Chapitre III – Les fonctions trigonométriques

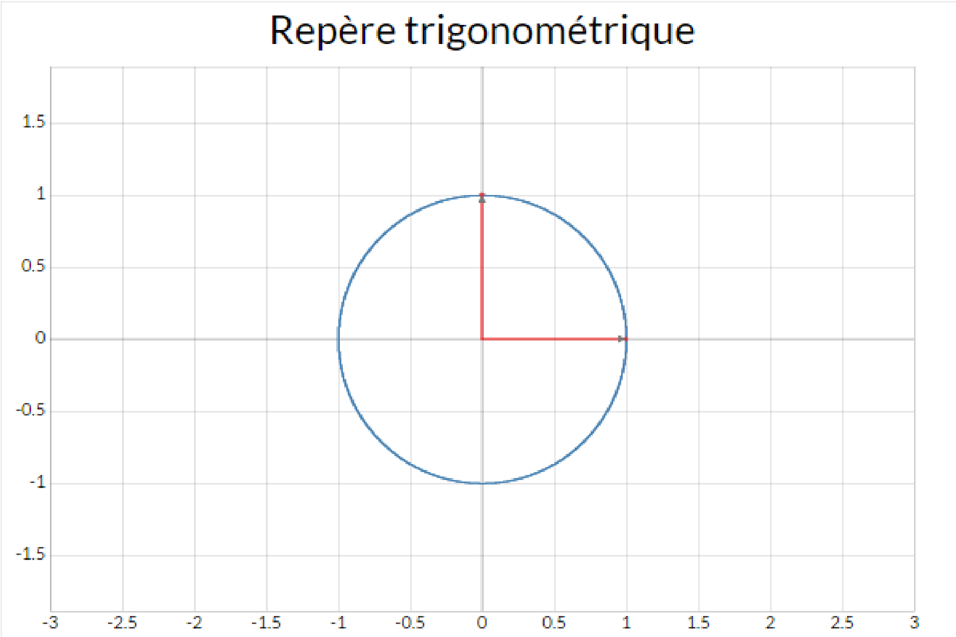
Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Sinus et cosinus

1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Il sera également muni d'un cercle $\mathcal{C}$ appelé **cercle trigonométrique** de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



Soit M un point quelconque situé sur le cercle $\mathcal{C}$ faisant un angle x avec l'axe des abscisses. Les coordonnées de M sont :

À RETENIR

- L'abscisse de M appelée **cosinus** est notée $\cos(x)$.
- L'ordonnée de M appelée **sinus** est notée $\sin(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on aura $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. Ainsi pour tout x réel et k entier relatif :

À RETENIR

— $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$

— $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

À LIRE

Concrètement, cela signifie que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ \dots \ = \cos(x + 2k\pi)$ et idem pour $\sin(x)$.

3. Formules de trigonométrie

On a les relations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

À RETENIR

— $\cos(-x) = \cos(x)$ (la fonction cosinus est **paire**)

— $\sin(-x) = -\sin(x)$ (la fonction sinus est **impaire**)

— $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

— $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

— $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$

— $\sin(x - \pi) = \sin(x)$

— $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

— $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

— $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

— $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

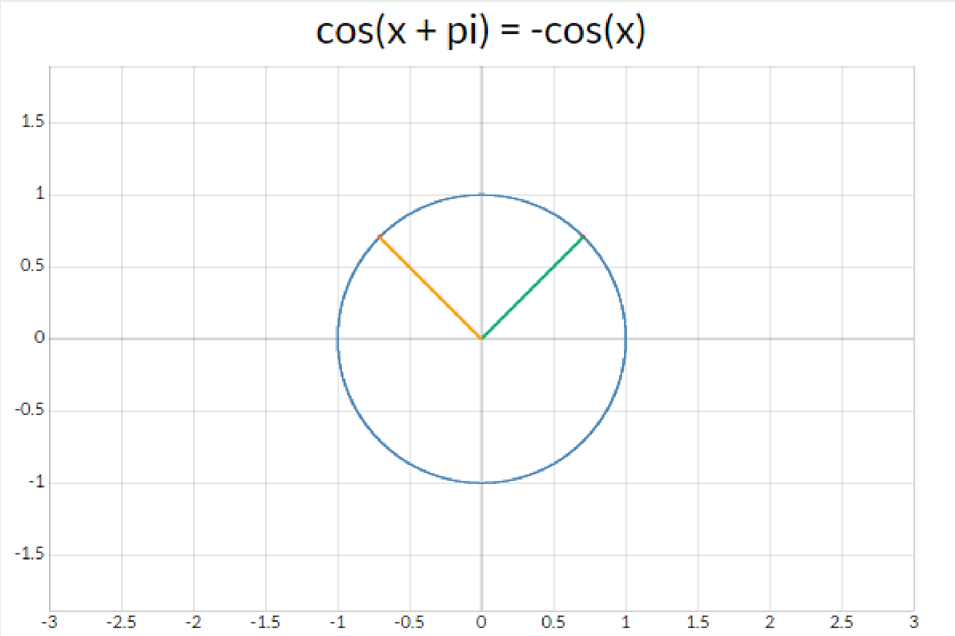
— $\cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$

— $\sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$

— $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

À LIRE

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de $\cos(x + \pi)$:



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus. Ainsi, soient x et y deux réels et k un entier relatif. On a les relations suivantes :

À RETENIR

— $\cos(x) = \cos(y) \iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases}$

— $\sin(x) = \sin(y) \iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

5. Fonctions réciproques

Soient x et $y \in \mathbb{R}$, on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à cos (notée arccos) et une **fonction réciproque** à sin (notée arcsin). On a les relations suivantes pour $x \in [0; 2\pi]$ et $y \in [-1; 1]$:

À RETENIR

— $\cos(x) = y \iff x = \arccos(y)$

— $\sin(x) = y \iff x = \sin(y)$

Cela signifie qu'à tout $x \in [0; 2\pi]$, la fonction arccos y associe son **antécédent** y par rapport à cos (pareil pour arcsin avec sin).

À LIRE

Exemples :

— $\cos(0) = 1$, $\arccos(1) = 0$

— $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

II - Étude des fonctions trigonométriques

1. Dérivée

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

À RETENIR

- $\cos'(u(x)) = -u'(x)\sin(u(x))$
- $\sin'(u(x)) = u'(x)\cos(u(x))$

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$:

À RETENIR

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permet d'obtenir les variations de celles-ci. Voici donc le signe et les variations de ces fonctions. Tout d'abord celui de la fonction cosinus :

À RETENIR

x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période 2π.

Voici maintenant celui de la fonction sinus :

À RETENIR

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Ce tableau est également périodique de période 2π.

3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en $\pm\infty$. Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre -1 et 1.

4. Valeurs remarquables

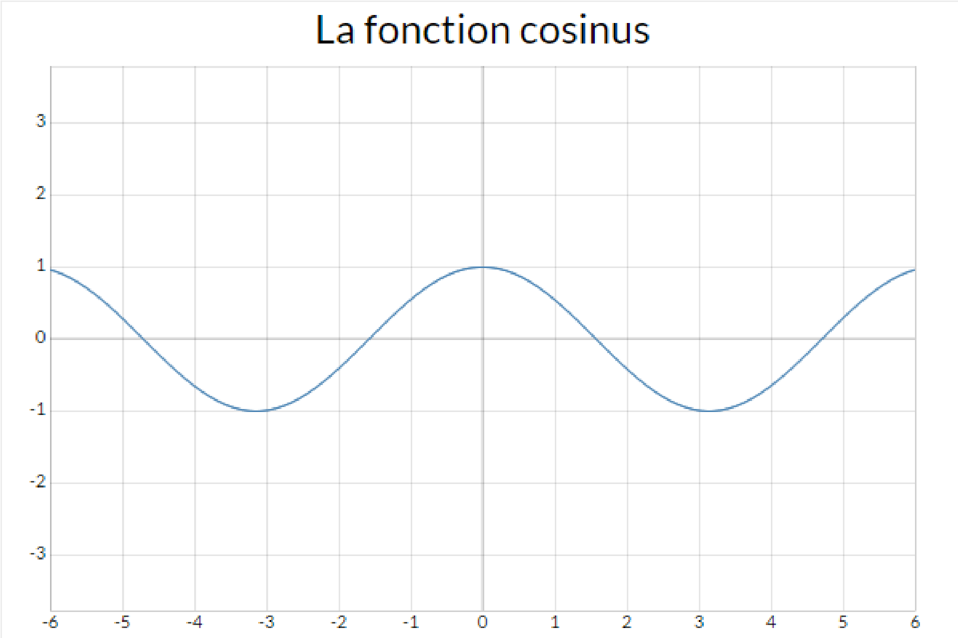
Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

À RETENIR

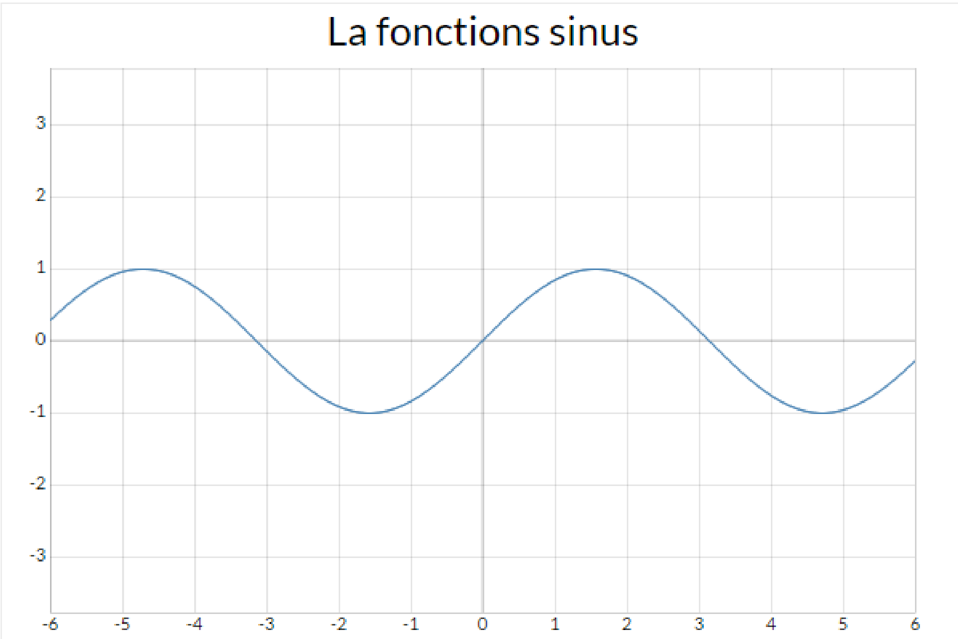
Valeur de x (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)	**Valeur de $\cos(x)$**	**Valeur de $\sin(x)$**
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :



De même pour la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc...