Chapitre I - Les suites

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Qu'est-ce qu'une suite ?

1. Définition

On appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: cette fonction va prendre des éléments d'un ensemble de départ $\mathbb{N}$ et va les amener dans un ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence :** On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang $n+1$.
- **Par son terme général :** On donne le n-ième terme de la suite en fonction de n.

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :

$u_n = n$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \end{cases}.$

On remarque que bien que définies différemment, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

2. Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si elle est de la forme :

$u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Le réel r est la **raison** de la suite (si $r > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, si $r < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et si $r = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite arithmétique :

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$u_n = u_p + (n-p) \times r$

Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$) :

$u_n = u_0 + (n-0) \times r = u_0 + n \times r$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante (on note S_n cette somme) :

$$S_n = \frac{(\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}) \times (\text{Nombre de termes})}{2}$$

Astuce : Pour trouver le nombre de termes, on prend le rang jusqu'auquel on souhaite calculer cette somme, on y soustrait l'indice du premier terme et on y ajoute 1.

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $(u_n)_{n\geq 1}$: $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$.

La raison r est égale à 5. Le premier terme est $u_1 = 10$ d'indice $p = 1$. Le terme général de cette suite est donc $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

Par conséquent, on a : $u_n = 10 + (n-1) \times 5$. On souhaite calculer la somme des termes de cette suite jusqu'au rang n.

Par l'astuce précédente, il y a $n - 1 + p = n$ termes. On peut calculer la somme S_n : $S_n = \frac{(u_1+u_n)\times(n)}{2} = \frac{(20+(n-1)\times 5)(n)}{2} = \frac{5n^2+15n}{2}$.

3. Suites géométriques

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si elle est de la forme :

$v_{n+1} = v_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$.

Le réel q est la **raison** de la suite (si $q > 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, si $0 < q < 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et si $q = 1$ ou 0, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite géométrique :

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$v_n = v_p \times q^{n-p}$

Et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$) :

$v_n = v_0 \times q^{n-0} = v_0 \times q^n$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante (on note S_n cette somme) :

$$S_n = (\text{Premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

Astuce : Pour trouver le nombre de termes, on prend le rang jusqu'auquel on souhaite calculer cette somme.

On y soustrait l'indice du premier terme et on y ajoute 1.

Exemple : Soit une suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par $(v_n)_{n \geq 2}$: $\begin{cases} v_2 = 1 \\ v_{n+1} = v_n \times 2 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

La raison q est égale à 2. Le premier terme est $v_2 = 1$ d'indice $p = 2$. Le terme général de cette suite est donc $v_n = v_2 \times q^{n-2}$.

Par conséquent, on a : $v_n = 2^{n-2}$. On souhaite calculer la somme des termes de cette suite jusqu'au rang n.

Par l'astuce précédente, il y a $n - 1 + p = n + 1$ termes. On peut calculer la somme S_n :

$S_n = v_2 \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = -(1 - 2^{n-1}) = 2^{n-1} - 1$.

II - Étude des suites

1. Sens de variation

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si on a :

> $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

À l'inverse, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si on a :

> $u_{n+1} \leq u_n$ ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Une suite est dite **constante** si on a pour $c \in \mathbb{R}$:

> $u_n = u_{n+1} = c$.

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

2. Limites

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers une limite finie l si pour tout $\epsilon > 0$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. Cette définition est un peu technique mais elle signifie qu'il existe une infinité de réels entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** et on note alors :

> $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Attention ! On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l mais **jamais** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'atteindra l quand n tend vers $+\infty$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut également diverger vers une limite infinie. On dit à ce moment là que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**. On note ainsi :

> $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

> Il est possible d'écrire une définition semblable à celle de la convergence.
>
> Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cela signifie que pour tout réel h et à partir d'un certain rang M, on aura $u_M > h$.
> Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cela signifie que pour tout réel h et à partir d'un certain rang m, on aura $u_m < h$.

Limite d'une suite géométrique				
Si on a pour $q \in \mathbb{R}$...	$-1 < q < 1$	$1 < q$	$q \leq -1$	$q = 1$
La suite q^n a pour limite...	0	$+\infty$	Pas de limite	1

À savoir que si une suite à une limite, alors cette limite est **unique**.

3. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

Limite d'une somme						
Si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Limite d'un produit									
Si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Limite d'un quotient									
Si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	l	0
Et la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+_-	0
Alors la limite de $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$\pm\infty$	**?**

4. Majoration, minoration et bornes

Soient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux réels m et M :

- On dit que que m est un **minorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout n : $u_n > m$.
- On dit que que M est un **majorant** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout n : $u_n < M$.
- On dit que que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Toute suite convergente est également bornée.

5. Encadrement

Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang. On a :

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors $l < l'$.

Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n < v_n < w_n$ à partir d'un certain rang et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le réel l. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l$$

Ce théorème est appelé **théorème des gendarmes**.

III - Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir d'un certain rang p :

Initialisation : On teste la propriété au rang p. Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

Hérédité : On démontre que si la propriété est vraie au rang p, alors elle est vraie au rang $p+1$.

Conclusion : On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang $p+1$ et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir de ce rang p et pour tout $n \geq p$.

Exemple : Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4 \leq u_n \leq 5$.

On note $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathcal{P}_n$: $4 \leq u_n \leq 5$.

On constate également que $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$.

Initialisation : On teste la propriété au rang 0 :

$\mathcal{P}_0$: $4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$. C'est vrai.

La propriété est vraie au rang 0, on souhaite vérifier que la propriété est vraie au rang $n+1$.

Hérédité :

D'après $\mathcal{P}_n$: $4 \leq u_n \leq 5$. Donc on a :

$\iff 4 \leq u_n \leq 5$

$\iff 4+4 \leq u_n + 4 \leq 5+4$

$\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8}$ (la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc on change l'inégalité)

$\iff 4+\frac{1}{9} \leq 4+\frac{1}{u_n+4} \leq 4+\frac{1}{8}$

Or $4+\frac{1}{9} \approx 4.111 > 4$ et $4+\frac{1}{8} = 4.125 < 5$. On a donc bien :

$4 \leq u_{n+1} \leq 5$

Conclusion :
La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites.