Equation aux dérivées partielles
Rapport

Habibi Issam
Sajid Badr

Département HPC-BigData - Deuxième année
Avril 2021

1 Patie théorique

Question 1 :

Soit u $\in H^1(\Omega)$ et soit w $\in H_0^1(\Omega)$:

$-\Delta u w = f w \Rightarrow \int_\Omega \Delta u w \, dx = \int_\Omega f w \, dx$

Par la formule de Green : $\int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(w)\gamma_1(u) \, d\gamma = \int_\Omega f w \, dx$

$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_d} \gamma_0(w)\gamma_1(u) \, dx\gamma - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w)\gamma_1(u) \, dx\gamma = \int_\Omega f w \, dx$

$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g \, dx\gamma = \int_\Omega f w \, dx$ (car $\gamma_0(w) = 0$ sur $\partial\Omega_d$ et $\gamma_1(u) = g$ sur $\partial\Omega_n$)

On pose $v = u - u_d$ où $v \in H_0^1(\Omega)$ ($u = v + u_d$) :

$\Rightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx + \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g \, d\gamma = \int_\Omega f w \, dx$

$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, d\gamma - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx}$

Question 2 :

On définit

$$\begin{array}{rcl} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \Re \\ (v, w) & \longrightarrow & \displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} l : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \Re \\ w & \longrightarrow & \displaystyle\int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, d\gamma - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx \end{array}$$

Le problème se met alors sous la forme : trouver w $\in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout v $\in H_0^1(\Omega)$ on a : $a(v, w) = l(w)$

Or :

- $(H_0^1(\Omega), <, >_{1,\Omega})$ est un Hilbert.
- a est bilinéaire par bilinéarité du produit scalaire car $a(v, w) =< v, w >_{1,\Omega}$
- a est continue car $\mid a(v, w) \mid = \mid < v, w > \mid_{1,\Omega} \leq \mid v \mid_{1,\Omega} \mid w \mid_{1,\Omega}$ (Par Cauchy-Schwarz).
- a est coercive car $a(v, v) =< v, v >_{1,\Omega} = \mid v \mid_{1,\Omega}{}^2$
- l est linéaire par linéarité des intégrales et de l'opérateur gradient.

— l continue :
$| \; l(w) \; |=| < f, w >_{L^2(\partial\Omega)} + < g, \gamma_0(w) >_{L^2(\partial\Omega)} + < u_d, w >_{1,\Omega} |$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$| \; l(w) \; | \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} + | \; u_d \; |_{1,\Omega} | \; w \; |_{1,\Omega}$
Ω est un ouver fermé donc par Poincarré : $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \mid w \mid_{1,\Omega}$ (C_Ω>0)
γ_0 est continue donc $\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq M_{\gamma_0} \mid w \mid_{1,\Omega}$ ($M_{\gamma 0}$>0)
donc $| \; l(w) \; | \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + M_{\gamma_0}) \mid w \mid_{1,\Omega}$ d'où la continuité de l.

Selon le théorème de Lax-Milgram :

$$\exists! v \in H_0^1(\Omega), \forall w \in H_0^1(\Omega) : a(v, w) = l(w)$$

Et puisque $u = v + u_d$ alors on retrouve une solution unique u du problème grâce à v et u$_d$.

Question 3

On considère V_h un sous espace vectoriel de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$. Soit n le nombre de degrés de libertés ($n = dim(V_h)$) et η_k les fonctions de base des éléments finis ($(\eta_1, ..., \eta_n)$ est une base de V_h). La forme variationnelle discrète du système devient :

$$\text{Trouver } v_h \in V_h \text{ tel que } \forall w_h \in V_h : a(v_h, w_h) = l(v_h)$$

Or, $\forall v_h \in V_h, \exists!(x_i)_{i\in[1,n]} \in \Re^n$ tel que $v_h = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$.

