

TP 1

2- Effet d'échantillonnage :

Q4- La fréquence mesurée sur le cosinus tracé n'est pas $f_0 = 1100$ Hz car la fréquence d'échantillonnage ne vérifie pas le critère de Shannon et donc après le filtrage on perd l'information.

La valeur obtenue provient de la valeur $|F_e - f_0| = 100$ Hz

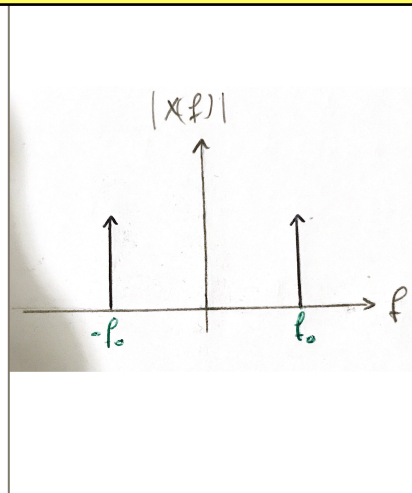
3- Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

Partie I :

Q1-

(a) L'expression de la transformée de Fourier du cosinus $x(t)$ d'amplitude A et de fréquence f_0 est :

$$X(f) = A/2 \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



(b) On a :

Le signal :

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

Le signal échantillonné :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum \delta(t - K T_e)$$

Le signal tronqué :

$$x_{tr}(t) = x_e(t) \cdot \Pi(t - (N-1) \cdot T_e / 2)$$

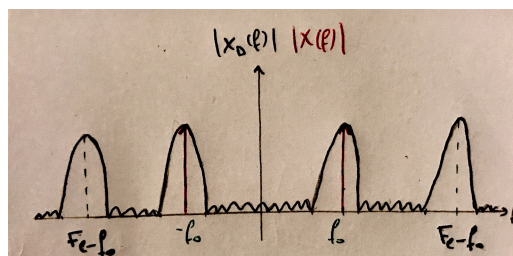
La transformée de Fourier :

$$X_d = X_e(f) * (N-1) \cdot T_e \cdot (\text{sinc}(\pi \cdot (N-1) \cdot T_e \cdot f) \cdot e^{-j\pi f \cdot (N-1) T_e})$$

donc

$$X_d = A/2 T_e \sum \delta(f + f_0 - K/T_e) + \delta(f - f_0 - K/T_e)$$

(C)



• Explication :

- $X(f)$ est la transformée de Fourier théorique du cosinus non échantillonné, donc on retrouve que les pics correspondantes à $\delta(f - f_0)$ et $\delta(f + f_0)$.
- $X(f)$ est la transformée de Fourier théorique de $x(t)$ qui est de durée illimitée contrairement à $X_d(f)$ dans laquelle on voit apparaître des noyaux de Dirichlet qui sont issues de la convolution de $X_c(f)$ avec un sinus cardinale

Q2-

(a) On Remarque que dans la figure 3 on a 2 pics correspondantes à les fréquences : **1123.5 Hz $\approx f_0$** et **8988.7 Hz $\approx F_e - f_0$** mais on remarque la disparition des noyaux de Dirichlet.

(b) Le résultat est cohérent avec le tracé du cosinus obtenu précédemment car après le filtrage on retient que la valeur de la pics correspondante à la fréquence **101.1 Hz $\approx F_e - f_0$** et **910.1 Hz** qui donne la figure 2 après filtrage. Càd le cosinus de fréquence **100 Hz**. Ce résultat est une conséquence du non respect du critère de Shanon.

Partie II :

Q1- Puisque le signal ne peut être à temps continu, on a donc un nombre fini d'échantillons de la TFD, si on considère que l'on calcule, sur une période F_e , un nombre de point de la TFD identique au nombre N de points de signal, on se retrouve avec un calcul de la TFD entre 0 et F_e .

Q2- On a
$$X_d(f) = \sum_{k=0, k=N-1} x(k.T_e).e^{-j2\pi f.k.T_e}$$

Donc

$$X_d(n.F_e/N) = \sum_{k=0, k=N-1} x(k.T_e).e^{-j2\pi.k.n/N}$$

Q3-

(a) On a
$$Y_d(f) = \sum_{k=0, k=M.N-1} y(k.T_e).e^{-j2\pi f.k.T_e}$$

$$Y_d(f) = \sum_{k=0, k=N-1} x(k.T_e).e^{-j2\pi f.k.T_e}$$

Donc

$$Y_d(n.F_e/MN) = \sum_{k=0, k=N-1} x(k.T_e).e^{-j2\pi.k.n/MN}$$

(b) L'expression $Y_d(n.F_e/MN)$ contient le terme en $e^{-j2\pi.k.n/MN}$ tandis que l'expression de $X_d(n.F_e/N)$ contient des termes en $e^{-j2\pi.k.n/N}$. Le tracé de la TFD du signal y est basée sur le calcul de celle-ci sur MN points mais pour le tracé de la TFD du signal x est basé que sur N points. Cette méthode nous permet de retrouver les noyaux de Dirichlet.

Q4- Oui, le tracé obtenu en figure 5 est conforme au résultat théorique établi précédemment pour le module de $X_d(f)$. On remarque qu'on a les deux pics de plus des noyaux de Dirichlet.

Q5- L'intérêt de la technique du Zero Padding est de s'approcher le plus possible du modèle théorique en augmentant le nombre des points entre l'intervalle 0 et F_e .

Q6- D'après l'expression de $X_d(f)$ de la question Q3.1.(b), la valeur maximal tracée correspond $(N-1).A/2$, et d'après le graphe cette valeur est égale à "44.88" ce qui implique $A \approx 1$. Ce maximum correspond à l'abscisse de la fréquence qui est égale à $f_0 \approx 1101 \text{ Hz}$

4- Densité spectrale de puissance :

Q2- Oui, on peut retrouver la fréquence du cosinus généré, en effet, on prend la valeur de la fréquence normalisée qui correspond au premier noyau de dirichlet "**0.11 Hz**" et on la multiplie par la fréquence d'échantillonnage "**10000 Hz**", on retrouve donc la fréquence du cosinus
($f_0 = 0.11 * 10000 = 1100 \text{ Hz}$).

Pour l'amplitude, on ne peut la retrouver.

Q5- La grande différence entre les quatre DSP est l'amplitude, les pics sont presque à la même fréquence normalisée. La méthode du périodogramme dans la question 2 n'est pas consistante, l'estimateur utilisant une estimation non biaisée pour la fonction d'autocorrélation peut donner des valeurs négatives pour la DSP. La méthode du fenêtrage a aussi des inconvénients comme le lissage des variations importantes, et la diminution du pouvoir séparateur. La méthode de Welch est une bonne alternative puisqu'on laisse les fenêtres se recouvrir sur la moitié de leur longueur et la fenêtre de troncature par défaut est celle de Hamming.