



TP C++ : Résolution de l'équation d'advection 2D en volumes finis

Élèves :

Badr CHERQAOU

Enseignants :

Nicolas BARRAL

10 octobre 2022

Table des matières

1	Introduction	2
2	Méthode des volumes finis	2
2.1	Calcul des flux	3
2.2	Détermination des conditions aux bords	4
3	Code et Amélioration	6
3.1	Structure du code	6
3.2	Validation du code	6
4	Cas de référence	7
5	Résolution de l'équation d'advection 2D en volumes finies : exemple de la bouilloire	8
5.1	Bouilloire à trois résistances sans advection	8
5.1.1	Schéma de temps utilisé	9
5.1.2	Raffinement et temps de calcul	10
5.1.3	Puissance et Température stationnaire	12
5.2	Bouilloire à une résistance avec advection	12
5.2.1	Premier Simulation	13
5.2.2	Température moyenne en fonction du nombre de Reynolds	14
5.2.3	Température d'ébullition	16
6	Conclusion	16

1 Introduction

Les équations de diffusion-advection sont très utilisées en mécanique des fluides. Elles modélisent le transport d'une certaine quantité dans un volume donné.

Voici donc la forme générale de ces équations :

$$\begin{cases} \frac{D\phi}{Dt} - \mu \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (V\phi) - \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) = S \\ \phi(\vec{x}, t = 0) = \phi_0(\vec{x}) \end{cases} \quad (1)$$

On définit donc ϕ la quantité transportée, μ le coefficient de diffusion et $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ le champ de vitesse incompressible et S le terme source qui permet de faire varier ϕ de l'extérieur.

Pour obtenir une approximation des solutions, nous utiliserons les méthodes de volumes finis. Cette méthode fait intervenir une résolution d'équation du type $Ax=b$. Nous expliquerons tout cela dans la prochaine section.

2 Méthode des volumes finis

Le principe des volumes finis est de mailler notre domaine 2D ou 3D, de ce fait, on approxime sur chaque maille la solution de l'équation de transport. On considère donc la maille T_i et l'espace de temps $[t_n, t_{n+1}]$.

On intègre donc l'équation (1) sur chaque triangle du maillage T_i :

$$\int_{T_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \int_{T_i} \nabla \cdot (V\phi_i) - \int_{T_i} \nabla \cdot (\mu \nabla \phi_i) = \int_{T_i} S_i \quad (2)$$

A l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, l'équation (20) s'écrit sous la forme suivante :

$$\partial_t \int_{T_i} \phi + \int_{\partial T_i} (V \cdot n_i \phi) - \int_{\partial T_i} \mu \nabla \phi \cdot n_i = \int_{T_i} S \quad (3)$$

L'équation (1) peut se réécrire, à l'aide d'un schéma de type volume fini, de la manière suivante :

$$\frac{d\phi}{dt} = -F(t, \phi) + S(t) \quad (4)$$

Malgré le fait que le schéma Euler Implicite fasse intervenir une résolution de système, celui-ci converge bien mieux que le schéma Euler Explicite avec une CFL moins restrictive que ce dernier. L'équation (4) devient alors :

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \delta t F(t, \phi^{n+1}) + \delta t S^{n+1} \quad (5)$$

avec

$$F(t, \phi^{n+1}) = A\phi^{n+1} + b \quad (6)$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$(Id + \delta t A)\phi^{n+1} = \phi^n - \delta t b + \delta t S^{n+1} \quad (7)$$

2.1 Calcul des flux

Détermination de A

Le flux dans le triangle i est de la forme :

$$(F(t, \phi))_i = F_i = \frac{1}{|T_i|} \sum_{k \in voisins(i)} F_{e_{i,k}}^- \quad (8)$$

avec $|T_i|$ l'aire du triangle i, $|e_{i,k}|$ la longueur de l'arête entre le triangle i et k, $F_{e_{i,k}}^-$ le flux moyen traversant l'arête $e_{i,k}$

Le flux moyen est de la forme :

$$F_{e_{i,k}}^- = \alpha_{e_{i,k}} \phi_i + \beta_{e_{i,k}} \phi_k \quad (9)$$

α et β dépendent du type de flux (advection ou diffusion) et de la discrétisation du flux moyen (centré ou décentré).

En se basant aussi sur la conservativité des méthodes des volumes finis, il en est déduit de (8) et (9) le système suivant :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \frac{|e_{i,k}|\alpha}{|T_i|} & \cdots & \frac{|e_{i,k}|\beta}{|T_i|} \\ & & \cdots & \\ -\frac{|e_{i,k}|\alpha}{|T_i|} & & \cdots & -\frac{|e_{i,k}|\beta}{|T_i|} \\ & & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (10)$$

Donc on a une forme de A mais il faut encore déterminer les α et les β pour la diffusion et l'advection.

On écrit $\alpha = \alpha^D + \alpha^A$, avec α^A associé au phénomène d'advection et α^D à la diffusion. De même, on écrira $\beta = \beta^D + \beta^A$

Diffusion :

On utilise ici le schéma centré uniquement :

$$F_{e_{i,k}}^- \approx -\mu \frac{\phi_k - \phi_i}{\delta_{i,k}} \quad (11)$$

donc $\alpha^D = \frac{\mu}{\delta_{i,k}}$ et $\beta^D = -\frac{\mu}{\delta_{i,k}}$ avec μ le coefficient de diffusion au milieu de l'arête et $\delta_{i,k}$ la distance entre les centres des triangles i et k .

Advection :

Schéma centré :

Le schéma centré s'écrit donc :

$$F_{e_{i,k}}^- \approx \frac{\phi_k + \phi_i}{2} \cdot v_n \quad (12)$$

donc $\alpha^D = \beta^D = \frac{v_n}{2}$ avec $v_n = u \cdot n$ la vitesse normale au centre de l'arête

Schéma décentré (upwind):

Le schéma décentré s'écrit donc :

si $v_n \geq 0$

$$F_{e_{i,k}}^- \approx \phi_i \cdot v_n \quad (13)$$

donc $\alpha^A = v_n$ et $\beta^A = 0$

si $v_n < 0$

$$F_{e_{i,k}}^- \approx \phi_k \cdot v_n \quad (14)$$

donc $\alpha^A = 0$ et $\beta^A = v_n$

Ces deux schémas nous servirons plus tard.

Il faudra donc coder cette matrice A qui traduit l'échange de flux entre les différentes mailles intérieurs. Il faut donc faire attention car elle n'inclue pas encore les conditions aux bords.

2.2 Détermination des conditions aux bords

Pour déterminer les conditions aux bords, on repère donc les arêtes qui ne sont liées qu'à un triangle. Et comme nous l'avons vu, la matrice des flux est codées à l'aide d'information entre deux triangles. Nous allons donc utiliser la méthode des "noeuds fantômes". Il suffit d'imaginer l'existence d'un triangle voisin au triangle de bord \tilde{T}_k , il faut alors trouver une approximation du $\tilde{\phi}_k$ qui peut la traverser. C'est comme cela que le flux est calculé, selon si les conditions de Neumann ou Dirichlet sont utilisées, le flux aux bords $\widetilde{F_{e_{i,k}}}$ va s'exprimer différemment. De manière général :

$$\widetilde{F}_{e_{i,k}} = \frac{|e_{i,k}| \alpha}{|T_i|} \phi_i + \frac{|e_{i,k}| \beta}{|T_i|} \widetilde{\phi}_k \quad (15)$$

Diffusion :

Conditions de Neumann :

Il est pris pour les conditions de Neumann non homogène, $\widetilde{\phi}_k \approx \phi_i + \delta_{i,k} g$, avec $g = \frac{\partial \phi}{\partial n} \approx \frac{\phi_k - \phi_i}{\delta_{i,k}}$ avec $\delta_{i,k}$ le double de la distance entre le centre de l'arête et le milieu du triangle. En réinjectant dans l'équation (15) et en utilisant les expressions α^D et β^D :

$$\widetilde{F}_{e_{i,k}} = - \frac{|e_{i,k}| \mu}{|T_i|} g \quad (16)$$

On voit donc qu'uniquement le vecteur *RHS* (second membre) est modifiée et que la matrice A n'est pas modifiée dans ce cas.

Conditions de Dirichlet :

Pour les conditions de Dirichlet, on prendra $\widetilde{\phi}_k = \phi_e = h$. En réinjectant dans l'équation (15) et en utilisant les expressions α^D et β^D avec $\delta_{i,e}$ la distance entre le centre du triangle i et le milieu de l'arête e.

$$\widetilde{F}_{e_{i,k}} = \frac{|e_{i,k}|}{|T_i|} (\alpha^D \phi_i + \beta^D h) \quad (17)$$

Advection :

Conditions de Neumann :

Pour les conditions non homogènes, on prendra $\widetilde{\phi}_k = \phi_i + \delta_{i,k} g$. De la même manière que les exemples précédents, on obtient :

$$\widetilde{F}_{e_{i,k}} = \frac{|e_{i,k}|}{|T_i|} ((\alpha^A + \beta^A) \phi_i + \beta^A \delta_{i,k} g) \quad (18)$$

Conditions de Dirichlet :

Enfin pour les conditions de Dirichlet dans ce cas, on prend $\widetilde{\phi}_k = 2h - \phi_i$. Et on obtient :

$$\widetilde{F}_{e_{i,k}} = \frac{|e_{i,k}|}{|T_i|} ((\alpha^A - \beta^A) \phi_i + 2\beta^A h) \quad (19)$$

3 Code et Amélioration

Par rapport à l'amélioration du code, je me suis efforcé d'éviter les calculs superflus en utilisant des variables de stockage.

Par exemple, le calcul de la somme des airs pour calculer T_{moyen} n'est effectué qu'une seule fois au lieu de le calculer à chaque pas de temps. Cela m'a diminué mon temps de calcul de 5 secondes pour des cas assez long de l'ordre d'une minute par exemple. Ce sont des calculs basiques mais utiles lorsque le problème devient plus grand et plus raffiné.

3.1 Structure du code

Le code est divisé en plusieurs programmes.

Pour la base de données, on utilise donc un fichier *Data.cpp* ; Il y a toutes les données de temps, d'espace. Ces données seront utilisées par les autres fichiers car utiles à la résolution.

Pour les éléments en lien avec le maillage, on utilise un fichier *Mesh2D.cpp* qui donne des informations par rapport aux triangles, aux arêtes comme l'aire ou la longueur de chaque quantité.

Les fichiers précédents n'ont pas été beaucoup modifiés, cependant les suivants l'ont :

Pour ce qui est du schéma en temps, on utilise un fichier *timescheme.cpp*, c'est dans celui-ci que nous avons codé notre schéma explicite et implicite afin d'obtenir une solution à chaque pas de temps.

Puis on a utilisé un fichier *FiniteVolume.cpp* qui nous a servi à coder la matrice A, RHS et S qui sont respectivement, la matrice des flux, le vecteur introduisant les conditions aux bords et le vecteur Source.

Enfin, afin de donner des conditions initiales, des conditions aux bords, le vecteur source etc, il faut que l'on utilise des fonctions, donc nous avons à notre disposition un fichier *Fonction.cpp* qui nous permet de regrouper toutes ces fonctions.

3.2 Validation du code

Afin de valider notre code, il a fallu valider étape par étape la construction de la matrice et du vecteur RHS. De plus, il a fallu coder notre matrice A de manière creuse car elle comprend énormément de zéro. On a d'abord considéré un flux diffusif avec conditions aux bords Neumann non homogènes sans advection et ensuite avec conditions de Dirichlet.

Dans un second temps, créer la matrice A sans diffusion mais avec conditions aux bords Neumann avec le schéma centré et ensuite avec conditions aux bords de Neumann et Dirichlet avec le schéma décentré.

Enfin on prendra en compte toutes équations générales avec toutes les conditions aux bords possible.

4 Cas de référence

Nous allons montrer que le schéma d'advection centré avec une méthode explicite est instable. En effet, mettons nous dans l'hypothèse d'une vitesse constante égale à u et posons δt et δx le pas de temps et d'espace.

Considérons l'équation 1D suivante avec V_x constant, S nul et le terme de diffusion nul aussi :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + V_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

On a ainsi $\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\delta t}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\delta x}$, donc, on a $\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\delta t V_x}{2\delta x} \phi_{i+1}^n + \frac{\delta t V_x}{2\delta x} \phi_{i-1}^n$. Or pour obtenir une condition de monotonie afin de déterminer la Cfl , il faut que tous les coefficients devant les ϕ_i soient positives. Or ici, on voit que c'est impossible, donc le schéma centré est inconditionnellement instable.

Pour le schéma upwind, on a $\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\delta t V_x}{\delta x} \phi_{i-1}^n - \frac{\delta t V_x}{\delta x} \phi_i^n$, donc en posant $Cfl = \frac{V_x \delta t}{\delta x}$, on a alors $\phi_i^{n+1} = \phi_i^n (1 - Cfl) + Cfl \phi_{i-1}^n$.

Donc on peut écrire la condition CFL comme ceci, $Cfl < 1$.

On voit donc que l'on peut utiliser le nombre CFL comme élément d'une condition permettant d'avoir la monotonie de notre schéma. C'est alors pour cette raison que le nombre de Peclet et la CFL peuvent nous servir pour la bonne utilisation de nos schémas. On va tester alors le schéma centré et décentré pour le cas advection avec toutes conditions aux bords. Nous prenons ce cas là car nous avons montré que pour cette équation avec uniquement de l'advection, le schéma centré n'était pas stable. Tout d'abord, on prendra comme paramètre $dt = 0.05$ et $t_{final} = 1.5$ avec le maillage *Square.mesh*. On obtient alors au temps final une erreur de :

Pour le schéma centré : 1.81449e+11

Pour le schéma décentré : 5.4767

On voit déjà l'instabilité du schéma centré concernant cette équation. De plus, on peut voir cette instabilité aussi visuellement.

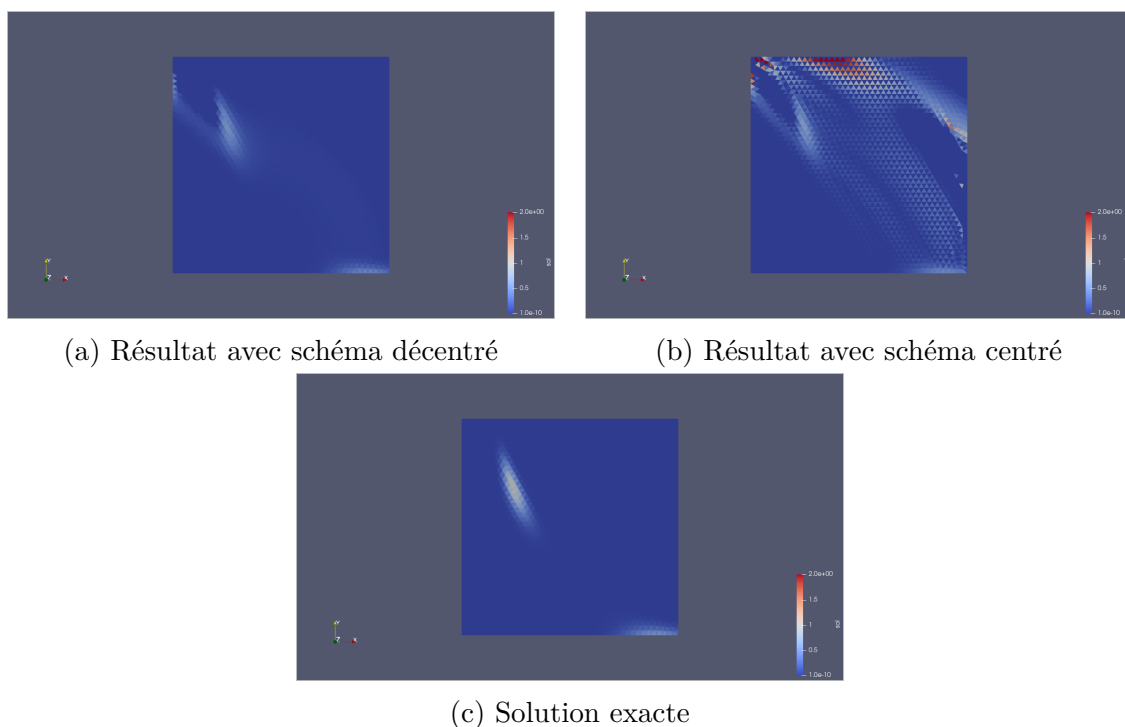


FIGURE 1 – Comparaison des solutions des deux schémas centré et décentré avec la solution exacte au temps 0.3

5 Résolution de l'équation d'advection 2D en volumes finies : exemple de la bouilloire

Nous avons pu établir une solution approchée à l'équation d'advection-diffusion, donc nous allons appliquer cela à un cas de la réalité de tous les jours. On prendra le cas d'une bouilloire à 3 résistances; figure (2), et l'autre n'a qu'une résistance.

Conditions aux bords

On appliquera différentes conditions aux bords, en effet, au bord des résistances on utilisera une condition de Neumann avec une fonction g défini ainsi:

$$g = \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{P}{kS\lambda}$$

avec k le nombre de résistances, P la puissance électrique totale, $\lambda \approx 0.6 W m^{-1} K^{-1}$ la conductivité thermique, S la surface d'une résistance.

Sur les bords de la bouilloire, on appliquera cette fois ci une condition de Dirichlet avec $h = 20$. En fait, au bord de la bouilloire on fixe la température à $20^\circ C$.

5.1 Bouilloire à trois résistances sans advection

Dans ce cas, nous ne prendrons pas en compte la partie advective de l'équation. On écrit cette équation de la manière suivante :

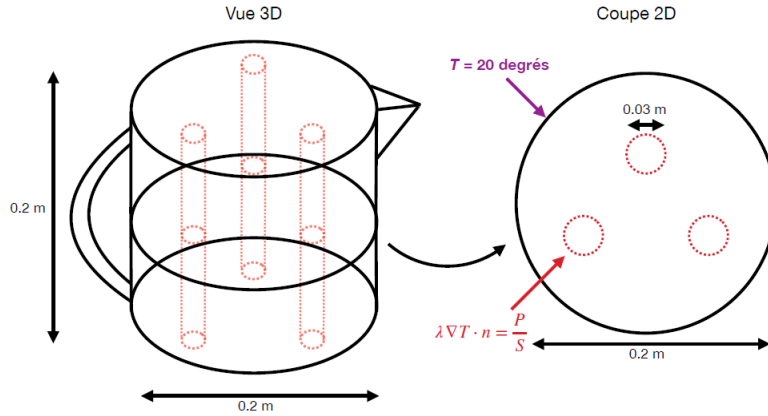


FIGURE 2 – Bouilloire à trois résistances

$$\rho c_p \partial_t T - \lambda \Delta T = 0 \quad (21)$$

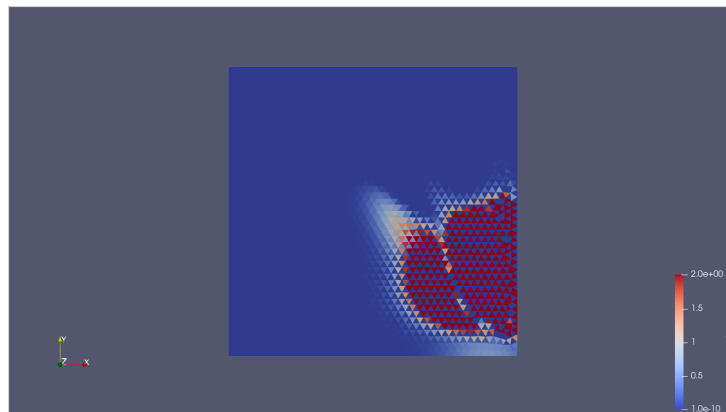
avec $\rho \approx 10^3 kg.m^{-3}$ la masse volumique de l'eau, $c_p \approx 4185 JK^{-1}kg^{-1}$ la chaleur spécifique et $\lambda \approx 0.6 Wm^{-1}K^{-1}$ la conductivité thermique.

On a donc simplement à utiliser le code mis en place avec une vitesse nulle et $\mu = \frac{\lambda}{\rho c_p}$. On utilisera le fichier *kettle2D.geo* permettant de générer un maillage en utilisant le logiciel *Gmsh*, ce maillage peut être plus ou moins raffiné selon le pas d'espace choisit. On pourra comparer la solution approchée en fonction du raffinement du maillage.

5.1.1 Schéma de temps utilisé

Nous utiliserons le schéma Euler implicite car il converge plus facilement que l'explicite. Pour le montrer, on va tester ce dernier avec le même cas que pour le cas de référence et avec un schéma upwind qui comme nous l'avons vu précédemment, est stable avec un schéma implicite. On obtient alors une erreur de 1.08851e+49 au temps final contre 5.47 pour le schéma implicite lorsque la CFL n'est pas vérifié. Alors que le schéma implicite n'a pas besoin de condition pour qu'il y ai stabilité

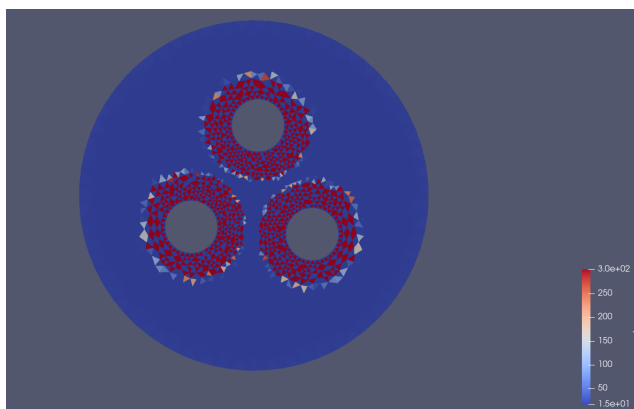
De plus, on peut voir cette instabilité aussi via la figure (3a).



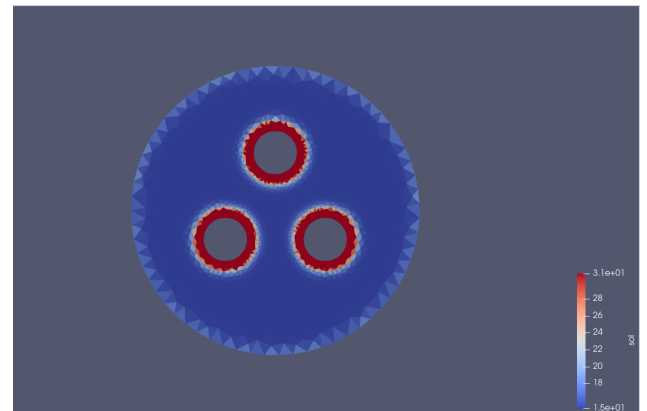
(a) Schéma explicite avec équation d'advection

FIGURE 3 – Instabilité du schéma explicite au temps 0.3

Nous allons appliquer le même teste sur notre cas d'expérimentation et on peut voir de même sur la figure suivant l'instabilité de ce schéma. Celui ci n'est stable qu'à une condition CFL assez restrictive.



(a) Euler Explicite



(b) Euler Implicite

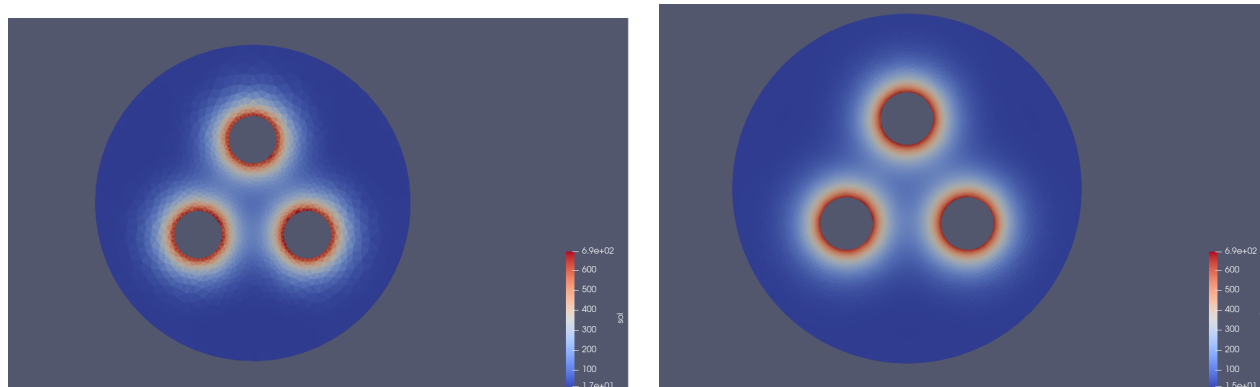
FIGURE 4 – Comparaison d'une résolution Euler explicite et implicite avec les mêmes paramètres et mêmes maillages au temps 60s

En effet, nous prenons un maillage avec 3 résistances avec un raffinement identique, avec un $dt = 10$ secondes et un t_{finale} à 60 secondes. Nous observons donc que la méthode Euler Implicite reste stable alors que la méthode Explicite ne l'est que si la condition CFL est respectée.

5.1.2 Raffinement et temps de calcul

Afin d'obtenir une solution, nous devons choisir un raffinement du maillage, c'est à dire, une "taille" des triangles qui permet de mailler l'espace 2D. Plus cette taille h est petite,

plus il a de triangles, plus il y a de calculs. De ce fait, le temps de calcul est beaucoup plus long pour un maillage raffiné (h_1) qu'un autre maillage dit grossier (h_2) avec donc $h_1 \ll h_2$.



(a) Maillage grossier

(b) Maillage raffiné

FIGURE 5 – Comparaison visuelle des différents maillages

Pour le maillage grossier la résolution se fait en l'espace de quelques secondes, mais le maillage plus raffiné a besoin d'une minute afin d'y arriver.

En contre partie, on a une solution bien plus précise avec le maillage raffiné car les approximations des dérivés faites lors de la discrétisation sont plus proche des "vraies" dérivées.

On introduit maintenant la *température moyenne* qui va nous permettre de voir l'évolution de la température en fonction du temps dans la bouilloire. On prendra cette mesure comme mesure de référence. On la définira de la manière suivante :

$$T_{moy} = \frac{\sum_{k=1}^{N_T} \phi_k |T_k|}{\sum_{k=1}^{N_T} |T_k|} \quad (22)$$

On peut constater que :

Pour dépasser une température moyenne de 70 degrés, il faut un temps de 606.7 secondes. Le modèle ne prend pas en compte l'évaporation de l'eau quand la température de l'eau devient supérieur à 100°C. Cela fait que l'évolution de la température de l'eau dans la bouilloire n'est pas identique à la réalité.

Comparons maintenant le temps de calcul en fonction du maillage.

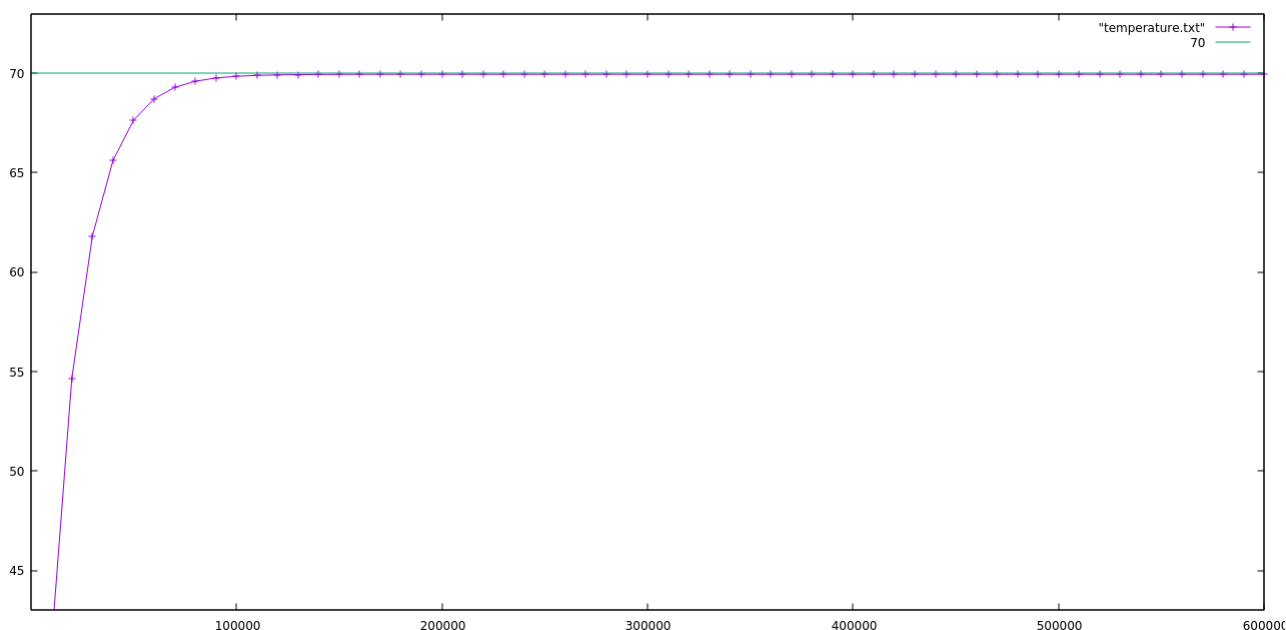
maillage	raffiné	grossier
temps de calcul $dt = 10$ s $t_{final} = 10$ min	455 s	8 s

FIGURE 6 – Temps de calcul en fonction du maillage

On voit que le temps de calcul est bien plus conséquent pour un maillage raffiné ($h=0.002$) que grossier ($h=0.02$). La précision du premier maillage est certes meilleur mais il faudrait donc augmenter le pas de temps pour éviter de passer trop de temps à l'exécution du code pour des cas tests. Cependant, si le but est de donner une solution précise, il peut être intéressant de prendre le temps d'obtenir une bonne solution.

5.1.3 Puissance et Température stationnaire

Pour déterminer la puissance à appliquer pour avoir une température stationnaire à 70°C , on va procéder ainsi. On a pour une puissance moyen de 2200W une solution stationnaire à 1170°C , de ce fait, $\frac{P_{70}}{T_{70}} = \frac{P_{100}}{T_{100}}$. On obtient donc $P_{70} = \frac{P_{100}T_{70}}{T_{100}}$, on obtient donc $P_{70} = 130\text{ W}$. En testant une simulation avec un maillage grossier et un Δt assez grand, on obtient $T_{\text{moyen}} = 88.3447^\circ\text{C}$. En refaisant le même produit en croix mais avec cette nouvelle température et nouvelle puissance, on obtient une solution stationnaire à 69.9442 pour $P=95.4\text{W}$.



(a) Maillage grossier

FIGURE 7 – Températion stationnaire à 70°C avec $P = 95.4\text{ W}$

Cependant, on voit que ce modèle ne fait pas intervenir l'advection qui peut avoir lieu dans une bouilloire. On va donc intégrer cela dans la prochaine partie.

5.2 Bouilloire à une résistance avec advection

Nous avons vu précédemment qu'un élément important n'a pas été pris en compte; le phénomène d'advection. Nous allons donc mettre en évidence ce phénomène et voir la

différence qu'engendre celui ci.

$$\rho c_p (\partial_t T + (u \cdot \nabla) T) - \lambda \nabla T = 0 \quad (23)$$

On utilisera un champs de vitesse cylindrique :

$$\begin{cases} V_r = (1 - \frac{R^2}{r^2}) U \cos(\theta) \\ V_\theta = -(1 + \frac{R^2}{r^2}) U \sin(\theta) \end{cases} \quad (24)$$

qu'il est possible de réécrire en coordonnées cartésiennes :

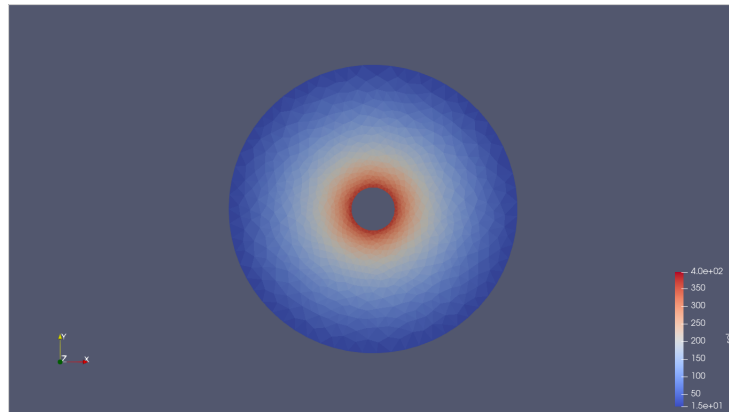
$$\vec{V} = (V_r \cos(\theta) - V_\theta \sin(\theta)) \vec{x} + (V_r \sin(\theta) + V_\theta \cos(\theta)) \vec{y} \quad (25)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

Pour ce modèle, on prendre une puissance au environ de 150 W et cette fois ci on n'utilisera qu'une seule résistance $k = 1$.

5.2.1 Premier Simulation

On utilise cette fois ci uniquement une résistance et sans vitesse d'advection. On obtient alors la figure suivante :



(a) Maillage grossier

FIGURE 8 – Bouilloire une résistance vitesse nulle et puissance 150 W

On voit que la figure ci dessous est cohérente avec le problème physique, puisque la chaleur se propage depuis la résistance sans mouvement de convection. De plus, on atteint bien un état stationnaire avec $T_{moyen} \approx 110^\circ\text{C}$.

Mise en évidence du phénomène de convection

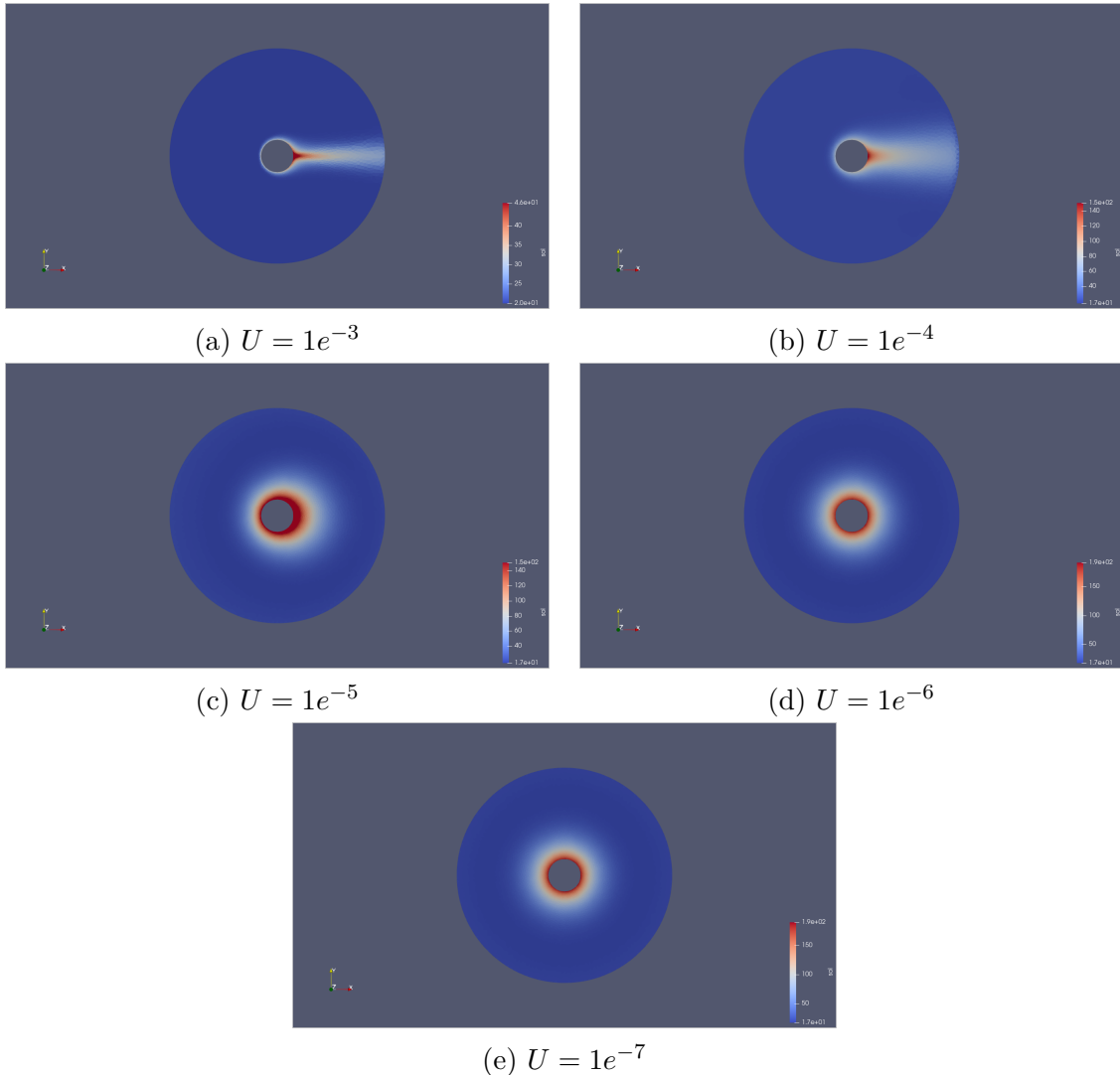


FIGURE 9 – Comparaison du phénomène de convection pour différentes vitesses au temps : 2000 secondes avec un maillage raffiné

On voit donc que le phénomène d'advection se manifeste clairement par une advection de la chaleur. En fonction de la vitesse d'advection, le phénomène est plus ou moins visible, ce qui est assez cohérent puisque plus la vitesse est faible, plus l'on se rapproche d'une équation de diffusion seul sans advection. La solution pour $U = 1e^{-7}$ est pratiquement identique au cas sans advection.

5.2.2 Température moyenne en fonction du nombre de Reynolds

On va faire une étude sur la température en fonction de la vitesse grâce au nombre de Reynolds. On peut écrire ce nombre de la manière suivante :

$$Re = \frac{UD\rho}{\mu}$$

avec U la vitesse, D le diamètre de la bouilloire, ρ la masse volumique de l'eau et $\mu = 10^{-3}$.

U	Reynolds
1,00E-03	15.
1,00E-04	1.5
1,00E-05	0.15
1,00E-06	0.015
1,00E-07	0.0015

FIGURE 10 – Nombre de Reynolds en fonction de différentes vitesses

Plus le nombre de Reynolds est grand, plus la force liée à l'advection prédomine sur les forces visqueuses et inversement.

On va donc afficher la température moyenne pour chaque vitesse donc pour chaque nombre de Reynolds, en fonction du temps en secondes.

On prendra un maillage grossier pour nos tests puisqu'il nous faut uniquement observer l'allure de la courbe de la température moyenne sans grande précision. On prendra aussi un $dt = 1000$ secondes et un $t_{final} = 60000$ secondes afin de s'assurer d'arriver à une température stationnaire. De plus, on prendra aussi le schéma upwind qui est plus stable que le schéma centré pour le problème incluant l'advection.

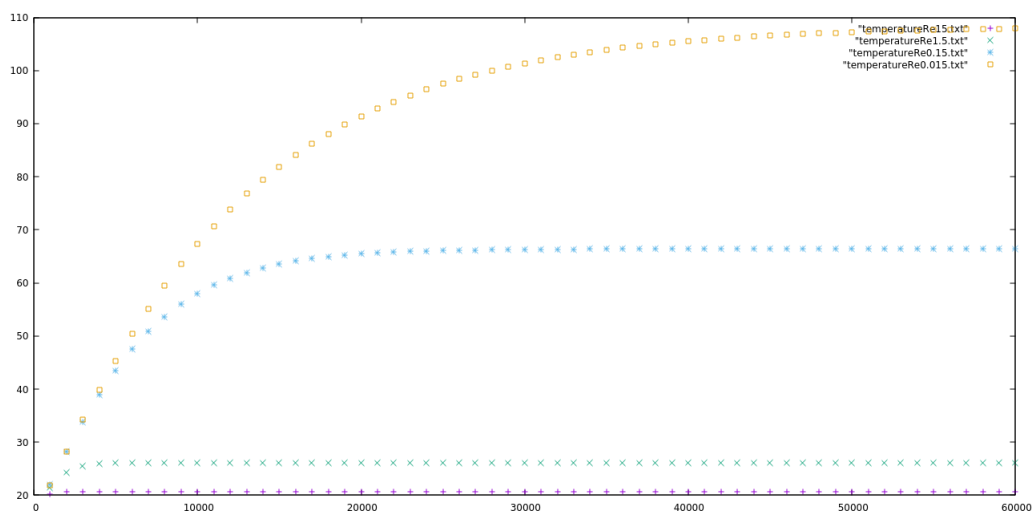


FIGURE 11 – Différentes courbes de température pour différentes valeurs de Re en fonction du temps en seconde

On voit finalement que plus Re est grand plus on atteint une vitesse stationnaire rapidement contrairement au cas où Re est petit, dans ce cas on obtient une approximation de la première simulation, c'est à dire sans vitesse.

5.2.3 Température d'ébullition

	Température_moyenne_grossier	temps première ébullition (en s) maillage grossier	temps première ébullition (en s) maillage fin	Température_moyenne_raffiné
$U = 1e-7$	18.0407	4,20E+02	320	17.6024
$U = 1e-5$	18.52	4,60E+02	3,00E+02	17.48
$U = 1e-3$		non atteinte	non atteinte	

FIGURE 12 – Ebullition en fonction du raffinement du maillage

Pour éviter l'ébullition, on peut voir que pour une vitesse de l'ordre $1e^{-3}$, celle ci est évitée. La température moyenne associée est de 20.7 degrés celsius et $Re = 15$.

L'impact du maillage sur le temps de calcul est significatif, on peut constater que pour un pas de temps $dt = 10$ et un temps final $t_{final} = 1000$, pour le maillage grossier ($h=0.08$) on obtient une temps de calcul de 3 secondes alors qu'avec un maillage raffiné, on a besoin de 581 secondes ($h=0.008$). Parfois, il n'est pas très important de prendre un maillage trop raffiné, dans ces cas là, il est préférable de prendre un maillage plus grossier pour éviter d'avoir un temps de calcul trop long.

Pour rapidement étudier le problème, on prendra alors un maillage avec h entre 0.08 et 0.008 d'après ce qui est dit précédemment. Donc avec $h = 0.04$ parait être un bon compromis. En effectuant une simulation avec un pas d'espace, les mêmes calculs que précédemment se sont fait en l'espace de 4 secondes avec un maillage assez raffiné ce qui est convainquant.

Pour quelqu'un qui utilisera ce code pour ce cas d'étude, je conseillerai de ne pas utiliser un maillage trop fin, car il n'est pas utile dans ce cas là pour observer l'advection de la chaleur. De plus, puisque l'on a pas besoin de satisfaire une condition CFL avec le schéma implicite, nous pouvons prendre un pas de temps assez grand pour observer un changement et obtenir une température stationnaire assez rapidement. Enfin, le schéma upwind est bien plus conseillé qu'un schéma centré car même pour une équation de transport basique, le schéma centré est très instable alors que le schéma upwind est beaucoup plus efficace dans ce cas là.

6 Conclusion

Lors de ce TP, on a donc vu comment un code Volume fini est défini, mais aussi les différents schémas utilisés selon les cas d'étude. Ici, on a vu que le schéma upwind avec le schéma implicite en temps était les plus adaptés pour résoudre notre problème. De plus, on voit que selon les cas, il faut faire attention à comment mailler notre espace, i.e. de façon plus ou moins raffiné. De plus il est bien d'adapter le pas de temps, c'est à dire que

pour trouver la température stationnaire, il nous faut la solution pour un temps t_∞ donc le pas de temps doit être grand. On voit dans ce cas là l'utilité de ne pas avoir de CFL restrictive car nous ne pourrions pas avoir de solution avant un temps de calcul trop long.