Donc : v_h solution de $P_{FVh} \Rightarrow \forall w_h \in V_h : a(v_h, w_h) = l(w_h)$

$\Rightarrow \forall i \in [1, n] : a(v_h, \eta_i) = l(\eta_i)$.

$\Rightarrow \forall i \in [1, n] : a(\sum_{j=1}^n x_j \eta_j, \eta_i) = l(\eta_i)$

$\Rightarrow \forall i \in [1, n] : \sum_{j=1}^n x_j a(\eta_j, \eta_i) = l(\eta_i)$

$\Rightarrow$Ax=b

où

— $A \in M_n(\Re)$ tel que $\forall i, j \in [1, n]^2 : A_{ij} = a(\eta_j, \eta_i)$
— $b \in \Re^n : \forall i \in [1, n] : b_i = l(\eta_i)$
— $x = (x_i)_{i\in[1,n]} \in \Re^n$

Or :

— $A_{ij} = a(\eta_j, \eta_i) = \int_\Omega \nabla\eta_i \nabla\eta_j \, dx$

— $b_i = l(\eta_i) = \int_\Omega f\eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_i) \, dx\gamma - \int_\Omega \nabla u_d \nabla\eta_i \, dx$

avec $u_d = \sum_{k=1}^n U_k\eta_k$ donc $\int_\Omega \nabla u_d \nabla n_i \, dx = \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla\eta_k \nabla\eta_i \, dx$
et sur la frontière $\partial\Omega_n$: $\gamma_0(\eta_i) = \eta_i$ donc :

$b_i = \int_\Omega f\eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla\eta_k \nabla\eta_i \, dx$

l'existence et l'unicité de la solution discrète de ce système :

Soit $x \in \Re^n$ un vecteur non nul, on a :

$x^T Ax = \sum_{i,j \in [1,n]^2} A_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j \in [1,n]^2} a(\eta_i, \eta_j) x_i x_j = a(\sum_{j=1}^n x_j\eta_j, \sum_{i=1}^n x_i\eta_i)$

donc $x^T Ax = a(x*, x*) \geq \mid x* \mid_{1,\Omega}{}^2$ (coercivité de a) .

si $\mid x* \mid_{1,\Omega}{}^2$ alors $x* = 0$ alors $\forall i \in [1, n] : x_i = 0$ donc $x = 0$.

D'où $x^T Ax > 0$ donc A est définie positive et le système admet une unique solution.

Question 4 :

Soit M_Q^A la matrice de raideu élémentaire relative au quadrilataire Q, On a :

$M_{ij} = \int_Q \nabla\eta_i \nabla\eta_j = \int_0^1 \int_0^1 \nabla\phi_i^T (J_\phi J_\phi^T)^{-1} \nabla\phi_j dxdy$

avec $(J_\phi J_\phi^T)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

en utilisant le fait que la matrice M_Q^A est symétrique, il nous suffit de calculer les termes de la partie triangulaire supérieure et les termes diagonaux :

$M_{11} = |J_\phi|(\frac{a}{3} + \frac{c}{3} + \frac{b}{4})$

$M_{22} = |J_\phi|(\frac{a}{3} + \frac{c}{3} - \frac{b}{4})$

$M_{33} = |J_\phi|(\frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{c}{3})$

$M_{44} = |J_\phi|(\frac{a}{3} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3})$

