Centres étrangers 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Ici, $n = 500$ et $p = 0,03$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 15 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 485 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

$$\left[0,03 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,03(1-0,03)}}{\sqrt{500}}; 0,03 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,03(1-0,03)}}{\sqrt{500}}\right] = [0,015; 0,045]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. D'autre part, la fréquence observée est $f = \dfrac{19}{500} = 0,38$. La fréquence de cadenas défectueux observée appartient à l'intervalle de fluctuation et donc le contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne contient pas plus de 3% de cadenas défectueux.

2) De nouveau $n = 500$ et d'autre part, la fréquence observée est $f = \dfrac{39}{500}$. On note que $n \geqslant 30$, $nf = 39 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] = [0,033; 0,123]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Partie B

1) La calculatrice (ou le cours) fournit $P(725 \leqslant X \leqslant 775) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,68$ arrondi à 10^{-2}.

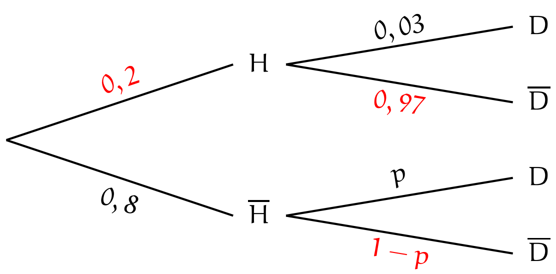
2) On cherche la plus petite valeur n_0 de l'entier n tel que $P(X > n) \leqslant 0,05$ ou encore $1 - P(X \leqslant n) \leqslant 0,05$ ou enfin $P(X \leqslant n) \geqslant 0,95$. La calculatrice fournit $P\left(X = x_0\right) = 0,95 \Leftrightarrow x_0 = 791,1\ldots$. Puisque la fonction $x \mapsto P(X \geqslant x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, pour n entier naturel,

$$P(X > n) \leqslant 0,05 \Leftrightarrow n \geqslant x_0 \Leftrightarrow n \geqslant 792.$$

La plus petite valeur de n cherchée est 792.

Partie C

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(H) \times P_H(D) + P\left(\overline{H}\right) \times P_{\overline{H}}(D) = 0,2 \times 0,03 + 0,8p = 0,8p + 0,006.$$

D'autre part, l'énoncé donne $P(D) = 0,07$.

$$0,8p + 0,006 = 0,07 \Leftrightarrow 0,8p = 0,064 \Leftrightarrow p = \frac{0,064}{0,8} \Leftrightarrow p = 0,08.$$

La probabilité p appartient à l'intervalle de confiance $[0,033; 0,123]$ obtenu à la question 2) de la partie A. Le résultat obtenu est donc cohérent avec le résultat de A-2).

3) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(H)$.

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P\left(H \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(H) \times P_H\left(\overline{D}\right)}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times (1 - 0,03)}{1 - 0,07} = 0,21 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

EXERCICE 2

1) L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-1| = |z-i|$ est l'ensemble des points du plan à égale distance des points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Cet ensemble est la première bissectrice ou encore cet ensemble est la droite d'équation $y = x$ ou enfin cet ensemble est la droite (AB).

Pour tout nombre complexe z, $|z-3-2i| \leqslant 2 \Leftrightarrow |z-(3+2i)| \leqslant 2$. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-(3+2i)| \leqslant 2$ est l'ensemble des points dont la distance au point de coordonnées $(3, 2)$ est inférieure ou égale à 5. Cet ensemble est le disque de centre le point de coordonnées $(3, 2)$ et de rayon 2 qui est effectivement le disque dessiné sur la figure.

L'ensemble cherché est l'ensemble des points de la droite (AB) situés à l'intérieur du disque. Cet ensemble est effectivement le segment $[AB]$. La proposition 1 est vraie.

2) $\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^{1515} &= \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515} = 2^{1515}e^{i\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515}e^{i\frac{505\pi}{2}} = 2^{1515}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{504\pi}{2}\right)} = 2^{1515}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+252\pi\right)} \\ &= 2^{1515}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{1515}i.\end{aligned}$$

Donc, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{1515}$ n'est pas un réel et la proposition 2 est fausse.

3) La droite (EF) est la droite passant par $E(2, 1, -3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1, -2, 5)$. Une représentation paramétrique de la droite (EF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2-u \\ y = 1-2u \\ z = -3+5u \end{array}\right., \; u \in \mathbb{R}.$$

Pour $u = 2$, on obtient le point de coordonnées $(0, -3, 7)$ qui est un autre point de la droite (EF). D'autre part, un autre vecteur directeur de la droite (EF) est le vecteur $-2\overrightarrow{EF}$ de coordonnées $(2, 4, -10)$. Une autre représentation paramétrique de la droite (EF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 7-10t \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}.$$

Donc, la proposition 3 est vraie.

4) Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(-1, -2, 5)$ et le vecteur $\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées $(-3, 2, 4)$. Donc,
- $EF = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+5^2} = \sqrt{30}$;
- $EF = \sqrt{(-3)^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$;
- $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = (-1)\times(-3)+(-2)\times 2+5\times 4 = 19$.

On en déduit que

$$\cos\widehat{FEG} = \frac{\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}}{EF\times EG} = \frac{19}{\sqrt{30}\times\sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{870}}.$$

La calculatrice fournit $\widehat{FEG} = 49,8\ldots°$ ou encore $\widehat{FEG} = 50°$ arrondi au degré. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 3

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1.$$

D'autre part, pour tout réel x,

$$(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1).}$$

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ et donc $2e^x + 1 > 0$. On en déduit que pour tout réel x, $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$. On sait que pour tout réel x, $e^x - 1 > 0$ si $x > 0$, $e^x - 1 = 0$ si $x = 0$ et $e^x - 1 < 0$ si $x < 0$. On en déduit que la fonction g' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

La fonction g est ainsi strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction g admet donc un minimum en 0 et ce minimum est

$$g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0.$$

On en déduit que la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$.

c) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n).$$

Puisque la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n, $g(u_n) \geqslant 0$ et donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou enfin pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

- $u_0 = a$ avec $a \leqslant 0$. Donc, l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{u_n} \leqslant 1$ puis $e^{u_n} - 1 \leqslant 0$. D'autre part, $e^{u_n} \geqslant 0$ et donc $e^{u_n}(e^{u_n} - 1) \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \leqslant 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 0$.
- $u_0 = a$ avec $a = 0$. Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 0$. Alors $u_{n+1} = e^0 - e^0 = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 0$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \geqslant a > 0$. D'après la question 1)b), la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $g(u_n) \geqslant g(a)$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant a + ng(a)$.

- $u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$. Donc, $u_0 \geqslant a + 0 \times g(a)$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant a + ng(a)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geqslant u_n + g(a) \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\geqslant a + ng(a) + g(a) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= a + (n+1)g(a). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant a + ng(a)$.

c) Puisque $a > 0$, on a encore $g(a) > 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (a + ng(a)) = +\infty$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant a + ng(a)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) a) Algorithme complété.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leqslant M$ u prend la valeur $e^{2u} - e^{u}$ n prend la valeur $n+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

b) Si $M = 60$, la calculatrice fournit $n = 36$.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Soient (x, y, z) un triplet pythagoricien et p un entier naturel non nul. Alors px, py et pz sont trois entiers naturels non nuls et

$$(px)^2 + (py)^2 = p^2\left(x^2 + y^2\right) = p^2z^2 = (pz)^2.$$

Donc, (px, py, pz) est un triplet pythagoricien.

2) Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien. Si x et y sont impairs, alors $x \equiv 1$ [2] et $y \equiv 1$ [2] puis $x^2 \equiv 1$ [2] et $y^2 \equiv 1$ [2] et donc $x^2 + y^2 \equiv 0$ [2] ou encore $z^2 \equiv 0$ [2]. Ceci montre que z^2 est pair. z ne peut être impair car sinon z^2 est impair d'après ce qui précède. Donc z est pair.

On a montré que si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, x, y et z ne peuvent être tous les trois impairs.

3) a) $192 = 2 \times 96 = 2^2 \times 48 = 2^3 \times 24 = 2^4 \times 12 = 2^5 \times 6 = 2^6 \times 3$. Donc, $192 = 2^\alpha \times k$ où $\alpha = 6$ et $k = 3$.

b) $2x^2 = 2 \times (2^\alpha \times k)^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$ et $z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$. De plus, comme on l'a déjà constaté, puisque k et m sont impairs, il en est de même de k^2 et m^2.

Les décompositions de $2x^2$ et z^2 sont respectivement $2x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$ et $z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$.

c) Si $2x^2 = z^2$, par unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul, on en déduit en particulier que $2\alpha+1 = 2\beta$. Cette égalité est impossible car $2\alpha + 1$ est impair et 2β est pair. Donc, il n'existe pas d'entiers naturels non nuls x et z tels que $2x^2 = z^2$.

Partie B

1) $2015 = 5 \times 403 = 5 \times 13 \times 31$. $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien. D'après la question 1) de la partie A, $(3\times13\times31, 4\times13\times31, 5\times13\times31)$ est un triplet pythagoricien ou encore $(1209, 1612, 2015)$ est un triplet pythagoricien.

2) $2n + 1 = 2015 \Leftrightarrow n = 1007$. Pour $n = 1007$, $2n + 1 = 2015$ puis $2n^2 + 2n = 2\ 030\ 112$ et $2n^2 + 2n + 1 = 2\ 030\ 113$. Donc, $(2015, 2\ 030\ 112, 2\ 030\ 113)$ est un triplet pythagoricien.

3) a) Soient x et z deux entiers naturels non nuls. Si $z - x = 169$ et $z + x = 961$, alors $z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) = 169 \times 961 = 403^2$. De plus,

$$\left\{\begin{array}{l} z + x = 961 \\ z - x = 169 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2z = 961 + 169 \\ 2x = 961 - 169 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 565 \\ x = 396 \end{array}\right. .$$

b) Ainsi, $396^2 + 403^2 = 565^2$. $(396, 403, 565)$ est un triplet pythagoricien. Maintenant, $403 = 13 \times 31$. En multipliant les trois nombres par 5, on obtient le triplet pythagoricien $(1980, 2015, 2825)$.

