

Université de Bordeaux
ENSEIRB - MATMECA

RAPPORT DE TRAVAUX ENCADRÉS DE RECHERCHE

Filière : Mathématiques et Mécanique

Modélisation de la propagation des vagues en milieu littoral

Organisme d'accueil : ENSEIRB - MATMECA

Réalisé par :

Roxana BERGADIEU
Badr CHERQAOU
Jules DUBOST
Saloua EL-ABBADI
Florian MITANCHEY
Rémi MOREL

Sous la direction de :

Nathalie BONNETON (UMR CNRS)
Rodolphe TURPAULT (IMB CNRS)

Soutenu le 18 mai 2022, Devant le jury :

Nathalie BONNETON : UMR CNRS - Encadrant
Rodolphe TURPAULT : IMB CNRS - Encadrant

Année universitaire
2021/2022

Table des matières

Table des figures	2
1 Introduction	5
2 Mise sous forme conservative des équations de Saint-Venant	6
2.1 Équations de Saint-Venant	6
2.2 Forme conservative	7
2.3 Analyse : Cas 1D	7
2.3.1 Valeurs propres	8
2.3.2 États d'équilibre	8
3 Application des volumes finis en dimension 1	9
3.1 Principe des Volumes finis	9
3.2 Système de Saint-Venant à fond plat	10
3.2.1 Schéma de Lax-Friedrich	10
3.2.2 Schéma HLL	11
3.2.3 Schéma de Rusanov	11
3.2.4 Validation du Code Rusanov	12
3.3 Validation Schéma Rusanov et HLL avec solution exacte	12
3.4 Système de Saint-Venant à fond variable	13
3.5 Écoulement avec choc au dessus d'une bosse	14
3.5.1 Nombre de Froude	14
3.5.2 Cas test	14
3.6 Montée en ordre : Rusanov ordre 2	15
4 Application des volumes finis en dimension 2	16
4.1 Description du code	17
4.2 Fichier <i>data.cpp</i>	17
4.3 Fichier <i>mesh2D.cpp</i>	17
4.4 Fichier <i>main.cc</i>	18
5 Partie expérimentale	18
5.1 Déroulement de l'expérience	18
5.2 Exploitation des données	19
5.3 Conditions aux limites	20
5.4 Résultats	22
6 Conclusion	23
7 References	24

Table des figures

1	Mise en évidence de la zone de surf	5
2	Schéma du problème	5
3	Hauteur d'eau dans le cas de la rupture de barrage	10
4	Vérification théorique de Rusanov 1D	12
5	Comparaison des solutions numériques des deux ordres de Rusanov et HLL avec la solution exacte pour $N_x=100$ et $t=0.03$	13
6	Résultat numérique pour schéma de Rusanov avec solution stationnaire et fond en bosse	15
7	Position approximative du transect cross-shore instrumenté lors du déploiement à La Salie (Octobre 2020)	18
8	Topographie le long du transect instrumenté avec la position des différents cap- teurs. Le datum vertical est le nivellement général de la France (NGF, IGN 69) . .	19
9	Hauteur d'eau (hydrostatique) au-dessus des capteurs de pression 1 à 5	19
10	Hauteurs obtenues par les différents capteurs pour une minute	20
11	Hauteurs obtenues par les différents capteurs pour trois minutes	20
12	Condition au bord gauche	21
13	Création de la fonction h_0 à partir des données expérimentales	22
14	Simulation entre $t = 0$ et $t = 2.5$ secondes	22
15	Simulation entre $t = 0$ et $t = 15$ secondes	22

Nomenclature

Symbole	Définition	Unité
d	Hauteur du fond	m
f	Fréquence des capteurs	Hz
\mathcal{F}	Flux numérique	-
h	Distance entre le fond et la hauteur de vague	m
g	Accélération de la pesanteur	$m.s^{-2}$
$h_{initial}$	Hauteur d'eau initiale	m
h_{inter}	Hauteur d'eau intermédiaire	m
h_1	Hauteur d'eau en amont	m
h_2	Hauteur d'eau en aval	m
\mathcal{K}_i	i-ème maille	-
$ \mathcal{K}_i $	Surface de la maille \mathcal{K}_i	m^2
L_j	j-ème maille autour de \mathcal{K}_i	-
\vec{n}_i	i-ème vecteur sortant de la maille \mathcal{K}_i	-
p	Pression	Pa
p_{atm}	Pression atmosphérique	10^5 Pa
q_{diff}	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
$\frac{t_f}{T}$	Temps final	s
\vec{U}	Vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
u	Composante de la vitesse suivant \vec{e}_x	$m.s^{-1}$
v	Composante de la vitesse suivant \vec{e}_y	$m.s^{-1}$
w	Composante de la vitesse suivant \vec{e}_z	$m.s^{-1}$
\tilde{X}	Flucuation de la grandeur X	[X]
\overline{X}	Moyenne de la grandeur X	[X]

Symbole grec	Définition	Unité
Δt	Pas de temps	s
Δx_i	Pas d'espace au point i	m
$\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}$	Frontière entre la maille \mathcal{K}_i et L_j	m
μ	Viscosité dynamique de l'eau	10^{-3} Pa.s
ν	Viscosité cinématique de l'eau	10^{-6} $m^2.s^{-1}$
ρ	Masse volumique de l'eau	10^3 $kg.m^{-3}$
ζ	Hauteur des vagues	m

Résumé

Dans ce projet, la modélisation et la simulation numérique du déferlement des vagues en zone de surf sont étudiées. Cette propagation étant un phénomène complexe d'hydrodynamique. Les équations de Saint-Venant avec topographie sont utiles pour modéliser la propagation des vagues. Les équations obtenues sont résolues numériquement à l'aide d'un code utilisant des schémas volumes finis. Une première partie se concentre sur le cas en 1D, puis l'étude s'élargie au cas en 2D sur des maillages non-structurés. Pour cette étude, des résultats expérimentaux récoltés lors d'une campagne de mesures sur la plage du Truc Vert au Cap Ferret, serviront de référence afin d'analyser la cohérence des résultats numériques.

Abstract

In this project, the modeling and numerical simulation of wave breaking in surf zones are studied. This propagation is a complex hydrodynamic phenomenon. The Saint-Venant equations with topography are useful to model the wave propagation. The obtained equations are then solved numerically with a code using Finite Volume schemes. A first part focuses on the 1D case, then the study is extended to the 2D case on unstructured meshes. For this study, experimental results collected during a measurement campaign on the beach of Truc Vert in Cap Ferret, will be used as reference to analyze the consistency of numerical results.

1 Introduction

La modélisation des phénomènes hydrodynamiques constitue un problème majeur de la mécanique des fluides. On compte parmi ces phénomènes le déferlement des vagues en zone de surf. La zone de surf est la zone d'eau à l'approche des côtes où les vagues alors très raides s'effondrent, il s'agit de déferlement. Dans notre cas, nous considérerons principalement la zone de surf interne car la zone de swash répond à des hypothèses très différentes du reste de l'océan et de la zone de surf interne.

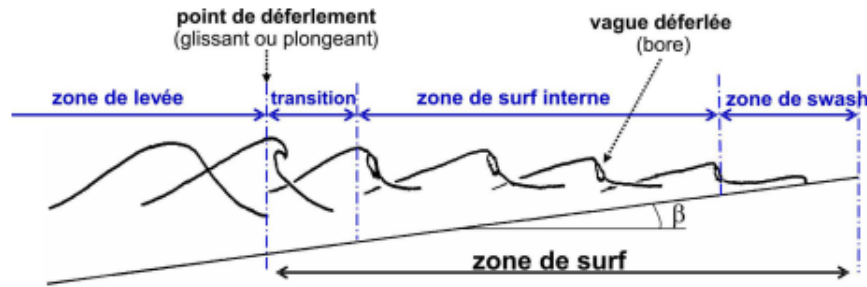


FIGURE 1 – Mise en évidence de la zone de surf

À l'approche des plages et des côtes, la profondeur d'eau diminue causant une augmentation de la hauteur des vagues et une diminution de la longueur d'onde de propagation (zone de levée). Les vagues sont donc de plus en plus arquées et la vitesse des particules d'eau augmente. De plus si la vitesse de l'eau au sommet de la vague dépasse la vitesse de phase de la vague, cela engendre aussi le déferlement. Les vagues déferlées continuent de se propager vers le rivage (zone de surf) et finissent par générer des jets de rive (zone de swash).

Le déferlement dépend donc de la profondeur d'eau mais aussi du profil du fond. En effet, si le profil est incliné, il y aura de la réflexion ce qui atténuera le déferlement.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial h \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U} \otimes \vec{U}) + \vec{\nabla} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = gh \vec{\nabla} d \end{cases} \quad (1)$$

Nous allons utiliser les équations de Saint-Venant ou Nonlinear Shallow Water equations (NSW) car elles sont adaptées à l'étude d'un écoulement à surface libre en milieu peu profond (milieu où la longueur d'onde est très supérieure à la profondeur). Ce système d'équation est intéressant d'un point de vue physique car il donne une relation simple et explicite entre le profil des vagues et la dissipation d'énergie dans la zone de surf.

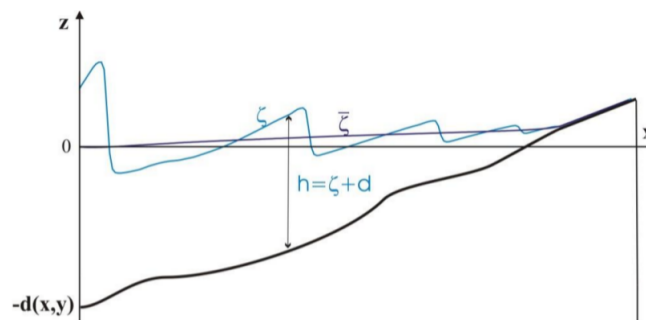


FIGURE 2 – Schéma du problème

2 Mise sous forme conservative des équations de Saint-Venant

La première étape de notre projet est de ré-écrire les équations de Saint-Venant. En effet, en considérant des hypothèses propres à notre sujet, nous allons mettre le système de Saint-Venant sous forme conservative et faire une analyse du cas 1D en déterminant les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

On utilisera les objets mathématiques suivants pour la suite :

- La décomposition de Reynolds : $u = \bar{u} + \tilde{u}$ où u est la vitesse exacte, \bar{u} est la vitesse moyenne et \tilde{u} est la fluctuation de vitesse.
- Le théorème de Leibniz : Soit une fonction f suffisamment régulière sur $[-d; \zeta]$ et D un opérateur différentiel. Nous avons alors

$$D \left(\int_{-d}^{\zeta} f dz \right) = \int_{-d}^{\zeta} D(f) dz + f(\zeta)D(\zeta) - f(-d)D(-d) \quad (2)$$

2.1 Équations de Saint-Venant

La première étape dans l'obtention des équations de Saint-Venant est de partir des équations de Navier-Stokes sous forme conservative :

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{\gamma} + \mu \Delta \vec{U} \quad (3)$$

Où l'on identifie ρ la masse volumique de l'eau, $\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ le vecteur vitesse, $-\vec{\nabla} p$ les

forces de pression, $\rho \vec{\gamma}$ les forces de gravité ajoutées à la force de Coriolis et enfin $\mu \Delta \vec{U}$ les forces de viscosité. Nous déciderons dans la suite de ces travaux de négliger les forces de viscosité ainsi que la force de Coriolis. Nous nous placerons aussi dans l'hypothèse d'un fluide incompressible. En prenant en compte ces hypothèses simplificatrices, nous avons alors les équations suivantes :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{U} \otimes \vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \quad (4)$$

Où \otimes désigne le produit tensoriel. Nous avons alors le terme suivant tel que :

$$\vec{\nabla}(\vec{U} \otimes \vec{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \\ \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \\ \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc en projetant sur les axes \vec{e}_x et \vec{e}_z :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (5)$$

En intégrant ces équations entre $-d$ et ζ , en utilisant la décomposition de Reynolds et le théorème de Leibniz nous obtenons les équations de Saint-Venant sous forme conservative :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{V}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{U}^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{U}\bar{V}}{\partial y} = -gh \frac{\partial d}{\partial x} \\ \frac{\partial h\bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{U}\bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{V}^2}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} = -gh \frac{\partial d}{\partial y} \end{cases} \quad (6)$$

2.2 Forme conservative

Nous souhaitons trouver les vecteurs \vec{U} , $\overrightarrow{s(\vec{U})}$ et le tenseur $\bar{\bar{F}}(\vec{U})$ tels que :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\bar{\bar{F}}(\vec{U})) = \overrightarrow{s(\vec{U})} \quad (7)$$

Grâce à l'équation (6), nous identifions le vecteur \vec{U} par : $\vec{U} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{U} \\ h\bar{V} \end{pmatrix}$

En posant ensuite $\bar{\bar{F}}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} h\bar{U} & h\bar{V} \\ h\bar{U}^2 + g\frac{h^2}{2} & h\bar{U}\bar{V} \\ h\bar{U}\bar{V} & h\bar{V}^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$

et le vecteur second membre $\overrightarrow{s(\vec{U})} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial d}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial d}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Bilan :

$$\boxed{\vec{U} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{U} \\ h\bar{V} \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{F}}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} h\bar{U} & h\bar{V} \\ h\bar{U}^2 + g\frac{h^2}{2} & h\bar{U}\bar{V} \\ h\bar{U}\bar{V} & h\bar{V}^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{s(\vec{U})} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial d}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial d}{\partial y} \end{pmatrix}} \quad (8)$$

2.3 Analyse : Cas 1D

Dans le cas en une seule dimension, l'équation sous forme conservative s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\bar{F}}(\vec{U})) = \overrightarrow{s(\vec{U})} \quad (9)$$

Avec : $\vec{U} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{U} \end{pmatrix}$, $\bar{\bar{F}}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} h\bar{U} \\ h\bar{U}^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{s(\vec{U})} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial d}{\partial x} \end{pmatrix}$

2.3.1 Valeurs propres

Notre but étant de chercher les valeurs propres de la matrice Jacobienne de F en $\vec{U} : J_F(\vec{U})$.

Nous allons dans un premier temps faire le changement de variable suivant : $x_1 = h$ et $x_2 = h\bar{U}$

De ce fait,

$$J_F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gx_1 - \frac{x_2^2}{x_1^2} & 2\frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}$$

En remplaçant avec le vecteur inconnu \vec{U} de notre problème :

$$J_F(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - \bar{U}^2 & 2\bar{U} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Soit λ valeur propre de (10) :

$$\det(\lambda I_2 - J_F(\vec{U})) = \lambda^2 - 2\bar{U}\lambda + \bar{U}^2 - gh$$

Ainsi, la résolution de l'équation du second degré en λ nous donne :

$$\boxed{\lambda_1 = \bar{U} - \sqrt{gh} \quad ; \quad \lambda_2 = \bar{U} + \sqrt{gh}} \quad (11)$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{U} - \sqrt{gh} \end{pmatrix} \quad ; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{U} + \sqrt{gh} \end{pmatrix}} \quad (12)$$

Nous remarquons que l'équation (9) est hyperbolique pour $h \neq 0$. Ainsi, nous pouvons utiliser la méthode des volumes finis seulement si la hauteur d'eau h respecte une propriété de conservation de la positivité.

2.3.2 États d'équilibre

Pour valider notre code, il peut être intéressant de chercher les états d'équilibre du système. En effet, des solutions stationnaires résultent de ces états d'équilibre. Et ces solutions servent à vérifier les méthodes numériques que nous utilisons.

Reprenons l'équation (9) en supposant que les dérivées par rapport au temps sont nulles. Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial h\bar{U}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{U}^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = -gh \frac{\partial d}{\partial x} \end{cases} \quad (13)$$

La première équation nous donne que $h\bar{U} = C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Or en $x = 0$ nous prenons que $(h\bar{U})(x = 0) = h_0\bar{U}_0$.

Ensuite, en injectant ce résultat dans la deuxième équation nous trouvons :

$$-\frac{1}{gh} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_0^2 \bar{U}_0^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = \frac{\partial d}{\partial x} \iff -\frac{1}{gh} \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \frac{h_0^2 \bar{U}_0^2}{h^2} + \frac{\partial h}{\partial x} g h \right) = \frac{\partial d}{\partial x}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{gh} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{h_0^2 \bar{U}_0^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x} (d + h)$$

Or :

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{1}{h^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2h^2} \right)$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_0^2 \bar{U}_0^2}{2gh^2} + d + h \right) = 0$$

Et donc les solutions stationnaires correspondront aux équations suivantes telles que C est une constante :

$$C = \frac{h_0^2 \bar{U}_0^2}{2gh^2} + d + h \quad (14)$$

3 Application des volumes finis en dimension 1

3.1 Principe des Volumes finis

Nous considérons le système sous forme conservative en U déterminé dans le paragraphe *Forme conservative* :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\vec{F}(\vec{U})) = \vec{S}(\vec{U}) \quad (15)$$

Nous voulons approcher sa solution $U(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Notre système sous sa forme conservative se prête particulièrement bien à sa résolution par la méthode de volumes finis. Nous considérons une grille de points $(x_{i-\frac{1}{2}})$ puis nous découpons l'espace en mailles $C_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ centrées sur x_i et de longueur $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} > 0$.

Nous considérons ensuite un pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n > 0$ et une discrétisation temporelle $t_n = n\Delta t$ puis nous intégrons le système considéré sur chaque maille et sur un pas de temps faisant apparaître les moyennes des solutions sur chaque maille.

$$U_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} U(t_n, x) dx \text{ et } F_{i+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{i+\frac{1}{2}})) dt \quad (16)$$

Nous obtenons des solutions constantes par morceaux (et donc discontinues) et des termes de bords (autrement dit, les flux échangés entre les mailles au niveau de leurs frontières ou interface). Ainsi, due à la conservation du système et de l'algorithme, le flux sortant d'une maille est égal à celui qui rentre dans la maille voisine. Pour résoudre ce système, nous utilisons le schéma volume fini suivant avec une méthode d'Euler Explicite en temps :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) = 0 \quad (17)$$

Le flux $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$ (respectivement $\mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n$) représente le flux numérique à l'interface entre les mailles C_i et C_{i+1} (respectivement C_{i-1} et C_i). Ces flux aux interfaces font intervenir les valeurs des variables aux interfaces, qui ne sont pas connues. Ils sont définis par la formule suivante :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(U_{i-k+1}, U_{i-k-1}, \dots, U_{i+k})$$

On définit ainsi le flux en $x_{i+\frac{1}{2}}$ à partir des valeurs des variables aux noeuds du maillage

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(U_{i+1}, U_i) \quad \forall i$$

3.2 Système de Saint-Venant à fond plat

3.2.1 Schéma de Lax-Friedrich

Nous commençons notre résolution par l'utilisation du schéma de Lax-Friedrich car il est relativement simple à implémenter, nous permettant ainsi d'obtenir une première idée du profil des solutions à obtenir malgré son caractère fortement diffusif (coefficient de diffusion $q_{diff} = 1$).

Nous considérons le flux suivant :

$$\mathcal{F}(U, V) = \frac{1}{2}(F(U) + F(V)) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(V - U) \quad (18)$$

Le schéma de Lax-Friedrich s'exprime donc sous la forme :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n)) \quad (19)$$

Nous imposons une solution initiale créneau pour une hauteur et une vitesse initiale nulle. Il s'agit d'un cas de référence dont nous connaissons le résultat.

$$h(0, x) = \begin{cases} 5 & \text{pour } 0 \leq x \leq 5 \text{ m} \\ 2 & \text{pour } 5 \leq x \leq 10 \text{ m} \end{cases} \quad \text{et} \quad u(0, x) = 0 \text{ m.s}^{-1} \quad (20)$$

Nous remarquons que ce schéma est bien conservatif et consistant car \mathcal{F} est Lipschitzienne et $\mathcal{F}(U, U) = F(U)$.

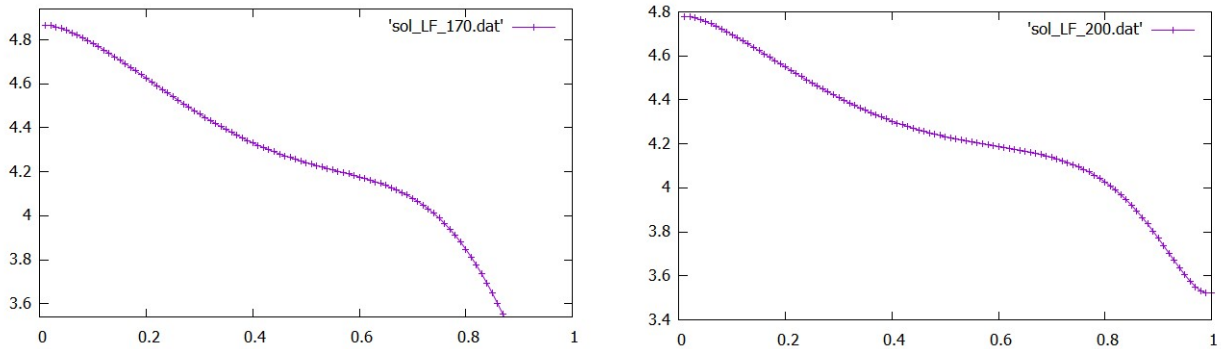


FIGURE 3 – Hauteur d'eau dans le cas de la rupture de barrage

Dans le cas d'un barrage, nous observons une détente liant la hauteur d'eau en amont de la retenue $h_1 = 5 \text{ m}$ à une valeur intermédiaire de l'ordre de $h_{inter} = 4,2 \text{ m}$, suivi d'un choc liant h_{inter} à une hauteur d'eau en aval $h_2 = 3 \text{ m}$. A cause du caractère diffusif du schéma, nous nous apercevons que la hauteur en aval s'est décalée par rapport à la hauteur en aval initiale égale à 2 m . Il nous faudra donc changer ce schéma par un plus performant et moins diffusif.

3.2.2 Schéma HLL

Le flux HLL s'écrit de la forme :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) & \text{si } 0 \leq c_1 \\ \frac{c_2 F(U_G) - c_1 F(U_D)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (U_D - U_G) & \text{si } c_1 \leq 0 \leq c_2 \\ F(U_D) & \text{si } c_2 \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Avec

$$\begin{cases} c_1 = \inf_{U=U_G, U_D} \left(\inf_{j \in \{1,2\}} \lambda_j(U) \right) \\ c_2 = \sup_{U=U_G, U_D} \left(\sup_{j \in \{1,2\}} \lambda_j(U) \right) \end{cases} \quad (22)$$

3.2.3 Schéma de Rusanov

Nous rappelons de manière générale que :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = F(U_{i+1}^n, U_i^n) \quad (23)$$

Pour le schéma de Rusanov, nous allons considérer le flux suivant :

$$\mathcal{F}(U, V) = \frac{F(U) + F(V)}{2} - c \frac{V - U}{2}, \quad \text{et} \quad c = \sup_{W=U, V} \left(\sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(W)| \right) \quad (24)$$

Où $\lambda_1(U)$ et $\lambda_2(U)$ sont les valeurs propres calculées précédemment (voir équation (11)).

Posons la quantité suivante :

$$\gamma = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U_i)| \right) \quad (25)$$

Le schéma de Rusanov est stable sous la condition CFL suivante :

$$\frac{2\gamma \Delta t^n}{\Delta x} \leq 1 \quad (26)$$

Nous obtenons finalement le schéma de Rusanov tel que :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left(\frac{F(U_{i+1}^n) + F(U_i^n)}{2} - c \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{2} \right) \quad (27)$$

Une particularité de ce schéma est que Δt varie à chaque itération, d'où la notation Δt^n . Nous pouvons par exemple prendre à chaque itération $\Delta t = 0.9 \text{ CFL}$.

