



Chapitre I - Les suites

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

I - Qu'est-ce-que qu'une suite ?	1
1. Définition	1
2. Suites arithmétiques	1
3. Suites géométriques	2
II - Étude des suites	4
1. Sens de variation	4
2. Limites	4
3. Opérations sur les limites	5
4. Majoration, minoration et bornes	6
5. Encadrement	6
III - Raisonement par récurrence	7

I - Qu'est-ce-que qu'une suite ?

1. Définition

On appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de \mathbb{N} dans \mathbb{R} : cette fonction va prendre des éléments d'un ensemble de départ \mathbb{N} et va les amener dans un ensemble d'arrivée \mathbb{R} .

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence** : On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang $n + 1$.
- **Par son terme général** : On donne le n -ième terme de la suite en fonction de n .

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi :

$$u_n = n$$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \end{cases} .$$

On remarque que bien que définies différemment, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont égales.

2. Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ avec } r \in \mathbb{R}.$$

Le réel r est la **raison** de la suite (si $r > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, si $r < 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et si $r = 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite arithmétique :

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$) :

$$u_n = u_0 + (n - 0) \times r = u_0 + n \times r$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante (on note S_n cette somme) :

$$S_n = \frac{(\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}) \times (\text{Nombre de termes})}{2}$$

Astuce : Pour trouver le nombre de termes, on prend le rang jusqu'auquel on souhaite calculer cette somme, on y soustrait l'indice du premier terme et on y ajoute 1.

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $(u_n)_{n \geq 1} : \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$.

La raison r est égale à 5. Le premier terme est $u_1 = 10$ d'indice $p = 1$. Le terme général de cette suite est donc $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$.

Par conséquent, on a : $u_n = 10 + (n - 1) \times 5$. On souhaite calculer la somme des termes de cette suite jusqu'au rang n .

Par l'astuce précédente, il y a $n - 1 + p = n$ termes. On peut calculer la somme S_n :

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n) \times (n)}{2} = \frac{(20 + (n - 1) \times 5) \times (n)}{2} = \frac{5n^2 + 15n}{2}.$$

3. Suites géométriques

Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si elle est de la forme :

$$v_{n+1} = v_n \times q \text{ avec } q \in \mathbb{R}.$$

Le réel q est la **raison** de la suite (si $q > 1$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, si $0 < q < 1$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et si $q = 1$ ou 0 , $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite géométrique :

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$) :

$$v_n = v_0 \times q^{n-0} = v_0 \times q^n$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante (on note S_n cette somme) :

$$S_n = (\text{Premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

Astuce : Pour trouver le nombre de termes, on prend le rang jusqu'auquel on souhaite calculer cette somme.

On y soustrait l'indice du premier terme et on y ajoute 1.

Exemple : Soit une suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par $(v_n)_{n \geq 2} : \begin{cases} v_2 = 1 \\ v_{n+1} = v_n \times 2 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

La raison q est égale à 2. Le premier terme est $v_2 = 1$ d'indice $p = 2$. Le terme général de cette suite est donc $v_n = v_2 \times q^{n-2}$.

Par conséquent, on a : $v_n = 2^{n-2}$. On souhaite calculer la somme des termes de cette suite jusqu'au rang n .

Par l'astuce précédente, il y a $n - 1 + p = n + 1$ termes. On peut calculer la somme S_n :

$$S_n = v_2 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -(1 - 2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1.$$

II - Étude des suites

1. Sens de variation

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si on a :

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ ou } u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

À l'inverse, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si on a :

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ ou } u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Une suite est dite **constante** si on a pour $c \in \mathbb{R}$:

$$u_n = u_{n+1} = c.$$

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

2. Limites

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers une limite finie l si pour tout $\epsilon > 0$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. Cette définition est un peu technique mais elle signifie qu'il existe une infinité de réels entre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l . On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** et on note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Attention ! On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l mais **jamais** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'atteindra l quand n tend vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut également diverger vers une limite infinie. On dit à ce moment là que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente**. On note ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$$

Il est possible d'écrire une définition semblable à celle de la convergence.

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cela signifie que pour tout réel h et à partir d'un certain rang M , on aura $u_M > h$.

Et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cela signifie que pour tout réel h et à partir d'un certain rang m , on aura $u_m < h$.

Limite d'une suite géométrique				
Si on a pour $q \in \mathbb{R} \dots$	$-1 < q < 1$	$1 < q$	$q \leq -1$	$q = 1$
La suite q^n a pour limite...	0	$+\infty$	Pas de limite	1

À savoir que si une suite a une limite, alors cette limite est **unique**.

3. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

Limite d'une somme						
Si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

Limite d'un produit									
Si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$?

Limite d'un quotient									
Si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	l	0
Et la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+_{-}	0
Alors la limite de $(\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	$\pm\infty$?

4. Majoration, minoration et bornes

Soient une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et deux réels m et M :

- On dit que m est un **minorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout n : $u_n > m$.
- On dit que M est un **majorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout n : $u_n < M$.
- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Toute suite convergente est également bornée.

5. Encadrement

Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang. On a :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ alors $l < l'$.

Soient trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n < v_n < w_n$ à partir d'un certain rang et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers le réel l . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$$

Ce théorème est appelé **théorème des gendarmes**.

III - Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir d'un certain rang p :

Initialisation : On teste la propriété au rang p . Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

Hérédité : On démontre que si la propriété est vraie au rang p , alors elle est vraie au rang $p + 1$.

Conclusion : On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang $p + 1$ et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir de ce rang p et pour tout $n \geq p$.

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4 \leq u_n \leq 5$.

On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_n : 4 \leq u_n \leq 5$.

On constate également que $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$.

Initialisation : On teste la propriété au rang 0 :

$P_0 : 4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$. C'est vrai.

La propriété est vraie au rang 0, on souhaite vérifier que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Hérédité :

D'après $P_n : 4 \leq u_n \leq 5$. Donc on a :

$$\iff 4 \leq u_n \leq 5$$

$$\iff 4 + 4 \leq u_n + 4 \leq 5 + 4$$

$\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8}$ (la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^+ donc on change l'inégalité)

$$\iff 4 + \frac{1}{9} \leq 4 + \frac{1}{u_n+4} \leq 4 + \frac{1}{8}$$

Or $4 + \frac{1}{9} \approx 4.111 > 4$ et $4 + \frac{1}{8} = 4.125 < 5$. On a donc bien :

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

Conclusion :

La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites.