TD4

Thème Automates à pile.

1 Grammaire non contextuelle et Automates à pile

Exercice 1 Soit la grammaire non-contextuelle suivante pour un langage de Dyck :

$$
\begin{array}{ll}
1. & S \to \{\ S\ \} \\
2. & S \to S\ S \\
3. & S \to \Lambda
\end{array}
$$

1. Construire un automate à pile simple indéterministe qui accepte le même langage ;
2. Appliquer cet automate sur le mot $\{\{\}\{\}\}$;
3. Donner un automate à pile déterministe qui accepte le même langage ;
4. Appliquer cet automate sur le mot $\{\{\}\{\}\}$.

Exercice 2 Soit une grammaire $G = (A, V, S, P)$, la grammaire étendue de G à l'ordre k est la grammaire $G' = (A \cup \{\$\}, V \cup \{S'\}, S', P \cup \{S' \to S\$^k\}$ avec $\$ \notin A$ et $S' \notin V$ où \$ est le symbole de fin de mot.

Les symboles directeurs à l'ordre k d'une règle de production, c'est-à-dire les préfixes de taille k des dérivations commençant par cette règle, sont définis par :

$$SD_k(X \to \gamma) = \{m \in \bigcup_{0 \leq i \leq k} A^i\,\$^{k-i} \mid \gamma \Rightarrow^* m\}$$

Les premiers à l'ordre k d'une production γ, c'est-à-dire les préfixes de taille k des dérivations de γ, sont définis par :

$$P_k(\gamma) = \{m \in \bigcup_{0 \leq i \leq k} A^i \mid \gamma \Rightarrow^* m\}$$

Les suivants à l'ordre k d'un non-terminal X, c'est-à-dire les suffixes de taille k de X dans les dérivations de l'axiome, sont définis par :

$$S_k(X) = \{m \in \bigcup_{0 \leq i \leq k} A^i\,\$^{k-i} \mid S' \Rightarrow^* \alpha X m \beta \Rightarrow^* m', \alpha \in (A \cup V)^*, \beta \in (A \cup V \cup \{\$\})^*, m' \in A^*\$^k\}$$

Une grammaire G est LL(k) si et seulement si :

1. G n'est pas récursive à gauche (directement ou indirectement) ;
2. Les symboles directeurs à l'ordre k des différentes règles de production d'un même non terminal sont distincts deux à deux.

Nous nous limitons par la suite à l'ordre $k = 1$.

Soit une grammaire simplifiée des expressions arithmetiques en langage ADA $G_0 = (A, V, E, P)$ composée des non-terminaux $V = \{E, L\}$, de l'axiome E, des terminaux $A = \{$`ident` ( ) ,$\}$ et de l'ensemble P de règles suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
1. & E \to \texttt{ident} \\
2. & E \to E\ (\ L\ ) \\
3. & L \to E\ ,\ L \\
5. & L \to E
\end{array}
$$

1. Construire G_1 la grammaire augmentée à l'ordre 1 de G_0 ;
2. Déterminer les ensembles des symboles directeurs à l'ordre 1 pour les règles de production de G_1 ;

3. Proposer une définition inductive selon la structure des productions qui permettent de calculer mécaniquement les premiers, les suivants et mes symboles directeurs en se limitant à l'ordre 1 ;

4. Est ce que la grammaire G_1 est récursive à gauche ? Si oui, éliminer la récursivité à gauche et construire la grammaire G_2. Si G_1 n'est pas récursive à gauche, alors G_2 est par la suite égale à G_1 ;

5. Calculer les ensembles des premiers et des suivants à l'ordre 1 pour les non-terminaux de G_2 ;

6. Calculer les symboles directeurs à l'ordre 1 associés aux différentes règles de production de G_2 ;

7. G_2 est-elle LL(1) ? Pourquoi ? Si G_2 n'est pas LL(1), transformer G_2 en G_3 pour la rendre LL(1) et calculer les symboles directeurs à l'ordre 1 de G_3 ;

8. Proposer un programme CaML réalisant l'analyse descendante récursive pour la grammaire G_3.

Exercice 3 Soit une grammaire simplifiée des expressions du langage CaML $G = (A, V, E, P)$ composée des non-terminaux $V = \{E\}$, de l'axiome E, des terminaux $A = \{$`ident true false number` $(\,) = + - * /\}$ et de l'ensemble P de règles suivantes :

$$
\begin{array}{rl}
1. & E \rightarrow ER = E \\
2. & E \rightarrow ER \\
3. & ER \rightarrow ER + T \\
4. & ER \rightarrow ER - T \\
5. & ER \rightarrow T \\
6. & T \rightarrow T * F \\
7. & T \rightarrow T \,/\, F \\
8. & T \rightarrow F \\
9. & F \rightarrow - F \\
10. & F \rightarrow (E) \\
11. & F \rightarrow \texttt{ident} \\
12. & F \rightarrow \texttt{true} \\
13. & F \rightarrow \texttt{false} \\
14. & F \rightarrow \texttt{number}
\end{array}
$$

1. Construire une grammaire LL(1) équivalente à G. Calculer les symboles directeurs à l'ordre 1 de ses règles de production.

Thème Automates à pile

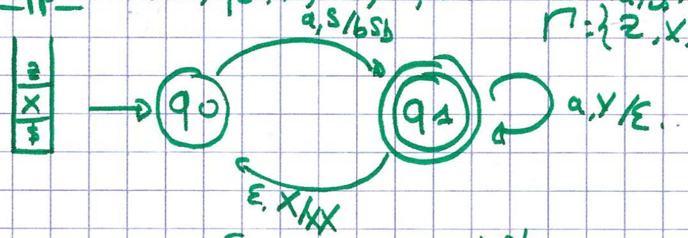
Exercice 1 :

$$\begin{cases} S \longrightarrow \{S\} \\ S \longrightarrow SS \\ S \longrightarrow \Lambda_e \end{cases}$$

$\Sigma = \{;\}$ $\Gamma = S$

$\equiv$ $S \to \Lambda_e$
$S \to \{S\}S$
$S' \to S\$$

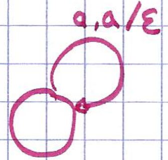
Rappel: $(Q, q_0, F, \Theta, \Gamma, S)$ $\Sigma = \{a, b, \dots\}$
$\Gamma = \{Z, X, \$\}$



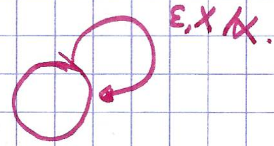
$a\omega, q_0, Sm \to \omega, q_1, bSb$.

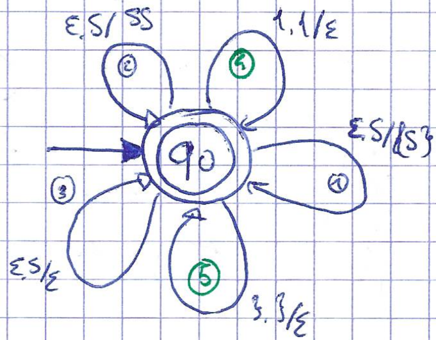
⚠ A retenir

① $\forall a \in \Sigma$



② $\forall X \to \alpha$

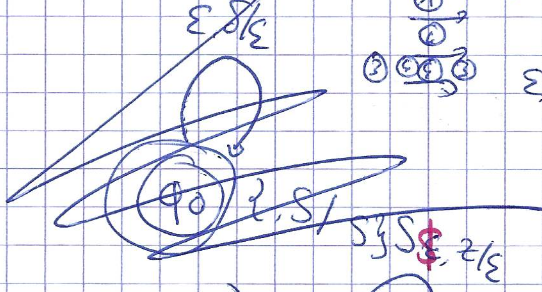




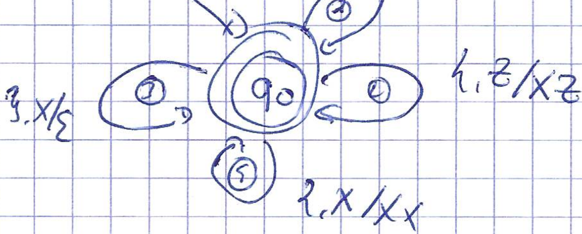
Exemple : $\{\{\}\{\}\}, q_0, S$

$\xrightarrow{②}$ $\{\{\}\{\}\}, q_0, SS$
$\xrightarrow{①}$ $\{\{\}\{\}\}, q_0, \{S\}S.$
$\xrightarrow{④}$ $\{\}\{\}\}, q_0, S\}S$
$\xrightarrow{②}$ $\{\}\{\}\}, q_0, SS\}S$
$\xrightarrow{①}$ $\{\}\{\}\}, q_0, \{S\}S\}S$
$\xrightarrow{④}$ $\}\{\}\}, q_0, S\}S\}S.$
$\xrightarrow{③}$ $\}\{\}\}, q_0, \}S\}S$
$\xrightarrow{⑤}$ $\{\}\}, q_0, S\}S$
$\{S\}S$
$S\}S.$

$\xrightarrow{③④⑤③}$ $\varepsilon, q_0, \varepsilon$



$\Gamma = \{Z, X\}$
S



accept.

Exercice 2 Prem. Succ

~~$P(S\$) = \{\, \$$~~
~~$P(\{S\}S) = \{$~~

$P(\alpha) = \{x \in T \mid \alpha \xrightarrow{*} x\beta\}$
$S(X) = \bigcup_{Y \to \alpha X \beta} \{P(\beta) \mid Y \to \alpha X \beta\} \cup \{S(Y) \mid Y \to \alpha X \beta, \; \beta \xrightarrow{*} \varepsilon\}$
$SD(X \to \alpha) = P(\alpha) \cup_\Lambda S(X)$

~~$S' \to S\$$~~
~~$S \to \{S\}S$~~
~~$S \to \Lambda e$~~
~~$P(S\$) = \{, S$~~

$E' \to E\$$
$E \to ident$
$E \to E(L)$
$L \to E, L$
$L \to E$

$f(a, g(a,b))$

$SD(E' \to E\$) = P(E)$
$SD(E \to ident) = ident$
$SD(X \to \Lambda e) = \$,)$

$\Rightarrow$
$E \to E\$$
$E \to ident\ X$
$X \to \Lambda$
$X \to (L)X$
~~$L \to E, L$~~ $ident\ X\ F$
$F \to \Lambda e$
$F \to , L$

$SD(X \to (L)X) = ($
$SD(X \to \Lambda e) = \$$
$SD(E \to ident\ X) = ident$
$SD(L \to E, L) = ident$
$SD(F \to , L) = ,$
$SD(F \to \Lambda e) = S(F) =)$

	\$	ident	(	,	)
E'		$E' \to E\$$			
E		$E \to ident\ X$			
X	$X \to \Lambda e$		$X \to (L)X$	$X \to \Lambda e$	
L		$L \to ident\ X$			
F				$F \to , L$	$F \to \Lambda e$

$P(a\alpha) = \{a\}$ $P(a) = \{a\}$
$P(\alpha\beta) = P(\alpha) \cup_\Lambda P(\beta)$ $P(X)$