$M_{12} = |J_\phi|(\frac{c}{6} - \frac{a}{3})$

$M_{13} = |J_\phi|(-\frac{a}{6} - \frac{c}{6} - \frac{b}{2})$

$M_{14} = |J_\phi|(\frac{a}{6} - \frac{c}{3})$

$M_{23} = |J_\phi|(\frac{a}{6} - \frac{c}{3})$

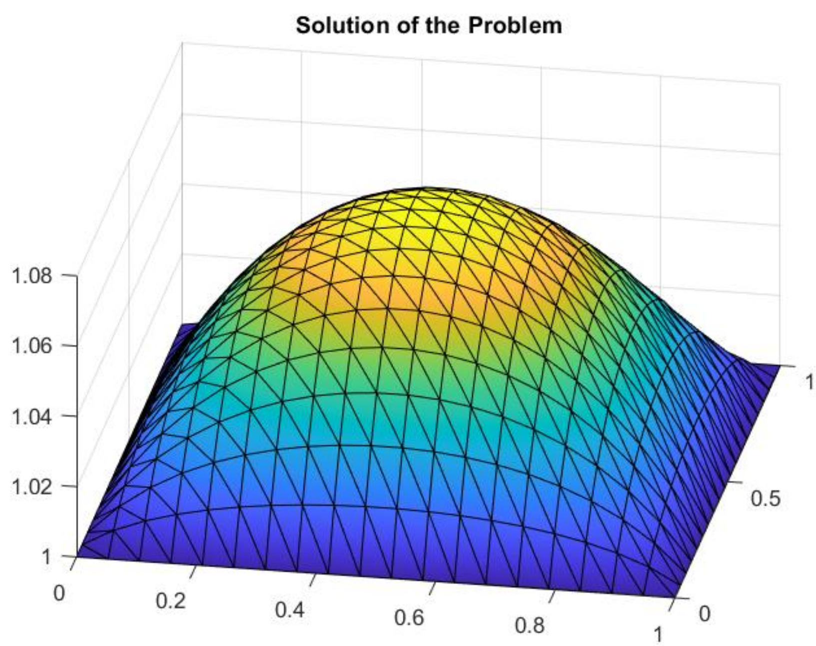
$M_{24} = |J_\phi|(\frac{b}{2} - \frac{a}{6} - \frac{c}{6})$

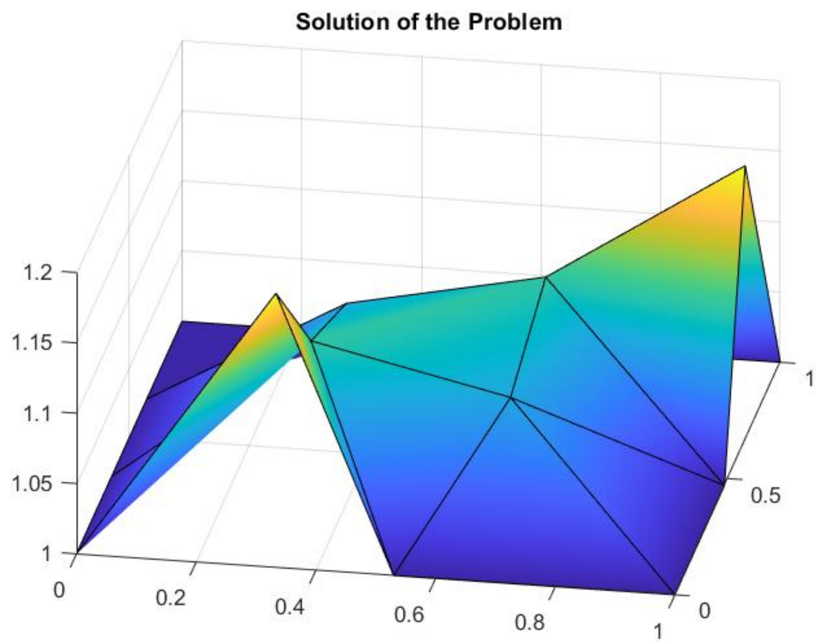
$M_{34} = |J_\phi|(\frac{c}{6} - \frac{a}{3})$

Il vient que :

$$M_Q^A = \frac{|J_\phi|}{6}\begin{pmatrix} 2a+3b+2c & -2a+c & -a-3b-c & a-2c \\ -2a+c & 2a-3b+2c & a-2c & -a+3b-c \\ -a-3b-c & a-2c & 2a+3b+2c & -2a+c \\ a-2c & -a+3b-c & -2a+c & 2a-3b+2c \end{pmatrix}$$

