

Rapport du Projet de Télécommunications : Etudes de chaines de transmission en bande de base

Amine AKBY
Badr SAJID
Aymane EL BOUCHIBTI

Département Sciences du Numérique - Première année
2019-2020

Contents

1	Introduction	4
1.1	Objectifs du travail réalisé	4
1.2	Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN)	4
1.2.1	Génération de l'information binaire à transmettre	4
1.2.2	Mapping	4
1.2.3	Suréchantillonnage	4
1.2.4	Filtrage de mise en forme	4
1.2.5	Canal de transmission AWGN	4
1.2.6	Filtrage de réception	5
1.2.7	Echantillonnage	5
1.2.8	Décisions	5
1.2.9	Demapping	5
2	Première chaine à étudier : "chaine de référence"	5
2.1	Etude théorique	5
2.2	Implantation sous Matlab (cette chaine servira de chaine de référence pour la suite)	8
3	Deuxième chaine à étudier : impact du choix du filtre de réception	10
3.1	Etude théorique	11
3.2	Implantation sous Matlab	13
4	Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée	15
4.1	Etude théorique	15
4.2	Implantation sous Matlab	16
5	Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping	19
5.1	Etude théorique	19
5.2	Implantation sous Matlab	20
6	Conclusion	23

List of Figures

1	Chaîne de transmission en bande de base	4
2	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$	5
3	Signal $z(t)$ de la chaine 1 pour la suite 0110100.	6
4	Diagramme de l'oeil de la chaine 1.	7
5	Signal transmis à la chaine 1.	9
6	La densité spectrale de puissance du signal transmis de la chaine 1.	9
7	Signal $z(t)$ pratique de la chaine 1.	9
8	Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 1.	10
9	TEB simulé et TEB théorique de la chaine 1.	10
10	Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.	11
11	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$	11
12	Signal $z(t)$ de la chaine 2 pour la suite 0110100.	11
13	Diagramme de l'oeil de la chaine 2.	12
14	Signal $z(t)$ pratique de la chaine 2.	13
15	Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 2.	13
16	TEB simulé et TEB théorique de la chaine 2.	14
17	TEB théorique de la chaine 1 et 2.	14
18	DSP du signal transmis de la chaine 1 et 2.	15
19	Signal transmis à la chaine 3.	16
20	Signal $z(t)$ pratique de la chaine 3.	17
21	Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 3	17
22	TEB simulé et TEB théorique de la chaine 3.	18
23	TEB théorique de la chaine 1 et 3.	18

24	Densité spectrale de puissance de la chaine 1 et 3.	18
25	Signal transmis et Diagramme de l'oeil avec $BW = 1500\text{Hz}$	19
26	Signal transmis et Diagramme de l'oeil avec $BW = 1500\text{Hz}$	19
27	Signal transmis à la chaine 4.	20
28	Signal $z(t)$ pratique de la chaine 4.	21
29	Densité spectrale de puissance de la chaine 4.	21
30	Densité spectrale de puissance de la chaine 1 et 4.	21
31	Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 4.	22
32	TES simulé et TES théorique de la chaine 4.	22
33	TEB simulé et TEB théorique de la chaine 4.	23

1 Introduction

1.1 Objectifs du travail réalisé

L'Objectif de ce projet est de se familiariser avec les chaines de transmission en bande de base (savoir le rôle des différents composants d'une chaine et l'implanter), de pouvoir expliquer les observations pratiques en s'appuyant sur les résultats théoriques, et d'évaluer l'efficacité de la chaine.

1.2 Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN)

La figure 1 présente le schéma général des chaines à étudier.

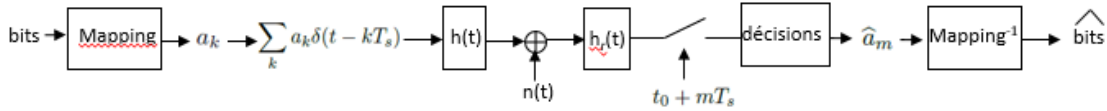


Figure 1: Chaîne de transmission en bande de base

1.2.1 Génération de l'information binaire à transmettre

La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants) pourra être réalisée grâce à la fonction *randi* de Matlab.

1.2.2 Mapping

Un mapping devra être réalisé afin de passer de l'information binaire aux symboles a_k . Le mapping est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et implanter.

1.2.3 Suréchantillonnage

La suite d'impulsions de Dirac espacées de la durée symbole T_s et pondérées par les symboles a_k issus du mapping sera générée, en numérique, en insérant $N_s - 1$ zéros entre deux symboles a_k , si N_s représente le nombre d'échantillons utilisés par symbole (ou facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, T_e étant la période d'échantillonnage). N_s devra être déterminé pour que le signal numérique généré respecte la condition d'échantillonnage de Shannon.

1.2.4 Filtrage de mise en forme

La réponse impulsionnelle, $h(t)$, du filtre de mise en forme est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ($h = [h(0)h(1)...h(N-1)]$, si N représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : `signal_filtre=filter(h,1,signal_a_filtre)` (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TPs de traitement du signal.

1.2.5 Canal de transmission AWGN

Le canal de transmission est supposé à bruit, $n(t)$, additif blanc et Gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence. Pour les simulations, ce bruit sera généré sur la bande F_e (fréquence d'échantillonnage), grâce à la fonction *randn* de matlab, avec plusieurs puissances différentes, notées σ_n^2 : `bruit = $\sigma_n * \text{randn}(1, \text{length}(r))$` ; si r représente le vecteur d'échantillons de signal à l'entrée du récepteur. On calculera la puissance du bruit σ_n^2 , en fonction des rapports signal à bruit par bit souhaités à l'entrée du récepteur $\frac{E_b}{N_0}$, de la manière suivante (voir démonstration en annexe):

$$\sigma_n^2 = \frac{P_r N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où N_s représente le facteur de suréchantillonnage, M l'ordre de la modulation et P_r la puissance du signal r qui peut être obtenue sous matlab de la manière suivante : `$P_r = \text{mean}(\text{abs}(r).^2)$` .

1.2.6 Filtrage de réception

La réponse impulsionnelle, $h_r(t)$, du filtre de mise de réception est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ($hr = [hr(0)hr(1)...hr(N-1)]$, si N représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : `signal_filtre=filter(hr,1,signal_a_filtre)` (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TPs de traitement du signal.

1.2.7 Echantillonnage

Le signal filtré devra être échantillonné à $t_0 + mT_s$ pour revenir au rythme symbole. L'instant d'échantillonnage optimal t_0 pourra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

1.2.8 Décisions

Un détecteur à seuil permettra de prendre les décisions sur les symboles à partir du signal échantillonné. Le seuil optimal devra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

1.2.9 Demapping

Un demapping devra être réalisé en vue de comparer les bits reçus aux bits émis dans l'objectif de calculer le taux d'erreur binaire simulé de la transmission, TEB simulé qui devra être comparé au TEB théorique déterminé dans l'étude théorique de la chaîne en question.

2 Première chaîne à étudier : "chaîne de référence"

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s . Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 2.