Pour vérifier notre algorithme, nous avons une solution pour un problème précis : la rupture de barrage. Nous devons avoir une succession de détente et de choc avec un choc qui se déplace vers la gauche et un choc qui se déplace vers la droite

Nous avons utilisé comme paramètre un nombre de maille de 100 et comme condition initial $h_1 = 5$ sur l'intervalle $[0,5]$ et $h_2 = 2$ sur l'intervalle $[5,10]$. Comme nous l'avons dit, le pas de

temps n'est pas fixe, donc pour initialiser notre code, nous avons pris au départ $dt = 0.001$.

On voit donc bien une propagation du choc dans les deux sens. Ceci est donc une première vérification de notre code qui se révèle satisfaisante.

3.2.4 Validation du Code Rusanov

On va, dans ce paragraphe, valider le schéma de Rusanov avec la théorie.

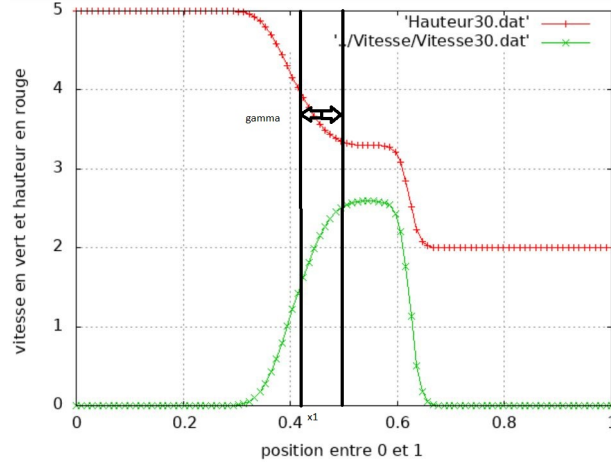


FIGURE 4 – Vérification théorique de Rusanov 1D

Dans un premier temps, il s'agit de vérifier que l'écart entre l'abscisse de la rupture initiale x_0 et son abscisse x_1 à t_f est égale à $\gamma = t_f(u^* - \sqrt{gh^*})$. Avec u^* et h^* respectivement la vitesse et la hauteur en x_0 à $t_f = 0.19$. Sur la figure (4), l'échelle d'abscisse est ramenée entre 0 et 1 au lieu de 0 et 10. Nous avons donc :

$$x_0 = 5, \quad x_1 = 4.3 \pm 0.2 \quad \text{et} \quad \gamma = 0.606$$

D'où $x_0 - \gamma = 4.394$ qui appartient bien à l'intervalle d'erreur de x_1 .

3.3 Validation Schéma Rusanov et HLL avec solution exacte

Pour le cas test de la rupture de barrage, nous savons qu'il existe une solution analytique exacte. Trouver cette dernière revient à résoudre un polynôme de degré 6 qui nous permet de trouver l'expression exacte de la solution numérique. Ceci a été établi dans la littérature. Nous nous sommes servi des expressions suivantes :

— Cas sol mouillé :

$$h(x, t) = \begin{cases} h_l & \text{si } x \leq x_A(t) \\ \frac{4}{9g} \left(\sqrt{gh_l} - \frac{x - x_0}{2t} \right)^2 & \text{si } x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ \frac{c_m^2}{9} & \text{si } x_B(t) \leq x \leq x_C(t) \\ h_r & \text{si } x_C(t) \leq x \end{cases} \quad (28)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_A(t) \\ \frac{2}{2} \left(\frac{x - x_0}{t} + \sqrt{gh_l} \right) & \text{si } x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ 2(\sqrt{gh_l} - c_m) & \text{si } x_B(t) \leq x \leq x_C(t) \\ 0 & \text{si } x_C(t) \leq x \end{cases} \quad (29)$$

avec
$$\begin{cases} x_A(t) = x_0 - t\sqrt{gh_l} \\ x_B(t) = x_0 + t(2\sqrt{gh_l} - 3c_m) \\ x_C(t) = x_0 + t\left(\frac{2c_m^2(\sqrt{gh_l} - c_m)}{c_m^2 - gh_r}\right) \end{cases} \quad \text{et } c_m \text{ solution de l'équation polynomiale}$$

suivante :

$$-8gh_rc_m^2(\sqrt{gh_l} - c_m)^2 + (c_m^2 - gh_r)^2(c_m^2 + gh - r)$$

Nous obtenons donc les figures ci-dessous afin de nous assurer de la consistance de notre solution approchée et de comparer la montée en ordre de Rusanov. Nous pouvons remarquer que la convergence de Rusanov d'ordre 2 est plus visible comparée à Rusanov d'ordre 1.

Grâce à la figure suivante, nous pouvons constater d'une part que les deux courbes convergent vers la solution exacte et que d'autre part le schéma de Rusanov d'ordre deux est plus précis que celui d'ordre un. Le schéma HLL d'ordre 1 offre des résultats similaires à Rusanov d'ordre 1 car HLL est un cas particulier de Rusanov.

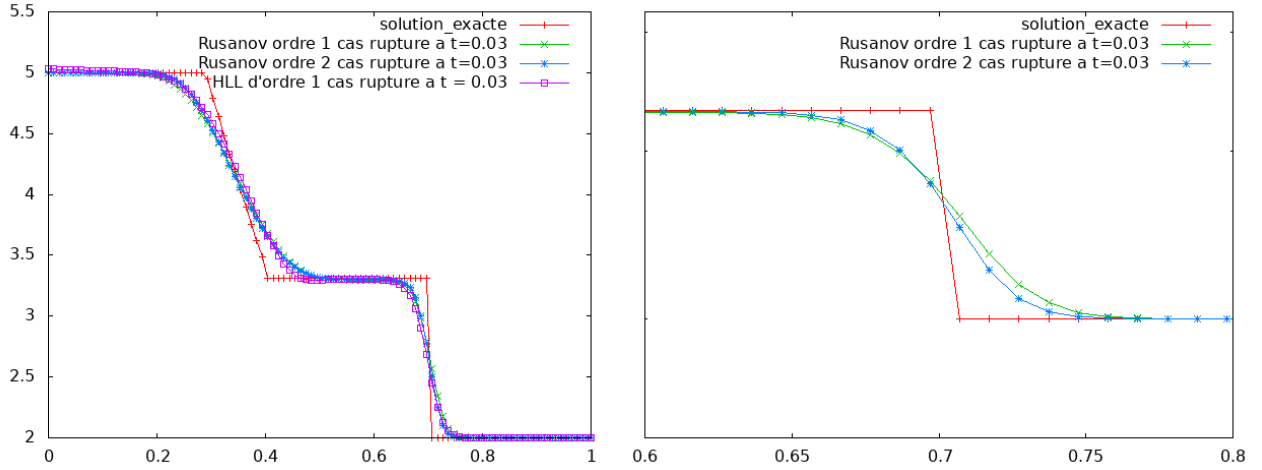


FIGURE 5 – Comparaison des solutions numériques des deux ordres de Rusanov et HLL avec la solution exacte pour $N_x=100$ et $t=0.03$

3.4 Système de Saint-Venant à fond variable

Comme nous l'avons précisé précédemment, le fond joue un rôle fondamental dans le déferlement des vagues. En prenant en compte la topographie du fond de l'océan le système d'équation comprend un terme source et devient :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) = -gh\partial_x z \end{cases} \quad (30)$$

Où $z(x)$ est la fonction constante dans le temps qui représente le profil 1D du fond de l'océan.

On écrit de nouveau ce système :

$$\partial_t U + \partial_x F(U, Z) - S(U) = 0 \quad (31)$$

En posant $S(U) = -B(U, Z)\partial_x Z$ cela donne :

$$\partial_t U + \partial_x F(U, Z) + B(U, Z)\partial_x Z = 0 \quad (32)$$

$$\text{avec : } \vec{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \bar{F}(\vec{U}, Z) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{S(\vec{U})} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial d}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$B(U, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh \end{pmatrix}, \quad Z = gz$$

Le problème dépend de Z qui va donc intégrer le flux de la forme : $\mathcal{F}_{i+1/2}^n = F(U_i^n, Z_i, U_{i+1}^n, Z_{i+1})$.

