résultats sans signification (par exemple dans le cas des personnes décrites par le numéro minéralogique de leur département de naissance).

Classification des variables : Variable ordinale

Définition

On dit que **X** est une variable **ordinale** si :

1. Il est possible de définir un ordre sur l'ensemble $\mathbf{M_X}$ de ses modalités.
2. Les écarts et les relations de proportionnalité entre modalités de **X** n'ont aucune signification.

- **Exemples** :
  - Notes attribuées à des objets en fonction dun classement.
  - Toute variable mesurant des préférences.

Traitements statistiques : Variable ordinale

Traitements possibles

Il est possible d'utiliser les mêmes outils que pour des variables nominales.

- De plus, les objets statistiques établis à partir d'une relation d'ordre sur l'ensemble des modalités de la variable ont un sens.

Traitements impossibles

On ne peut pas effectuer des traitements qui exploitent autre chose que la relation d'ordre sur l'ensemble des modalités (écarts, ...).

Classification des variables : Variable numérique

Définition

On dit que **X** est une variable **numérique** si :

1. Il est possible de définir un ordre sur l'ensemble $\mathbf{M_X}$ de ses modalités.
2. Les écarts et les relations de proportionnalité entre modalités de **X** ont une interprétation.

- **Exemples** :
  - La variable ń prix d'achat en €ż utilisée pour décrire les livres appartient à l'échelle proportionnelle.
  - De façon générale, toute variable dont les modalités sont exprimées dans une unité de mesure numérique, possédant un zéro traduisant l'absence de phénomène (quantité nulle), est numérique.
  - Les variables dont les modalités sont des nombres réels servant à exprimer des quantités sont donc des variables numériques.

Classification des variables : Variable numérique vs ordinale

Variable numérique (quantitative)

- Prix du livre en euros : 12,90 €, 23,50 €, 41,00 €, ...
- Ce que ça veut dire : chaque valeur est un nombre mesuré. On peut calculer des moyennes, des écarts, des ratios (un livre coûte 2$\times$ plus qu'un autre), etc.

Variable ordinale (qualitative ordonnée)

- Niveau de cherté : bon marché $<$ moyen $<$ cher $<$ très cher.
- Ce que ça veut dire : ce sont des catégories avec un ordre, mais sans échelle métrique. On peut dire qu'un livre est plus cher qu'un autre, mais on ne sait pas de combien.

Effectif

Définition

L'**effectif** d'une modalité x d'une variable X est le nombre d'individus de la population qui présentent cette modalité. On le note généralement n_x.

- **Exemple** : Considérons une bibliothèque de 100 livres décrits par leur discipline :
  - 25 livres en économie, 30 en histoire, 15 en philosophie, 20 en littérature, 10 en sciences.
- **Effectifs** :
  - $n_{\text{économie}} = 25$, $n_{\text{histoire}} = 30$, $n_{\text{philosophie}} = 15$, $n_{\text{littérature}} = 20$, $n_{\text{sciences}} = 10$.

Remarque : La somme des effectifs de toutes les modalités est égale à la taille de la population : $\sum_{x \in \mathbf{M}_X} n_x = N$. Dans l'exemple : $25 + 30 + 15 + 20 + 10 = 100 = N$.

Fréquence

Définition

La **fréquence** d'une modalité x est le rapport entre l'effectif de cette modalité et la taille de la population. On la note f_x et elle est définie par :

$$f_x = \frac{n_x}{N}$$

- **Exemple** : Pour les 100 livres de la bibliothèque :
  - Fréquence de la modalité "économie" : $f_{\text{économie}} = \frac{25}{100} = 0,25$ (ou 25%).
  - Fréquence de la modalité "histoire" : $f_{\text{histoire}} = \frac{30}{100} = 0,30$ (ou 30%).

