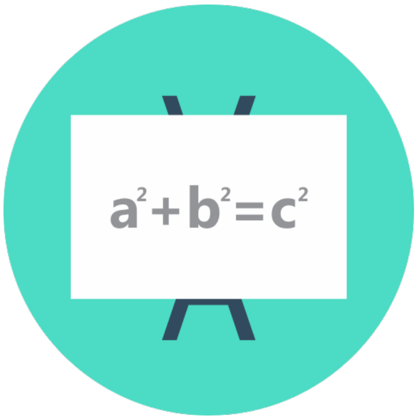

Chapitre XIV - Les matrices (Spécialité)

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Les matrices

1. Définition

Soient m et n deux entiers non nuls. Une matrice A de taille $(m; n)$ est un tableau de réels tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Avec $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, ..., $a_{m,n}$ coefficients réels de la matrice.

Selon leur taille, on peut avoir différents types de matrices :

— Une matrice $(1; n)$ est une **matrice ligne**.

— Une matrice $(m; 1)$ est une **matrice colonne**.

— Une matrice A de taille $(n; n)$ est une **matrice carrée d'ordre** n et est notée A_n.

— Une matrice $(m; n)$ dont tous les termes sont nuls est une **matrice nulle** et est notée $0_{m;n}$.

— Une matrice $(1; 1)$ est une **réel**.

2. Types de matrices carrées

Il existe différentes matrices carrées remarquables outre celles données ci-dessus (on rappelle qu'une diagonale d'une matrice carrée d'ordre n représente l'ensemble des coordonnées $(i; i)$ pour i variant de 0 à n) :

- Une matrice carrée dont tous les termes en dessous de la diagonale principale sont nuls est une **matrice triangulaire supérieure**.
- Une matrice carrée dont tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls est une **matrice triangulaire inférieure**.
- Si en plus les termes de la diagonale sont nuls, cette matrice est une **matrice triangulaire inférieure stricte** (ou **matrice triangulaire supérieure stricte**).
- Une matrice carrée dont tous les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls est une **matrice diagonale**.
- Une matrice carrée dont tous les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls et qui sont égaux à 1 sur la diagonale est une **matrice identité**.

3. Expression d'un système

Soient quatre réels a, b, c et d et deux autres réels α et β. Le système $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ d'inconnues x et y peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

De plus, si on nomme A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, X la matrice des inconnues et B la matrice $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, alors on a la relation suivante :

Si A est inversible (voir les paragraphes suivants) alors $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$.

Cela peut sembler compliquer à appliquer, il n'en est rien !

Par exemple, transformons le système $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$ en une égalité de matrices.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Or l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par égalité, on a $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 2$.

II - Opérations

1. Somme

Soient A et B deux matrices de même taille. La somme de ces deux matrices (notée $A+B$) est une matrice telle que :

> $A+B$ est la matrice de même taille dont les coefficients représentent la somme des coefficients de A aux coefficients de B qui ont les mêmes coordonnées.

> **Attention !** Il n'est possible d'additionner que deux matrices de même taille.

2. Produits

Soient A une matrice et λ un réel. Le produit de A par λ (noté λA) est une matrice telle que :

> λA est la matrice de même taille que A dont les coefficients sont tous multipliés par λ.

> **Note :** Pour soustraire deux matrices A et B, on multiplie B par -1 et on y ajoute A.

Soient $L = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ une matrice ligne et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne. Le produit de ces deux matrices (noté LC) est le réel :

> $LC = l_1 \times c_1 + \ \dots \ + l_n \times c_n$

Plus généralement, soient A de taille $(m;n)$ et B de taille $(n;p)$ deux matrices (dont le nombre de lignes de A est égal au nombre de colonnes de B). Le produit de ces deux matrices (notée AB) est une matrice telle que :

> AB est la matrice de taille $(m;p)$ dont le coefficient à la position $(i;j)$ est égal au produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

> **Attention !** Le produit matriciel n'est pas commutatif ! Donc bien souvent $AB \neq BA$.

Si A et B sont deux matrices diagonales, leur produit est une matrice de même taille dont le coefficient à la position $(i;j)$ est égal au produit du coefficient à la position (i,j) de A par celui à la position $(i;j)$ de B. De plus, on aura $AB = BA$.

3. Puissance

Soit A une matrice carrée d'ordre n et i un entier naturel :

$$A^i = \underbrace{A \times \ \ldots \ \times A}_{i \text{ fois}} = A^{i-1} \times A$$

De plus, si $i = 0$, on a :

$$A^i = A^0 = I_n$$

Et, si on pose k entier, on a la relation suivante :

$$A^k \times A^i = A^{k+i}$$

Si A est une matrice diagonale, alors A^i représente simplement une matrice de même taille avec tous les termes mis à la puissance i (cela vaut aussi si $i = -1$).

4. Inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite inversible s'il existe une **matrice inverse** de A (notée A^{-1}) telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

Si cette matrice existe, elle est unique.

Exemple : Calculez le produit de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, en déduire que A est inversible et donnez A^{-1}.
Le produit nous donnera une matrice carrée d'ordre 2 car on multiplie deux matrices carrées d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6 & -2+2 \\ 24-24 & -6+8 \end{pmatrix}$$

En multipliant A par B, on obtient $2I_2$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.
Plus généralement, l'inverse d'une matrice A carrée d'ordre 2, de coefficients a et b sur la ligne 1 et de coefficients c et d sur la ligne 2 est donné par la formule suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A n'est donc pas inversible si $ad - bc = 0$.

5. Priorités et opérations

Soient trois matrices carrées A, B et C d'ordre n et un réel λ, les égalités suivantes sont disponibles :

- $A(BC) = (AB)C$ (associativité)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité)
- $AI_n = I_nA = A$
- $A0_n = 0_nA = 0_n$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Attention !

Si on a une égalité du type $A \times B = 0$, cela n'implique pas forcément que $A = 0$ ou $B = 0$!
De plus, si on a $AB = AC$, on n'a pas forcément $B = C$.

Les priorités opératoires sont les mêmes que dans les "ensembles de nombres classiques" (la multiplication prime sur l'addition, etc...).

III - Étude asymptotique d'une marche aléatoire

1. Suites de matrices colonnes

Soit U_n une suite de matrices colonnes de taille $(m;1)$. On a la propriété suivante :

> U_n converge vers une matrice U si chacune des suites formées par les coefficients de U_n convergent. Les limites de ces suites forment alors les coefficients de U.

Soient A une matrice carrée d'ordre m, B et U_0 deux matrices colonnes de taille $(m;1)$. Il existe une unique suite U_n de matrices colonnes de taille $(m;1)$, définie par son premier terme U_0 et par la relation de récurrence :

> $U_{n+1} = AU_n + B$

Si la suite U_n converge, alors elle converge vers une matrice colonne U de taille $(m;1)$ telle que :

> $U = AU + B$

2. Définitions

Voici quelques définitions qu'il faut maîtriser pour la suite :

- Une **marche aléatoire** représente l'évolution d'un système qui, au cours du temps, peut-être dans un certain nombre fini d'état.
- Une **matrice de transition** est une matrice carrée dont le coefficient situé à la position $(i; j)$ est la probabilité que le système soit, à un instant, dans l'état j sachant qu'il était dans l'état i à l'instant précédent.
- La **matrice colonne des états de la marche aléatoire après** n **étapes** est la matrice colonne dont les coefficients sont les probabilités que le système soit à l'état i à l'instant n.

Exemple : On souhaite étudier les passes que se font les trois attaquants A, B et C. Au départ, le ballon est dans les pieds de A et circule entre les trois attaquants :

- La probabilité que A passe à B est de $\frac{1}{3}$ et la probabilité qu'il passe à C est de $\frac{2}{3}$.
- La probabilité que B passe à A est de $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il passe à C est de $\frac{3}{4}$.
- La probabilité que C passe à A est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité qu'il passe à B est de $\frac{1}{2}$.

La **marche aléatoire** de ce système est "un attaquant reçoit le ballon depuis un autre attaquant".

La **matrice de transition** est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$. On y trouve par exemple en position $(1; 2)$ la probabilité le ballon arrive dans les pieds de A sachant qu'il se trouvait dans ceux de B.

La **matrice colonne des états de la marche aléatoire après** n **étapes** est la matrice $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ avec les suites : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \end{cases}$.

On remarque que $P_{n+1} = TP_n$ (ceci peut être démontré grâce à la formule des probabilités totales appliquée au système à l'instant n).

3. Propriétés

Soient une marche aléatoire qui admet une matrice de transition T ainsi qu'une matrice colonne de ses états après n étapes P_n. On a alors la relation de récurrence suivante (voir exemple précédent pour plus d'explications) :

$$P_{n+1} = TP_n$$

De plus, le terme général d'une telle suite de matrices est :

$$P_n = T^n P_0$$

Il faut savoir démontrer cette dernière formule. Pour cela procédons par récurrence :
Soit H_n la propriété définie par H_n : $P_n = T^n P_0$

Initialisation : $P_0 = T^0 P_0$ ce qui est vrai car une matrice à la puissance 0 donne la matrice identité.
Hérédité : Montrons que H_{n+1} est vraie :
$P_{n+1} = TP_n$ (d'après la première formule)
$\iff P_{n+1} = T \times (T^n P_0)$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
$\iff P_{n+1} = (T \times T^n)P_0 = T^{n+1}P_0$
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Étude d'une marche aléatoire

Une marche aléatoire qui admet une matrice de transition T ainsi qu'une matrice colonne de ses états après n étapes P_n converge si :

P_n converge vers une matrice P. Si P existe, elle est appelée **état stable** de la marche aléatoire.

Si P_n converge vers P, alors l'équation suivante doit être vérifiée :

$$P = TP$$

Si la marche aléatoire n'a que deux états et que T ne comporte pas de 0, alors cette marche aléatoire converge vers un état stable unique $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que :

$P = TP$ avec $a + b = 1$.