



## Chapitre III - Les fonctions trigonométriques

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

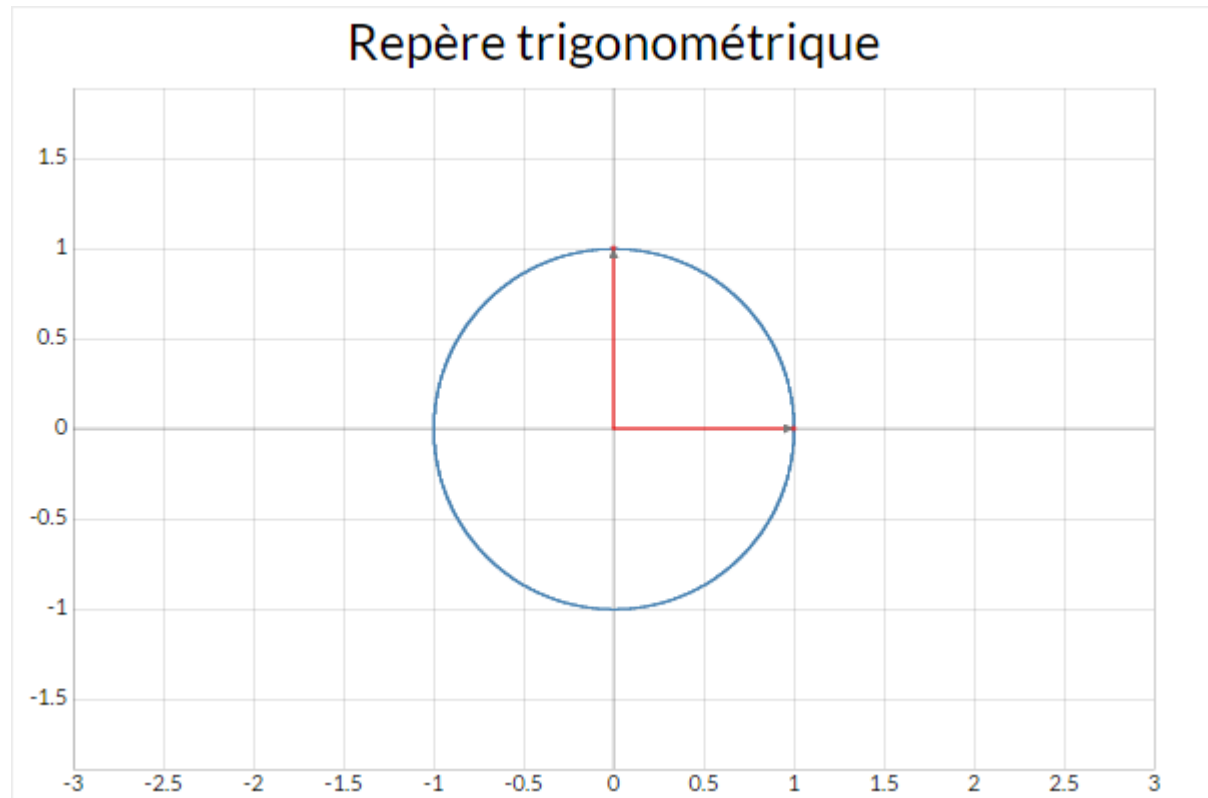
### Table des matières

<b>I - Sinus et cosinus</b>	<b>1</b>
1. Définition . . . . .	1
2. Périodicité . . . . .	2
3. Formules de trigonométrie . . . . .	2
4. Résolution d'équations . . . . .	4
5. Fonctions réciproques . . . . .	4
<b>II - Étude des fonctions trigonométriques</b>	<b>5</b>
1. Dérivée . . . . .	5
2. Signe et variations . . . . .	5
3. Limite . . . . .	6
4. Valeurs remarquables . . . . .	6
5. Représentation graphique . . . . .	7

## I - Sinus et cosinus

### 1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Il sera également muni d'un cercle appelé **cercle trigonométrique**  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



Soit  $M$  un point quelconque d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $y$  situé sur le cercle  $\mathcal{C}$ . Les coordonnées de  $M$  sont :

- L'abscisse de  $M$  appelée **cosinus** est notée  $\cos(x)$ .
- L'ordonnée de  $M$  appelée **sinus** est notée  $\sin(x)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on aura  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

## 2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ . Ainsi pour tout  $x$  réel et  $k$  entier relatif :

$$\begin{aligned} - \cos(x) &= \cos(x + 2k\pi) \\ - \sin(x) &= \sin(x + 2k\pi) \end{aligned}$$

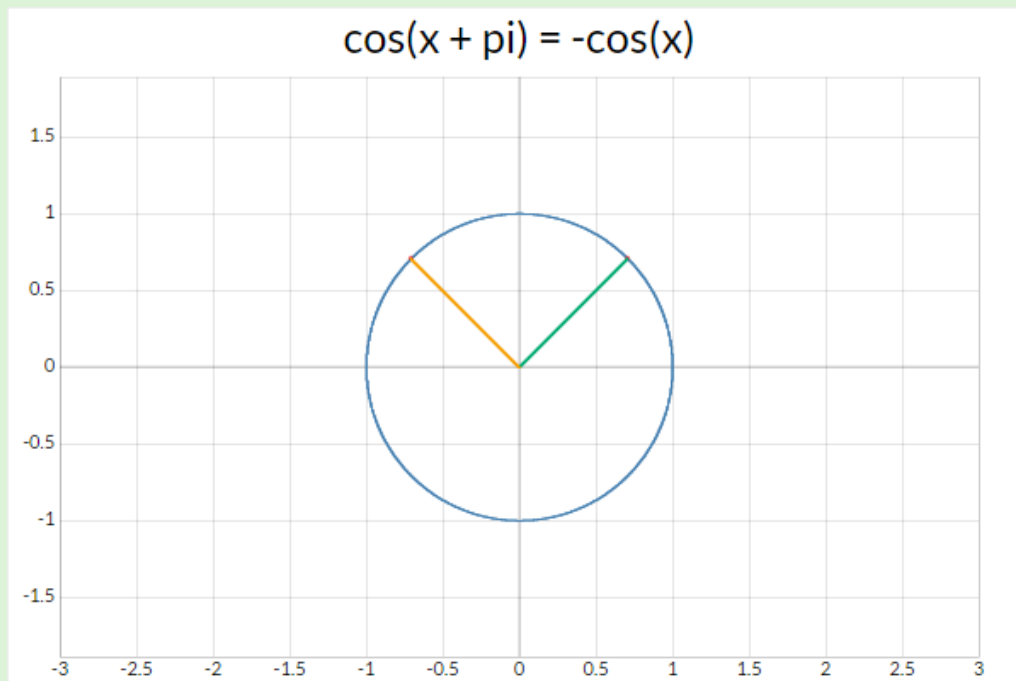
Concrètement, cela signifie que  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$  et idem pour  $\sin(x)$ .

## 3. Formules de trigonométrie

On a les relations suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} - \cos(-x) &= \cos(x) \text{ (la fonction cosinus est **paire**)} \\ - \sin(-x) &= -\sin(x) \text{ (la fonction sinus est **impaire**)} \\ - \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ - \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\ - \cos(x - \pi) &= -\cos(x) \\ - \sin(x - \pi) &= \sin(x) \\ - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\ - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\ - \cos(x + y) &= \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y) \\ - \sin(x + y) &= \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y) \\ - \cos(x)^2 + \sin(x)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de  $\cos(x + \pi)$  :



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ .

#### 4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus. Ainsi, soient  $x$  et  $y$  deux réels et  $k$  un entier relatif. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} - \cos(x) = \cos(y) &\iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases} \\ - \sin(x) = \sin(y) &\iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

#### 5. Fonctions réciproques

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ , on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à  $\cos(x)$  (notée  $\arccos(x)$ ) et une **fonction réciproque** à  $\sin(x)$  (notée  $\arcsin(x)$ ). On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} - \cos(x) = y &\iff x = \arccos(y) \\ - \sin(x) = y &\iff x = \arcsin(y) \end{aligned}$$

Cela signifie que à tout réel  $x$ , la fonction  $\arccos(x)$  y associe son **antécédent**  $y$  par rapport à  $\cos(x)$  (pareil pour  $\arcsin(x)$  avec  $\sin(x)$ ).