Fréquence

Interprétation

- L'**effectif** n_k mesure l'importance **absolue** de la sous-population présentant la modalité x_k.
- La **fréquence** f_k mesure cette importance **relativement** à la taille N de la population, et est donc indépendante de N.

On appelle **distribution statistique** de la variable X dans la population P la donnée des K couples (x_k, f_k), pour $k = 1, \ldots, K$.

- Ces couples indiquent avec quelle importance chacune des modalités de X est représentée au sein de la population.
- La distribution statistique constitue le point de départ de toute analyse statistique.

Fréquence

Remarque

La somme des fréquences de toutes les modalités est égale à 1 (ou 100%) :

$$\sum_{x \in \mathbf{M}_X} f_x = 1$$

Effectif cumulé croissant : Définition

Définition formelle

On appelle **effectif cumulé croissant** de (ou associé à) la modalité x_k d'une variable X ordonnée le nombre noté N_k et défini par :

$$N_k = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

où :

- n_j est l'effectif de la modalité x_j,
- $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq \ldots \leq x_K$ (modalités ordonnées).

Effectif cumulé croissant

Interprétation

N_k représente le nombre total d'individus de la population présentant une modalité **inférieure ou égale** à x_k.

Exemple introductif

Pour une variable X = "Note sur 20" avec modalités ordonnées $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 14$:

- Si $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 3$,
- alors $N_1 = 2$, $N_2 = 2 + 5 = 7$, $N_3 = 7 + 3 = 10$.

Effectif cumulé croissant : Propriétés et remarques

Propriétés mathématiques

- **Croissance** : $N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq N_K$
- **Égalité finale** : $N_K = N$ (taille totale de la population)
- **Relation avec les fréquences** : $F_k = \frac{N_k}{N}$ (fréquence cumulée)

Remarques importantes :

- Applicable uniquement aux variables **ordinales ou numériques** (modalités ordonnables)
- Permet de calculer des **quantiles** (médiane, quartiles, etc.)
- Base pour construire des **courbes cumulatives** et **diagrammes de Pareto**
- Indépendant des valeurs absolues des effectifs (contrairement aux n_k)

Attention

Pour les variables **qualitatives nominales** (non ordonnables), la notion d'effectif cumulé n'a **aucun sens**.

Représentations graphiques des distributions statistiques

Objectif des graphiques

Les graphiques usuels représentent la répartition des modalités d'une variable X au sein d'une population P en associant à chaque modalité un élément graphique dont la taille (longueur, hauteur, surface, etc.) est proportionnelle à son importance dans la population.

- **Principe des tailles absolues** :
  - À chaque modalité x_k, on associe un élément graphique dont la taille est **égale à l'effectif n_k ou à la fréquence f_k** de la modalité
  - La taille totale du graphique dépend de la taille N de la population
  - **Exemple** : Diagrammes en bâtons
  - **Caractéristique** : La hauteur de chaque bâton est proportionnelle à n_k ou f_k

Représentations graphiques des distributions statistiques

- **Principe de normalisation** :
  - La taille **totale** du graphique est normalisée à 1 unité (100%)
  - À chaque modalité x_k, on associe un élément dont la taille est **égale à la fréquence** f_k
  - **Exemples** :
    - Diagrammes en secteurs (camembert) : chaque secteur a un angle de $360^\circ \times f_k$
    - Histogrammes : la surface totale des rectangles = 1
- **Remarques importantes** :
  - Le principe (a) est adapté quand on veut visualiser les **effectifs réels**
  - Le principe (b) permet des **comparaisons entre populations** de tailles différentes
  - Pour les histogrammes, c'est la **surface** des rectangles qui représente f_k, pas seulement la hauteur

Diagramme en secteurs : Principes de construction

Principe de normalisation de la surface

Le graphique consiste en un disque dont la surface est normalisée à 1 unité de surface. Ce disque est divisé en plusieurs secteurs (parts), chacun étant associé à une et seule modalité de la variable X.