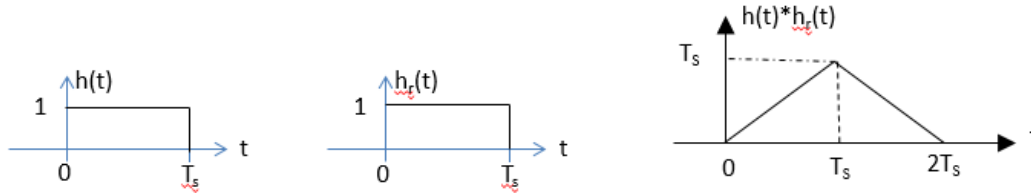


Figure 2: Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

2.1 Etude théorique

1. On calcule la densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis.
Le signal émis peut s'écrire de la manière suivante :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h(t - kT_s) \quad (1)$$

La densité spectrale du signal est :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_x^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re(R_a(k) e^{2j\pi f k T_s}) + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_{k=1}^{\infty} |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s}) \quad (2)$$

On prend les (a_k) indépendants et de moyenne nulle. Donc :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |H(f)|^2 \quad (3)$$

avec :

$$H(f) = TF(h(t)) = TF\left(\prod_{\frac{T_s}{2}=1}^{\infty} \left(t + \frac{T_s}{2}\right)\right) = T_s \text{sinc}(\pi f T_s) e^{-j\pi f k T_s} \quad (4)$$

Donc :

$$S_x(f) = T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2 \quad (5)$$

2. Critère de Nyquist :

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0, \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} G^{(t_0)}(f - \frac{k}{T_s}) = 0 \\ \text{avec : } G^{(t_0)}(f) = TF\left[\frac{g(t+t_0)}{g(t_0)}\right] \end{cases} \quad (6)$$

La chaîne de communication vérifie le critère de Nyquist (On prend $t_0 = T_s$)

$$\begin{aligned} g(T_s) &= (h(t) * h_r(t))(T_s) = T_s \neq 0 \\ g(T_s + T_s) &= 0 \\ g(T_s - T_s) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow g(T_s + pT_s) = \begin{cases} \neq 0 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

3. Sans bruit, on trace le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. On retrouve sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist car $z(t_0 + pT_s) = a_k T_s = a_k g(t_0)$

On trace le signal pour la suite de bits : 0110100 $\Leftrightarrow a_k = -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{h(t) * h_r(t - kT_s)}_{g(t - kT_s)} \quad (8)$$

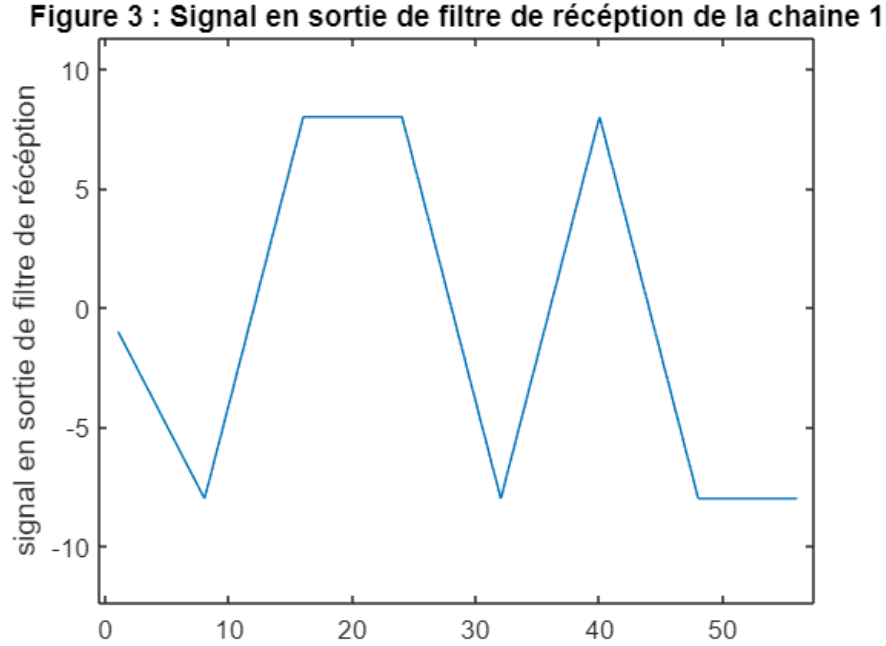


Figure 3: Signal $z(t)$ de la chaîne 1 pour la suite 0110100.

4. Toujours sans bruit, on trace le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s . On retrouve sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist, car en échantillonnant sur la durée T_s , on voit apparaître deux valeurs possibles alors que deux symboles ont été émis.

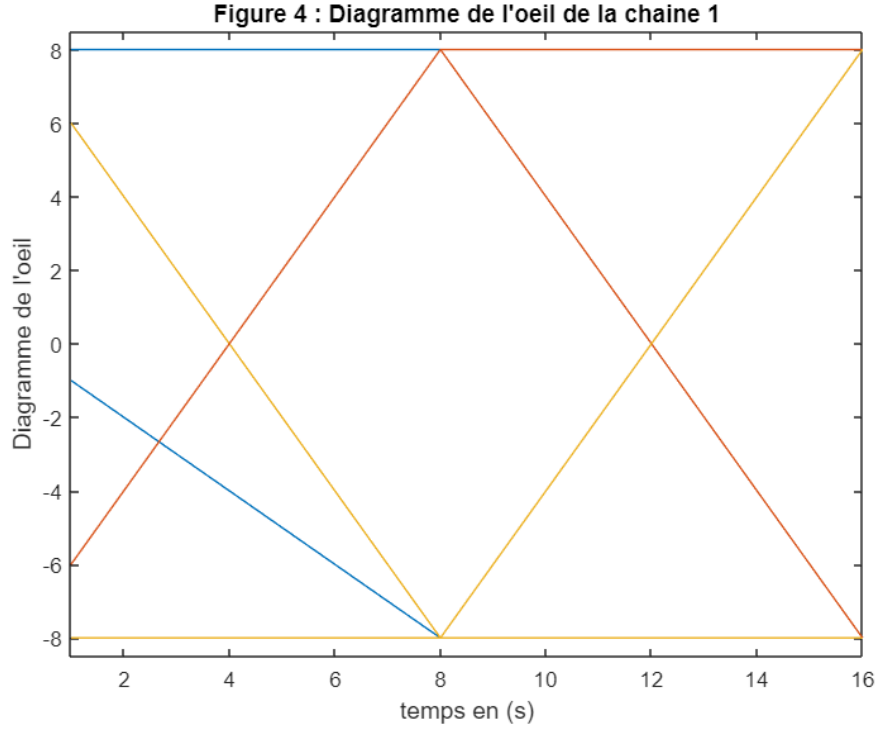


Figure 4: Diagramme de l'oeil de la chaîne 1.

5. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), on calcule le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception).

$$z(t_0 + nT_s) = g(t_0)a_n + \underbrace{w_n}_{b_r(t_0+nT_s)} \quad (9)$$

AWGN suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma_W^2)$

$$RSB = SNR = \frac{P_u}{P_b} = \frac{E(|g(t_0)a_n|^2)}{\sigma_W^2} \quad (10)$$

avec L'hypothèse :

Puissance du bruit échantillonné et filtré = Puissance du bruit filtré; ($\sigma_W^2 = \sigma_{b_r}^2$)

$$\sigma_{b_r}^2 = \gamma_{b_r}(0) = \int_R S_{b_r}(f) df \quad (11)$$

$$S_{b_r}(f) = |H_r(f)|^2 S_b(f) = \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 \quad (12)$$

$$\sigma_{b_r}^2 = \frac{N_0}{2} \int_R |H_r|^2(f) df = \frac{N_0}{2} \int_R |h_r|^2(t) dt = \frac{N_0}{2} T_s \quad (13)$$

$$RSB = \frac{2(g(t_0))^2}{N_0 T_s} = \frac{2T_s}{N_0} \quad (14)$$

6. On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. On détermine le seuil optimal à utiliser :

$$P(Z_n|a_n)\alpha e^{-\frac{(Z_n - g(t_0)a_n)^2}{2\sigma_W^2}} \quad (15)$$

$$(a_n = 1) \Rightarrow p(Z_n|+1) > p(Z_n|-1) \Rightarrow \frac{p(Z_n|+1)}{p(Z_n|-1)} > 1 \Rightarrow \log \frac{p(Z_n|+1)}{p(Z_n|-1)} > 0 \Rightarrow Z_n > 0 \quad (16)$$

$$\text{R\`egle ML} \Rightarrow \begin{cases} z > 0 & \Rightarrow a_n = +1 \\ z < 0 & \Rightarrow a_n = -1 \end{cases}$$

Le seuil optimal à utiliser est donc à 0.

7. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (Critère de Nyquist vérifié) et que l'on utilise le seuil optimal de décision, Le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$:

$$TEB = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma_{br}}\right) = Q\left(\frac{T_s}{\sigma_{br}}\right) \quad (17)$$

$$\text{Où : } \sigma_{br} = \sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}$$

8. La puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s est :

$$\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{2} \quad (18)$$

9. L'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s est :

$$E_s = P_r \times T_s = \int_R |H(f)|^2 df \quad (19)$$

car :

$$P_r = \int_R S_x(f) df = \int_R \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 df \quad (20)$$

$$E_s = T_s = E_b \quad (21)$$

10. On en déduit des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0 pour la chaîne étudiée :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sigma_{br}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (22)$$

2.2 Implantation sous Matlab (cette chaîne servira de chaîne de référence pour la suite)

1. On génère dans un premier temps le signal à transmettre en tronquant la bande occupée à une fréquence maximale égale à $\frac{4}{T_s}$. En utilisant un périodogramme estimer puis tracer la densité spectrale de puissance du signal transmis.

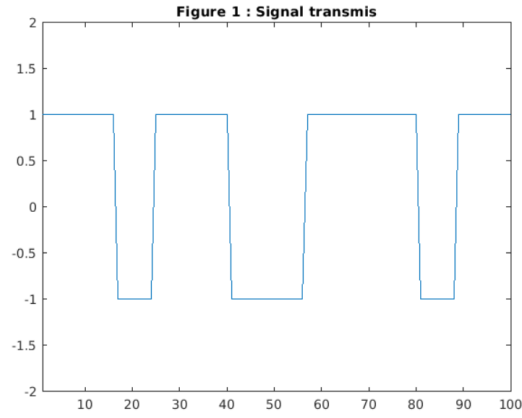


Figure 5: Signal transmis à la chaine 1.

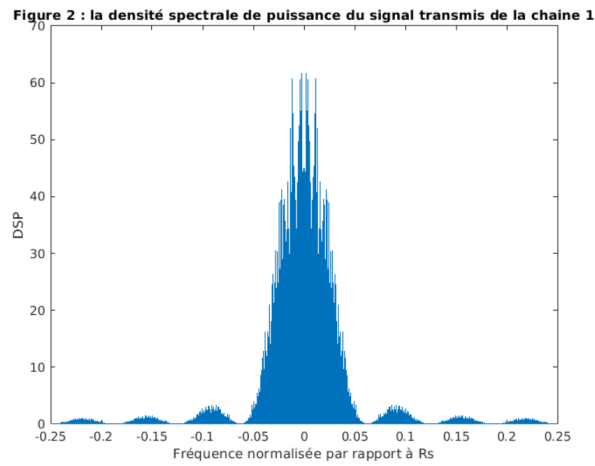


Figure 6: La densité spectrale de puissance du signal transmis de la chaine 1.

2. Implantation de la chaine sans bruit :

- (a) On trace le signal en sortie du filtre de réception. Ce tracé est bien conforme avec l'étude théorique car on retrouve que le critère de Nyquist est bien respecté car $z(t_0 + pT_s) = a_k T_s = a_k g(t_0)$

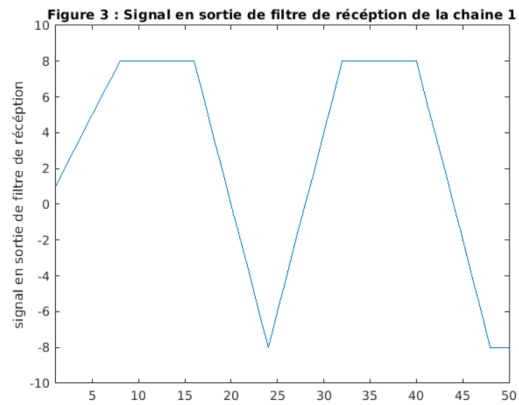


Figure 7: Signal $z(t)$ pratique de la chaine 1.

- (b) On trace un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage. Les résultats obtenus sont conformes à la théorie parce qu'on retrouve les deux symboles émis en échantillonnant sur la durée T_s .

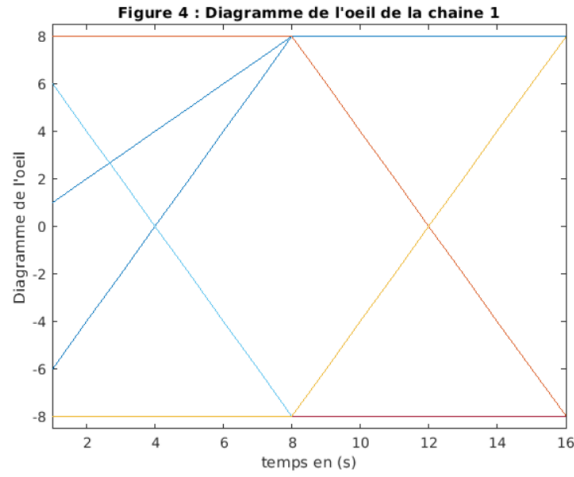


Figure 8: Diagramme de l'oeil pratique de la chaîne 1.

- (c) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, on trouve que le TEB obtenu est bien nul.
- 3. Implantation de la chaîne avec bruit : on rajoute le bruit et on trace le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels¹. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.
- 4. On compare le TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé permet de valider le bon fonctionnement de notre chaîne de transmission puisque les deux courbes sont à peu près les mêmes.

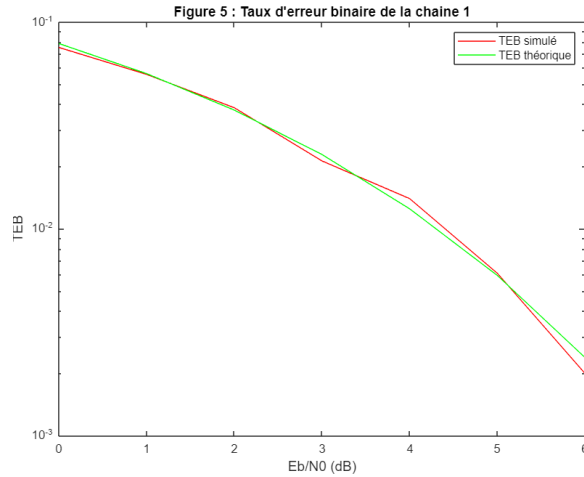


Figure 9: TEB simulé et TEB théorique de la chaîne 1.

3 Deuxième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de réception

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, données par la figure 10. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 11.

¹Attention les TEBs devront être tracés en échelle log et on fera attention à la précision des mesures réalisées (voir en annexe)

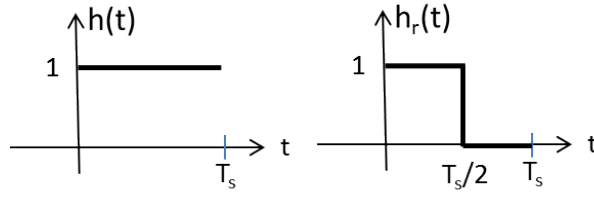


Figure 10: Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.

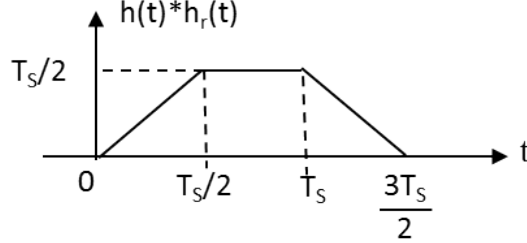


Figure 11: Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

3.1 Etude théorique

1. La chaîne de communication peut vérifier le critère de Nyquist. Car :
Pour tout

$$t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s], g(t_0) \neq 0, g(t_0 + nT_s) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

2. Sans bruit, on trace le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. On retrouve sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist puisque $z(t_0 + pT_s) = a_k T_s = a_k g(t_0)$ pour par exemple $t_0 = \frac{T_0}{2}$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g(t - kT_s) \quad (23)$$

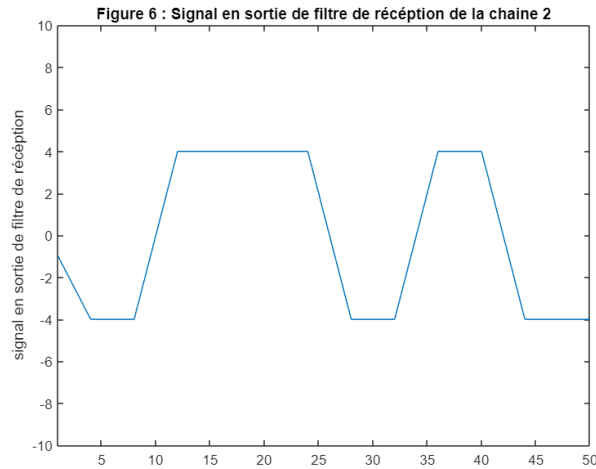


Figure 12: Signal $z(t)$ de la chaîne 2 pour la suite 0110100.

3. Toujours sans bruit, on trace le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s . On retrouve sur le diagramme de l'oeil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist, car en échantillonnant sur la durée T_s , on voit apparaître les pentes de la fonction z .

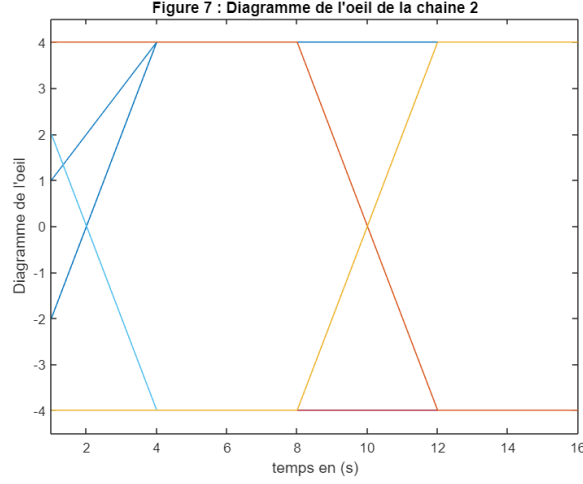


Figure 13: Diagramme de l'oeil de la chaîne 2.

4. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), on calcule le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception). On compare le rapport signal sur bruit obtenu ici avec celui obtenu dans la chaîne de référence.

$$z(t_0 + nT_s) = g(t_0)a_n + W_n \quad (24)$$

$$SNR = \frac{(g(t_0))^2}{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 df} = \frac{E(|g(t_0)a_n|^2)}{\frac{N_0}{2} \times \frac{T_s}{2}} = \frac{2T_s}{N_0 \times 2} = \frac{T_s}{N_0} \quad (25)$$

Le SNR de la chaîne 2 est plus mauvais que la chaîne 1 qui considèrerait un filtre adapté. On doit s'attendre alors à un TEB plus élevé que celui de la chaîne 1.

5. On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Par la même approche de la chaîne 1, on retrouve un seuil de détection nul pour une détection ML.
6. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, Le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ est :

$$TEB = TES = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right) \quad (26)$$

7. La puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s est :

$$\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{N_0 T_s}}{2} \quad (27)$$

8. L'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s est :

$$E_s = P_{rs} = T_s \quad (28)$$

9. On en déduit des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire en fonction de E_b/N_0 pour la chaîne étudiée :

$$TEB = Q\left(\sqrt{\frac{T_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (29)$$

3.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit (le signal à transmettre sera généré en tronquant la bande occupée à une fréquence maximale égale à $\frac{4}{T_s}$)
 - (a) On trace le signal en sortie du filtre de réception. Ce tracé est bien conforme à la partie théorique, le critère de Nyquist est vérifié.

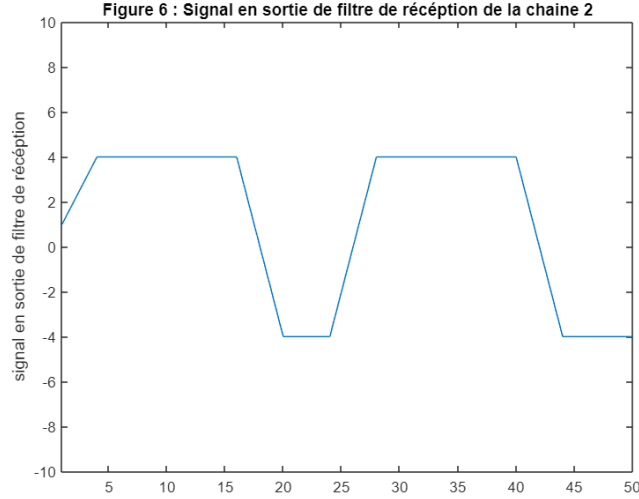


Figure 14: Signal $z(t)$ pratique de la chaine 2.

- (b) On trace un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage. Les résultats obtenus sont conformes à la théorie puisqu'on retrouve les pentes du signal en sortie du filtre de réception.

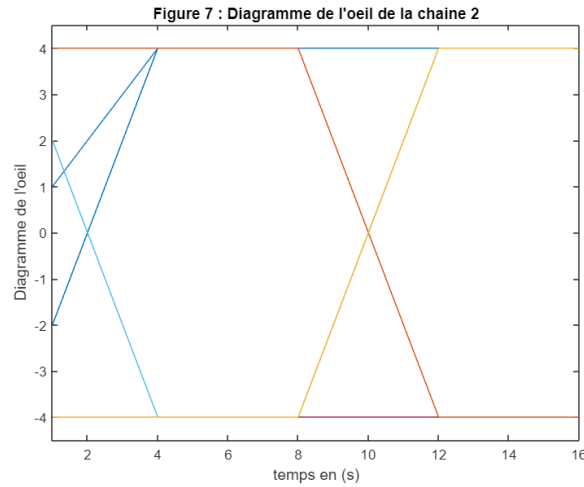


Figure 15: Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 2.