La solution dans le premier et le deuxième cas avec u_d la fonction constante égale à 1 :

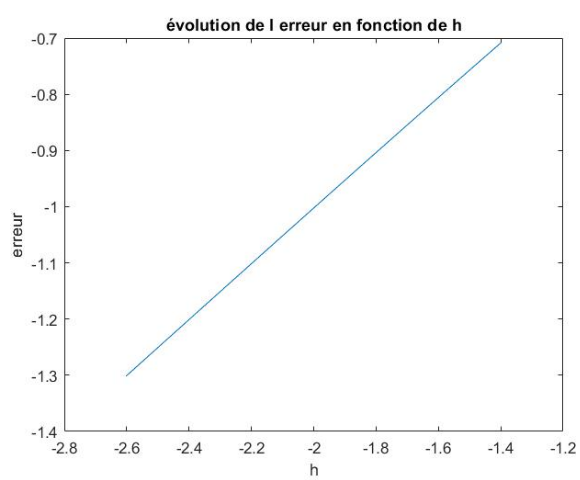




2 Compléments d'analyse du systèeme issu de la discrétisation

Ordre de discrétisation

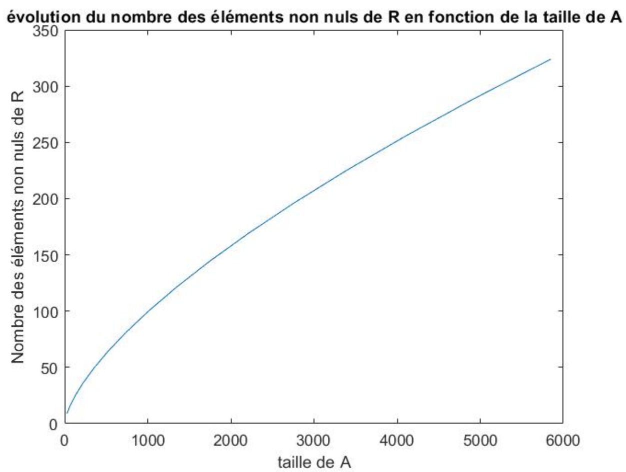
En traçant en loi log-log l'évolution de l'erreur en fonction de h on trouve :



On obtient donc un **ordre de discrétisation linéaire** vu la forme de la courbe.

Résolution du système linéaire par une méthode directe

En traçant l'évolution du nombre d'éléments non nuls de R en fonction du taille de la matrice A on trouve :



Il paraît donc qu'on obtient une croissance du nombre des éléments non nuls en augmentant le nombre d'éléments du maillage. Cependant, ceci montre aussi une croissance très remarquable des éléments nuls de R ce qui rend A une **matrice creuse**.

La solution est d'appliquer donc au début une **rénumérotation** (permuter des lignes et des colonnes pour minimiser le remplissage) et une factorisation **symbolique** de Cholesky avec un stockage compact . On définit alors un graphe G qui admet comme sommets $X = 1, ..., n$ et comme arcs $G = ((i,j) \in X^2 | i > j A_{ij} \neq 0)$. Le degré d'un somme s de ce graphe est égale donc au nombre des coefficients non nuls de la colonne s sous la diagonale de la matrice A .Vu que l'algorithme de Cholesky se base sur l'élimination des inconnus, ceci se traduit sur le graphe par la construction d'un arbre d'élimination définissant la structure creuse de R. On pourra donc définir des algorithmes spécifiques (comme l'algorithm du degré minimal, l'algorithme des dissections emboîtées..etc) qui optimisent le stockage.

Sur Matlab, On pourra initialiser la matrice A avec la fonction **sparse(n,n)** qui prend en compte le fait que A est une matrice creuse pour réduire le coût mémoire de la factorisation en stockant seulement les valeurs non nulles.