- La proportion de la surface totale du disque occupée par le secteur associé à la modalité x_k est égale à f_k.

Principe de normalisation du périmètre

Au lieu de normaliser la surface du disque à 1, on peut normaliser son périmètre à 1 unité de longueur.

- Dans ce cas, la longueur de l'arc de cercle décrit par un secteur associé à une modalité x_k constitue une proportion du périmètre égale à f_k.

Diagrammes en bâtons : Principes de construction

Principe de construction

Les diagrammes en bâtons consistent en des représentations des couples (x_k, f_k) (ou (x_k, n_k)), $k = 1, \ldots, K$, où pour chaque modalité repérée sur l'axe horizontal, on représente la fréquence (ou l'effectif) par un bâton, dont la hauteur repérée sur l'axe vertical est égale à la valeur de la fréquence (ou de l'effectif).

Diagrammes en bâtons : Principes de construction

Variable nominale

L'ordre dans lequel on place ses modalités le long de l'axe horizontal n'a aucune importance. On peut alors choisir par exemple l'ordre croissant ou décroissant des fréquences.

Variable ordinale ou numérique

Il existe un ordre sur les modalités et on suppose alors que $x_1 < x_2 < \ldots < x_K$. Cet ordre doit être utilisé pour représenter les modalités sur l'axe horizontal. Ainsi, de gauche à droite sur l'axe horizontal, on placera d'abord x_1, puis x_2, etc., puis x_K.

Histogramme : Définition et principes

Utilisation de l'histogramme

L'histogramme des fréquences ne s'utilise que pour une variable numérique. Ce type de représentation n'a d'intérêt que si les modalités de la variable ont été regroupées par classes. De plus, la situation dans laquelle l'histogramme présente un intérêt particulier par rapport au diagramme en bâtons est celle où les classes sont d'amplitudes inégales.

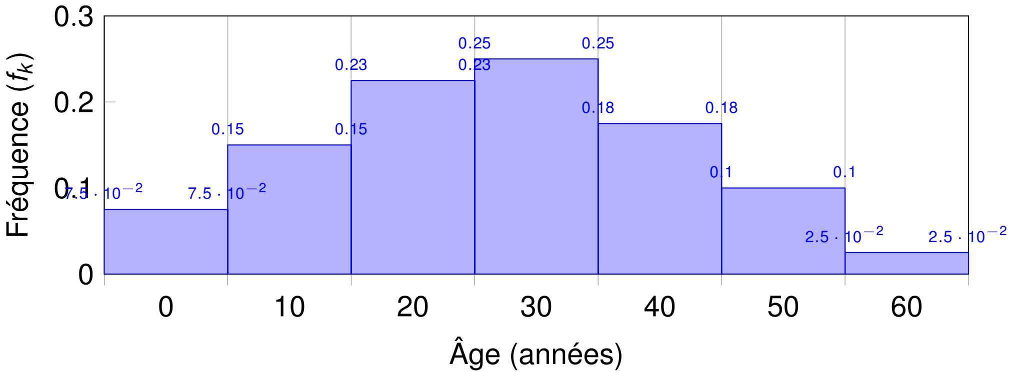
Principe de construction

Le principe de l'histogramme consiste à normaliser la surface totale du graphique à 1 unité. Cette surface est découpée en rectangles. Chaque rectangle est associé à une classe de modalités de sorte que le rectangle associé à la classe C_k représente une proportion de la surface totale égale à la fréquence f_k de C_k.

Histogramme : Exemple et interprétation

Classe d'âge (années)	Effectif (n_k)	Fréquence (f_k)
[0-10[	15	0.075
[10-20[	30	0.15
[20-30[	45	0.225
[30-40[	50	0.25
[40-50[	35	0.175
[50-60[	20	0.10
[60-70]	5	0.025

Histogramme : Exemple et interprétation



Histogramme : Exemple et interprétation

Interprétation de l'histogramme

- **Forme générale** : Distribution unimodale avec un pic autour de 30-40 ans
- **Classe modale** : $[30 - 40[$ (25% de la population)
- **Concentration** : 65% de la population a entre 20 et 50 ans
- **Classes extrêmes** :
  - $[0 - 10[$ et $[60 - 70]$ représentent seulement 10% de la population
  - Sous-représentation des très jeunes et seniors
- **Amplitudes inégales** : Bien que les classes aient ici la même amplitude (10 ans), l'histogramme montre clairement que :
  - La surface du rectangle [30-40[est la plus grande (25%)
  - Les surfaces sont proportionnelles aux fréquences

Généralités sur la description numérique univariée

1. Contexte de la description numérique

Dans un contexte univarié, la description numérique des données consiste à résumer à l'aide de modalités d'une variable X certaines des caractéristiques de la population décrite par X (ou encore de la distribution statistique de X, telle que définie à la section 4.2).

2. Utilisation des indicateurs

Ces descriptions sont obtenues à l'aide d'indicateurs. Chacun de ces indicateurs est construit de façon à pouvoir capturer et résumer une et une seule des caractéristiques de la distribution de X. Par conséquent, si on s'intéresse à plusieurs des propriétés de cette distribution, on est amené à utiliser simultanément plusieurs indicateurs.

Généralités sur la description numérique univariée

3. Spécificité des indicateurs

En revanche, pour décrire l'une des caractéristiques d'une distribution, on peut utiliser plusieurs indicateurs. Chacun aura des propriétés propres qui constitueront des avantages ou des inconvénients par rapport aux autres. Quelles que soient ces propriétés, tout indicateur doit être construit de façon à effectivement capturer la caractéristique souhaitée. Un indicateur ne peut donc s'utiliser de façon interchangeable pour capturer plusieurs caractéristiques possibles.

Indicateurs de position

Tendance Centrale

Les indicateurs de position ou indicateurs de tendance centrale permettent de résumer par une seule modalité la valeur de toutes les modalités observées de X. Ils sont construits pour pouvoir décrire l'endroit de l'ensemble des modalités de X autour duquel se positionnent les données $X(1), \ldots, X(N)$. De façon générale, cet endroit est appelé tendance centrale.
Les indicateurs de position les plus couramment utilisés sont le mode, la médiane et la moyenne.

Le mode

Définition

Le mode de la variable X est la modalité la plus fréquemment observée dans la population P. On note $\mathrm{Mo}(X)$ le mode de X.

Interprétation

Cet indicateur mesure la position des données en utilisant un principe de représentation (relativement) majoritaire : la position des données est décrite par la modalité la plus souvent observée.

La médiane

La médiane d'une variable X est un indicateur déterminé à partir d'un classement des individus selon un critère d'ordre des modalités de X. Ceci n'est évidemment possible que s'il existe un ordre sur $\mathcal{M}_X$. Par conséquent la médiane est un indicateur qui ne s'utilise que pour des variables ordinales ou numériques.

Définitions

Soit X une variable statistique et soit i un individu de la population. Le rang de i, noté $R(i)$, est sa position dans un classement des individus de la population par ordre croissant des modalités de X.

Définitions de la médiane

Définition

L'individu médian est un individu désigné par i_{Me} tel que $R(i_{\text{Me}}) = \lceil \frac{N}{2} \rceil$, où pour tout nombre réel y, $\lceil y \rceil$ désigne le plus petit nombre entier supérieur ou égal à y.[1]
Ainsi on a :

- $R(i_{\text{Me}}) = \frac{N+1}{2}$ si N est impair ;
- $R(i_{\text{Me}}) = \frac{N}{2}$ si N est pair.

On déduit immédiatement de la définition que :

a) $\frac{N-1}{2}$ individus précèdent i_{Me} et $\frac{N-1}{2}$ suivent i_{Me}, si N est impair ;
b) $\frac{N}{2} - 1$ individus précèdent i_{Me} et $\frac{N}{2}$ individus suivent i_{Me} si N est pair.

Définitions de la médiane

Définition

La médiane de X, que l'on note $\mathrm{Me}(X)$, est la modalité de X présentée par l'individu médian : $\mathrm{Me}(X) = X(i_{\mathrm{Me}})$.

Cas particulier pour N pair

Lorsque N est pair, la médiane de X est assez souvent définie comme le milieu de l'intervalle qui sépare les modalités des individus de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$. Ce milieu est obtenu en faisant la moyenne de ces deux modalités.

La moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est un indicateur de position qui est déterminée sur la base d'une répartition égalitaire.

Définition

La moyenne arithmétique (moyenne par la suite) de la variable X est le nombre noté $\overline{X}$ et défini par

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X(i).$$

La moyenne, pour pouvoir être interprétée comme un indicateur de position, requiert de pouvoir additionner plusieurs modalités de la variable X. La moyenne ne s'utilise donc que pour des variables numériques.

Comparaison : Mode, Médiane et Moyenne

Interprétations

- **Mode** : Valeur la plus fréquente
- **Médiane** : Valeur centrale (50% des données de chaque côté)
- **Moyenne** : Répartition égalitaire (somme des valeurs divisée par N)

	Mode	**Médiane**	**Moyenne**
Type de variable	Toutes	Ordinale/Numérique	Numérique
Sensibilité aux valeurs extrêmes	Non	Non	Oui
Unicité	Non	Oui	Oui
Existence	Toujours	Toujours	Toujours

Comparaison : Mode, Médiane et Moyenne

Exemple numérique

Pour les données : 1, 2, 2, 3, 4, 7, 9

- **Mode** = 2 (valeur la plus fréquente)
- **Médiane** = 3 (4ème valeur sur 7)
- **Moyenne** = $\frac{1+2+2+3+4+7+9}{7} = 4$

Limites des indicateurs de position et nécessité des indicateurs de dispersion

- Les indicateurs de position étudiés dans la section précédente servent à désigner l'endroit de la distribution de X autour duquel se positionnent les modalités observées de X.
- Utilisé séparément des autres, aucun ne fournit de renseignement sur la façon dont les modalités se positionnent autour de cet endroit.
- Des caractéristiques intéressantes de la distribution de X sont :
  1. la plus ou moins grande dispersion des modalités observées dans leur ensemble ;
  2. la plus ou moins grande dispersion des modalités dans leur regroupement autour d'une tendance centrale.

L'étendue

Définition

On appelle étendue de (la distribution de) la variable X le nombre noté $\mathrm{ETD}(X)$ et défini par

$$\mathrm{ETD}(X) = X_M - X_m$$

avec

$$X_M = \max\{X(i), i \in P\},$$

$$X_m = \min\{X(i), i \in P\}.$$

Interprétation

L'étendue mesure la dispersion de la distribution de X par la distance maximale qu'on observe entre deux modalités de X. Plus l'étendue est grande, plus la dispersion est grande.

L'écart absolu moyen

Définition

Pour une variable statistique X, l'écart absolu moyen (EAM) est la quantité définie par

$$\mathrm{EAM}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |X(i) - \overline{X}|.$$

Interprétation

Pour chaque $i \in P$, $|X(i) - \overline{X}|$ est la distance usuelle entre $X(i)$ et $\overline{X}$. L'EAM de X s'obtient directement comme la moyenne de ces distances.
L'EAM de X est donc la moyenne des distances entre les modalités observées de X et leur moyenne. Plus $\mathrm{EAM}(X)$ est élevé, plus cette dispersion est grande.

La variance

Définition 6.15

Pour une variable statistique X, la variance est la quantité définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(i) - \overline{X})^2.$$

Propriétés

- La variance mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne
- Toujours positive ou nulle : $\mathrm{Var}(X) \geq 0$
- Unité : carré de l'unité de mesure de X
- Sensible aux valeurs extrêmes

La variance

Interprétation

La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Plus $\text{Var}(X)$ est élevée, plus les valeurs de X sont dispersées autour de $\overline{X}$.

Formule alternative

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X(i)^2 - \overline{X}^2$$

L'écart-type

Définition 6.16

Pour une variable statistique X, l'écart-type est la quantité définie par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(i) - \overline{X})^2}.$$

Propriétés

- Mesure la dispersion dans les mêmes unités que X
- Toujours positif ou nul : $\sigma(X) \geq 0$
- Moins sensible aux valeurs extrêmes que la variance
- Permet de comparer la dispersion de variables de même unité

L’écart-type

Interprétation

L’écart-type représente la dispersion "moyenne" des valeurs autour de la moyenne. Plus $\sigma(X)$ est élevé, plus les valeurs de X sont dispersées autour de $\overline{X}$.

- Si $\sigma(X) = 0$: toutes les valeurs sont identiques
- Si $\sigma(X)$ est petit : les valeurs sont proches de la moyenne
- Si $\sigma(X)$ est grand : les valeurs sont très dispersées

Relation avec la variance

L’écart-type est simplement la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

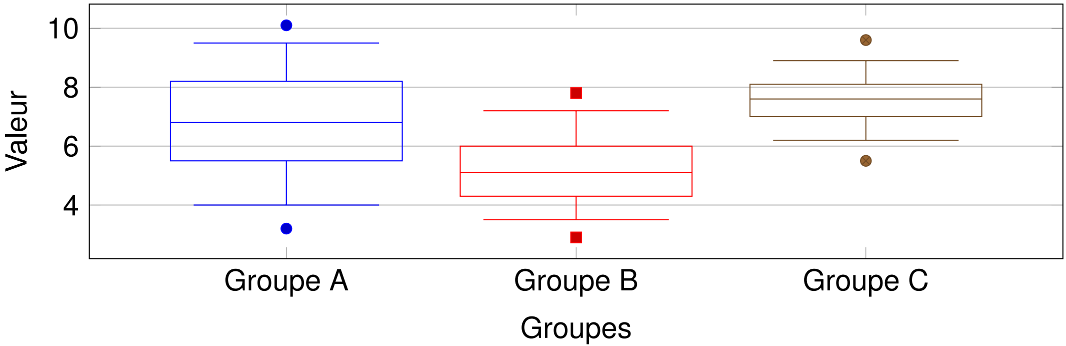
Diagramme en boîte (boîte à moustaches)

Définition

Représentation graphique dune **variable quantitative** résumant sa distribution à laide des **quartiles** et des **valeurs extrêmes non aberrantes**.

- **Boîte** : sétend de Q_1 à Q_3 (lintervalle interquartile $IQR = Q_3 - Q_1$).
- **Trait médian** : la médiane $\tilde{x}$ au sein de la boîte.
- **Moustaches** : vont jusquaux plus petites/grandes valeurs situées dans $[\,Q_1 - 1.5\,IQR,\ Q_3 + 1.5\,IQR\,]$ (valeurs non aberrantes).
- **Valeurs aberrantes** : points au-delà des moustaches ($< Q_1 - 1.5\,IQR$ ou $> Q_3 + 1.5\,IQR$).
- **Lecture** :
  - $\tilde{x}$ proche du centre de la boîte $\Rightarrow$ distribution plutôt *symétrique*.
  - Boîte/moustache plus longues dun côté $\Rightarrow$ *asymétrie* (queue plus étendue).
  - Permet la **comparaison** rapide de plusieurs groupes côte à côte.

Exemple : diagrammes en boîte (trois groupes)



Les boîtes vont de Q_1 à Q_3 (IQR), le trait central est la médiane ; les moustaches sétendent jusquaux valeurs non aberrantes. Les points en-dehors sont les valeurs aberrantes.