3.5 Écoulement avec choc au dessus d'une bosse

3.5.1 Nombre de Froude

Pour étudier ce cas-ci, il est nécessaire d'introduire un nombre adimensionnel : le nombre de Froude, noté Fr . Ce nombre correspond à la compétition entre les forces d'inertie et les forces de gravité. Mathématiquement, nous avons :

$$Fr^2 = \frac{U^2}{gh} \quad (33)$$

On peut associer différents types d'écoulements à ce nombre :

- Régime fluvial : $Fr < 1$. Ce régime est caractérisé par le fait que les ondes de surface se déplacent plus rapidement que l'écoulement du fluide.
- Régime critique : $Fr = 1$. Pour un nombre de Froude unitaire, la célérité des ondes de surface est égale à la célérité de l'écoulement du fluide.
- Régime torrentiel : $Fr > 1$. Pour ce régime, la célérité des ondes de surface est plus rapide que celle de l'écoulement du fluide.

Physiquement, les valeurs propres de la jacobienne correspondent à la célérité des ondes de surface λ^+ et λ^- (voir l'équation (11)). Si $|u| < \sqrt{gh}$ alors ces deux vitesses sont de signes opposés : nous parlons alors de régime fluvial. Au contraire, si $|u| > \sqrt{gh}$ alors les vitesses sont de même signe et nous parlons de régime torrentiel.

3.5.2 Cas test

Nous effectuons un cas test dans lequel nous mettons comme condition initiale que $h + d = 5 \text{ m}$ et $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$ et comme conditions aux limites que : en aval $h = 5 \text{ m}$ et en amont $hu = 4.42 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Nous construisons une ellipse (qui nous servira de bosse) d'équation :

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 3.5 \\ 4\sqrt{0.25 - (x - 4)^2} & \text{si } 3.5 < x < 4.5 \\ 0 & \text{si } x > 4.5 \end{cases} \quad (34)$$

Nous utilisons un schéma d'Euler Explicite en temps et un schéma de Rusanov en espace, le tout à l'ordre 1. Nous obtenons le schéma suivant :

Tout d'abord, nous remarquons bien que lorsque la hauteur du sol d augmente, la hauteur d'eau diminue, comme l'indique l'équation (14). De plus, le régime est fluvial en amont et en aval de la bosse alors qu'il est torrentiel au dessus de la bosse.

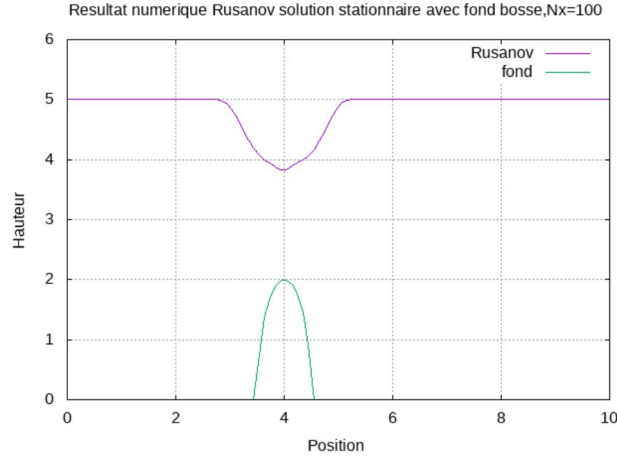


FIGURE 6 – Résultat numérique pour schéma de Rusanov avec solution stationnaire et fond en bosse

3.6 Montée en ordre : Rusanov ordre 2

Afin d'éviter d'augmenter le nombre de mailles et le pas de temps, c'est à dire, éviter un trop grand nombre de calculs, nous passons à l'ordre 2. En effet, grâce à l'ordre 2, notre solution sera plus précise que l'ordre 1, pour un nombre de mailles donné et un pas de temps donné. On peut construire l'ordre 2 grâce au flux d'ordre 1.

Pour l'ordre 1 nous avons une solution constante par maille. Or, pour l'ordre 2, nous construisons un polynôme d'ordre 1 par maille. Nous avons :

$$U_i(x) = U_i^n + (x - x_i)p_i \quad (35)$$

Tel que p_i est la pente, nous prenons par exemple $p_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x}$. Soit le flux numérique à 2 points d'ordre 1 : $F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_i, U_{i+1})$. Pour avoir de l'ordre 2 nous choisissons que $F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}^-, U_{i+\frac{1}{2}}^+)$ tel que la solution $U_{i+\frac{1}{2}}^+$ soit déduite du polynôme de la maille \mathcal{K}_{i+1} .

Soit $\tilde{U}(x_i)$ la valeur du polynôme construit au point x_i . Nous avons :

$$\begin{cases} U_{i+\frac{1}{2}}^- = \tilde{U}_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = U_i + \frac{\Delta x}{2} p_i = \frac{1}{2}(U_{i+1} + U_i) \\ U_{i+\frac{1}{2}}^+ = \tilde{U}_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}}) = U_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} p_{i+1} = \frac{3U_{i+1} - U_i}{2} \end{cases} \quad (36)$$

Le flux d'ordre 2 en espace correspondant est stable sous la condition $\frac{CFL}{2}$. Pour l'instant, comme le schéma numérique en temps est la méthode des rectangles à gauche, le schéma en temps est d'ordre 1.

Le problème qui se pose est que pour des schémas d'ordre supérieur à 1, il y a forcément la présence d'oscillations. Pour éviter ces oscillations, qui se trouvent au voisinage des discontinuités, nous repassons à l'ordre 1 lorsque la solution n'est pas régulière.

Nous utilisons la méthode de MUSCL dont l'idée est d'écrire :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^1 + \phi(\theta)(F_{i+\frac{1}{2}}^2 - F_{i+\frac{1}{2}}^1) \quad (37)$$

Avec θ l'indicateur de raideur tel que $\theta = \frac{U_{i+1} - U_i}{U_i - U_{i-1}}$, F^1 le flux d'ordre 1 et F^2 le flux d'ordre 2.

On veut que :

- Si la solution régulière de θ est proche de 1 alors ϕ vaut 1 et nous gardons l'ordre 2
- Si la solution régulière de θ est loin de 1 alors ϕ est nul et nous gardons l'ordre 2

Pour cela, nous introduisons l'opérateur :

$$\phi = \minmod(p_{i+1}, p_i) = \minmod\left(\frac{U_{i+2} - U_{i+1}}{\Delta x}, \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x}\right) \quad (38)$$

Avec :

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x, y \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (39)$$

De ce fait, notre reconstruction est de la forme :

$$\begin{cases} U_{i+\frac{1}{2}}^- = U_i + \frac{\Delta x}{2}\phi \\ U_{i+\frac{1}{2}}^+ = U_i - \frac{\Delta x}{2}\phi \end{cases} \quad (40)$$

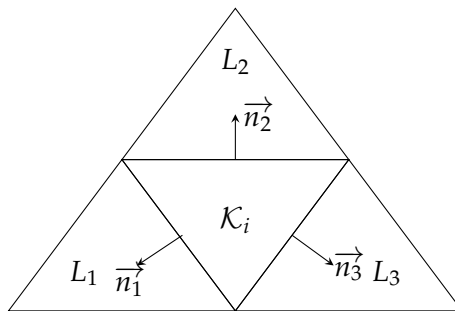
4 Application des volumes finis en dimension 2

Comme vu en partie théorique, nous avons l'équation d'advection suivante :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{div}(\vec{F}(\vec{U})) = \vec{S}(\vec{U}) \quad (41)$$

$$\text{avec } \vec{U} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{U} \\ h\bar{V} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} h\bar{U} & h\bar{V} \\ h\bar{U} + g\frac{h^2}{2} & h\bar{U}\bar{V} \\ h\bar{U}\bar{V} & h\bar{V}^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{S}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial d}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial d}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Nous allons donc se donner un espace carré et le mailler avec des triangles. Nous allons considérer ici la maille intérieure \mathcal{K}_i :



Nous allons ici intégrer l'équation (41) sur la maille \mathcal{K}_i et par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_i} \int_t \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dS dt + \int_{\mathcal{K}_i} \int_t \vec{div} \vec{F}(\vec{U}) dS dt &= \int_{\mathcal{K}_i} \int_t \vec{S}(\vec{U}) dS dt \\ \iff \int_{\mathcal{K}_i} \vec{U}(\vec{x}, t_{n+1}) - \vec{U}(\vec{x}, t_n) dS + \int_{\Gamma_{\mathcal{K}_i}} \int_t \vec{F}(\vec{U}) \cdot \vec{n} dS dt &= \int_{\mathcal{K}_i} \int_t \vec{S}(\vec{U}) dS dt \end{aligned}$$

(Green-Ostrogradski)

Nous allons maintenant utiliser un schéma explicite et l'approximation suivante :

$$\vec{U}_i^h = \frac{1}{|\mathcal{K}_i|} \int_{\mathcal{K}_i} \vec{U}(\vec{x}, t_n) dS \quad (42)$$

Nous obtenons alors l'équation :

$$\vec{U}_i^{n+1} - \vec{U}_i^h + \frac{\Delta t}{|\mathcal{K}_i|} \int_{\Gamma_{\mathcal{K}_i}} \bar{F}(\vec{U}(\vec{x}, t_n)) \cdot \vec{n} dS = dt \vec{S}_i^n \quad (43)$$

Nous allons maintenant détailler le terme de flux. Nous avons :

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{K}_i}} \bar{F}(\vec{U}(\vec{x}, t_n)) \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}} \bar{F}(\vec{U}(\vec{x}, t_n)) \cdot \vec{n}_j \quad (44)$$

Nous écrivons de nouveau l'équation (43) par :

$$\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^h - \frac{\Delta t}{|\mathcal{K}_i|} \sum_{j=1}^3 |\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}| \times \frac{1}{|\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}|} \int_{\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}} \bar{F}(\vec{U}(\vec{x}, t_n)) \cdot \vec{n}_j + dt \vec{S}_i^n \quad (45)$$

Nous posons \mathcal{F} le flux numérique défini par l'équation suivante :

$$\mathcal{F}(\vec{U}_i^h, \vec{U}_j^h, \vec{n}_j) \approx \frac{1}{|\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}|} \int_{\Gamma_{\mathcal{K}_i L_j}} \bar{F}(\vec{U}(\vec{x}, t_n)) \cdot \vec{n}_j \quad (46)$$

Nous allons donc utiliser le flux de Rusanov :

$$\mathcal{F}(\vec{U}_i^h, \vec{U}_j^h, \vec{n}_j) = \frac{\bar{F}(\vec{U}_i^h) \cdot \vec{n}_j + \bar{F}(\vec{U}_j^h) \cdot \vec{n}_j}{2} - c \frac{\vec{U}_j^h - \vec{U}_i^h}{2} \quad \text{avec} \quad c = \sup_{i=1,2} \left(\sup_{\mathcal{K} \in \{G,D\}} (|\lambda_{\mathcal{K}}^i|) \right) \quad (47)$$

$$\text{où} \begin{cases} \lambda_G^1 = \vec{u}_1^h \cdot \vec{n} + \sqrt{gh} \\ \lambda_G^2 = \vec{u}_1^h \cdot \vec{n} - \sqrt{gh} \end{cases}.$$

4.1 Description du code

Le code se subdivise en trois programmes complémentaires : le fichier *main.cc* et les fichiers *data.cpp* et *mesh2D.cpp*.

4.2 Fichier *data.cpp*

Le fichier *data.cpp* permet de transcrire les informations contenues dans le fichier *data.toml* pour les utiliser dans le code. Comme par exemple, les différentes conditions aux limites, le pas de temps, ou encore le maillage à choisir.

4.3 Fichier *mesh2D.cpp*

Le fichier *mesh2D.cpp* permet de lire les informations du fichier engendré par *GMSH* ainsi que de lire tous les paramètres associés à ce maillage comme la longueur des arêtes, l'aire de chaque triangle, les normales sortantes à chaque arête. Toutes ces données seront utilisées pour le reste du code.

4.4 Fichier *main.cc*

Nous avons décidé de ne pas utiliser plusieurs classes mais de coder, dans ce fichier, toutes les fonctions liées aux pas de temps et d'espace.

Nous avons commencé par initialiser les valeurs propres, la condition CFL, ainsi que la solution \vec{U} . Ensuite nous calculons le flux $\vec{F}(\vec{U})$ et le flux de Rusanov visible dans l'équation (46). Une fois que nous avons toutes ces valeurs nous allons débiter par calculer la somme de l'équation (44). Pour cela, nous avons décidé d'utiliser une boucle sur les arêtes et non sur les triangles. En effet, ceci nous permet de ne pas avoir à calculer deux fois chaque flux. Nous prenons une arête, nous calculons le flux pour un des deux triangles voisins, puis nous obtenons le flux du deuxième triangle en rajoutant un signe inverse devant la valeur obtenue.

Après cela, la fonction *Step* nous permet de calculer la solution \vec{U}_i^{n+1} de l'équation (44) pour un instant donné. Et enfin, la fonction *Solve*, nous permet d'obtenir l'équation pour tout t .

5 Partie expérimentale

5.1 Déroulement de l'expérience

Nous aurions dû effectuer une campagne de mesure sur la plage du Truc Vert, au Cap Ferret sur la côte Atlantique. Le principe de cette expérience est de récupérer des valeurs de pressions lors de trois marées. Pour cela, cinq capteurs de pression et un courantmètre ont été placés à marée basse le long d'un transect cross-shore sur la plage pour observer la propagation d'une vague lors de la marée.



FIGURE 7 – Position approximative du transect cross-shore instrumenté lors du déploiement à La Salie (Octobre 2020)

Les capteurs étaient distant de 5 mètres les uns des autres. Nous nous intéressons aux trois capteurs les plus près de la plage qui sont des capteurs synchronisés mesurant la pression à 16 Hz. En effet, ces capteurs, dont l'offset de pression relative est déterminé par un DataLogger qui mesure la pression atmosphérique p_{atm} , calculent la profondeur de l'eau qui se trouve au dessus d'eux. Il nous faudra ajouter, à cette hauteur, la hauteur d'eau entre le sol et la membrane des capteurs.

$$h_{hyd} = \frac{p - p_{atm}}{\rho g} \quad (48)$$

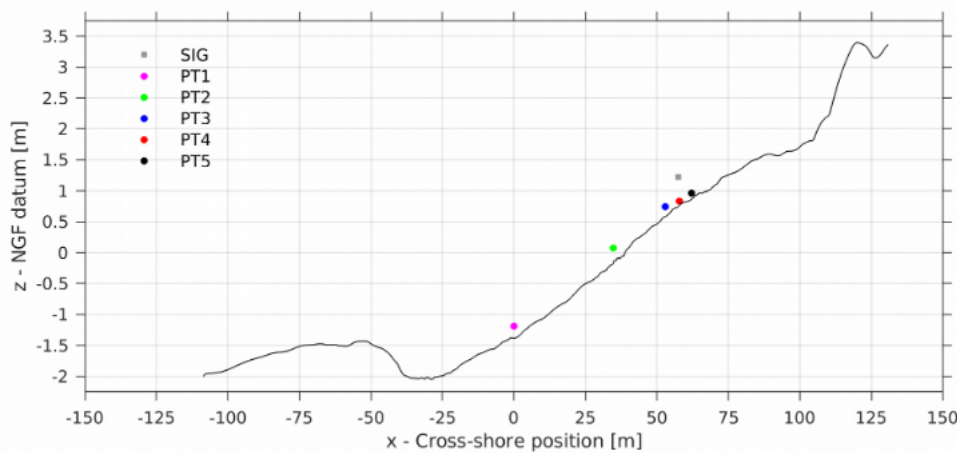


FIGURE 8 – Topographie le long du transect instrumenté avec la position des différents capteurs. Le datum vertical est le nivellement général de la France (NGF, IGN 69)

5.2 Exploitation des données

Comme nous n'avons pas pu réaliser l'expérience par nous même, un fichier .mat nous a été transmis. Dans un premier temps, comme ce fichier n'était pas compatible avec un logiciel de traitement de texte, un code Python a été réalisé afin d'extraire du fichier .mat les valeurs des hauteurs d'eau des capteurs 3,4,5 et de les mettre dans un nouveau fichier .txt.

Ensuite, à partir de ce fichier .txt, 3 nouveaux fichiers ont été créés permettant, en commençant à la ligne 1 544 631, d'ajouter la hauteur entre le sable et le capteur aux hauteurs enregistrées par chaque capteur. Dans le cas étudié, la valeur du delta prise pour le capteur 3 est de 0.15 m, pour le capteur 4 de 0.04m et pour le capteur 5 $\delta = 0.04m$. Ces nouveaux fichiers contiennent aussi une colonne dédiée au temps tels que, entre chaque valeur de hauteur, une durée de $t = \frac{1}{f} = \frac{1}{16}$ secondes s'est écoulée.

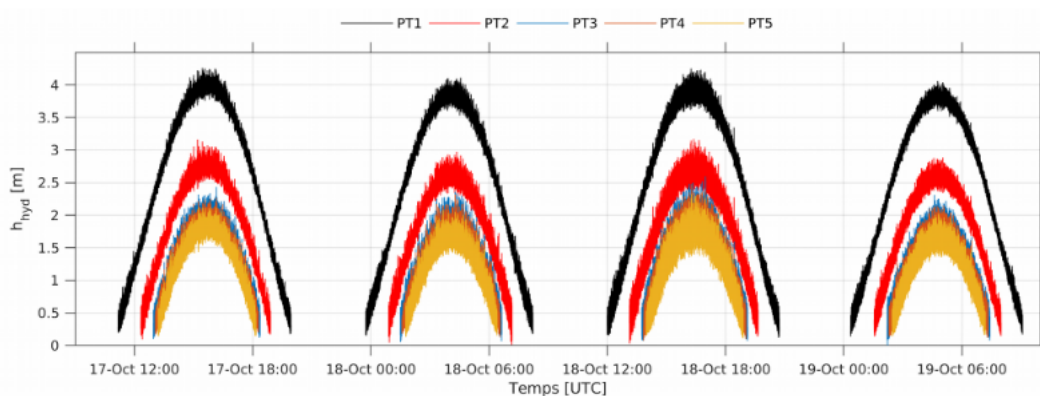


FIGURE 9 – Hauteur d'eau (hydrostatique) au-dessus des capteurs de pression 1 à 5

Pour vérifier la cohérence des valeurs récoltées par chaque capteur, les données pour la première ainsi que pour les trois premières minutes vont être tracées. Pour ne prendre en compte

que la hauteur de la vague il faut enlever la tendance de la marée. De ce fait, une fonction qui permet d'écrire un script gnuplot pour faire la régression linéaire $f(x) = ax + b$ à partir d'un fichier a été créée. A partir de cette fonction, le coefficient directeur a de la droite est récupéré et il suffit d'afficher $h - a.t$ avec h la hauteur.

Les courbes suivantes sont obtenues :

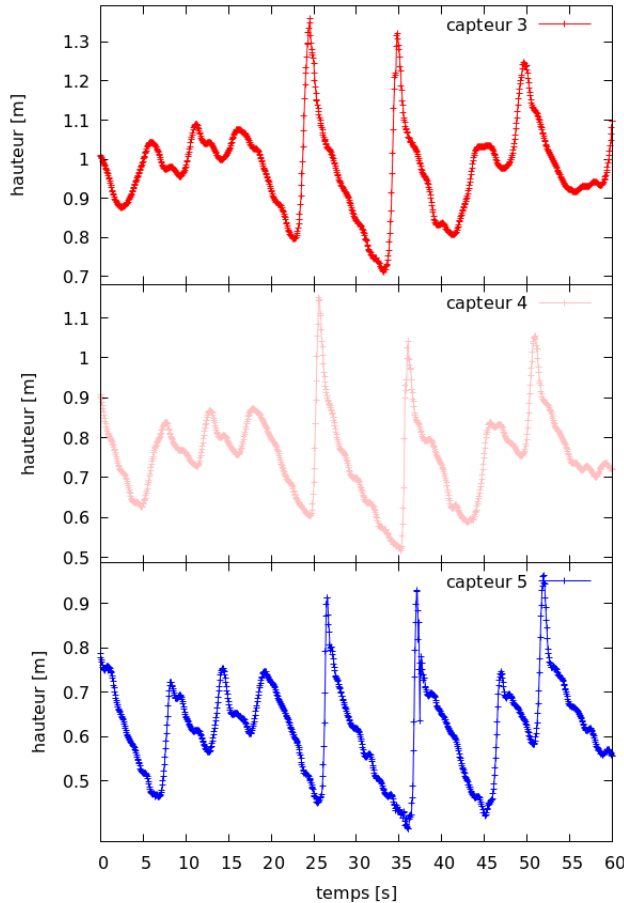


FIGURE 10 – Hauteurs obtenues par les différents capteurs pour une minute

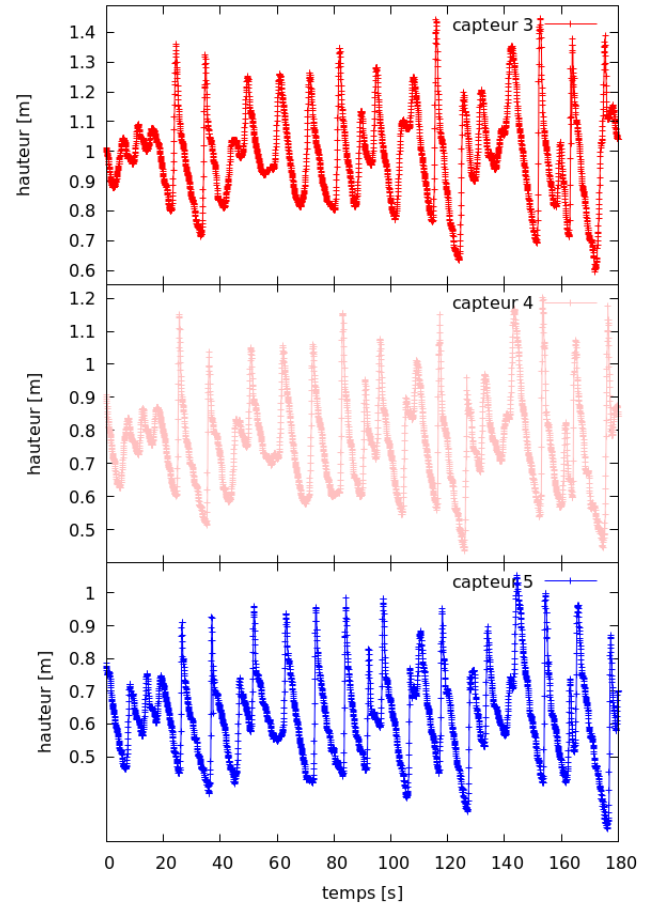


FIGURE 11 – Hauteurs obtenues par les différents capteurs pour trois minutes

Nous remarquons bien la propagation de la vague entre les différents capteurs, le capteur 5 étant le plus proche de la plage.

Une fois ce travail fait, il suffit de reprendre les codes pour faire la même chose sur 10 minutes. Ceci donnera les conditions aux bords pour h et il faudra faire la méthode des caractéristiques pour trouver u et avoir la condition aux bords de hu .

Les données du capteur 3 nous servent de condition d'entrée et, ensuite, nous nous servons des données des capteurs 4 et 5 pour valider notre simulation. En effet, nos résultats numériques doivent concorder avec ces données.

5.3 Conditions aux limites

Il nous faut imposer des conditions aux limites. En effet, le domaine de calcul est fini.

Pour les conditions aux limites à droite Nous prenons : $h = h_{initial}$ et $u = 0$.

En effet nous considérons qu'il y a une plage à droite et donc la terre ferme. Nous ne considérons donc plus le domaine liquide.

Pour les conditions aux limites à gauche Nous allons déduire la hauteur grâce aux données expérimentales et la vitesse grâce à la méthode des caractéristiques.

En effet, grâce à la méthode des caractéristiques et en s'intéressant à l'équation pour $\lambda = u - \sqrt{gh}$ (qui est une des vitesses de propagation des ondes à la surface du fluide) et $\beta = u - 2\sqrt{gh}$ (qui est un des invariants de Riemann du système de Saint-Venant en 1D), nous obtenons que :

$$\partial_t \beta + \lambda \partial_x \beta = -gp \quad (49)$$

En considérant que $\frac{dx}{dt} = \lambda : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{gh} \\ \frac{d\beta}{dt} = -gp \end{cases}$

Et donc, nous nous intéressons aux équations suivantes :

$$\begin{cases} 0 - x_e = (u(x_e, t^n) - \sqrt{gh(x_e, t^n)}) \Delta t + O(\Delta t^2) \\ \beta(x_0, t^{n+1}) = \beta(x_e, t^n) - gp \Delta t + O(\Delta t^2) \end{cases} \quad (50)$$

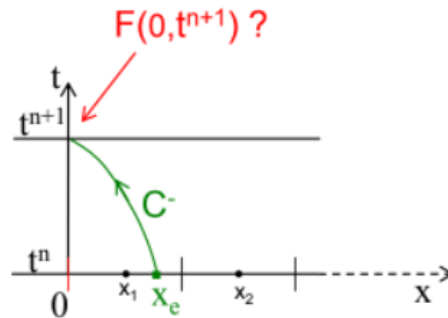


FIGURE 12 – Condition au bord gauche

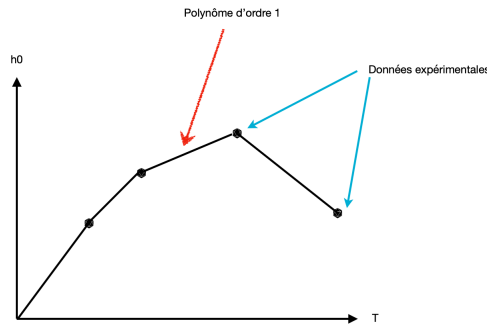
Grâce à la première équation, et à une interpolation linéaire sur $u(x_e, t^n)$ et sur $h(x_e, t^n)$, nous trouvons que x_e est solution d'un polynôme du second ordre.

Avec la deuxième équation nous déduisons $u(x_0, t^{n+1})$ en sachant que $\beta(x_0, t^{n+1}) = u(x_0, t^{n+1}) - 2\sqrt{gh(x_0, t^{n+1})}$. Ainsi nous trouvons que :

$$u(x_0, t^{n+1}) = u(x_1, t^n) - (u(x_2, t^n) - u(x_1, t^n))A - 2\sqrt{g(h(x_1, t^n) - (h(x_2, t^n) - h(x_1, t^n))A)} - gp\Delta t + 2\sqrt{gh(x_0, t^{n+1})} \quad (51)$$

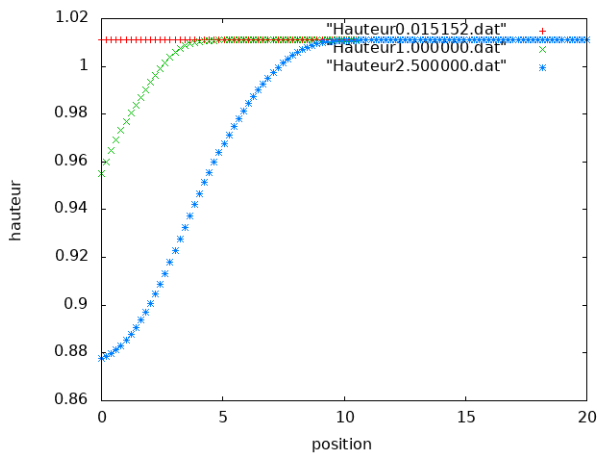
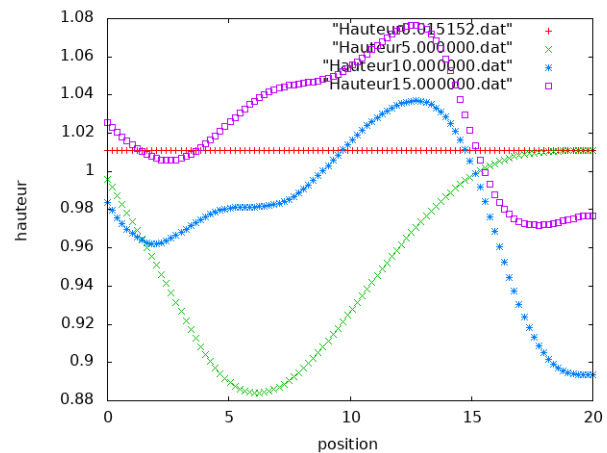
$$\text{Avec } A = \frac{x_1 + u(x_1, t^n)\Delta t}{\Delta t(u(x_2, t^n) - u(x_1, t^n)) + \Delta x}.$$

Concernant la hauteur, nous définissons la fonction $h_0(t)$ en reliant les données expérimentales par des polynômes d'ordre 1.

FIGURE 13 – Création de la fonction h_0 à partir des données expérimentales

5.4 Résultats

Nous effectuons une simulation avec pour conditions initiales une vitesse nulle et une hauteur $h_{initial}$ égale à la première valeur du fichier de données expérimentales.

FIGURE 14 – Simulation entre $t = 0$ et $t = 2.5$ secondesFIGURE 15 – Simulation entre $t = 0$ et $t = 15$ secondes

Sur la figure à échelle de temps courte (Figure 14) nous remarquons bien la condition aux limites gauche qui est imposée par les données expérimentales. En effet la hauteur d'eau diminue partant de 1.01098 et remonte au bout de 2.5 secondes. Nous constatons bien cette remontée sur la figure à échelle de temps plus longue (Figure 15). La condition aux limites à droite n'apparaît pas sur les graphiques car cela nécessite une échelle de position en abscisse plus large rendant les résultats peu lisibles, en revanche nous constatons bien une hauteur fixée à $h_{initial} = 1.01098$.

Afin de vérifier notre simulation nous reproduisons les conditions de l'expérience en prenant une pente correspondant à la réalité du terrain. Nous comparons ensuite les valeurs de hauteurs obtenues à tout temps t à une distance de 5.02m de l'origine. Cela correspond à la distance entre les capteur 3 et 4. nous devons donc obtenir les valeurs de hauteur du capteur 4.

6 Conclusion

Dans le cadre de ce projet, nous avons développé un code permettant de calculer une solution numérique des équations de Saint-Venant. Ce code s'appuie sur des schémas de volumes finis d'ordre 1 et 2. Nous avons pu établir des conditions aux limites grâce à des données expérimentales relevées sur la plage du Truc Vert.

Ce code est néanmoins inachevé puisqu'il mériterait une extension au domaine 2D avec des capacités similaires de calcul prenant en compte un terme source c'est à dire une topographie variable.

7 References

- S. Cordier, F. Darboux, O. Delestre, F. James, Etude d'un modèle de ruissellement 1d
- N. Seguin, Approximation des équations de Saint-Venant avec un terme source de topographie
- P. Bonneton, Modelling of periodic wave transformation in the inner surf zone
- P. Bonneton, L. Weynans, A. Philippini, Open sea boundary conditions for coastal wave models
- C. Simeoni, Numerical methods for hyperbolic equations
- Y. Shi, Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré
- E. Da Silva, Résolution numérique des équations d'Euler 1D
- E. Audusse, Autour du système de Saint-Venant : Méthodes numériques pour le transport sédimentaire, les fluides en rotation et les équations primitives
- O. Delestre, Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles