Chapitre V – La fonction logarithme népérien

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Propriétés du logarithme népérien

1. Définition

À RETENIR : DÉFINITION

Le **logarithme népérien** est une fonction qui est définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \ln(x)$.

À RETENIR

On a la relation fondamentale suivante pour tout $x > 0$ et y réels :

$\ln(x) = y \iff x = e^y$.

Ainsi, a tout réel **strictement positif** x, la fonction logarithme népérien y associe **son unique antécédent** y par rapport à la fonction exponentielle. De même pour la fonction exponentielle.

On dit que ces fonctions sont des **fonctions réciproques** (à la manière de sin et arcsin ou cos et arccos).

À LIRE : EXEMPLE

Cette relation peut sembler compliquer à assimiler mais il n'en est rien ! Prenons $x = 0$, on a :

$e^0 = 1$ (tout réel mis à la puissance zéro vaut un), la relation précédente nous donne $\ln(1) = 0$.

Si on prend maintenant $x = 1$, on a :

$e^1 = e$, on a donc $\ln(e) = 1$.

Les relations suivantes sont par conséquent disponibles :

À RETENIR : RELATIONS ENTRE FONCTIONS RÉCIPROQUES

Pour tout réel x **strictement positif**, on a $e^{\ln(x)} = x$.

Et pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$.

2. Relations algébriques

Le logarithme népérien a plusieurs propriétés intéressantes qu'il faut connaître.

À RETENIR : FORMULES

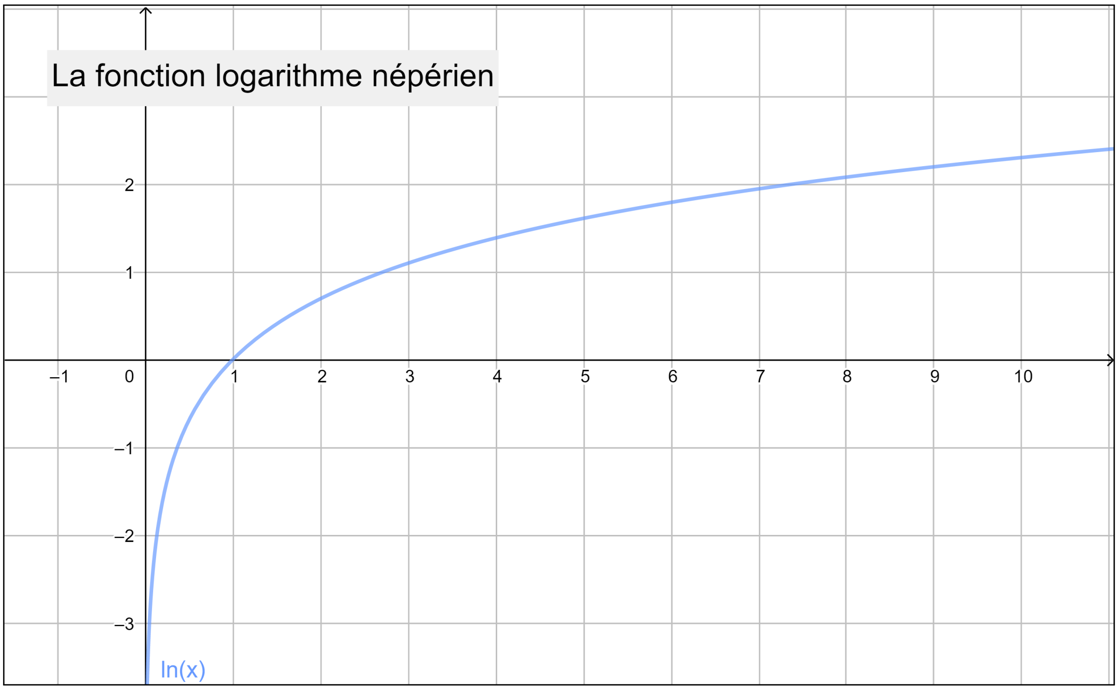
Pour tous réels x et y **strictement positifs** :

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
- $\ln(\sqrt[p]{x}) = \dfrac{1}{p} \times \ln(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

Certaines des ces propriétés peuvent se déduire les unes des autres.

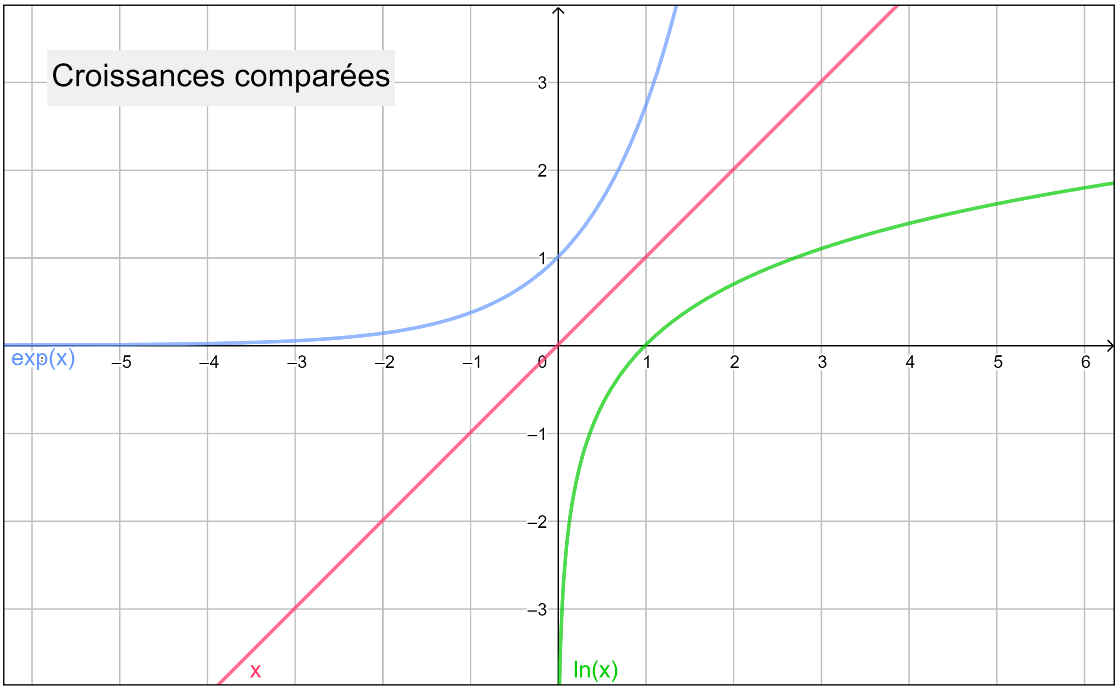
3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



On voit sur ce graphique plusieurs propriétés données précédemment : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ par exemple.

On trace maintenant le graphe de la fonction logarithme népérien, avec celui de la fonction exponentielle. On trace également la droite d'équation $y = x$:



On remarque plusieurs choses : le graphe de la fonction logarithme népérien est le symétrique de celui de la fonction exponentielle par rapport à la droite $y = x$ et on voit que la fonction logarithme népérien croît moins vite que la fonction puissance qui elle-même croît moins vite que la fonction exponentielle. Cette propriété est importante : c'est la **croissance comparée**.

II - Étude de la fonction

1. Limites

À RETENIR : LIMITES

Les limites de la fonction logarithme népérien aux bornes de son ensemble de définition sont :

— $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

— $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction puissance "l'emporte" sur le logarithme népérien (voir la partie "Représentation graphique").

À RETENIR : CROISSANCES COMPARÉES

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0.$

— $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0.$

DÉMONSTRATION : CROISSANCES COMPARÉES

Nous allons démontrer le second point en utilisant le premier (qui n'est pas éligible à une démonstration au lycée) dans le cas $n = 1$. Pour tout $x > 0$, posons $y = \frac{1}{x}$.

On a donc pour tout, $x \ln(x) = \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(y)}{y}$.

Or, quand x tend vers 0^+, y tend vers $+\infty$. Par le premier point :

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0 \iff \lim_{y \to +\infty} -\frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Et en remplaçant y par $\frac{1}{x}$ dans le résultat ci-dessus, on a bien ce que l'on cherchait.

Pour finir, on donne une limite qu'il peut être utile de savoir redémontrer.

À RETENIR

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

DÉMONSTRATION

La fonction logarithme népérien est dérivable en 1 (voir sous-section suivante), on peut donc écrire :

$$\ln'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$$

Ce qui est équivalent à (car on a $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$) :

$$1 = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

On pose $y = x - 1$ ce qui nous donne finalement :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(y-1)}{y} = 1$$

2. Dérivée

À RETENIR : DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

Soit une fonction u dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

À RETENIR : DÉRIVÉE

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$, on trouve :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment ainsi que les limites données, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction logarithme népérien.

À RETENIR : SIGNE ET VARIATIONS

x	0		1		$+\infty$
$x \mapsto \ln'(x)$	$\|$	$+$		$+$	
$x \mapsto \ln(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque qu'avec le tableau de variation, il est possible d'obtenir le signe de la fonction (avec le théorème des valeurs intermédiaires).

Ainsi, sur $]0;1[$, ln est **strictement négative** et sur $]1;+\infty[$, $\ln(x)$ est **strictement positive** et, comme vu précédemment, $\ln(1) = 0$.

On observe également les variations de la fonction : strictement croissante sur son ensemble de définition.