Chapitre III - Les fonctions trigonométriques

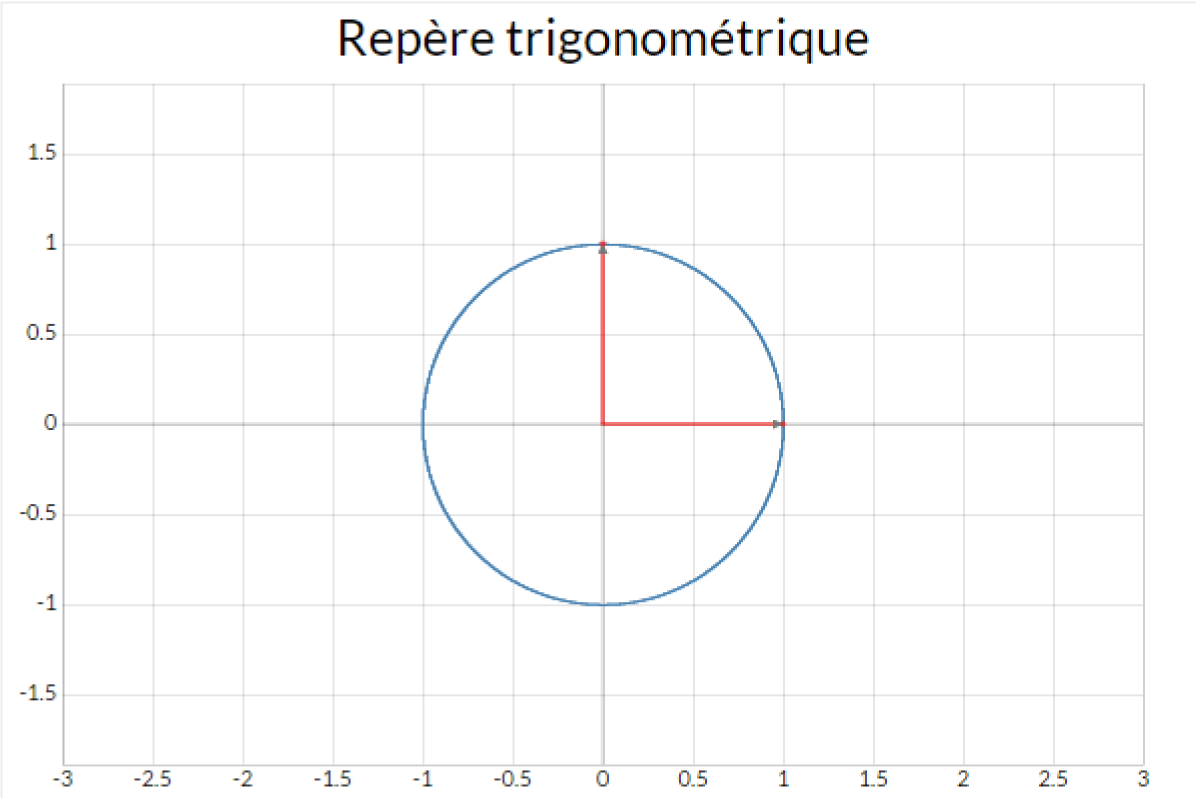
Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

Table des matières

I - Sinus et cosinus

1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Il sera également muni d'un cercle appelé **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



Soit M un point quelconque d'abscisse x et d'ordonnée y situé sur le cercle $\mathcal{C}$. Les coordonnées de M sont :

- L'abscisse de M appelée **cosinus** est notée $cos(x)$.
- L'ordonnée de M appelée **sinus** est notée $sin(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on aura $-1 \leq cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq sin(x) \leq 1$.

2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. Ainsi pour tout x réel et k entier relatif :

- $cos(x) = cos(x + 2k\pi)$
- $sin(x) = sin(x + 2k\pi)$

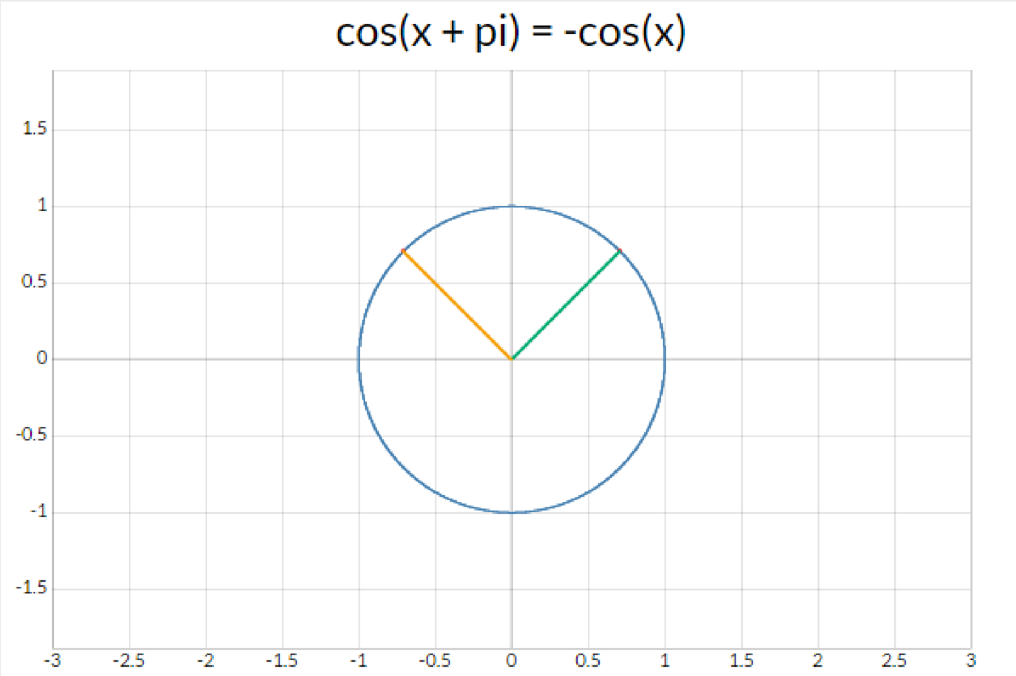
Concrètement, cela signifie que $cos(x) = cos(x+2\pi) = cos(x+4\pi) = \ ... \ = cos(x+2k\pi)$ et idem pour $sin(x)$.

3. Formules de trigonométrie

On a les relations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $cos(-x) = cos(x)$ (la fonction cosinus est **paire**)
- $sin(-x) = -sin(x)$ (la fonction sinus est **impaire**)
- $cos(x + \pi) = -cos(x)$
- $sin(x + \pi) = -sin(x)$
- $cos(x - \pi) = -cos(x)$
- $sin(x - \pi) = sin(x)$
- $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$
- $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$
- $cos(x + \frac{\pi}{2}) = -sin(x)$
- $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$
- $cos(x + y) = cos(x) \times cos(y) - sin(x) \times sin(y)$
- $sin(x + y) = sin(x) \times cos(y) + cos(x) \times sin(y)$
- $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de $cos(x + \pi)$:



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule $cos(x + \pi) = -cos(x)$.

4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus. Ainsi, soient x et y deux réels et k un entier relatif. On a les relations suivantes :

— $cos(x) = cos(y) \iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ ou \\ y = -x + 2k\pi \end{cases}$

— $sin(x) = sin(y) \iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ ou \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

5. Fonctions réciproques

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à $cos(x)$ (notée $arccos(x)$) et une **fonction réciproque** à $sin(x)$ (notée $arcsin(x)$). On a les relations suivantes :

— $cos(x) = y \iff x = arccos(y)$

— $sin(x) = y \iff x = sin(y)$

Cela signifie que à tout réel x, la fonction $arccos(x)$ y associe son **antécédent** y par rapport à $cos(x)$ (pareil pour $arcsin(x)$ avec $sin(x)$).

II - Étude des fonctions trigonométriques

1. Dérivée

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

— $cos'(u(x)) = u'(x) * -sin(u(x))$
— $sin'(u(x)) = u'(x) * cos(u(x))$

Ainsi, si on a $u(x) = x$:

— $cos'(x) = -sin(x)$
— $sin'(x) = cos(x)$

2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permettent d'obtenir les variations de celles-ci. Voici donc le signe et la variation de ces fonctions. Tout d'abord celui de la fonction cosinus :

x	$-\pi$		0		π
(cos(x))'	0	+	0	−	0
cos(x)	−1	↗	1	↘	−1

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période 2π.

Voici maintenant celui de la fonction sinus :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
(sin(x))'		−	0	+	0	−	
sin(x)	0	↘	−1	↗	1	↘	0

Ce tableau est également périodique de période 2π.

3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en $\pm\infty$. Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre -1 et 1.

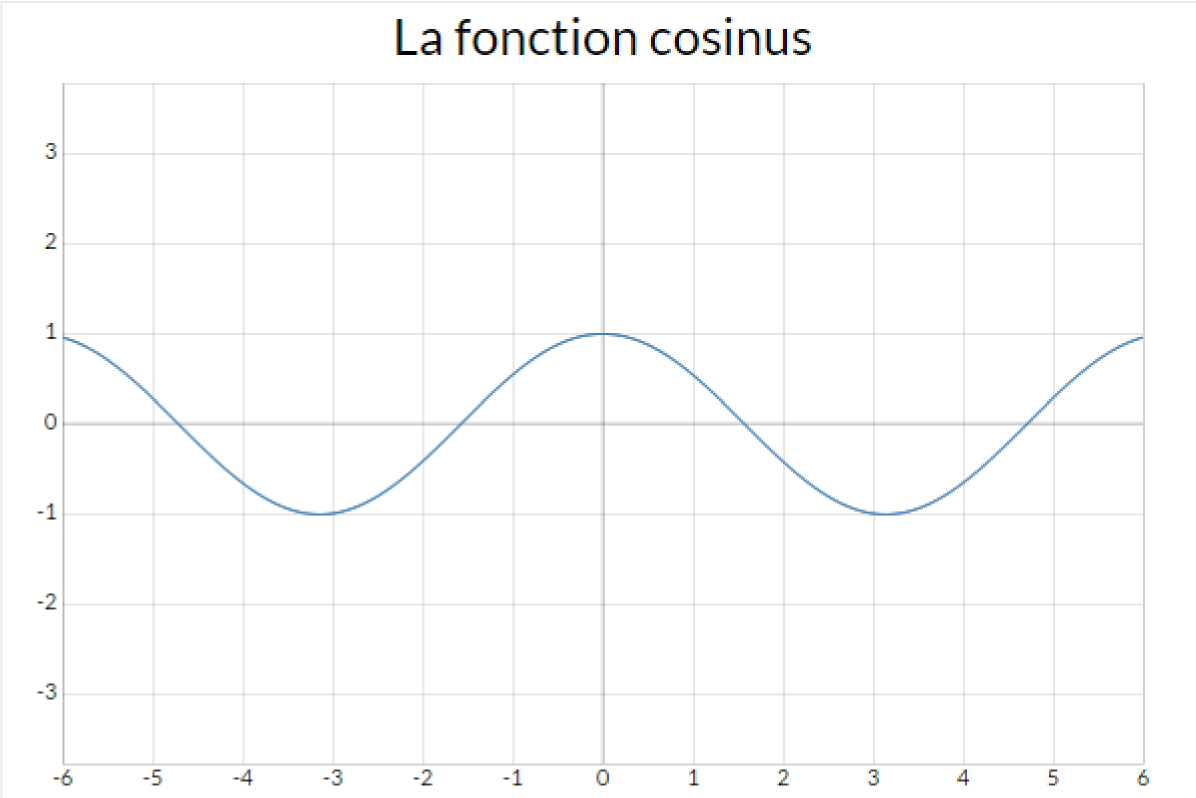
4. Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

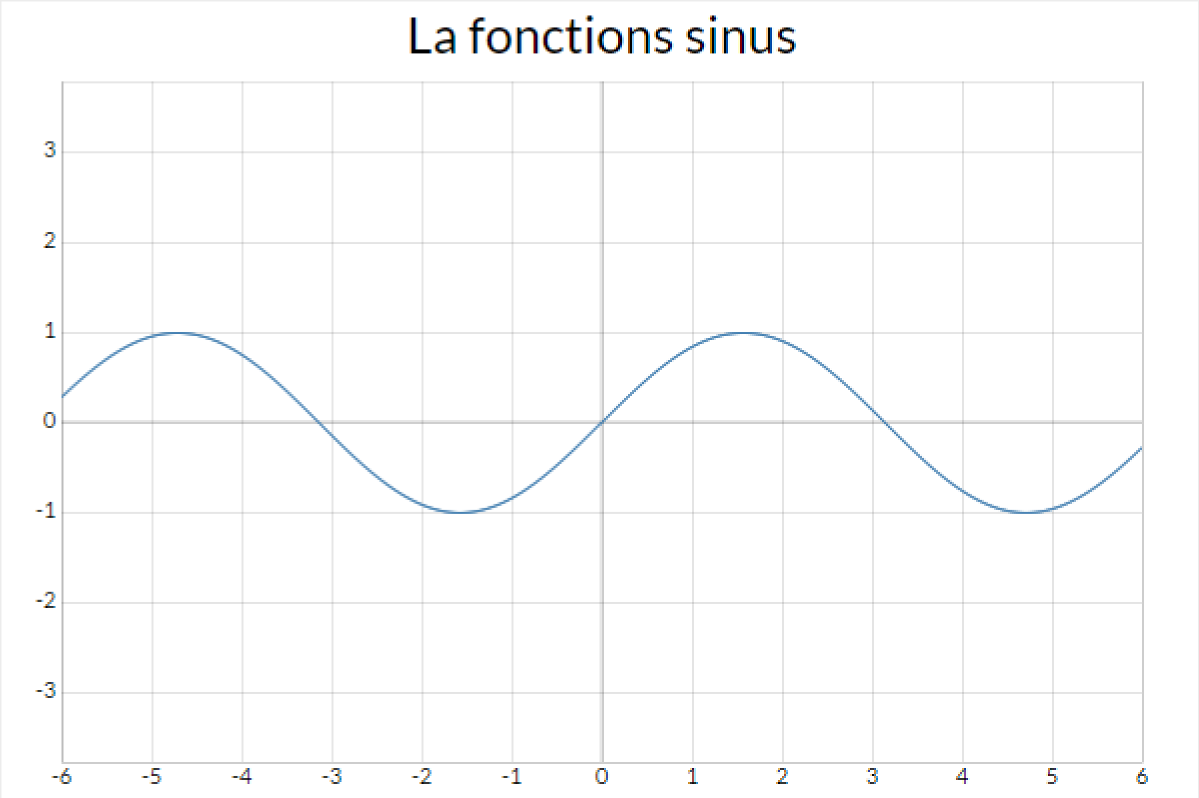
Valeur de x (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)	**Valeur de $cos(x)$**	**Valeur de $sin(x)$**
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :



Ainsi que de la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc...