Chapitre VI – Primitives et équations différentielles

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Primitives de fonctions continues

1. Définition

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f un fonction définie et continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f, toute fonction F définie sur I et qui vérifie pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

À LIRE : NOTE

Une primitive est toujours définie à une constante près.

En effet. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.
Alors, $F_1(x) = x^2 + 1$ est une primitive de la fonction f (car $F'(x) = 2x = f(x)$).

Mais $F_1(x)$ **n'est pas la seule primitive** de f !
On peut citer par exemple $F_2(x) = x^2 + 10$ et $F_3(x) = x^2 + 3$ qui sont également des primitives de f.

C'est pour cette raison que l'ont dit que les primitives sont définies à une constante près (lorsque l'on dérive, la constante devient nulle).

Ainsi, toute **fonction continue** sur un intervalle admet **une infinité de primitives** d'une forme particulière sur cet intervalle. Plus formellement :

À RETENIR : INFINITÉ DE PRIMITIVES

Une fonction continue f sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I de la forme $x \mapsto F_0(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ (où F_0 est une primitive de f).

DÉMONSTRATION : INFINITÉ DE PRIMITIVES

Soit F une autre primitive de f sur I. On a pour tout $x \in I$:

$(F - F_0)'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$ (car F_0 et F sont deux primitives de f).

Donc il existe une constante réelle c telle que $F - F_0 = c$. D'où pour tout $x \in I$, $F(x) = F_0(x) + c$: ce qu'il fallait démontrer.

2. Primitive de fonctions usuelles

Le tableau suivant est à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR

Soit λ une constante réelle.

Fonction	**Primitive**	**Domaine de définition de la primitive**
λ	λx	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^a avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$	$\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les primitives

Le tableau suivant est également à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR

Soit u une fonction continue.

Fonction	**Primitive**	**Domaine de définition de la primitive**
$u'e^u$	e^u	En tout point où u est définie.
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	En tout point où u est définie et est non-nulle. On peut retirer la valeur absolue si u est positive.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	En tout point où u est définie et est strictement positive.
$u'(u)^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}$	En tout point où u est définie.
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	En tout point où u est définie.
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	En tout point où u est définie.

II - Équations différentielles

1. Qu'est-ce-qu'une équation différentielle ?

Commençons cette partie par quelques définitions.

À RETENIR : DÉFINITION

— Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y à ses dérivées successives (y', y'', ...) contenant éventuellement d'autres fonctions connues.

— Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction vérifiant l'égalité décrite précédemment.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction logarithme est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$.

La fonction exponentielle est une solution de l'équation différentielle $y' = y$, mais aussi de l'équation différentielle $y'' = y$, etc...

2. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$

Nous allons donner une formule permettant de résoudre des équations différentielles de la forme $y' = ay$.

À RETENIR : FORMULE

On pose (E) : $y' = ay$ (où a est un réel). Alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto ce^{ax}$ où $c \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Vérifions tout d'abord que les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$ sont solutions de (E). Soit $c \in \mathbb{R}$, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_c(x) = ce^{ax}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_c'(x) = ace^{ax}$ et $ay_c(x) = ace^{ax}$. Donc $y_c' = ay_c$: y_c est bien solution de (E).

Montrons que les fonctions y_c sont les seules solutions de (E). Soit y une solution quelconque de (E) sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $z(x) = y(x)e^{-ax}$. En dérivant :

$z'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x))$

De plus, comme y est solution de (E), on a $y' - ay = 0$, donc $z' = 0$.

Ainsi, il existe une constante réelle c telle que $z = c$. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$c = y(x)e^{-ax} \iff y(x) = ce^{ax}$. Ce qui termine la preuve.

À RETENIR : THÉORÈME

Pour tout réels x_0 et y_0, il existe une **unique** fonction y solution de l'équation différentielle (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

À LIRE : EXEMPLE

Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' - 5y = 0$ sous condition d'avoir $y(0) = 1$.

Dans une premier temps, on écrit l'équation sous une meilleure forme : $y' - 5y = 0 \iff y' = 5y$. On a donc $a = 5$. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies $x \mapsto ce^{5x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Maintenant, il faut trouver la fonction y qui vaut 1 en 0. Soit donc y une telle solution de (E). Alors :

$y(0) = 1 \iff ce^{5\times 0} = 1 \iff c = e^{-1}$. La solution recherchée est donc la fonction $y : x \mapsto e^{-1}e^{5x}$.

3. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Nous allons donner une formule permettant de résoudre des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$.

À RETENIR : FORMULE

On pose (E) : $y' = ay + b$ (où a est un réel non-nul et b est un réel). Alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $c \in \mathbb{R}$.

À RETENIR : THÉORÈME

Pour tout réels x_0 et y_0, il existe une **unique** fonction y solution de l'équation différentielle (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

À LIRE : EXEMPLE

Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 1$ sous condition d'avoir $y(1) = 0$.

On a donc $a = 2$ et $b = -1$. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies $x \mapsto ce^{2x} + \frac{1}{2}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Maintenant, il faut trouver la fonction y qui vaut 0 en 1. Soit donc y une telle solution de (E). Alors :

$y(1) = 0 \iff ce^{2\times 1} + \frac{1}{2} = 0 \iff c = -\frac{1}{2e^2}$. La solution recherchée est donc la fonction $y : x \mapsto -\frac{e^{2x}}{2e^2} + \frac{1}{2}$.