



## Chapitre X - Lois de probabilité

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Lois de probabilité discrètes</b>	<b>1</b>
1. Probabilités conditionnelles . . . . .	1
2. Formule des probabilités totales . . . . .	2
3. Variables aléatoires . . . . .	2
4. Épreuve et loi de Bernoulli . . . . .	3
5. Loi binomiale . . . . .	4
<b>II - Lois de probabilités continues</b>	<b>5</b>
1. Différence discret / continu . . . . .	5
2. Densité de probabilité . . . . .	5
3. Loi uniforme . . . . .	6
4. Loi exponentielle . . . . .	7
5. Loi normale . . . . .	9
6. Loi normale centrée réduite . . . . .	10

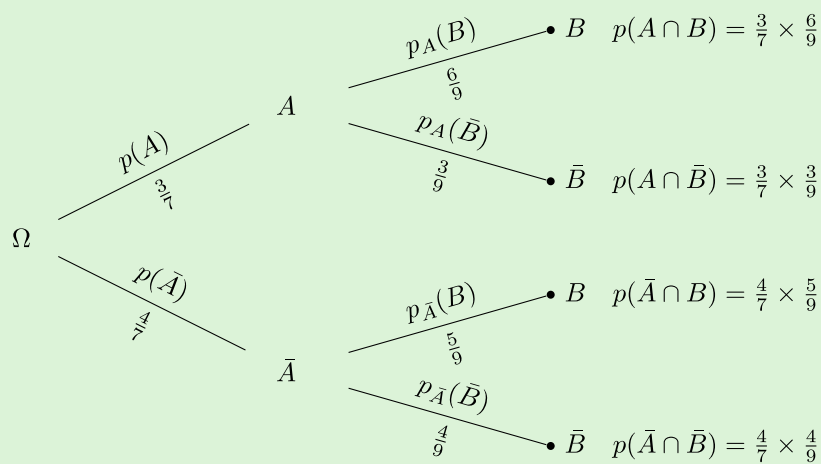
## I - Loix de probabilité discrètes

### 1. Probabilités conditionnelles

Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $A$  de probabilité non nulle. Alors la probabilité conditionnelle de  $B$  **sachant que  $A$  est réalisé** est :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

En réalité, lorsque l'on dessine un arbre de probabilité (vu en classe de Première),  $p_A B$  se lit sur les branches de l'arbre :



Ici, on a  $p_A B = \frac{6}{9}$ .

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune incidence sur la réalisation de l'autre et réciproquement. C'est-à-dire :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Pour deux événements indépendants  $A$  et  $B$ , on a les relations suivantes :

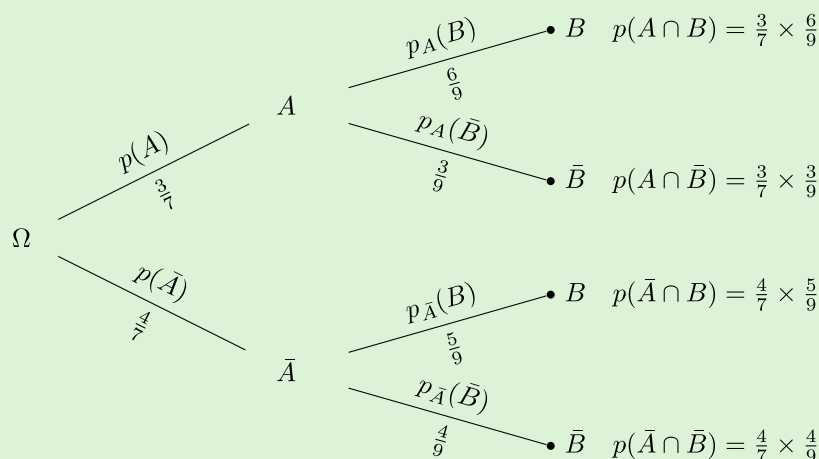
- $p_A B = p(B)$
- $p_B A = p(A)$

## 2. Formule des probabilités totales

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements qui partitionnent (qui recouvrent) l'univers  $\Omega$ , alors pour tout événement  $B$  :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$

En reprenant l'arbre précédent, calculons  $p(B)$  :



D'après la formule des probabilités totales,  $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{38}{63}$ .

## 3. Variables aléatoires

Une variable aléatoire  $X$  est une fonction (et plus précisément une application) qui, à chaque événement élémentaire de l'univers  $\Omega$  y associe un nombre réel. C'est-à-dire :  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . L'ensemble des valeurs prises par  $X$  est noté  $X(\Omega)$ .

La loi de probabilité de  $X$  attribue à chaque valeur  $x_i$  la probabilité  $p_i = p(X = x_i)$  de l'événement  $X = x_i$  constitué de tous les événements élémentaires dont l'image par  $X$  est  $x_i$ . Cette loi est généralement représentée dans un tableau :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	...	$p(X = x_n)$

On a  $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \dots + p(X = x_n) = 1$ .

L'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$  est un réel :

$$E(X) = x_i \times p_i$$

La variance  $V(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$  de la variable aléatoire  $X$  sont les réels positifs :

$$\begin{aligned} &— V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ &— \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \end{aligned}$$

**Exemple :** Calcul de l'espérance, de la variance et de l'écart-type. On donne la loi de probabilité suivante :

$x_i$	-1	0	2	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

On a :

$$\begin{aligned} &— E(X) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \\ &— V(X) = ((-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 6^2 \times \frac{1}{8}) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{75}{16} \\ &— \sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{16}} \approx 2.165 \end{aligned}$$

#### 4. Épreuve et loi de Bernoulli

Soit  $p \in \mathbb{R}$  compris entre 0 et 1. Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles :

- **Succès**, obtenu avec la probabilité  $p$ .
- **Échec**, obtenu avec la probabilité  $1 - p$ .

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si :

- $X(\Omega) = 0; 1$
- $p(X = 1) = p$  et  $p(X = 0) = 1 - p$
- **Remarque :** On voit que 0 correspond à l'échec et que 1 correspond au succès.

Si  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , on a les propriétés suivantes :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$

## 5. Loi binomiale

On répète  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On note  $p$  la probabilité de succès à chaque épreuve et  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours de ces  $n$  épreuves.

La loi de probabilité de  $X$  est appelée **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  et est notée  $B(n; p)$ .

Ainsi, pour  $X$  variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , on a :

- $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  pour tout  $0 \leq k \leq n$ , avec  $\binom{n}{k}$  coefficient binomial (se lit  $k$  parmi  $n$ )
- $E(X) = n \times p$
- $V(X) = np(1 - p)$

## II - Loïs de probabilités continues

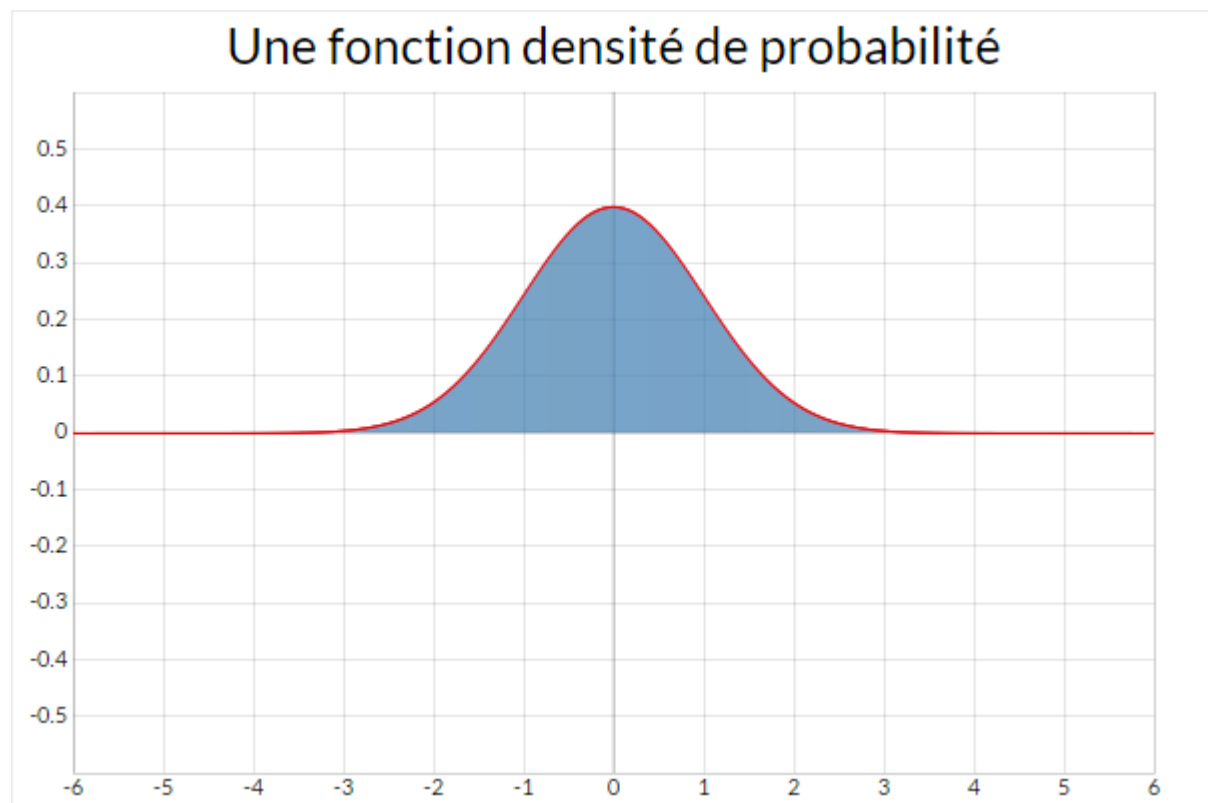
### 1. Différence discret / continu

Une variable aléatoire est dite **discrète** s'il est possible d'énumérer le nombre de valeurs prises par cette variable. Dès lors qu'une variable aléatoire peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un certain intervalle de  $\mathbb{R}$ , il devient impossible de compter le nombre de valeurs prises par cette variable et on parle alors de variable aléatoire **continue**.

### 2. Densité de probabilité

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f$  est une fonction densité de probabilité si les conditions suivantes sont respectées :

- $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (sauf peut-être en certains points).
- L'aire du domaine délimitée par la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses est égale à 1.



Soient  $X$  une variable aléatoire admettant une densité de probabilité et  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ , alors on a :

- $p(X \in [a; b]) = p(X \in [a; b[) = p(X \in ]a; b]) = p(X \in ]a; b[)$
- $p(X = x) = 0$  pour tout réel  $x$
- $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a)$
- $p(X \leq a) + p(X > a) = 1$

On peut calculer l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$  :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

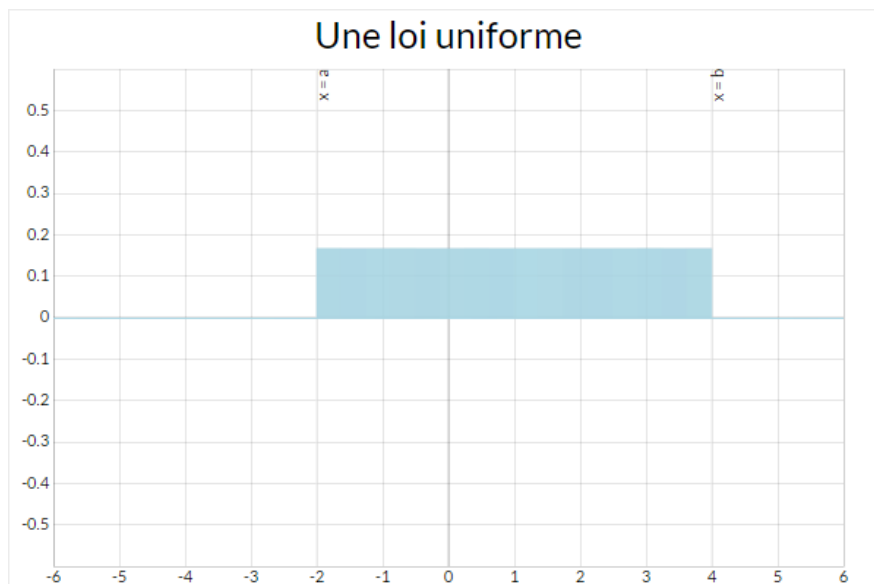
On peut également calculer sa variance :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx$$

### 3. Loi uniforme

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a; b]$  (avec  $a$  et  $b$  réels tels que  $a < b$ ) si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie sur  $[a; b]$  par :

$$f(x) : \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Si  $X$  suit la loi uniforme énoncée précédemment, alors :

$$p(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a} \text{ avec } c \text{ et } d \text{ réels tels que } a \leq c \leq d \leq b$$

L'espérance de cette loi uniforme est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

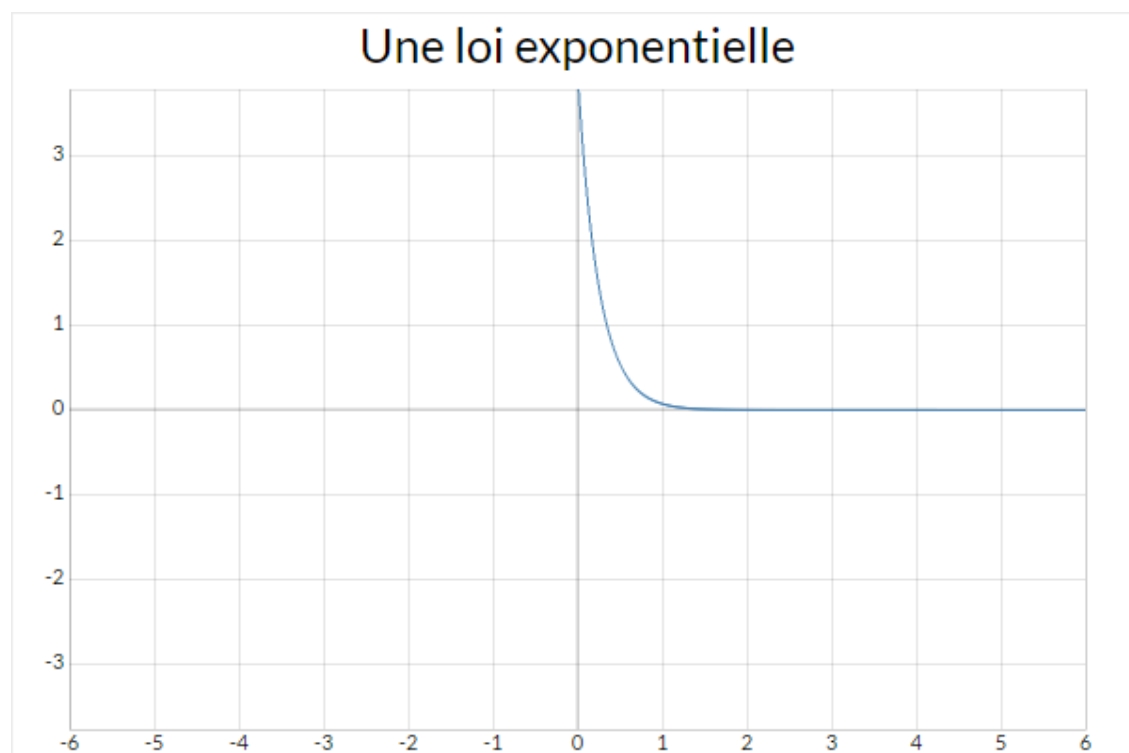
Sa variance est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

#### 4. Loi exponentielle

Une variable aléatoire  $X$  suit **la loi exponentielle** (ou loi de durée de vie sans vieillissement) de paramètre  $\lambda$  (avec  $\lambda$  réel et positif) si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$





Si  $X$  suit la loi exponentielle énoncée précédemment, alors :

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels tels que } a \leq b$$

Les propriétés suivantes sont par conséquent disponibles :

$$\begin{aligned} - p(X \leq a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a} \\ - p(X > a) &= 1 - p(X \leq a) = e^{-\lambda a} \end{aligned}$$

L'espérance de cette loi exponentielle est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Sa variance est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est dite **"sans vieillissement"** :

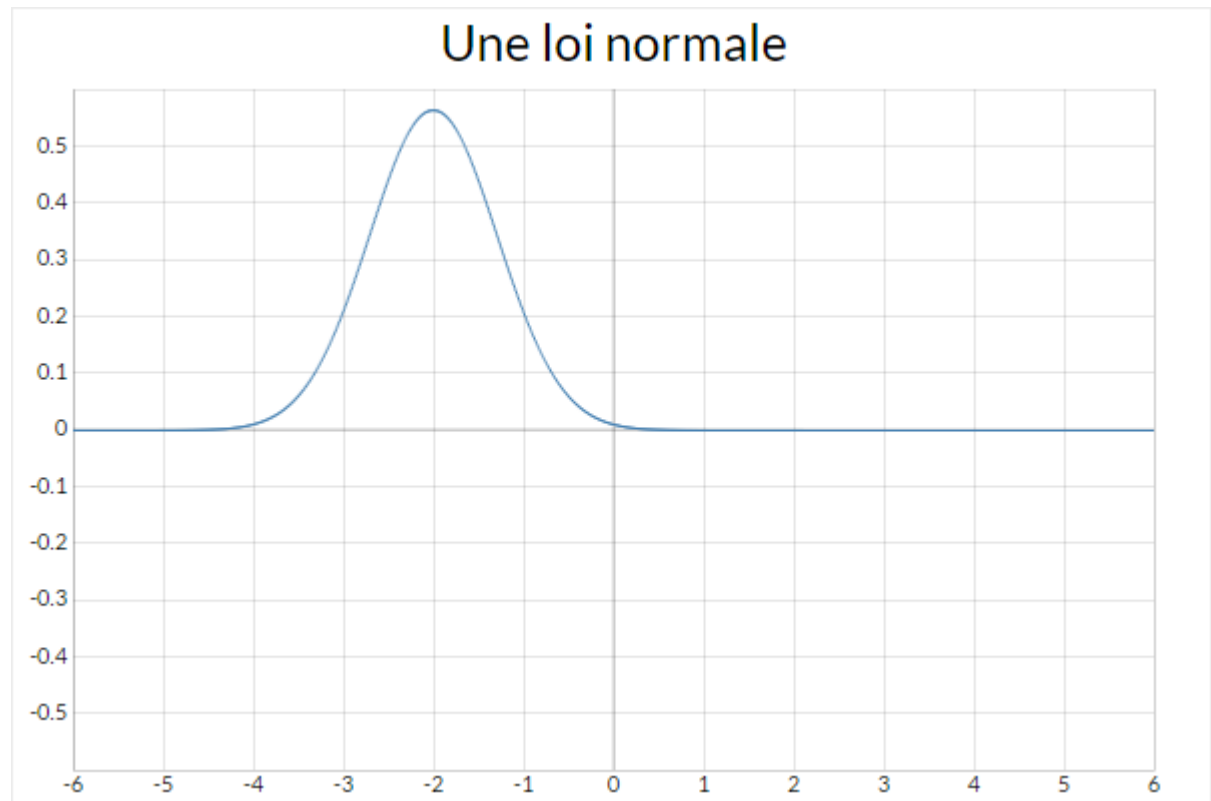
$$p(X > T + t) = p(X > t) \text{ avec } T \text{ et } t \text{ réels positifs}$$

Ceci montre que  $X$  peut avoir vécu pendant  $t$  heures (ou autre unité de temps), cela ne modifiera pas sa durée de vie.

## 5. Loi normale

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale de paramètres  $\mu, \sigma$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$  (notée  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ ) si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Si  $X$  suit la loi normale énoncée précédemment, alors on a les valeurs remarquables suivantes :

- $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$
- $p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
- $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

L'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de cette loi normale sont :

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

La fonction densité de probabilité de la loi normale n'admet pas de primitive avec les moyens usuels.

Il faut donc utiliser la calculatrice pour déterminer les probabilités d'événements.

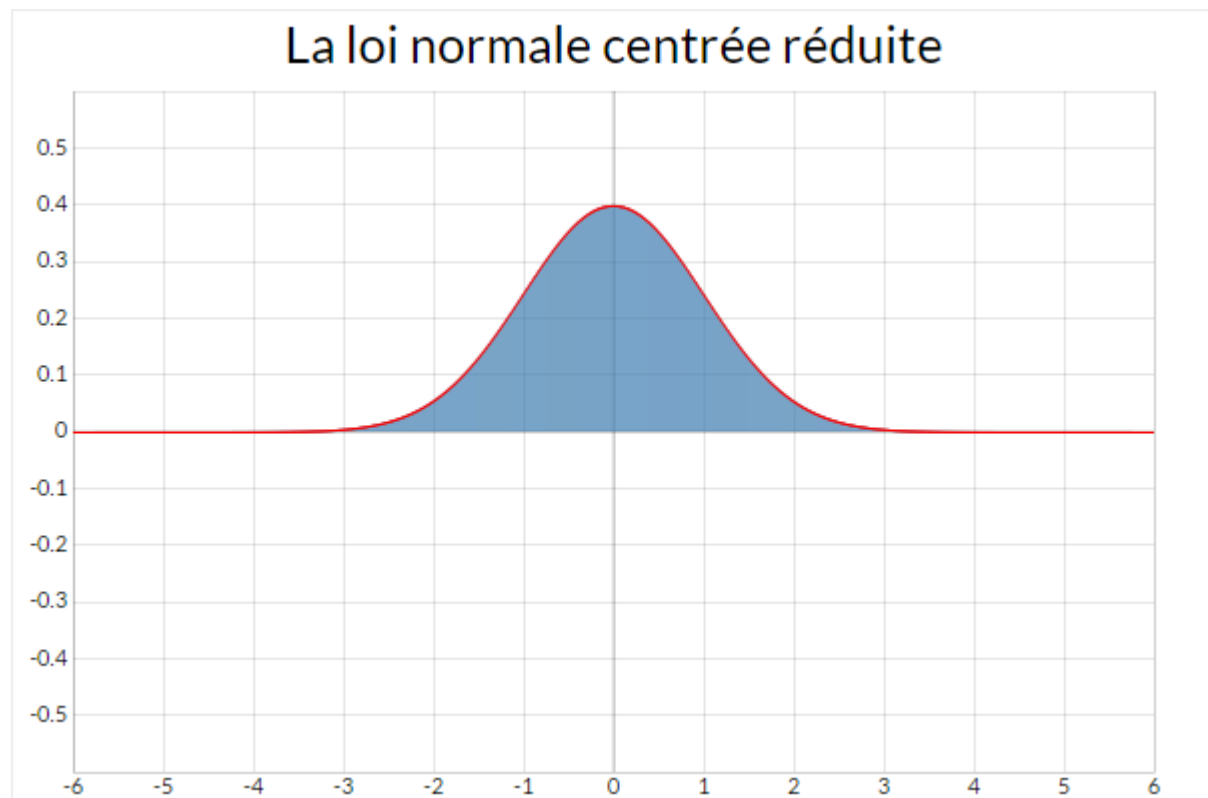
## 6. Loi normale centrée réduite

Un cas particulier de la loi normale est **la loi normale centrée réduite**.

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale centrée réduite (notée  $\mathcal{N}(0;1)$ ) si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Autrement dit,  $X$  suit la loi normale centrée réduite si et seulement si  $X$  suit la loi normale de paramètres  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ .



Si  $X$  suit la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel  $\alpha \in [0; 1]$  il existe  $u_\alpha$  tel que :

$$p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

**Valeurs particulières :**

$$— u_{0,05} \approx 1,959$$

$$— u_{0,01} \approx 2,575$$

L'espérance  $E(X)$ , la variance  $V(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$  de la loi normale centrée réduite sont :

$$— E(X) = 0$$

$$— V(X) = \sigma(X) = 1$$

Comme pour la loi normale, il faudra utiliser la calculatrice pour déterminer les probabilités d'événements.