- (c) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, on trouve que le TEB obtenu est bien nul.
2. Implantation de la chaine avec bruit : on rajoute le bruit et on trace le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.
3. On compare le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé permet de valider le bon fonctionnement de notre chaine de transmission.

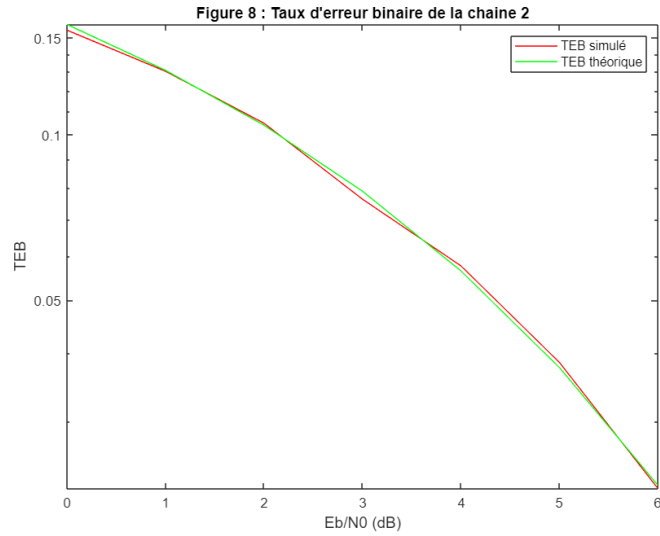


Figure 16: TEB simulé et TEB théorique de la chaîne 2.

4. On compare le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation (ou au TEB théorique) de la chaîne de référence (comparaison en termes d'efficacité en puissance). La différence est due au filtre, on utilise un filtre adapté en chaîne 1 et non adapté en chaîne 2. On remarque bien que le TEB de la première chaîne est plus faible que celui de la deuxième puisque le RSB obtenu pour la deuxième chaîne est inférieur à celui de la première, la chaîne la plus efficace est alors la première chaîne.

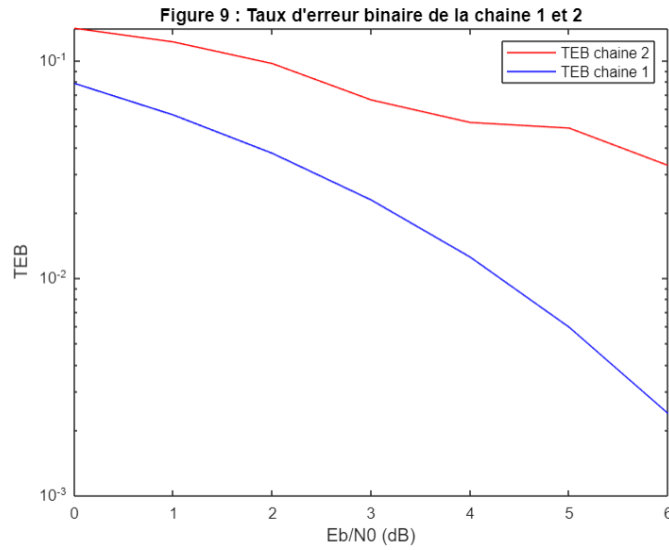


Figure 17: TEB théorique de la chaîne 1 et 2.

5. On compare l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence (en traçant, par exemple, les DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire). Les deux DSPs coïncident car on ne change pas le filtre de mise en forme mais juste celui du réception.

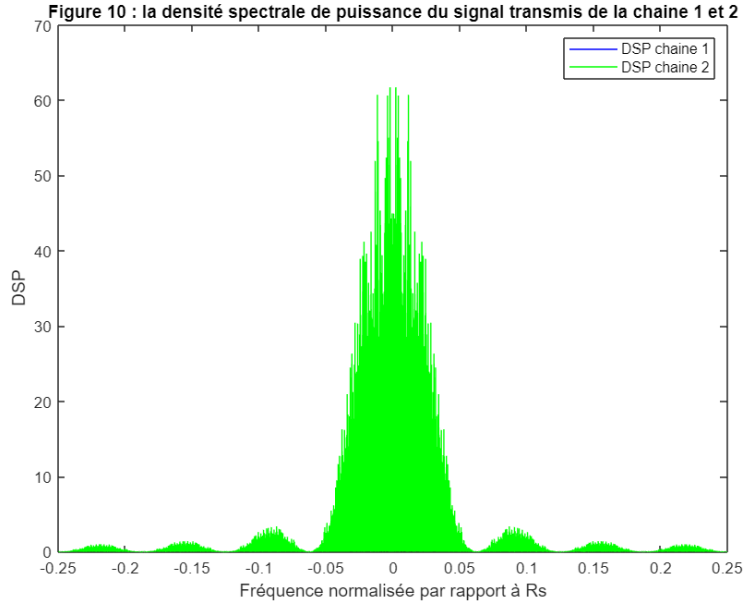


Figure 18: DSP du signal transmis de la chaine 1 et 2.

4 Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, en racine de cosinus surélevé de même roll off $\alpha = 0.5$. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donc un cosinus surélevé de roll off 0.5.

4.1 Etude théorique

$$G^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T_s & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right] & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (30)$$

$$g^{(t_0)}(t) = \text{sinc} \left(\frac{\pi t}{T_s} \right) \frac{\cos \left(\frac{\alpha \pi t}{T_s} \right)}{1 - \left(2\alpha \frac{t}{T_s} \right)^2} \quad (31)$$

1. La chaîne de communication peut vérifier le critère de Nyquist car le filtre en cosinus surélevé est un filtre de Nyquist.

$$g^{(t_0)}(0) = 1 \text{ et } g^{(t_0)}(0 + pT_s) = \text{sinc}(p\pi) \frac{\cos(\alpha p\pi)}{1 - (2\alpha)^2} = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (32)$$

2. La chaîne de communication vérifie le critère de filtrage adapté car les deux filtres (émission et réception) ont les mêmes paramètres (même roll off).

$$h_r(t) \alpha h^*(t_0 - t) \quad (33)$$

3. Le taux d'erreur binaire théorique de la transmission est :

$$TEB = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) (\text{cas binaire}) \quad (34)$$

4. Sur le rythme symbole R_s , on pourrait transmettre le signal généré par le modulateur proposé dans un canal de transmission idéal de bande $BW = 1500 \text{ Hz}$, tout en continuant de respecter le critère de Nyquist, à condition que :

$$BW = \frac{1 + \alpha}{2T_s} = 1500 \text{ Hz} \quad (35)$$

Donc :

$$T_s = \frac{1 + \alpha}{2BW} = 5 * 10^{-4} \text{ s}. \quad (36)$$

D'où :

$$R_s = 2000 \text{ symboles/s} \quad (37)$$

5. Afin d'implanter la chaine de transmission en numérique, la fréquence d'échantillonnage minimum à utiliser est : $\frac{1+\alpha}{T_s}$. Car on a $F_{max} = \frac{1+\alpha}{2T_s}$, La fréquence d'échantillonnage doit être supérieur à $2F_{max}$.

$$F_e > 2F_{max} \Rightarrow F_e > \frac{1 + \alpha}{T_s} \quad (38)$$

On en déduit que le facteur de suréchantillonnage minimal à utiliser est 1.5 car :

$$T_e < \frac{T_s}{1 + \alpha} T_s = N_s T_e \Rightarrow 1 + \alpha < N_s \Rightarrow \frac{3}{2} < N_s \quad (39)$$

4.2 Implantation sous Matlab

1. On utilisera les paramètres suivants : fréquence d'échantillonnage $F_e = 12000 \text{ Hz}$, rythme symbole $R_s = 3000 \text{ symboles par seconde}$, roll off du filtre de mise en forme et du filtre de réception $\alpha = 0.5$.
2. Implantation de la chaine sans bruit :
 - (a) Le facteur de suréchantillonnage utilisé permet de respecter la condition d'échantillonnage de Shannon, car :

$$2F_{max} = (1 + \alpha)R_s = 4500 \text{ Hz} \Rightarrow F_e > 2F_{max} \quad (40)$$

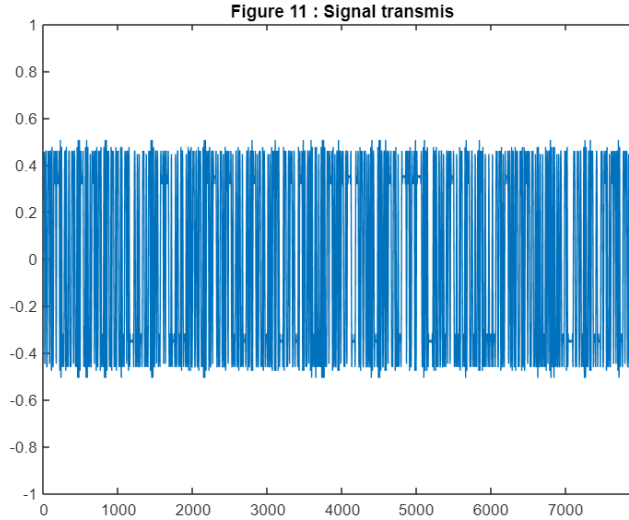


Figure 19: Signal transmis à la chaine 3.

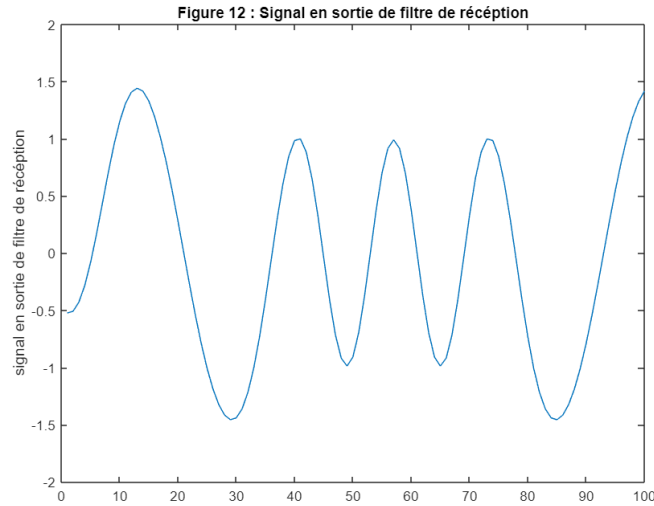


Figure 20: Signal $z(t)$ pratique de la chaine 3.

- (b) On trace un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage. Les résultats obtenus sont conformes à la théorie, on retrouve bien l'instant optimal pour échantillonner (en comptant le retard), on prend alors $t_0 = 1s$.

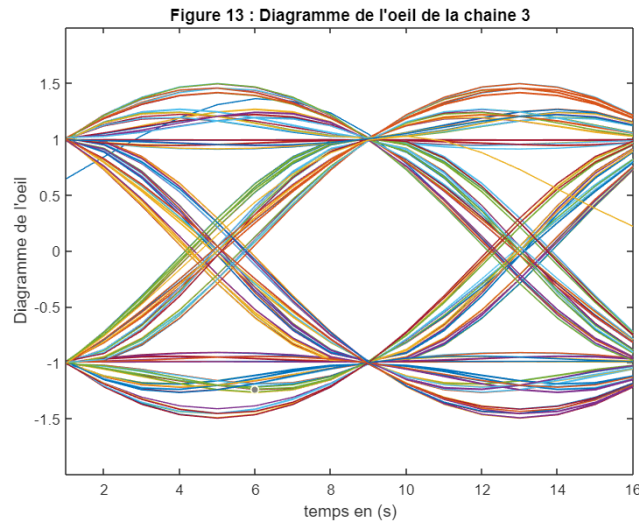


Figure 21: Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 3

- (c) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, on trouve que le TEB obtenu est bien nul.
3. Implantation de la chaine avec bruit : On rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.
 4. On compare le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé permet de valider le bon fonctionnement de notre chaine de transmission.
 5. On compare le TEB obtenu par simulation pour la chaine de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation (ou au TEB théorique) de la chaine de référence (comparaison en termes d'efficacité en puissance). Les deux taux d'erreur binaire sont à peu près identiques dans les deux cas.

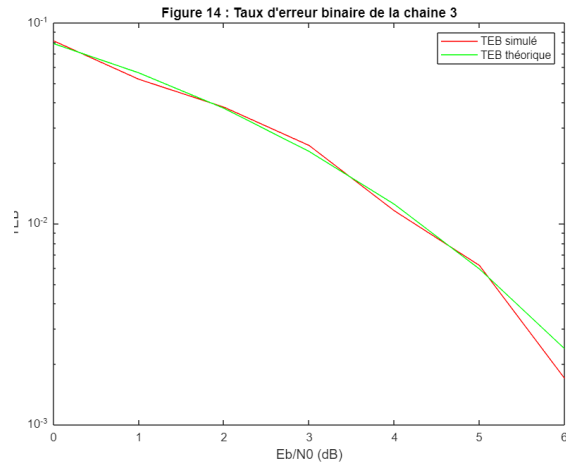


Figure 22: TEB simulé et TEB théorique de la chaîne 3.

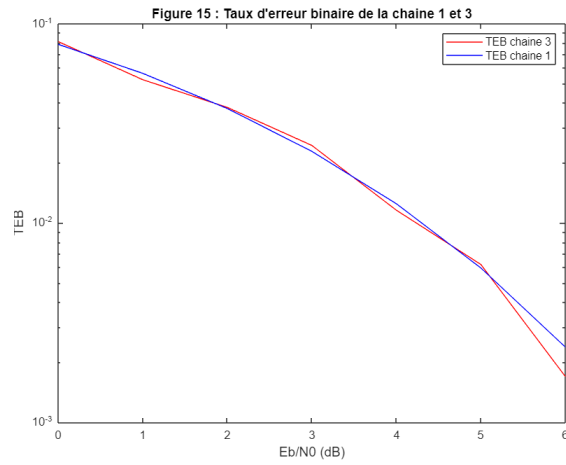


Figure 23: TEB théorique de la chaîne 1 et 3.

6. On compare l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence (en traçant les DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire). On remarque que la bande occupée de la troisième chaîne est faible devant celle de la première . La chaîne la plus efficace spectralement est donc la troisième chaîne.

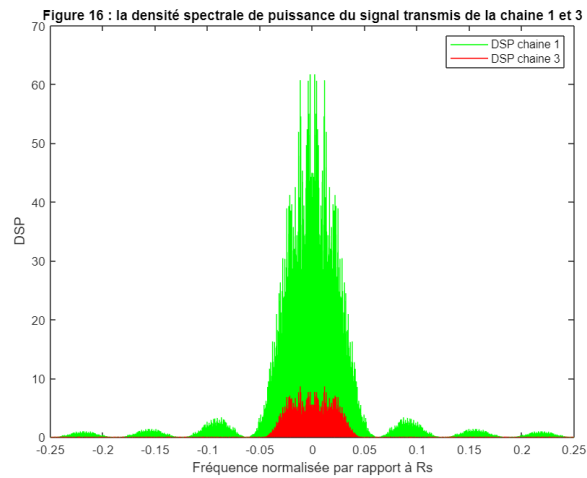


Figure 24: Densité spectrale de puissance de la chaîne 1 et 3.

7. Reprendre à la chaîne de transmission sans bruit et introduire un passage dans un canal de transmission

- (a) de bande $BW = 1500$ Hz (implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure 1500 Hz).
On remarque dans ce cas la présence d'une forte distorsion qui est dû au fait que :

$$BW(1500Hz) < F_{max}(2250Hz) \quad (41)$$

On peut expliquer cela par un TEB élevé.

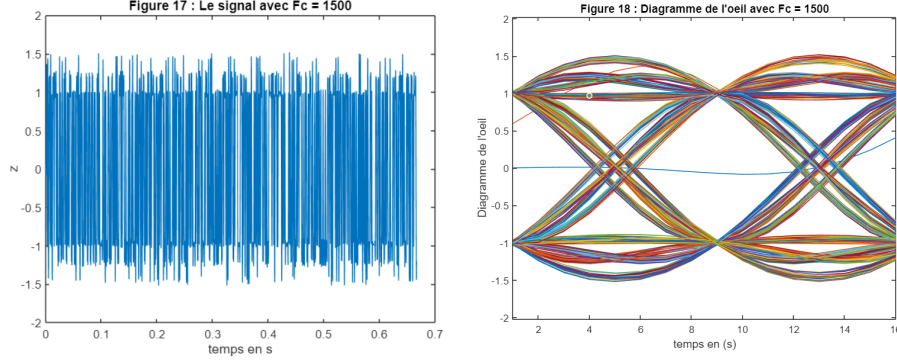


Figure 25: Signal transmis et Diagramme de l'oeil avec $BW = 1500$ Hz.

- (b) de bande $BW = 3000$ Hz (implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure 3000 Hz).
On remarque ici que l'oeil est plus ouvert et il y'a moins de distorsion et d'erreurs de transmission.

$$BW(3000Hz) > F_{max}(2250Hz) \quad (42)$$

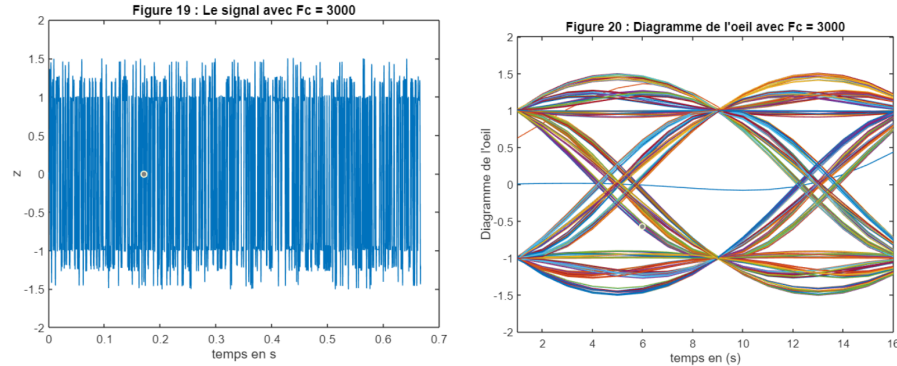


Figure 26: Signal transmis et Diagramme de l'oeil avec $BW = 3000$ Hz.

5 Quatrième chaîne à étudier : impact du choix du mapping

On considérera un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaire de durée T_s .

5.1 Etude théorique

1. On peut prendre $t_0 = T_s$ pour démarrer l'échantillonnage comme dans le cas binaire. On échantillonnera alors aux instants optimaux $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, \dots$
2. En supposant que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions, Les seuils optimaux à utiliser sont : $-2g(t_0), 0, 2g(t_0)$, car : $\hat{a}_m = \arg_{a_m} \max(z_m | a_m)$ avec : $p(z_m | a_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_m - a_m)^2}{2(\sigma)^2}}$ dt.

La règle de décision MAP implique que :

si $z_m \leq -2g(t_0) \Rightarrow \hat{a}_m = -3$

si $-2g(t_0) \leq z_m \leq 0 \Rightarrow \hat{a}_m = -1$

si $0 \leq z_m \leq 2g(t_0) \Rightarrow \hat{a}_m = 1$

si $2g(t_0) \leq z_m \Rightarrow \hat{a}_m = 3$

3. On suppose que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise un détecteur à seuil avec seuils optimaux. En utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 11 : +1, 10 : +3 :

(a) La probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole -1 alors que l'on a émis -3 est : $p(\hat{a}_m = -1|a_m = -3) = Q(2) - Q(6)$

(b) La probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +1 alors que l'on a émis -3 est : $p(\hat{a}_m = 1|a_m = -3) = Q(6) - Q(10)$

(c) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +3 alors que l'on a émis -3 est : $p(\hat{a}_m = 3|a_m = -3) = Q(10)$

(d) AN : $N_0 = 10^{-3} \text{ V}^2/\text{Hz}$, $R_b = 1 \text{ kbps}$.

$$p(b_m = -1|a_m = -3) = 0.0228$$

$$p(b_m = -1|a_m = -3) = 9.87 \times 10^{-10}$$

$$p(b_m = -1|a_m = -3) = 7.62 \times 10^{-24}$$

(e) La règle de codage choisie pour le mapping est intéressante, car elle présente un symbole éronné par bit erroné. Ce qui fait : $TEB = \frac{TES}{\log_2(4)} = \frac{TES}{2}$

(f) Sachant que le taux d'erreur symbole de la liaison est donné par :

$$TES = \frac{3}{2} Q \left(\sqrt{\frac{4}{5} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Avec la règle de codage choisie pour le mapping (Mapping de GRAY), on a : $TEB = \frac{3}{4} Q \left(\sqrt{\frac{4}{5} \frac{E_b}{N_0}} \right)$

5.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit : on l'implantera en utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3 (voir en annexe). Attention le mapping est différent de celui proposé dans l'étude théorique précédente.

(a) on trace le signal en sortie du filtre d'émission, ainsi que sa densité spectrale de puissance.

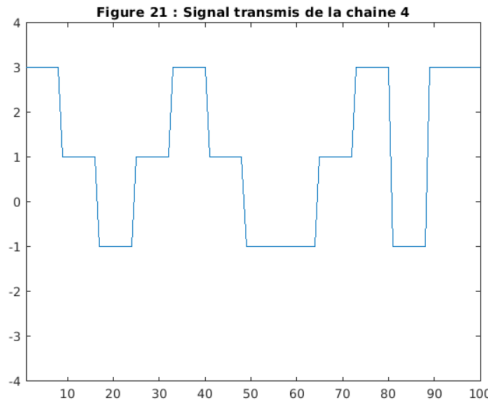


Figure 27: Signal transmis à la chaine 4.

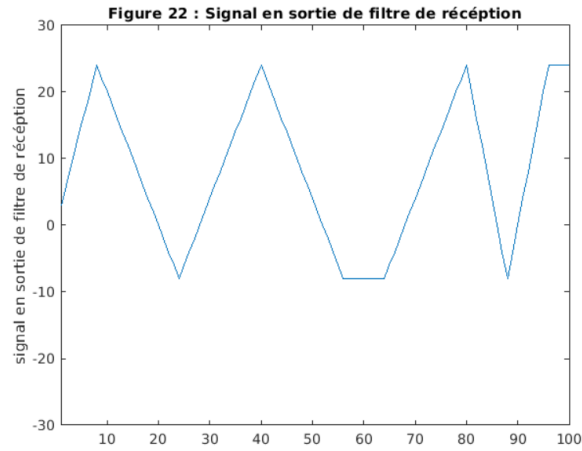


Figure 28: Signal $z(t)$ pratique de la chaine 4.

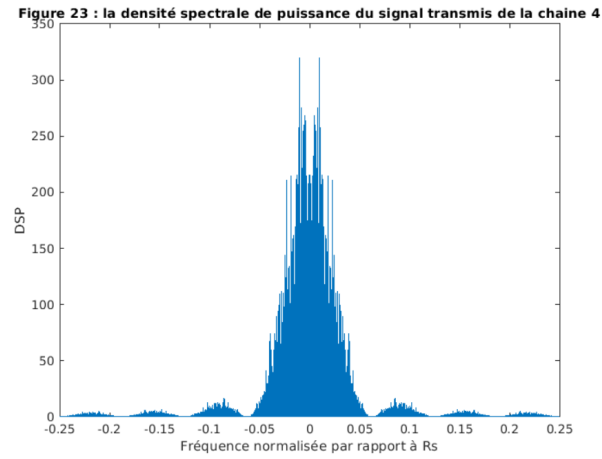


Figure 29: Densité spectrale de puissance de la chaine 4.

- (b) On compare l'efficacité spectrale de la chaine étudiée avec celle de la chaine de référence (en superposant les tracés des DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire). La bande occupée par la densité spectrale de puissance dans le cas de la quatrième chaine est plus grande que celle dans la première chaine, la première chaine est donc la plus efficace spectralement.

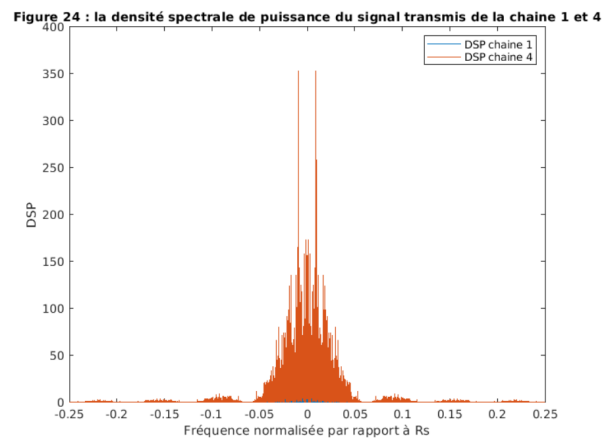


Figure 30: Densité spectrale de puissance de la chaine 1 et 4.

- (c) On trace un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage et les seuils optimaux de décision (détecteur à seuil). Les résultats obtenus sont conformes à la théorie puisqu'on constate bien que le signal est à 4 niveaux en analysant le diagramme de l'oeil, de plus, on trouve que l'instant optimal pour démarrer l'échantillonnage est bien T_s .

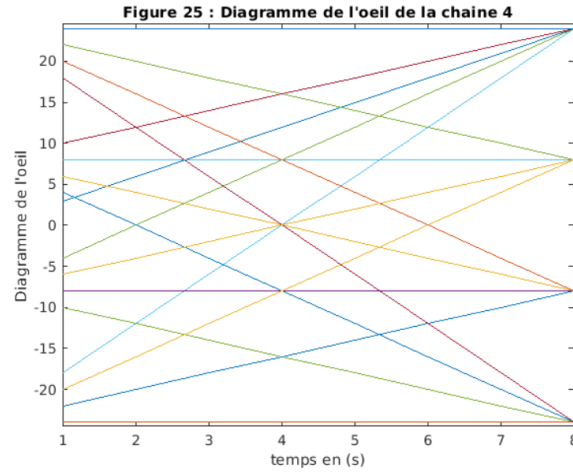


Figure 31: Diagramme de l'oeil pratique de la chaine 4.

- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuils optimaux, on trouve que le TEB obtenu est bien nul.
2. On rajoute le bruit et on trace le taux d'erreur symbole (TES) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.
 3. On compare le TES obtenu par simulation sur la chaine implantée au TES donné pour la chaine étudiée dans l'étude théorique.

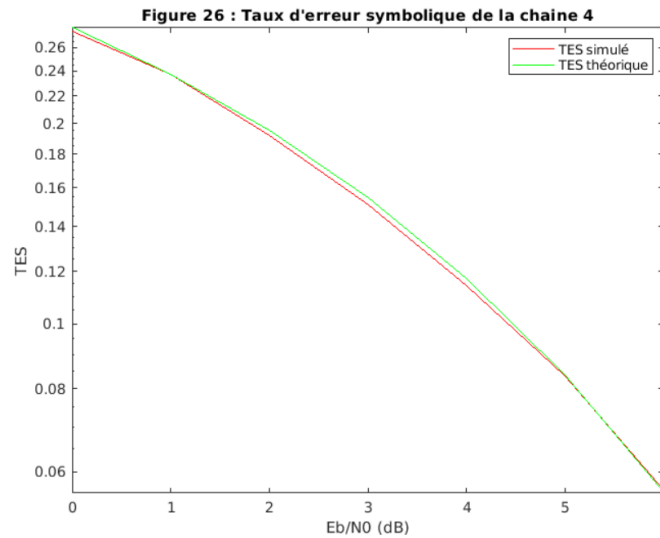


Figure 32: TES simulé et TES théorique de la chaine 4.

4. On trace le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.
5. On compare le TEB obtenu par simulation sur la chaine implantée au TEB donné pour la chaine étudiée dans l'étude théorique.

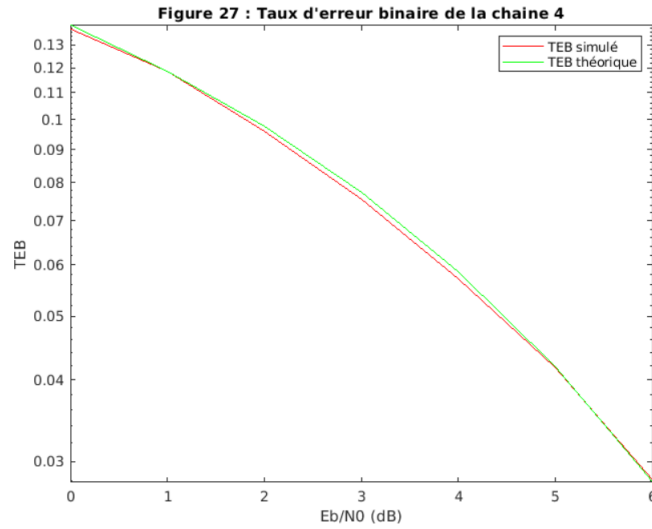


Figure 33: TEB simulé et TEB théorique de la chaine 4.

6 Conclusion

Les études qu'on a fait sur ces 4 chaines de transmission en bande de base nous ont aidés à bien comprendre la transmission en bande de base : savoir l'impact des différents composants d'une chaine (filtre de réception, filtre de mise en forme, mapping, décisions, $mapping^{-1}$), pouvoir expliquer les observations pratiques à l'aide de l'étude théorique, et pouvoir évaluer les chaines spectralement et en terme de puissance.