Nouvelle Calédonie. 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1)

• $f(0) = 0 \times e^0 = 0$ et $f(1) = 1 \times e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

• Pour $x > 0$, $f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

• La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $[0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

On a ainsi justifié toutes les informations données dans le tableau de variations de f.

2) F est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$F'(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1)\left(-e^{-x}\right) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x} = f(x).$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

Partie B

1) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et D_a sont les solutions de l'équation $f(x) = ax$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = ax &\Leftrightarrow xe^{-x} = ax \Leftrightarrow x\left(e^{-x} - a\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = a \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x = \ln(a) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\ln(a). \end{aligned}$$

De plus, $0 < a < 1 \Rightarrow \ln(a) < 0 \Rightarrow -\ln(a) > 0$. Ainsi, $\mathscr{C}_f$ et D_a se coupent en O et en un et un seul point d'abscisse strictement positive, le point M de coordonnées $(-\ln(a), -a\ln(a))$.

2) Soit $a \in]0, 1[$. Puisque la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0, -\ln(a)]$ et d'après la question 2) de la partie A,

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(a) &= \int_0^{-\ln(a)} (f(x) - ax)\, dx = \left[F(x) - a\frac{x^2}{2}\right]_0^{-\ln(a)} = \left(F(-\ln(a)) - a\frac{1}{2}(-\ln(a))^2\right) - (F(0) - 0) \\ &= (\ln(a) - 1)e^{\ln(a)} - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 - (-1)e^0 = a(\ln(a) - 1) - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 \\ &= a\ln(a) - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 - a. \end{aligned}$$

3) Puisque la fonction $\mathscr{H}$ est dérivable sur $[0, 1]$, la fonction $\mathscr{H}$ est en particulier continue sur $[0, 1]$.

Ainsi, la fonction $\mathscr{H}$ est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$. On sait que pour tout réel k de $\left[\mathscr{H}(1), \lim\limits_{a \to 0} \mathscr{H}(a)\right[= [0, 1[$, l'équation $\mathscr{H}(a) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, 1]$. En particulier, l'équation $\mathscr{H}(a) = 0,5$ admet admet une solution et une seule dans $]0, 1]$ notée α.

4) Notons encore A et B les valeurs affichées en sortie de l'algorithme. On a $A \leqslant \alpha \leqslant B$ et $B - A \leqslant 10^{-p}$. On a ainsi obtenu des valeurs approchées par défaut et par excès de α à 10^{-p} près (par dichotomie).

5) Donnons dans un tableau les valeurs successives obtenues quand $p = 2$.

Etape	A	B	C
0	0	1	0,5
1	0	0,5	0,25
2	0	0,25	0,125
3	0	0,125	0,0625
4	0,0625	0,125	0,09375
5	0,0625	0,09375	0,078125
6	0,0625	0,078125	0,0703125
7	0,0625	0,0703125	

Ainsi, $0,062 \leqslant 0,0625 \leqslant \alpha \leqslant 0,0703125 \leqslant 0,072$ avec $0,072 - 0,062 = 0,01$. Un encadrement de α d'amplitude $0,01$ est

$$0,062 \leqslant \alpha \leqslant 0,072.$$

EXERCICE 2

1) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Ici, $\dfrac{1}{\lambda} = 4$ puis $\lambda = \dfrac{1}{4} = 0,25$. Ensuite, pour t réel positif donné,

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{0}\right) - \left(e^{-\lambda t}\right) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,25t},$$

puis

$$P(T > t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-0,25t}\right) = e^{-\lambda t} = e^{-0,25t}.$$

La probabilité demandée est $P_{T>3}(T > 3+2)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est sans vieillissement. Donc,

$$P_{T>3}(T > 3+2) = P(T > 2) = e^{-0,25\times 2} = e^{-0,5} = 0,61 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

La proposition 1 est fausse.

2) Pour tout nombre complexe z, $z^3 - 3z^2 + 3z = 0 \Leftrightarrow z\left(z^2 + 3z + 3\right) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 + 3z + 3 = 0$. On pose déjà $z_0 = 0$.

Le discriminant de l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = -3$. Δ est strictement négatif et donc l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$.

Notons M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_0 = 0$, $z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$.

- $M_0M_1 = |z_1| = \dfrac{1}{2}\left|-3 + i\sqrt{3}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
- $M_0M_2 = |z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{3}$.
- $M_2M_1 = |z_1 - z_2| = \left|\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}|i| = \sqrt{3}$.

Finalement, $M_0M_1 = M_0M_2 = M_1M_2$ et donc le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral. La proposition 2 est vraie.

EXERCICE 3

Partie A

Ici, $n = 34$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,5$. On note que $n \geqslant 30$ et que $np = n(1-p) = 17 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{34}}, 0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{34}}\right] = [0,331 ; 0,669]$$

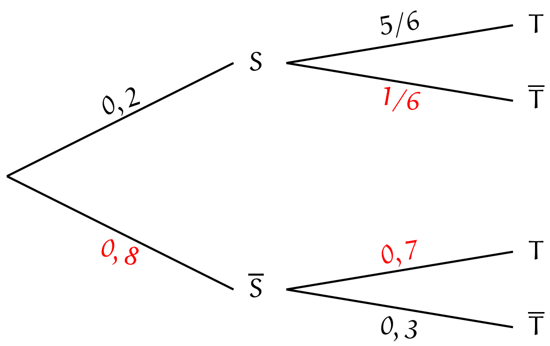
en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{22}{34} = 0,647\ldots$

La fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse faite sur p.

Partie B

Notons S l'événement « l'étudiant a suivi le stage » et T l'événement « l'étudiant a traité l'exercice ». La probabilité demandée est $P_{\overline{T}}(S)$. L'énoncé donne $P_{\overline{S}}\left(\overline{T}\right) = 0,3$ puis $P_S(T) = \frac{5}{6}$ et $P(S) = 0,2$.

Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P_{\overline{T}}(S) = \frac{P\left(S \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \frac{P(S) \times P_S\left(\overline{T}\right)}{P(S) \times P_S\left(\overline{T}\right) + P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}\left(\overline{T}\right)}$$

$$= \frac{0,2 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right)}{0,2 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) + (1 - 0,2) \times 0,3} = \frac{\frac{0,2}{6}}{\frac{0,2 + 6 \times 0,24}{6}} = \frac{0,2}{1,64} = \frac{5}{41}.$$

$$\boxed{P_{\overline{T}}(S) = \frac{5}{41} = 0,122 \text{ à } 0,001 \text{ près.}}$$

Partie C

Soit $Z = \frac{T - 225}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite. De plus,

$$T \leqslant 235 \Leftrightarrow T - 225 \leqslant 10 \Leftrightarrow \frac{T - 225}{\sigma} \leqslant \frac{10}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant \frac{10}{\sigma}.$$

L'énoncé donne $P\left(Z \leqslant \frac{10}{\sigma}\right) = P(T \leqslant 225) = 0,98$. La calculatrice fournit $\frac{10}{\sigma} = 2,05\ldots$ puis $\sigma = 4,9$ à $0,1$ près.

$$\boxed{\sigma = 4,9 \text{ à } 0,001 \text{ près.}}$$

EXERCICE 4.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- $u_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$. L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Alors, $u_n < \dfrac{n+1}{n+1} = 1$ et en particulier $u_n \neq 2$ puis

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2-u_n} \\
&= \frac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc la suite (u_n) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

EXERCICE 5.

1) (a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(7, -4, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2, 3, -2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent bien un plan.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 5 \times 7 + 16 \times (-4) + 29 \times 1 = 35 - 64 + 29 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 16 \times 3 + 29 \times (-2) = 10 + 48 - 58 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(-1, -1, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(5, 16, 29)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est

$$5(x + 1) + 16(y + 1) + 29(z - 0) = 0$$

ou encore

$$5x + 16y + 29z + 21 = 0.$$

2) (a) $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{66}$. $AC = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ et $BC = \sqrt{(1-6)^2 + (2+5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{83}$.
Par suite $AB^2 + AC^2 = 66 + 17 = 83 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle ABC est rectangle en A.

b) L'aire du triangle ABC, exprimée en unités d'aire, est donc $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{66} \times \sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3) (a) $5x_S + 16y_S + 29z_S + 21 = 5 \times 13 + 16 \times +29 \times 54 + 21 \neq 0$. Donc, le point S n'appartient pas au plan (ABC) ou encore les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b) La droite (Δ) est la droite passant par $S(13, 37, 54)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(5, 16, 29)$. Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = 13 + 5t \\ y = 37 + 16t \\ z = 54 + 29t \end{array}\right.$.

Soit $M(13 + 5t, 37 + 16t, 54 + 29t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$\begin{aligned} M \in (ABC) &\Leftrightarrow 5(13 + 5t) + 16(37 + 16t) + 29(54 + 29t) + 21 = 0 \Leftrightarrow (25 + 256 + 841)t + 65 + 592 + 1566 + 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{2244}{1122} \Leftrightarrow t = -2. \end{aligned}$$

Pour $t = -2$, on obtient les coordonnées du point H : $(3, 5, -4)$.

4) $SH = \sqrt{(13-3)^2 + (37-5)^2 + (54+4)^2} = \sqrt{100 + 1024 + 3364} = \sqrt{4488} = \sqrt{4 \times 1122} = 2\sqrt{1122}$. Donc, le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire de}(ABC) \times SH}{3} = \frac{\frac{\sqrt{1122}}{2} \times 2\sqrt{1122}}{3} = \frac{1122}{3} = 374.$$

$$\boxed{\text{Le volume de la pyramide SABC est 374 (unités de volume).}}$$

