Cette UE est divisée en deux parties :
— Graphes,
— ~~Systèmes cyberphysiques~~. Automates

La partie *Graphes* est composée de 5 CTDs, un TP de révision CaML 5 TPs et vous serez évalués sur 1 Examen (2/3 de la note) et un projet (1/3 de la note). → janvier

Il est rappelé qu'un taux supérieur ou égal à 30% d'absence dans un module n'autorise pas à passer le rattrapage.

CTD1 : Définitions et Concepts de base

1 Graphes non orientés

▷ **Support étudiant**

Définition : Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex/vertices*)

$$V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$$

et d'un ensemble fini d'arêtes

$$E = \{e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}\}.$$

Chaque arête e est définie par un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ appelés **extrémités** de e.

Vocabulaire
— Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n.
— Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.)
— Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
— Deux arêtes sont **adjacentes** ssi elles ont un sommet commun.

Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$. ✓
2. $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$. ✗ 4, 3, 5 ne font pas partie des sommets
3. $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. ✓
   ↳ boucle mais c'est toléré
4. $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}\}$. ✓
   Stricto sensu E est un ensemble donc ne change rien.
   Si on considère la répétition comme volontaire, c'est un multigraphe

Définition
- $e = \{v_i, v_i\}$ est une **boucle** ;
- un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux noeuds est appelé **multigraphe** ;
- un graphe est dit **simple** si
  - il n'a pas de boucle,
  - il a au plus une arête entre deux sommets.

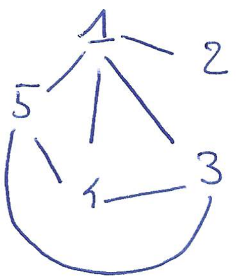
Dans la suite, nous considérons presque toujours des graphes simples (sinon, on le signale !).

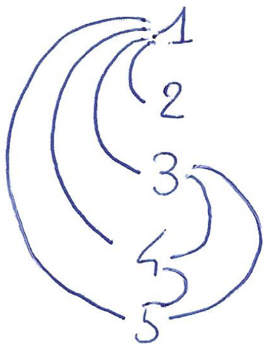
2 Représentation graphique

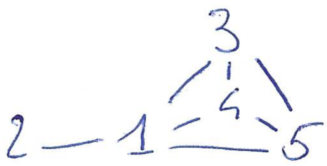
▷ Support étudiant

Il existe une infinité de manières de représenter graphiquement un graphe, c'est à dire de dessiner un graphe dans le plan.

Exemple $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$.
Dessinez ce graphe de plusieurs façons différentes.







Définition Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

Définition Un graphe simple est dit **complet** si tout sommet est adjacent à tout autre.

▷ **Exercice 1** *Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple complet d'ordre n a* $\frac{n(n-1)}{2}$ *arêtes.*

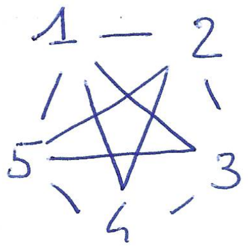
Il y a $\binom{n}{2}$ possibilités soit $\frac{n(n-1)}{2}$

On a n choix pour choisir le premier sommet et n-1 pour le deuxième.

On divise par 2 par comme c'est un graphe non orienté (i, j) et (j, i) représentent la même arrête.

Notation Le graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.

▷ **Exercice 2** *Dessiner K_5.*



Propriété : lemme des poignées de main La somme des degrés de tous les sommets vaut le double du nombre d'arêtes.

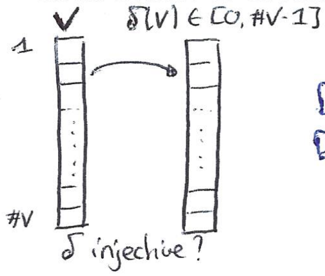
Comme une arrête compte pour 2, elle va compter pour deux dans le nombre total de tous les sommets.

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \# E$$

Conséquence Le nombre de sommets de degré impair est pair. *à justifier.*

Par l'absurde, s'il existait un nombre impair de sommets de degré impair, on aurait une somme des degrés impaires. Or on vient de montrer que cette somme était paire. Donc le nombre de sommets de degré impair est pair.

▷ **Exercice 3** *Montrer que s'il y a n personnes dans une salle avec $n > 1$, au moins 2 d'entre elles ont le même nombre de connaissances dans la salle.*



On ne peut pas avoir à la fois $v_1, v_2 \in V$ ~~tq~~ $v_1 \neq v_2$ tq $\delta(v_1) = 0$ et $\delta(v_2) = \#V-1$

Donc l'image de δ est de cardinal $< \#V$

Donc δ n'est pas injective ie $\exists v_1, v_2$ tq $\delta(v_1) = \delta(v_2)$

Définition Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets sont de même degré. Si ce degré est k, on dit que G est k-**régulier**.

3 Graphes orientés

Définition Un graphe $G = (V, E)$ est dit **orienté** si chaque arête est une paire de sommets (donc ordonnée), $e \in E, e = (i, j)$. On appelle les éléments de E des arcs.

Vocabulaire

— i est appelé l'**origine** de $e = (i, j)$;

— j est appelée l'**arrivée** de e.

— Pour un sommet v, le **degré sortant** $\delta^+(v)$ est le nombres d'arcs d'origine v ;

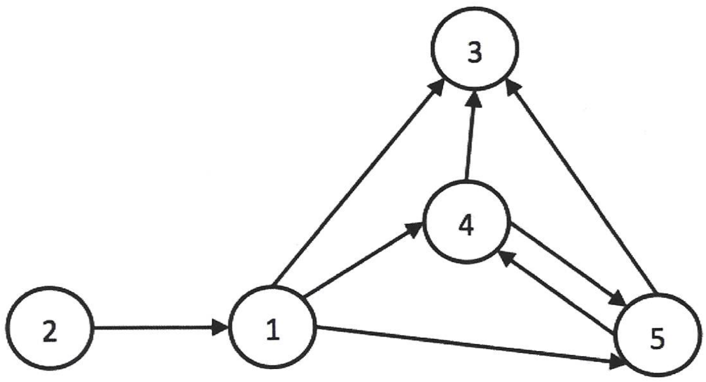
— le **degré entrant** $\delta^-(v)$ est le nombre d'arcs d'~~origine~~ arrivée v ;

— le **degré total** $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

— On a aussi $\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v)$ une arrête a tjrs une entrée et une sortie.

Remarque on a toujours $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#E$.

Exemple



4 Utilisation de graphes dans la vie courante

▷ **Exercice 4** *Donner des exemples de problèmes que l'on peut modéliser par un graphe.*

- Métro
- Réseaux (internet, neurones ...)
- Route
- Réseaux des petits mondes
- Maillage 3D
- Problème du voyageur de commerce
- Problème de plus court chemin.

5 Sous-graphes, graphes partiels, cliques

▷ **Support étudiant**

Définition Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes de midi pyrénées est un sous-graphe.

Définition Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.
↳ on garde le même nombre de sommets mais on garde les arrêtes.

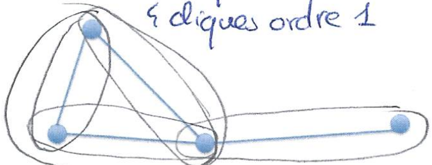
Exemple Si G est le graphe des routes de France, donner un exemple de graphe partiel.

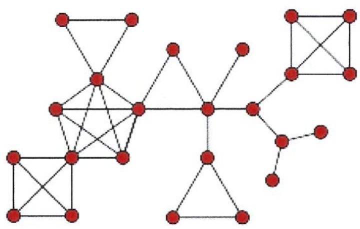
Les autoroutes de France

Définition Une **clique** est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.

Exemple Ces graphes contiennent-ils des cliques ?

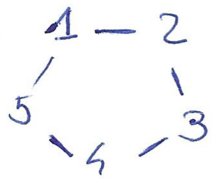
1 clique ordre 3
4 cliques ordre 2
4 cliques ordre 1





(image de droite : source Wikipedia)

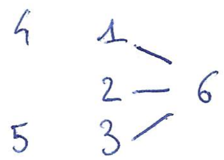
▷ **Exercice 5** *Montrez que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).*
Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.



Pour un graphe à 5 personnes on en a 3 qui ne se connaissent pas mutuellement mais il n'existe pas 3 personnes qui ne se connaissent pas du tout

0,5
1,4
2,3
3,2
4,1
5,0

Soit 6 est relié à au moins 3 personnes
Soit 6 n'est pas relié à au moins 3 personnes.
Par symétrie on ne considère que la 1ère possibilité.



+ Soit 1,2,3 ne sont pas reliés → prop vraie
+ Soit 1 est reliée à 2 (par exemple) on a alors un triangle 1,2,6 qui se connaissent → propriété vraie.

6 Codage des graphes

Il existe de nombreuses façons de stocker un graphe. La complexité des algorithmes dépend de la représentation machine d'un graphe. On prendra soin pour les représentations proposées de regarder la complexité à la fois en place et en temps (lors d'accès) des représentations proposées.

On présente différentes méthodes de codage des graphes.

6.1 Codage matriciel

6.1.1 Matrice d'incidence sommet-arc

Définition La matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté $G = (V, E)$ d'ordre n ayant m arcs est une matrice $A = (a_{iu})$, $i = 1 \dots n$, $u = 1 \dots m$ à coefficients entiers 0, +1, −1, telle que chaque colonne correspond à un arc de E et chaque ligne correspond à un sommet de V. Si $e_k = (v_i, v_j)$ alors la colonne k a tous ses termes nuls sauf $a_{ik} = +1$ et $a_{jk} = -1$.

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (2,1) & (4,3) & (4,5) & (5,3) & (5,4) \\
\hline
1 & +1 & +1 & +1 & -0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
4 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & -1 \\
5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1
\end{array}
$$

Exemple Coder le graphe orienté donné en exemple.

▷ **Exercice 6** *Trouver comment exprimer le degré entrant et sortant en un sommet.*

Compter le nombre de (+1) ou de (-1) sur la ligne correspondante au sommet.

6.1.2 Matrice d'incidence sommet-arête

C'est l'équivalent de la matrice sommet-arcs pour un graphe non orienté. Dans ce cas, on met +1 partout.

Exemple Codage du graphe de l'exemple précédent.

6.1.3 Matrice d'adjacence

Cela correspond en fait à une matrice d'incidence 'sommet-sommet'.

Définition La matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté $G = (V, E)$ est une matrice A à coefficients booléens telle que $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in E$.

Si le graphe est non orienté, pour chaque arête $\{i, j\}$, $a_{ij} = a_{ji} = 1$; la matrice A est donc symétrique.

▷ **Exercice 7** *Comparez la taille de stockage d'un graphe en utilisant ces différentes matrices. On considère les cas où la matrice est stockée entièrement, et le cas où seul les coefficients non nuls de la matrice sont stockés.)*

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Ordre matrice × nb arrête vs ordre²

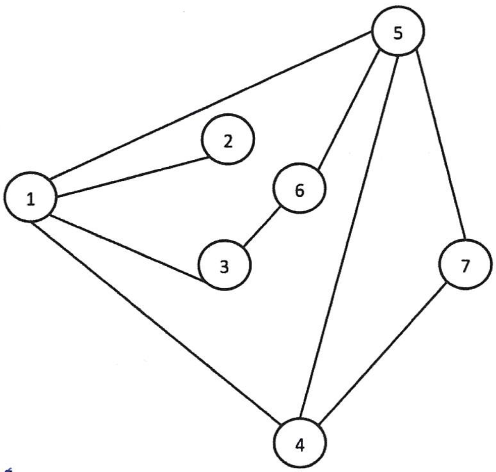
6.2 Codage vectoriel

6.2.1 À partir de la matrice d'adjacence

On utilise deux tableaux T_V de dimension $n+1$, et T_E de dimension m (cas orienté) ou $2m$ (cas non orienté). Les sommets voisins du sommet i sont stockés entre les indices $T_V(i)$ et $T_V(i+1)-1$ du tableau T_E.

Alternativement, le tableau T_V peut contenir des listes chainées d'indice des sommets voisins.

▷ **Exercice 8** *Donner pour le graphe suivant les vecteurs T_V et T_E :*



T_E

2	3	4	5	1	1	6	1	5	7	1	6	7	3	5	4	5

T_V

0	4	5	7	10	14	16

▷ **Exercice 9** *Calculer le coût de stockage pour une représentation matricielle ou vectorielle. Calculer le temps nécessaire pour savoir si l'arête (i,j) est dans le graphe.*

Stockage : $n+1+m$ (cas orienté)

Accès à l'arête :

6.2.2 À partir de la matrice d'incidence

On peut représenter, à partir de deux tableaux T_1 et T_2 de dimension m, $T_1(i)$ et $T_2(i)$ donnant les extrémités de la i-ème arête.

7 Graphes pondérés

Définition Un graphe est **pondéré** si à chaque arc, on associe un poids réel positif (ou coût).

▷ **Exercice 10** *Adapter les représentations ci-dessus pour prendre en compte des graphes pondérés (chaque arête a un poids positif).*

Faire apparaître poids dans la matrice en [illegible]