Chapitre VII – Probabilités

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Probabilités conditionnelles

1. Définition

Soient A et B deux événements avec A de probabilité non nulle. Alors la probabilité conditionnelle de B **sachant que** A **est réalisé** est :

À RETENIR

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

À LIRE

On rappelle que $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$.

De plus il faut faire attention, à bien faire la distinction entre une probabilité conditionnelle ("**Sachant qu'on a** A, quelle est la probabilité d'avoir B ?") et une intersection ("Quelle est la probabilité d'avoir A **et** B à la fois ?").

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune incidence sur la réalisation de l'autre et réciproquement. C'est-à-dire :

À RETENIR

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Pour deux événements indépendants A et B, on a les relations suivantes :

À RETENIR

— $p_A(B) = p(B)$

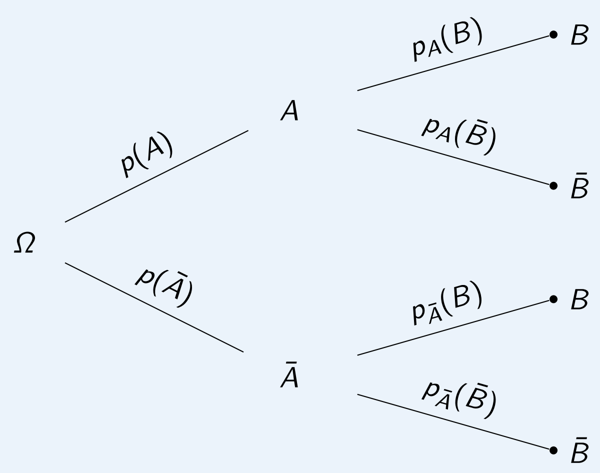
— $p_B(A) = p(A)$

2. Arbre de probabilité

Au lycée, pour représenter visuellement des probabilités on utilise très souvent un **arbre de probabilité**. Nous nous limiterons ici au cas de deux événements, mais il est possible d'en rajouter encore d'autres.

Ainsi, soient A et B deux événements. L'arbre de probabilité décrivant la situation est le suivant :

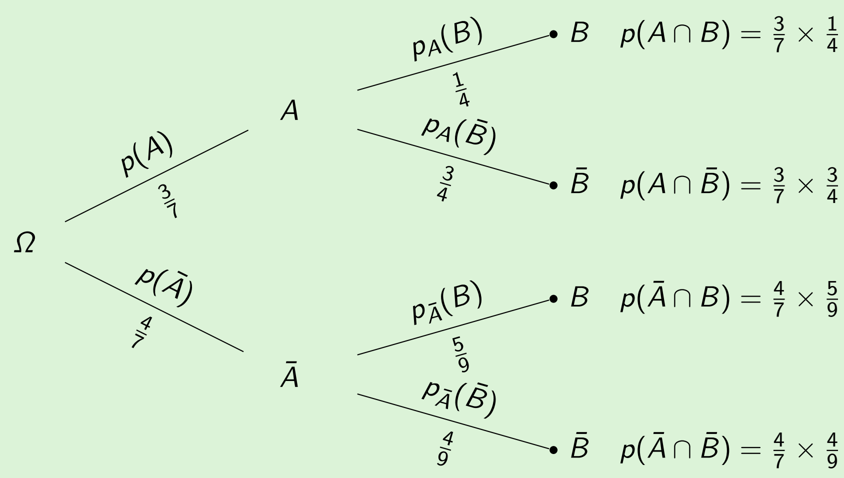
À RETENIR



La somme (dans le sens vertical) des probabilités de chacune des branches ayant un "tronc" commun doit toujours faire 1.

À LIRE

Exemple : Soit A et B deux événements non-indépendants tels que $p(A) = \frac{4}{7}$, $p_A(B) = \frac{1}{4}$ et $p_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{9}$.
Alors l'arbre permettant de modéliser la situation est le suivant :



3. Formule des probabilités totales

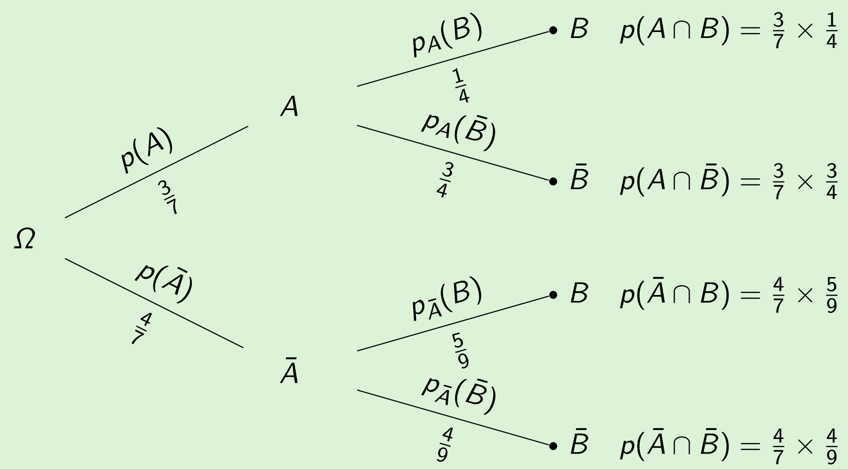
Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements qui partitionnent (qui recouvrent) l'univers Ω, alors pour tout événement B :

À RETENIR

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ \dots \ + p(B \cap A_n)$$

À LIRE

En reprenant l'arbre précédent, comme A et $\bar{A}$ recouvrent notre univers (en effet, soit on tombe sur A, soit on tombe sur $\bar{A}$: pas d'autre issue possible), calculons $p(B)$:



D'après la formule des probabilités totales, $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = \frac{107}{252}$.

II - Variables aléatoires

1. Définition

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui, à chaque événement élémentaire de l'univers Ω y associe un nombre réel. C'est-à-dire : $X : \Omega \to \mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

À LIRE

Les variables aléatoires sont très utiles notamment pour modéliser des situations de gains ou de pertes (à un jeu d'argent par exemple).

2. Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire. La **loi de probabilité** de X attribue à chaque valeur x_i la probabilité $p_i = p(X = x_i)$ de l'événement $X = x_i$ constitué de tous les événements élémentaires dont l'image par X est x_i. Cette loi est généralement représentée dans un tableau :

À RETENIR

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	...	$p(X = x_n)$

On a $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \ \dots \ + p(X = x_n) = 1$.

À LIRE

Cette définition peut sembler un peu compliquée mais elle signifie juste qu'une loi de probabilité assigne une probabilité à chaque valeur prise par notre variable aléatoire.

3. Espérance, variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire. L'**espérance** $E(X)$ de la variable aléatoire X est un réel :

À RETENIR

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ \dots \ + x_n \times p_n$$

La **variance** $V(X)$ et l'**écart-type** $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X sont les réels positifs :

À RETENIR

— $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

— $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

À LIRE

Exemple : Calcul de l'espérance, de la variance et de l'écart-type. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-1	0	2	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

On a :

— $E(X) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

— $V(X) = ((-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 6^2 \times \frac{1}{8}) - (\frac{3}{4})^2 = \frac{75}{16}$

— $\sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{16}} \approx 2.165$

Chacun de ces paramètres a une utilité précise :

À RETENIR

— L'espérance est la **valeur moyenne** prise par X.

— La variance et l'écart-type mesurent la **dispersion** des valeurs prises par X. Plus ces valeurs sont grandes, plus les valeurs sont dispersées autour de l'espérance.