Chapitre VIII - Les nombres complexes

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

Table des matières

I - L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ 1

1. Qu'est-ce-que l'ensemble $\mathbb{C}$? 1
2. Qu'est ce qu'un nombre complexe ? 2
3. Égalité entre nombres complexes 2

II - Propriétés 3

1. Conjugué 3
2. Module d'un nombre complexe 4
3. Forme trigonométrique et exponentielle 4
4. Affixe et représentation 5

III - Calculs particuliers 7

1. Résolution d'équations du second degré 7
2. Géométrie avec les nombres complexes 7
3. Complément : formules trigonométriques 8

I - L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

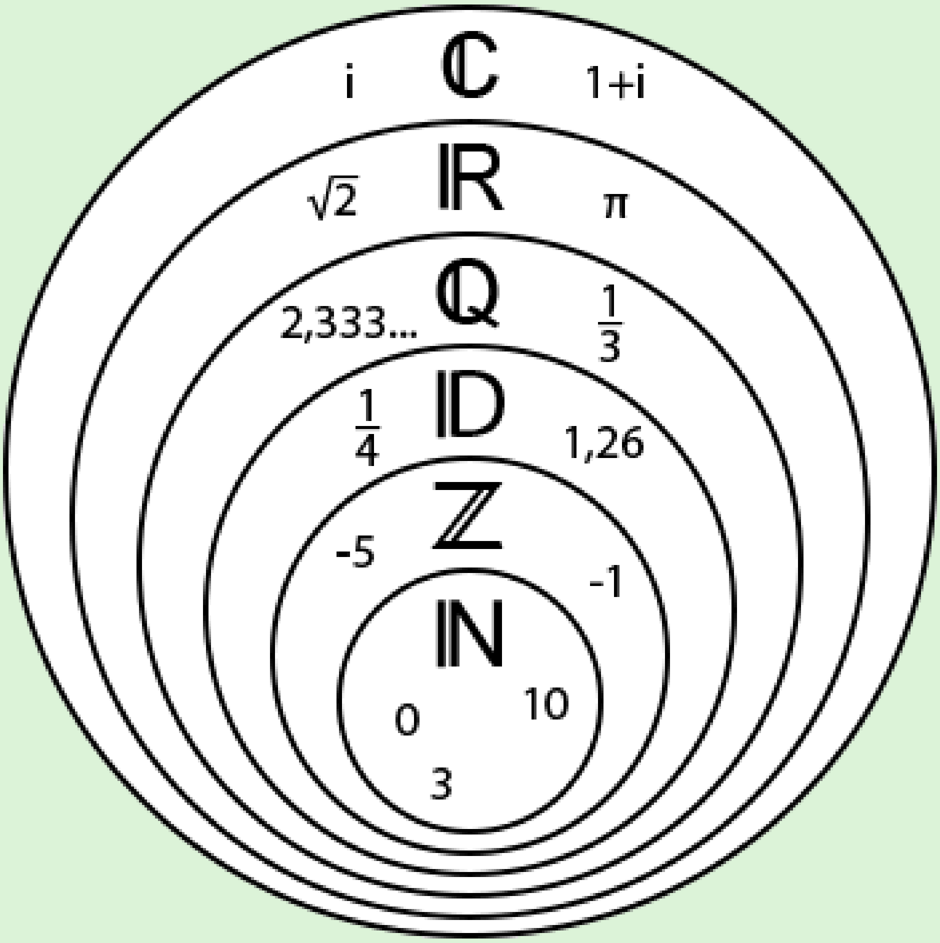
1. Qu'est-ce-que l'ensemble $\mathbb{C}$?

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi qu'un nombre i vérifiant la propriété suivante :

$$i^2 = -1$$

Cet ensemble est appelé **ensemble des nombres complexes** et obéit aux mêmes règles de calcul que l'ensemble $\mathbb{R}$.

Il peut être dûr de se représenter l'ensemble des nombres complexes, en voici un schema :



Comme vous le voyez ici, l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ mais également des nombres qui ne sont pas réels (i, $1 + i$, etc...).

2. Qu'est ce qu'un nombre complexe ?

Soient x et y deux réels. Le nombre complexe z correspondant peut s'écrire sous cette forme :

$$z = x + iy$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique**. On note $x = \mathrm{Re}(z)$ (la **partie réelle** de z) et $y = \mathrm{Im}(z)$ (la **partie imaginaire** de z).

Le nombre z est dit **réel** si $y = 0$ et il est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

3. Égalité entre nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z'. Ces deux nombres sont dits **égaux** si et seulement si :

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

La partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres doivent toutes deux être égales.

II - Propriétés

1. Conjugué

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre complexe **conjugué** noté $\bar{z}$. Ce conjugué est le nombre complexe suivant :

$$\bar{z} = x - iy$$

Plusieurs propriétés peuvent se dégager à l'aide des conjugués. Soient z et z' deux nombres complexes :

— $\bar{\bar{z}} = z$
— $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
— $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$
— $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z' \neq 0$ si $n \leq 0$
— $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

— $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
— $z - \bar{z} = 2i \times \mathrm{Re}(z)$

Ces propriétés peuvent sembler compliquées mais heureusement il est possible de les retrouver par le calcul. Par exemple, pour la première propriété du second encadré :

On pose $z = x + iz$, on a $z = x - iy$:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |z|^2.$$

2. Module d'un nombre complexe

On appelle **module** (noté $|z|$) d'un nombre complexe $z = x + iy$ le réel :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et on a les relations suivantes pour $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z' \neq 0$ si $n \leq 0$

3. Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous deux formes la **forme algébrique** et la **forme exponentielle** (ou forme trigonométrique). Pour obtenir la forme trigonométrique du nombre complexe, il faut tout d'abord obtenir le module. La forme trigonométrique est ensuite donnée par la formule suivante :

$$z = |z| \times (cos(\theta) + isin(\theta))$$

Avec θ **l'argument** de z (noté $\arg(z)$) qui doit vérifier les deux conditions suivantes :

$$cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \text{ et } sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

Une fois la forme trigonométrique obtenue, on peut passer à la forme exponentielle, qui est :

$$z = |z| \times e^{i\theta}$$

Exemple : On veut passer le nombre complexe $z = 1 + i$ sous forme exponentielle.

1ère étape : On calcule le module : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2nde étape : On factorise par le module : $z = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3ème étape : On calcule un argument : $cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ (car $cos(\frac{\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

4ème étape : On passe à la forme exponentielle : $z = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$.

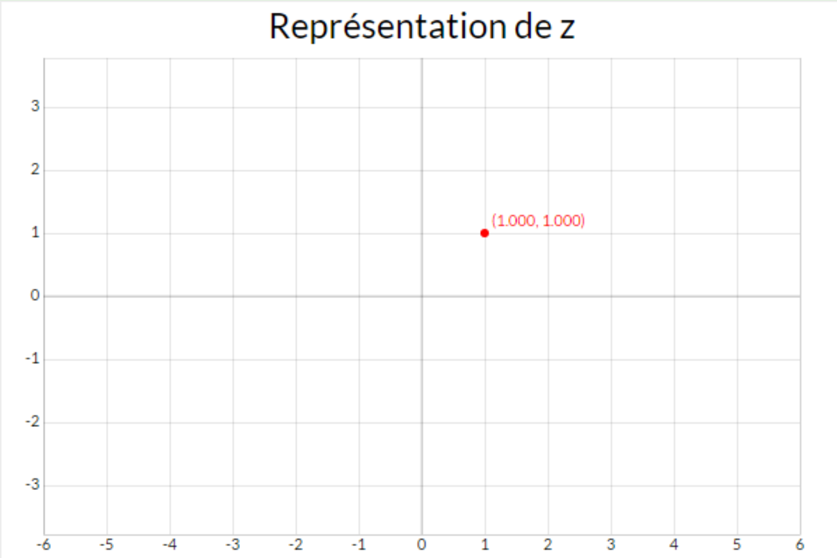
On peut étendre l'égalité entre nombres complexes donnée au début : deux nombres complexes sont égaux si ils ont le **même module** et le **même argument (modulo 2π)**.

4. Affixe et représentation

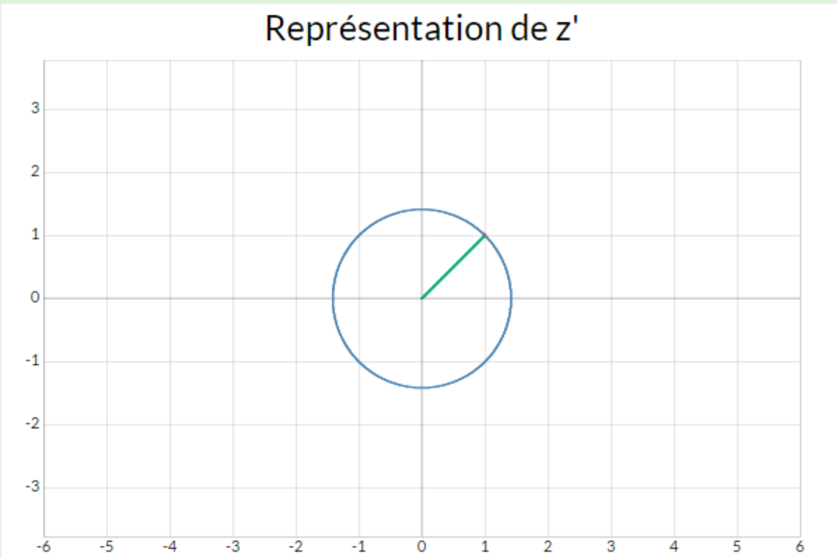
Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan (Oxy) par un point M de coordonnées $M(x; y)$. z est alors appelé **affixe** du point M (et réciproquement le point M est **l'image** de z).

Un nombre complexe $z' = |z'| \times e^{\theta}$ peut être représenté dans le plan (Oxy) par un point M' situé sur le cercle d'origine O de rayon $|z'|$. Le point M' est alors situé à l'angle θ sur ce cercle.
Le module est donc une **distance** et l'argument est un **angle**.

Exemple 1 : On souhaite représenter le point M d'affixe $z = 1 + y$ dans le plan (Oxy). On a les coordonnées de $x = 1$ et $y = 1$:



Exemple 2 : On souhaite représenter le point M' d'affixe $z' = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$ dans le plan (Oxy). On a le module de z : $|z| = \sqrt{2}$, et un argument de z : $\theta = \frac{\pi}{4}$. On va donc tracer le cercle de rayon $\sqrt{2}$ et placer dessus l'angle $\frac{\pi}{4}$:



On voit à l'aide de ces deux représentation que $z = z'$ (démontré dans l'exemple de la partie précédente).

III - Calculs particuliers

1. Résolution d'équations du second degré

Soit $P(z) = az^2+bz+c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$) un polynôme du second degré à coefficients réels. On souhaite résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et les solutions dépendent du signe de delta :

Si $\Delta > 0$, il existe deux solution réelles :

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, il existe une solution réelle :

$z = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a}$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \bar{z_1}$

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $-2z^2 + 4z = 10$.

1ère étape : On fait apparaître une équation du second degré : $-2z^2 + 4z - 10 = 0$.

2nde étape : On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 80 = -64$.

3ème étape : On "transforme" le discriminant négatif : $\Delta = 64i^2 = (8 \times i)^2$.

4ème étape : On trouve les solutions :

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4-8i}{2\times 2} = 1 - 2i$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4+8i}{2\times 2} = 1 + 2i$

2. Géométrie avec les nombres complexes

Il est possible de réaliser de la géométrie avec les nombres complexes. Ainsi, soient A, B, C et D des points d'affixe respectives z_A, z_B, z_C et z_D :

La longueur AB est : $|z_B - z_A|$.

Le milieu du segment $[AB]$ est : le point M d'affixe $z_M = \frac{z_A+z_B}{2}$.

L'angle $(\vec{u}; \vec{AB})$ est : $\arg(z_B - z_A)$ (modulo 2π).

L'angle $(\vec{AB}; \vec{CD})$ est : $\arg(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A})$ (modulo 2π).

3. Complément : formules trigonométriques

Il est possible de retrouver les formules trigonométriques vue en première à l'aide des nombres de complexes. La démonstration suivante n'est pas à retenir mais peut être utile pour retrouver ces formules.

On part de $e^{i\times(a+b)}$:

$e^{i\times(a+b)} = e^{i\times a} \times e^{i\times b}$ (opérations sur les exposants)

$\iff cos(a+b) + isin(a+b) = (cos(a) + isin(a)) \times (cos(b) + isin(b))$ (on passe à la forme trigonométrique)

$\iff cos(a+b) + isin(a+b) = cos(a)cos(b) + icos(a)sin(b) + icos(b)sin(a) - sin(a)sin(b)$ (on développe)

$\iff cos(a+b) + isin(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) + i(cos(a)sin(b) + cos(b)sin(a))$ (on travaille un peu l'expression)

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres sont égales, cela donne :

- $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
- $sin(a+b) = cos(a)sin(b) + cos(b)sin(a)$

Les formules vues en première ont donc bien été retrouvées.