



Chapitre VIII - Les nombres complexes

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

Table des matières

I - L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}	1
1. Qu'est-ce-que l'ensemble \mathbb{C} ?	1
2. Qu'est ce qu'un nombre complexe ?	2
3. Égalité entre nombres complexes	2
II - Propriétés	3
1. Conjugué	3
2. Module d'un nombre complexe	3
3. Forme trigonométrique et exponentielle	4
4. Affixe et représentation	5
III - Calculs particuliers	7
1. Résolution d'équations du second degré	7
2. Géométrie avec les nombres complexes	8
3. Complément : formules trigonométriques	8

I - L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}

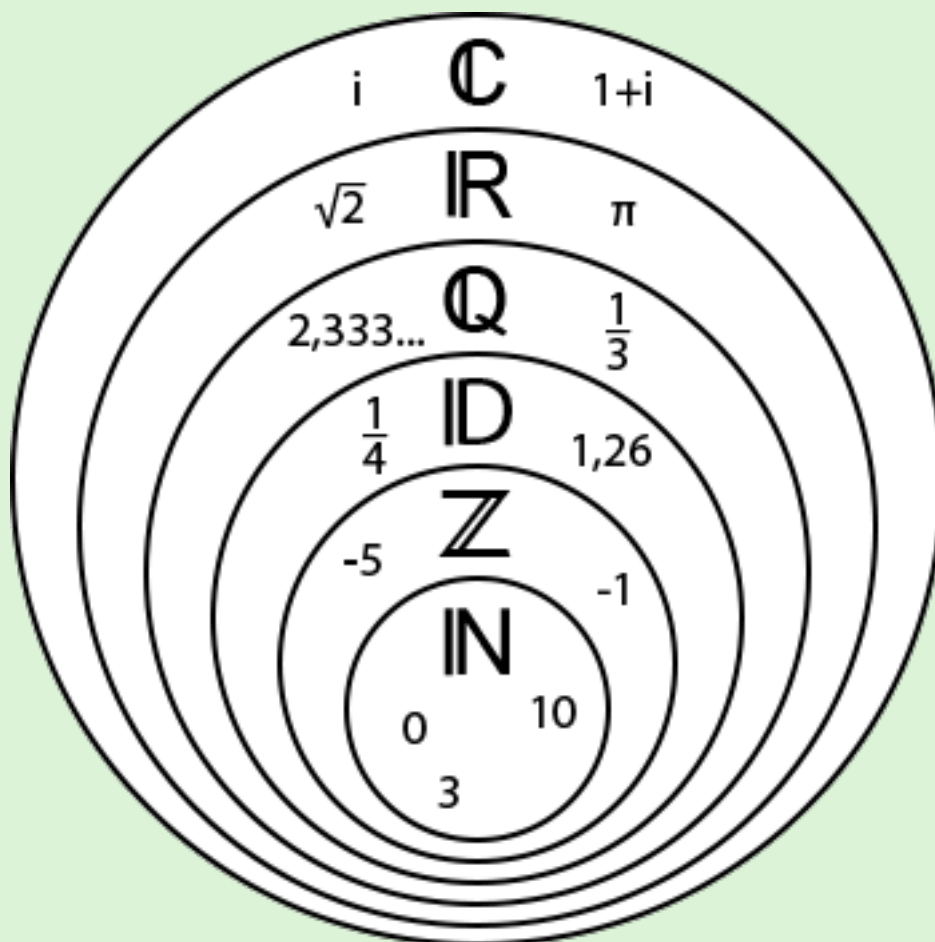
1. Qu'est-ce-que l'ensemble \mathbb{C} ?

Il existe un ensemble de nombres noté \mathbb{C} qui contient l'ensemble \mathbb{R} ainsi qu'un nombre $i \in \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante :

$$i^2 = -1$$

Cet ensemble est appelé **ensemble des nombres complexes** et obéit aux mêmes règles de calcul que l'ensemble \mathbb{R} .

Il peut être dur de se représenter l'ensemble des nombres complexes, en voici un schéma :



Comme vous le voyez ici, l'ensemble \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} mais également des nombres qui ne sont pas réels (i , $1+i$, etc...).

2. Qu'est ce qu'un nombre complexe ?

Soient x et y deux réels. Le nombre complexe z correspondant peut s'écrire sous cette forme :

$$z = x + iy$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique**. On note $x = \operatorname{Re}(z)$ (la **partie réelle** de z) et $y = \operatorname{Im}(z)$ (la **partie imaginaire** de z).

Le nombre z est dit **réel** si $y = 0$ et il est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

3. Égalité entre nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z' . Ces deux nombres sont dits **égaux** si et seulement si :

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

La partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres doivent toutes deux être égales.

II - Propriétés

1. Conjugué

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre complexe **conjugué** noté \bar{z} . Ce conjugué est le nombre complexe suivant :

$$\bar{z} = x - iy$$

Plusieurs propriétés peuvent se dégager à l'aide des conjugués. Soient z et z' deux nombres complexes :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{z}{z'}$ avec $z' \neq 0$
- $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z' \neq 0$ si $n \leq 0$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i \times \operatorname{Im}(z)$

2. Module d'un nombre complexe

On appelle **module** (noté $|z|$) d'un nombre complexe $z = x + iy$ le réel :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et on a les relations suivantes pour $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z' \neq 0$ si $n \leq 0$

Ces propriétés peuvent sembler compliquées mais heureusement il est possible de les retrouver par le calcul. Par exemple, pour la première propriété du second encadré :

On pose $z = x + iy$, on a $\bar{z} = x - iy$:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |z|^2.$$

3. Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous deux formes la **forme algébrique** et la **forme exponentielle** (ou forme trigonométrique). Pour obtenir la forme trigonométrique du nombre complexe, il faut tout d'abord obtenir le module. La forme trigonométrique est ensuite donnée par la formule suivante :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Avec θ l'**argument** de z (noté $\arg(z)$) qui doit vérifier les deux conditions suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

Une fois la forme trigonométrique obtenue, on peut passer à la forme exponentielle, qui est :

$$z = |z| \times e^{i\theta}$$

Exemple : On veut passer le nombre complexe $z = 1 + i$ sous forme exponentielle.

1^{ère} étape : On calcule le module : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2^{nde} étape : On factorise par le module : $z = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3^{ème} étape : On calcule un argument : $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ (car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

4^{ème} étape : On passe à la forme exponentielle : $z = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On peut étendre l'égalité entre nombres complexes donnée au début : deux nombres complexes sont égaux si ils ont le **même module** et le **même argument (modulo 2π)**.

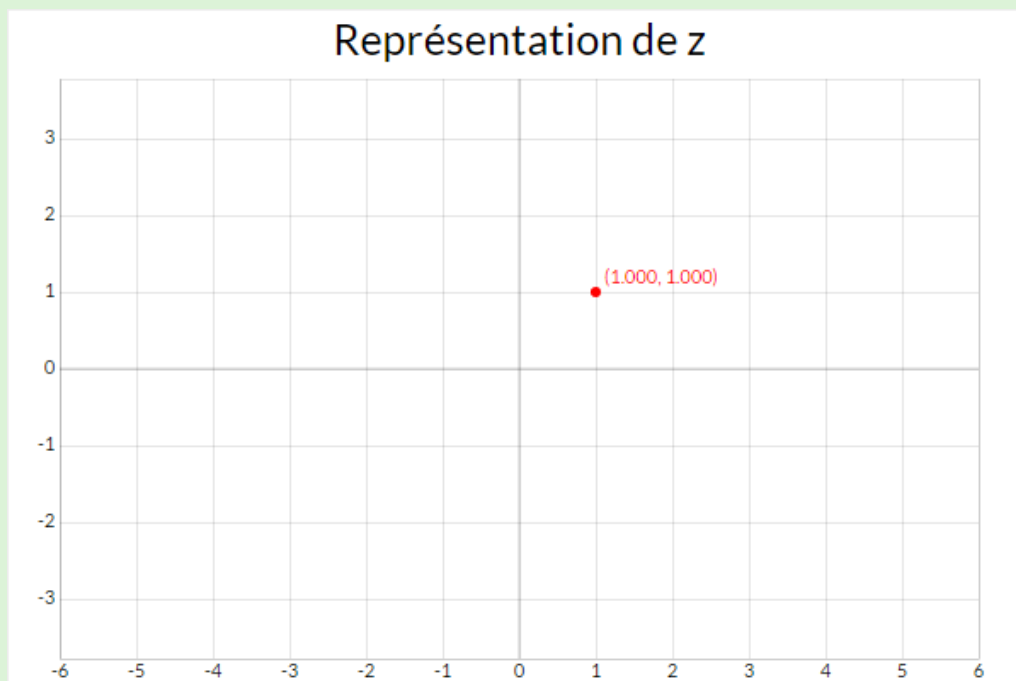
4. Affixe et représentation

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan (Oxy) par un point M de coordonnées $M(x; y)$. z est alors appelé **affixe** du point M (et réciproquement le point M est l'**image** de z).

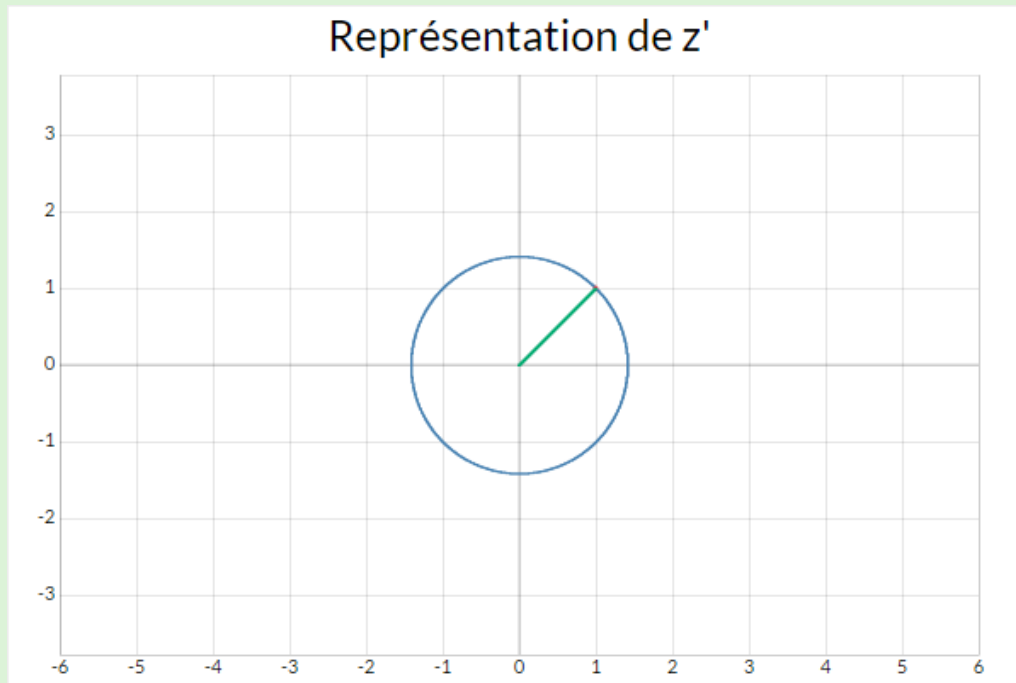
Un nombre complexe $z' = |z'| \times e^{\theta}$ peut être représenté dans le plan (Oxy) par un point M' situé sur le cercle d'origine O de rayon $|z'|$. Le point M' est alors situé à l'angle θ sur ce cercle.

Le module est donc une **distance** et l'argument est un **angle**.

Exemple 1 : On souhaite représenter le point M d'affixe $z = 1 + y$ dans le plan (Oxy) .
On a les coordonnées de $x = 1$ et $y = 1$:



Exemple 2 : On souhaite représenter le point M' d'affixe $z' = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$ dans le plan (Oxy) . On a le module de z' : $|z'| = \sqrt{2}$, et un argument de z' : $\theta = \frac{\pi}{4}$. On va donc tracer le cercle de rayon $\sqrt{2}$ et placer dessus l'angle $\frac{\pi}{4}$:



On voit à l'aide de ces deux représentation que $z = z'$ (démontré dans l'exemple de la partie précédente).

III - Calculs particuliers

1. Résolution d'équations du second degré

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$) un polynôme du second degré à coefficients réels. On souhaite résoudre $P(z) = 0$ dans \mathbb{C} . On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et les solutions dépendent du signe de delta :

Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, il existe une solution réelle :

$$z = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \bar{z}_1$$

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $-2z^2 + 4z = 10$ dans \mathbb{C} .

1^{ère} étape : On fait apparaître une équation du second degré : $-2z^2 + 4z - 10 = 0$.

2^{nde} étape : On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 80 = -64$.

3^{ème} étape : On "transforme" le discriminant négatif : $\Delta = 64i^2 = (8i)^2$.

4^{ème} étape : On trouve les solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4 - 8i}{2 \times -2} = 1 + 2i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4 + 8i}{2 \times -2} = 1 - 2i$$

2. Géométrie avec les nombres complexes

Il est possible de réaliser de la géométrie avec les nombres complexes. Ainsi, soient A , B , C et D des points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D :

La longueur AB est : $|z_B - z_A|$.

Le milieu du segment $[AB]$ est : le point M d'affixe $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

L'angle $(\vec{u}; \vec{AB})$ est : $\arg(z_B - z_A)$ (modulo 2π).

L'angle $(\vec{AB}; \vec{CD})$ est : $\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$ (modulo 2π).

3. Complément : formules trigonométriques

Il est possible de retrouver les formules trigonométriques vues en Première à l'aide des nombres de complexes. La démonstration suivante n'est pas à retenir mais peut être utile pour retrouver ces formules.

On part de $e^{i \times (a+b)}$:

$e^{i \times (a+b)} = e^{i \times a} \times e^{i \times b}$ (opérations sur les exposants)

$\iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b))$ (on passe à la forme trigonométrique)

$\iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\cos(b)\sin(a) - \sin(a)\sin(b)$ (on développe)

$\iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a))$ (on travaille un peu l'expression)

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres sont égales, cela donne :

$$— \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$— \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

Les formules vues en Première ont donc bien été retrouvées.