## II - Étude des fonctions trigonométriques

### 1. Dérivée

Soit une fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :

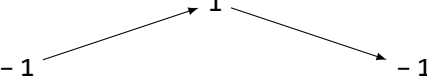
$$\begin{aligned} - \cos'(u(x)) &= u'(x) * -\sin(u(x)) \\ - \sin'(u(x)) &= u'(x) * \cos(u(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, si on a  $u(x) = x$  :

$$\begin{aligned} - \cos'(x) &= -\sin(x) \\ - \sin'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$


### 2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permettent d'obtenir les variations de celles-ci. Voici donc le signe et la variation de ces fonctions. Tout d'abord celui de la fonction cosinus :

x	$-\pi$		$0$		$\pi$
$(\cos(x))'$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$
$\cos(x)$					

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période  $2\pi$ .

Voici maintenant celui de la fonction sinus :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	
$(\sin(x))'$	-	0	+	0	-
$\sin(x)$					

Ce tableau est également périodique de période  $2\pi$ .

### 3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en  $\pm\infty$ . Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre  $-1$  et  $1$ .

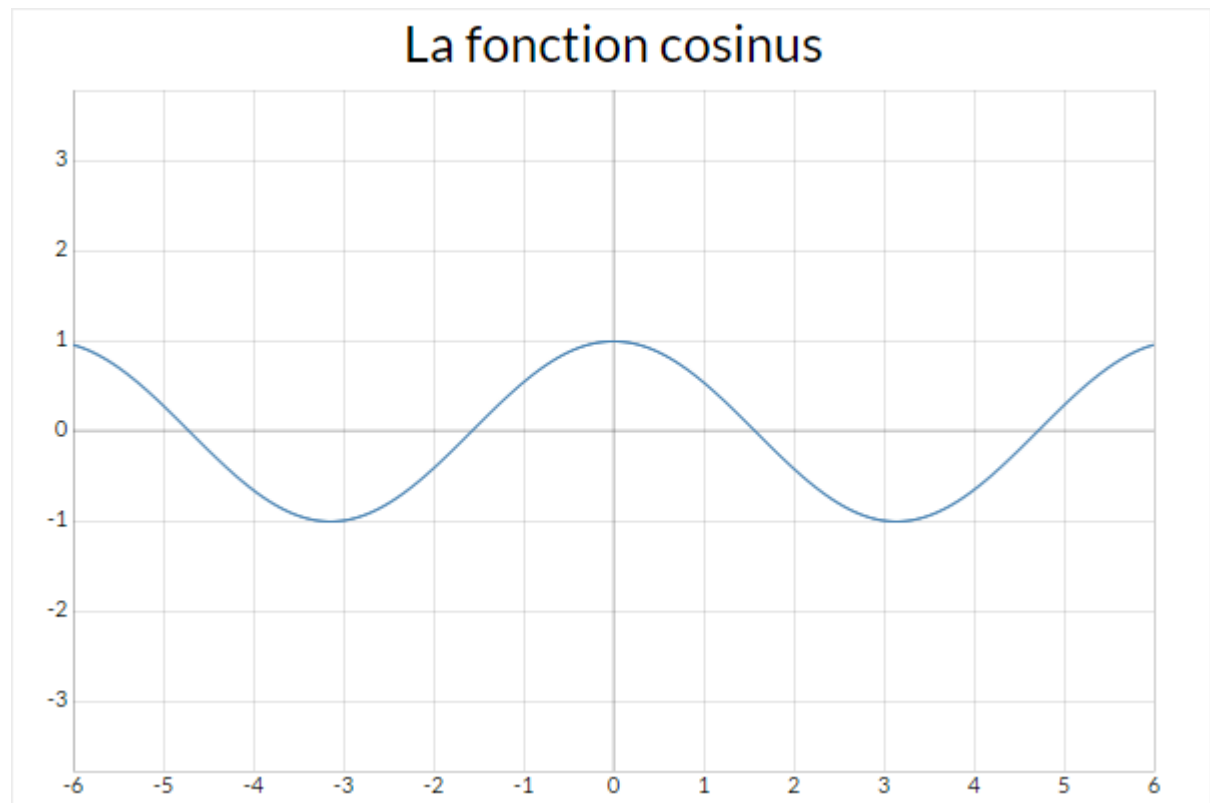
### 4. Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

Valeur de $x$ (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$ )	Valeur de $\cos(x)$	Valeur de $\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi$	-1	0

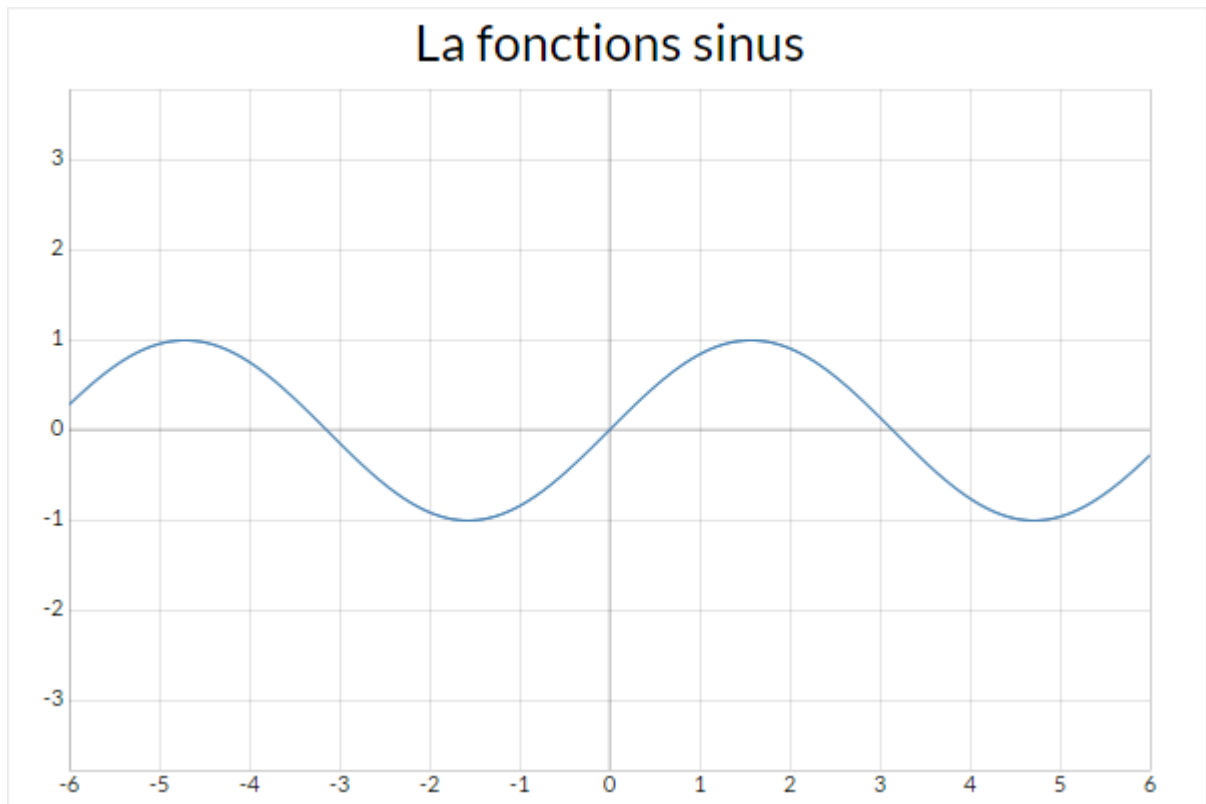
## 5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :





Ainsi que de la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc...