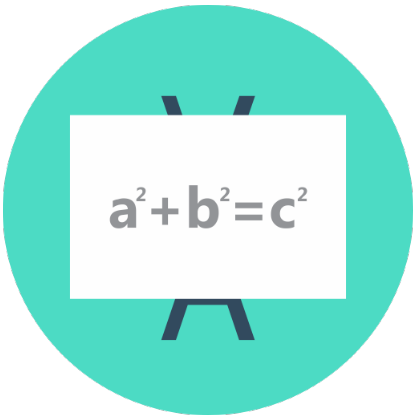


Chapitre III – Dérivation

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Qu'est-ce-qu'une dérivée ?

1. Nombre dérivé

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $(a+h) \in I$.

À RETENIR

La fonction f est **dérivable** en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de f en a noté $f'(a)$.

À LIRE

La notation $\lim\limits_{h \to 0}$ veut simplement dire que l'on rend h aussi proche de 0 que possible (sans pour autant que h soit égal à 0). On dit que l'on "fait tendre h vers 0" et on appelle cela **une limite**.

Attention ! Il arrive que cette limite n'existe pas ou ne soit pas finie. Dans ce cas là, $f'(a)$ n'existe pas et on dit que f n'est pas dérivable en a.

2. La tangente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente $\mathcal{T}$ au point de coordonnées $(a; f(a))$. $f'(a)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$, et une équation de $\mathcal{T}$ est :

À RETENIR

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

DÉMONSTRATION

La tangente $\mathcal{T}$ en un point d'une courbe est une droite. Une équation de droite est de la forme $y = mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

On a déjà le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ par la propriété précédente : $m = f'(a)$.

De plus, on sait que $\mathcal{T}$ passe par le point $(a, f(a))$ (car c'est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a).

Donc l'équation de droite vérifie $f(a) = f'(a)a + p$. Ce qui donne $p = f(a) - af'(a)$. Au final notre équation est la suivante : $y = xf'(a) + f(a) - af'(a) \iff y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

3. Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors on appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de f la fonction g suivante :

À RETENIR

Pour tout $x \in I$, $g(x) = f'(x)$ (à tout réel x de I, g y associe le nombre dérivé $f'(x)$)

Très souvent, la fonction g sera notée f'.

II - Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
λ	0	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+_*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions u et v :

À RETENIR

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où u est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où v est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où u et v sont dérivables et non nulles.

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles (i.e. “f de g de x”) :

À RETENIR

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

De manière générale, soient f dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$. On a alors :

À RETENIR

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

III - Étude des variations d'une fonction

1. Lien dérivée - variations d'une fonction

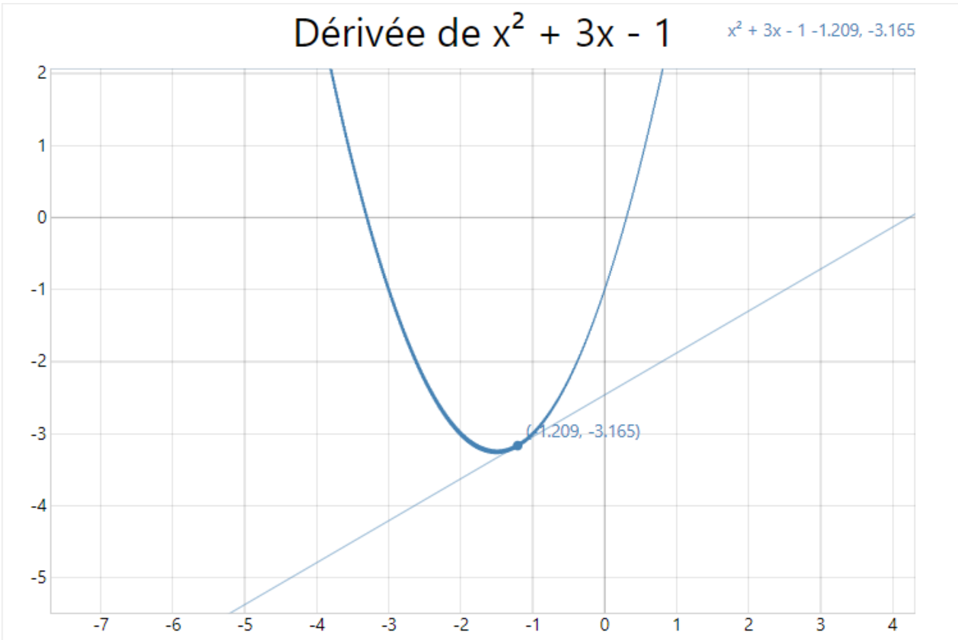
Avec le signe de la dérivée, il est possible d'obtenir le sens de variation de la fonction. Pour une fonction f dérivable sur I et de dérivée f' :

À RETENIR

— Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.

— Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

— Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.



2. Extrema

Soient f dérivable sur I de dérivée f', et $a \in I$:

À RETENIR

— Si f admet un extremum local en a, alors on a $f'(a) = 0$.

— Si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a, alors $f'(a)$ est un extremum local de f.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

À LIRE

Avec ceci, il est possible de retrouver la plupart des formules que nous avons vu sur les fonctions du second degré (sens de variation, sommet de la parabole, ...).