

## Chapitre XV – Matrices et graphes (Maths expertes)

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Matrices</b>	1
1. Définition . . . . .	1
2. Types de matrices carrées . . . . .	2
<b>II - Opérations sur les matrices</b>	3
1. Somme . . . . .	3
2. Produit . . . . .	3
3. Inverse et déterminant . . . . .	6
4. Puissance . . . . .	7
5. Transposition . . . . .	7
<b>III - Applications</b>	8
1. Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires . . . . .	8
2. Suites de matrices colonnes . . . . .	9
3. Transformations géométriques du plan . . . . .	10
<b>IV - Graphes</b>	12
1. Graphes non-orientés et orientés . . . . .	12
2. Chaînes et chemins . . . . .	14
3. Matrices d'adjacence . . . . .	15

## I - Matrices

### 1. Définition

#### À RETENIR : DÉFINITION

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers non nuls. Une **matrice réelle**  $A$  de taille  $m \times n$  est un tableau de réels tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Où  $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, \dots, a_{m,n}$  sont les **coefficients** de la matrice. L'ensemble des matrices à coefficients réels est noté  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

Il serait également possible de prendre des matrices à coefficients entiers ou même complexes, mais nous nous limiterons ici au cas des matrices réelles.

#### À RETENIR : TYPES DE MATRICES

Selon leur taille, on peut avoir différents types de matrices :

- Une matrice  $1 \times n$  est une **matrice ligne de taille  $n$** .
- Une matrice  $m \times 1$  est une **matrice colonne de taille  $m$** .
- Une matrice  $n \times n$  est une **matrice carrée d'ordre  $n$** . L'ensemble de ces matrices est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Une matrice  $1 \times 1$  est un **réel**.
- La matrice  $m \times n$  dont tous les termes sont nuls est la **matrice nulle** et est notée  $0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$  (ou plus simplement  $0_{m,n}$ ).

## 2. Types de matrices carrées

### À RETENIR : TYPES DE MATRICES CARRÉES

Il existe différentes matrices carrées remarquables :

- Une matrice carrée dont tous les coefficients en dessous de la diagonale principale sont nuls est une **matrice triangulaire supérieure**.
- Une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sur la diagonale sont nuls est une **matrice triangulaire supérieure stricte**.
- Une matrice carrée dont tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls est une **matrice triangulaire inférieure**.
- Une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients sur la diagonale sont nuls est une **matrice triangulaire inférieure stricte**.
- Une matrice carrée dont tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls est une **matrice diagonale**.
- Une matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à 1 est une **matrice identité**. Si la taille d'une telle matrice est  $n$ , alors on la note  $I_n$ .

### À LIRE : DIAGONALE D'UNE MATRICE CARRÉE

La diagonale d'une matrice carrée d'ordre  $n$  représente l'ensemble des coefficients  $a_{i,i}$  où  $i$  varie de 1 à  $n$ .

## II - Opérations sur les matrices

### 1. Somme

#### À RETENIR : SOMME DE DEUX MATRICES

Pour additionner deux matrices de même taille, il suffit d'additionner leurs coefficients deux-à-deux. Plus spécifiquement :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

#### À LIRE : ATTENTION !

Il n'est possible d'additionner que deux matrices de même taille.

### 2. Produit

#### À RETENIR : MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN RÉEL

Soit  $\lambda$  un réel. Le produit d'une matrice par  $\lambda$  est la matrice de même taille dont les coefficients sont tous multipliés par  $\lambda$ . Plus spécifiquement :

$$\lambda \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \lambda \times a_{1,2} & \dots & \lambda \times a_{1,n} \\ \lambda \times a_{2,1} & \lambda \times a_{2,2} & \dots & \lambda \times a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \times a_{m,1} & \lambda \times a_{m,2} & \dots & \lambda \times a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Si  $A$  est la matrice de gauche, on note  $\lambda A$  la matrice de droite.

#### À LIRE : SOUSTRACTION DE DEUX MATRICES

Pour soustraire deux matrices  $A$  et  $B$ , on additionne  $A$  et  $(-1)B$  i.e.  $A - B = A + (-1)B$ .

## À RETENIR : PRODUIT D'UNE MATRICE LIGNE ET D'UNE MATRICE COLONNE

Soient  $L = (l_1 \quad \dots \quad l_n)$  une matrice ligne de taille  $n$  et  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  une matrice colonne de taille  $n$ .

Le produit de ces deux matrices (noté  $LC$ ) est le réel  $LC = l_1 \times c_1 + \dots + l_n \times c_n$ .

Plus généralement, le produit matriciel ne se limite pas qu'à la multiplication d'une matrice ligne avec une matrice colonne.

## À RETENIR : PRODUIT DE DEUX MATRICES

Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une matrice de taille  $n \times p$  deux matrices. Le produit de ces deux matrices (notée  $A \times B$  ou  $AB$ ) est la matrice de taille  $m \times p$  dont le coefficient à la position  $(i; j)$  est égal au produit de la  $i$ -ième ligne de  $A$  par la  $j$ -ième colonne de  $B$ . Plus spécifiquement, en notant  $L_i$  la  $i$ -ième ligne de  $A$  et  $C_j$  la  $j$ -ième colonne de  $B$  :

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,p} \end{pmatrix} \text{ où } c_{i,j} = L_i \times C_j.$$

## À LIRE : ATTENTION !

Le produit matriciel n'est pas commutatif ! Donc en général,  $AB \neq BA$ .

De plus, il faut bien s'assurer que le nombre de lignes de  $A$  est égal au nombre de colonnes de  $B$ .

## À LIRE ☞

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices diagonales de taille  $n$ . Leur produit est la matrice diagonale de même taille dont le coefficient à la position  $(i; i)$  est le produit du coefficient de  $A$  à la position  $(i; i)$  par celui du coefficient de  $B$  à la position  $(i; i)$ . Plus spécifiquement, en notant  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} \times b_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \times b_{n,n} \end{pmatrix}$$

De plus, on a  $AB = BA$ .

## À RETENIR : PROPRIÉTÉS DU PRODUIT MATRICIEL 📌

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices carrées d'ordre  $n$ . Alors :

- Le produit matriciel est **associatif** :  $A(BC) = (AB)C$ .
- Le produit matriciel est **distributif** :  $A(B + C) = AB + AC$ .
- $I_n$  est l'**unité** de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  :  $AI_n = I_nA = A$ .
- $0_n$  est le **zéro** de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  :  $A0_n = 0_nA = 0_n$  et  $A + 0_n = A$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .

## À LIRE : ATTENTION ! ☹

Si on a une égalité du type  $A \times B = 0$ , cela n'implique pas forcément que  $A = 0$  ou  $B = 0$  !

De plus, si on a  $AB = AC$ , on n'a pas forcément  $B = C$ .

Cela peut sembler logique, mais on signale tout de même que les priorités des opérateurs sont "les mêmes" que dans les ensembles de nombres comme  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  (la multiplication prime sur l'addition, etc...).

### 3. Inverse et déterminant

#### À RETENIR : INVERSE D'UNE MATRICE

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .  $A$  est dite inversible s'il existe une matrice  $A^{-1}$  telle que  $A \times A^{-1} = I_n$ .

Si cette matrice existe, elle est unique et s'appelle **inverse** de  $A$ . De plus,  $A$  et  $A^{-1}$  commutent.

Le **déterminant** permet, entre autres, de calculer l'inverse d'une matrice (s'il existe). Nous nous limiterons ici au cas des matrices carrées d'ordre 2, mais il est possible de le généraliser encore plus.

#### À RETENIR : DÉTERMINANT D'UNE MATRICE $2 \times 2$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice carrée d'ordre 2.

Alors le déterminant de  $A$  (noté  $\det(A)$ ) est le réel  $\det(A) = ac - bd$ . De plus,  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

#### À RETENIR : INVERSE D'UNE MATRICE $2 \times 2$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice carrée d'ordre 2 dont le déterminant ne s'annule pas.

Alors  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

#### À LIRE : EXEMPLE

Calculons le produit de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$  par  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ , et déduisons-en que  $A$  est inversible sans utiliser la formule donnée précédemment.

Le produit nous donnera une matrice carrée d'ordre 2 car on multiplie deux matrices carrées d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6 & -2+2 \\ 24-24 & -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc  $A \times B = 2I_2$ . Ainsi,  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{2}B$ .

## 4. Puissance

### À RETENIR : PUISSANCE D'UNE MATRICE CARRÉE

Soient  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $i$  un entier naturel :

$$\text{— Si } i > 0, A^i = \underbrace{A \times \dots \times A}_{i \text{ fois}} = A^{i-1} \times A.$$

$$\text{— Si } i = 0, A^i = A^0 = I_n.$$

$$\text{— Si } i < 0, A^i = \underbrace{A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{i \text{ fois}} = A^{i-1} \times A^{-1}.$$

De plus, pour tout entier naturel  $j$ , on a  $A^i \times A^j = A^{i+j}$ .

### À LIRE : PUISSANCE D'UNE MATRICE DIAGONALE

Si  $A$  est une matrice diagonale, alors  $A^i$  est la matrice de même taille où tous les termes de la diagonale sont mis à la puissance  $i$  (cela vaut aussi si  $i$  est négatif et que la diagonale ne comporte pas de 0).

## 5. Transposition

### À RETENIR : DÉFINITION

Soit  $A$  une matrice. La **matrice transposée** de  $A$  (notée  ${}^tA$ ) est la matrice dont la  $i$ -ième ligne correspond à la  $i$ -ième colonne de  $A$ .

### À LIRE : EXEMPLE

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \end{pmatrix}$ . Calculons  ${}^tA$  et  ${}^tB$ .

On a  ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$  et  ${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 13 \\ 1 & 5 & 21 \end{pmatrix}$ .



### III - Applications

#### 1. Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

##### À RETENIR : LIEN ENTRE SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Soient quatre réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  et soient deux réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Le système d'équations linéaires à deux inconnues  $(S) : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$  (d'inconnues  $x$  et  $y$ ) peut s'écrire matriciellement :

$$(S) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{=B}$$

##### À RETENIR : RÉOLUTION DU SYSTÈME $(S)$

Avec les notations ci-dessus, si  $A$  est inversible (voir les paragraphes suivants) alors le système  $(S)$  admet une unique solution  $X = A^{-1}B$ .

##### À LIRE : EXEMPLE

Cela peut sembler compliqué à appliquer, mais il n'en est rien !

Par exemple, transformons le système  $(S) : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$  en une égalité de matrices :

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Or l'inverse de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  est  $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . D'où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Or deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont tous égaux. Donc on a  $x = -3$  et  $y = 2$ .

Nous avons travaillé ici avec un système de deux équations, mais il est tout-à-fait possible de généraliser cette méthode à plus de deux équations !

## 2. Suites de matrices colonnes

### À RETENIR

Soit  $(U_n)$  une suite de matrices colonnes de taille  $m$  vérifiant une relation du type  $U_{n+1} = AU_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et où  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ .

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = A^n U_0$ .

### À LIRE

Il peut sembler étrange de manipuler des suites de matrices, mais c'est en réalité très intuitif. Par exemple, définissons la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et pour tout  $n \geq 1$  par

$$U_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} U_n \text{ et cherchons son terme général.}$$

Par la formule précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = A^n U_0$ . Or,  $A$  est une matrice diagonale, donc  $A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ , et ainsi :

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

On remarque en particulier que la suite  $(U_n)$  est divergente (à cause de sa deuxième coordonnée qui tend vers  $+\infty$ ).

### À RETENIR

Soit  $(V_n)$  une suite de matrices colonnes de taille  $m$  vérifiant une relation du type  $V_{n+1} = AV_n + B$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et où  $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . Supposons qu'il existe une matrice  $X \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  telle que  $AX + B = X$ .

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = A^n(U_0 - X) + X$ .

### 3. Transformations géométriques du plan

Il est possible de faire le lien entre les matrices et certains types de transformations géométriques du plan.

#### À RETENIR

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $A = (x_A; y_A)$  et  $B = (x_B; y_B)$  deux points du plan.

—  $B$  est l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$  si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

—  $B$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$  si et seulement

$$\text{si } \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

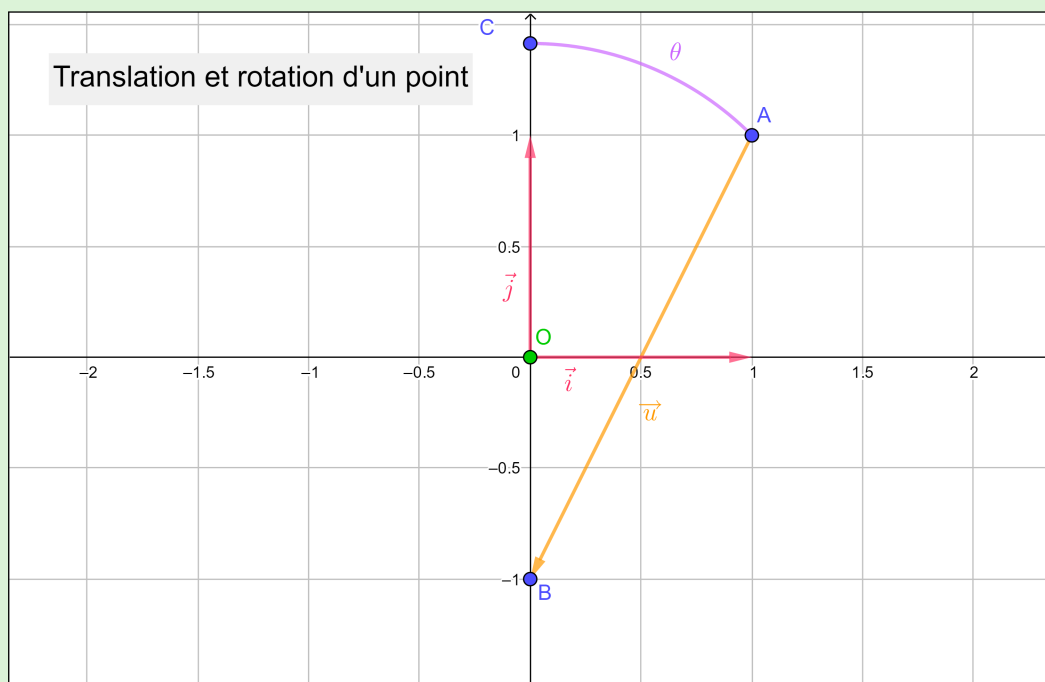
## À LIRE : EXEMPLE 93

On pose  $A = (1; 1)$ . Calculons les coordonnées de  $B$  qui est l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , et de  $C$  qui est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

On a :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $B = (-1; 1)$  et  $C = (0; \sqrt{2})$ .



## IV - Graphes

### 1. Graphes non-orientés et orientés

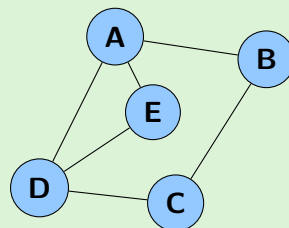
#### À RETENIR : GRAPHE NON-ORIENTÉ

Un **graphe**  $G$  **non-orienté** est un couple  $(S; A)$  où :

- $S$  est l'ensemble des **sommets** de  $G$ .
- $A$  est un ensemble contenant les éléments de la forme  $\{s_i; s_j\}$  où  $s_i, s_j \in S$ , et correspond aux **arêtes** de  $G$ .

#### À LIRE : EXEMPLE

Par exemple,  $G = (\{A; B; C; D; E\}, \{\{A; B\}; \{B; C\}; \{C; D\}; \{D; A\}; \{D; E\}; \{E; A\}\})$  est un graphe non-orienté que l'on peut représenter comme tel :



Signalons tout de même que l'ordre dans lequel on relie les sommets n'a pas d'importance.

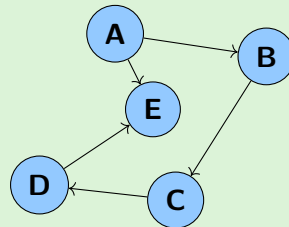
#### À RETENIR : GRAPHE ORIENTÉ

Un **graphe**  $G$  **orienté** est un couple  $(S; A)$  où :

- $S$  est l'ensemble des **sommets** de  $G$ .
- $A$  est un sous-ensemble de  $S \times S$ , et correspond aux **arêtes orientées** de  $G$ .

## À LIRE : EXEMPLE 93

Par exemple,  $G = (\{A; B; C; D; E\}, \{(A; B); (B; C); (C; D); (D; E); (A; E)\})$  est un graphe orienté que l'on peut représenter comme tel :



## À LIRE 94

À noter que dans les deux cas, il est possible de relier un sommet à lui-même (en faisant **une boucle**).

## À RETENIR : DÉFINITION 95

Soit  $G = (S; A)$  un graphe. Donnons quelques définitions nécessaires pour la suite :

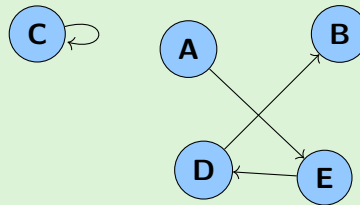
- **L'ordre de**  $G$  est le nombre de sommets que possède  $G$  (i.e. le cardinal de  $S$ ).
- **Le degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui passent par ce sommet (quelque soit le sens de l'arête dans le cas où  $G$  est orienté). Les boucles comptent pour 2.
- Un sommet  $A$  est **adjacent** à un autre sommet  $B$  s'il existe une arête reliant  $A$  à  $B$  (i.e. si  $(A; B) \in A$  dans le cas où  $G$  est orienté / si  $(A; B)$  ou  $(B; A) \in A$  si  $G$  n'est pas orienté). Si  $A$  n'est adjacent à aucun autre sommet, alors  $A$  est un sommet **isolé**.
- $G$  est dit **complet** si tout sommet de  $A$  est adjacent à chacun des autres.

## À RETENIR 96

Soit  $G$  un graphe. On note par  $a$  son nombre d'arêtes, et par  $d$  la somme des degrés de ses sommets. Alors  $d = 2a$ .

## À LIRE : EXEMPLE 93

On considère le graphe orienté  $G$  suivant :



Alors :

- $G$  n'est pas complet.
- L'ordre de  $G$  est égal à 5.
- $G$  a 4 arêtes (donc la somme des degrés des sommets de  $G$  vaut  $2 \times 4 = 8$ ).
- Le degré des sommets  $A$  et  $B$  est égal à 1.
- Le degré des sommets  $C$ ,  $D$  et  $E$  est égal à 2.
- Le sommet  $A$  est adjacent au sommet  $E$  (mais  $E$  n'est pas adjacent à  $A$ ).
- $C$  est un sommet isolé.
- L'arête orientée qui va de  $C$  à  $C$  est une boucle.

## 2. Chaînes et chemins

### À RETENIR : DÉFINITION

Soit  $G$  un graphe non-orienté. On appelle **chaîne de taille  $n$** , toute succession de  $n$  arêtes de  $G$  telle que l'extrémité de chacune est l'origine de la suivante.

Si  $G$  est un graphe orienté, on parle de **chemin** plutôt que de chaîne.

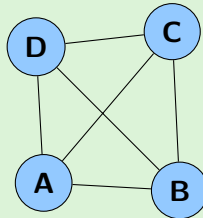
### À RETENIR : DÉFINITION

Dans un graphe  $G$  non-orienté :

- Si l'origine d'une chaîne coïncide avec sa fin, on parle de **chaîne fermé** (ou de **chemin fermée** si  $G$  est orienté).
- Si la chaîne est composée d'arêtes toutes distinctes, on parle de **cycle** (ou de **circuit** si  $G$  est orienté).

## À LIRE : EXEMPLE 93

On considère le graphe non-orienté suivant :



Alors :

- $A - B - C - D - A$  est un chemin fermé de longueur 4 (c'est même un cycle).
- $A - C - B - D$  est un chemin de longueur 3 reliant  $A$  à  $D$  (mais il y en a beaucoup d'autres).

### 3. Matrices d'adjacence

Le but de cette section est d'étudier le lien étroit qui relie les matrices et les graphes.

## À RETENIR : DÉFINITION 94

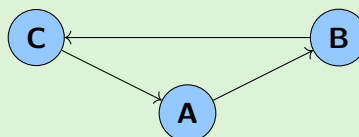
Soit  $G = (S; A)$  un graphe d'ordre  $n$ . On note  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  l'ensemble des sommets de  $G$ .

On fait correspondre à  $G$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont le coefficient à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet  $s_i$  au sommet  $s_j$ . Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence** du graphe  $G$ .

On notera qu'une telle matrice est **symétrique** (par rapport à sa diagonale) si le graphe en question est non-orienté.

## À LIRE : EXEMPLE 95

On considère le graphe orienté  $G_1$  suivant :

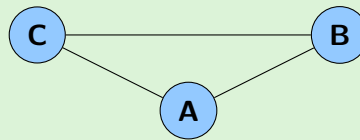


Sa matrice d'adjacence est la matrice  $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .



## À LIRE : EXEMPLE 93

On considère le graphe non-orienté  $G_2$  suivant (i.e. le même que le  $G_1$  mais sans les orientations) :



Sa matrice d'adjacence est la matrice  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Remarquons sur ces deux exemples que le caractère orienté ou non d'un graphe change sa matrice d'adjacence !

À RETENIR : NOMBRE DE CHEMINS DE LONGUEUR  $k$ 

Soient  $G = (S; A)$  un graphe orienté d'ordre  $n$  et  $M$  sa matrice d'adjacence. On note  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  l'ensemble des sommets de  $G$ .

Alors le coefficient à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  de  $M^k$  est le nombre de chemins de longueur  $k$  reliant le sommet  $s_i$  au sommet  $s_j$ .

DÉMONSTRATION : NOMBRE DE CHEMINS DE LONGUEUR  $k$ 

On pose  $m_{i,j}^{(k)}$  le coefficient à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  de  $M^k$  et on note  $\mathcal{P}_k$  la propriété définie pour tout  $k \geq 1$  par  $\mathcal{P}_k$  : “ $m_{i,j}^{(k)}$  est le nombre de chemins de longueur  $k$  reliant le sommet  $s_i$  au sommet  $s_j$ ”. Montrons  $\mathcal{P}_n$  par récurrence.

**Initialisation** : On teste la propriété au rang 1 :

$\mathcal{P}_1$  est vraie car  $m_{i,j}^{(1)}$  est égal au nombre d'arêtes (i.e. de chemins de longueur 1) reliant le sommet  $s_i$  au sommet  $s_j$ .

**Hérédité** : Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang  $k \geq 1$  et vérifions qu'elle est vraie au rang  $k + 1$ .

On a  $M^{n+1} = M^n \times M$ . Donc  $m_{i,j}^{(k+1)} = m_{i,1}^{(k)} m_{1,j}^{(1)} + m_{i,2}^{(k)} m_{2,j}^{(1)} + \dots + m_{i,n}^{(k)} m_{n,j}^{(1)}$ .

Or, par hypothèse, pour tout  $l \in \{1; \dots; n\}$ ,  $m_{i,l}^{(n)}$  est le nombre de chemins de longueur  $n$  reliant  $s_i$  à  $s_l$  et  $m_{l,j}^{(1)}$  est le nombre d'arêtes reliant le sommet  $s_l$  au sommet  $s_j$ .

Ainsi,  $m_{i,l}^{(n)} m_{l,j}^{(1)}$  est le nombre de chemins de longueur  $n + 1$  passant par  $s_l$  et reliant  $s_i$  à  $s_j$ .

Donc en sommant pour tous les sommets  $s_l$ , on obtient le nombre de chemins de longueur  $n + 1$  reliant  $s_i$  à  $s_j$ . Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion** :

La propriété est initialisée au rang 1 et est héréditaire. Ainsi,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .