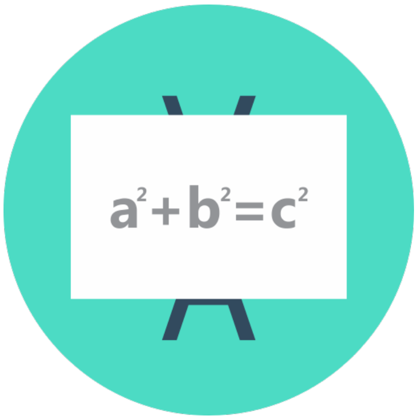


Chapitre VII – Les intégrales

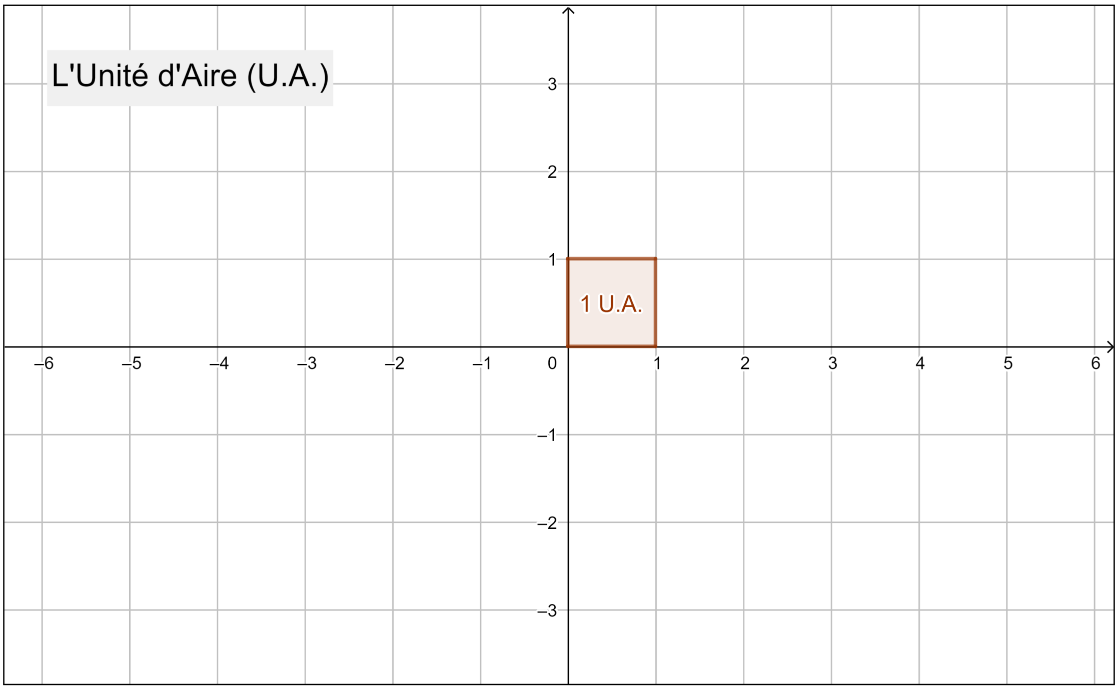
Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

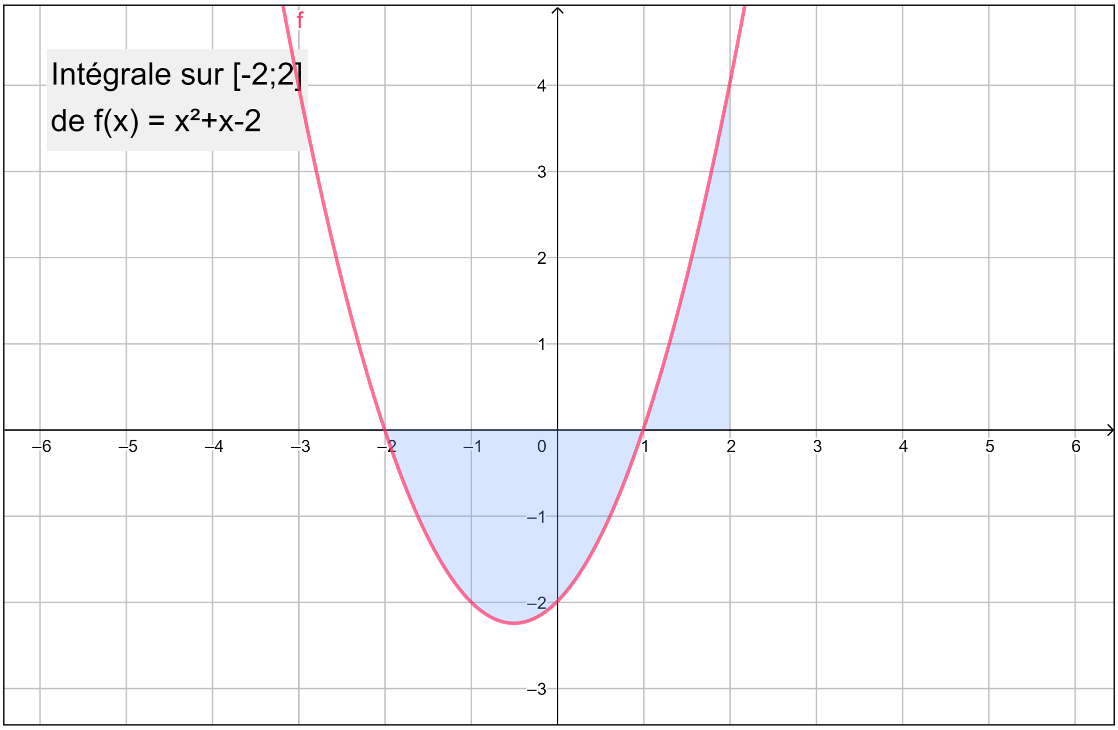
I - Calcul d'aire

1. Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Dans un repère orthogonal $(O; I; J)$, on prend un point $A = (1; 1)$ et on appelle **Unité d'Aire** (U.A.) l'aire du rectangle formé par les points O, I, A et J.



Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$. L'**intégrale** de la fonction f sur $[a;b]$ notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses délimitée par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et est exprimée en **U.A.**.



On dit que les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

2. Comment calculer une intégrale ?

Pour calculer une intégrale, il faut d'abord trouver la primitive d'une fonction donnée (voir le cours sur les Primitives). Soient deux réels a et b avec une fonction f continue sur un intervalle I (on note F la primitive de cette fonction). Alors l'intégrale de la fonction f entre les bornes a et b est donnée par la formule suivante :

À RETENIR 💡

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

À LIRE

Exemple : On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; 4]$:

1ère étape : On cherche une primitive de f. On trouve $F(x) = x^2 + x = x(x+1)$.

2nde étape : On calcule l'intégrale. On a $\displaystyle\int_1^4 2x + 1 \, dx = [x(x+1)]_1^4 = 4(4+1) - 1(1+1) = 3 - 20 = 18$ U.A.

3. Signe de l'intégrale

Soient deux réels a et b et une fonction f continue sur un intervalle $I = [a; b]$. De manière générale, le signe de l'intégrale de f sur I dépend du signe de f. Ainsi :

À RETENIR

— Si $f > 0$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx > 0$.

— Si $f < 0$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx < 0$.

— Si f change de signe sur I, on ne connaît pas directement le signe de l'intégrale. Le signe dépend de la partie de l'aire qui est la plus "grande".

— Soit g une fonction définie sur I avec $f > g$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b g(x) \, dx$.

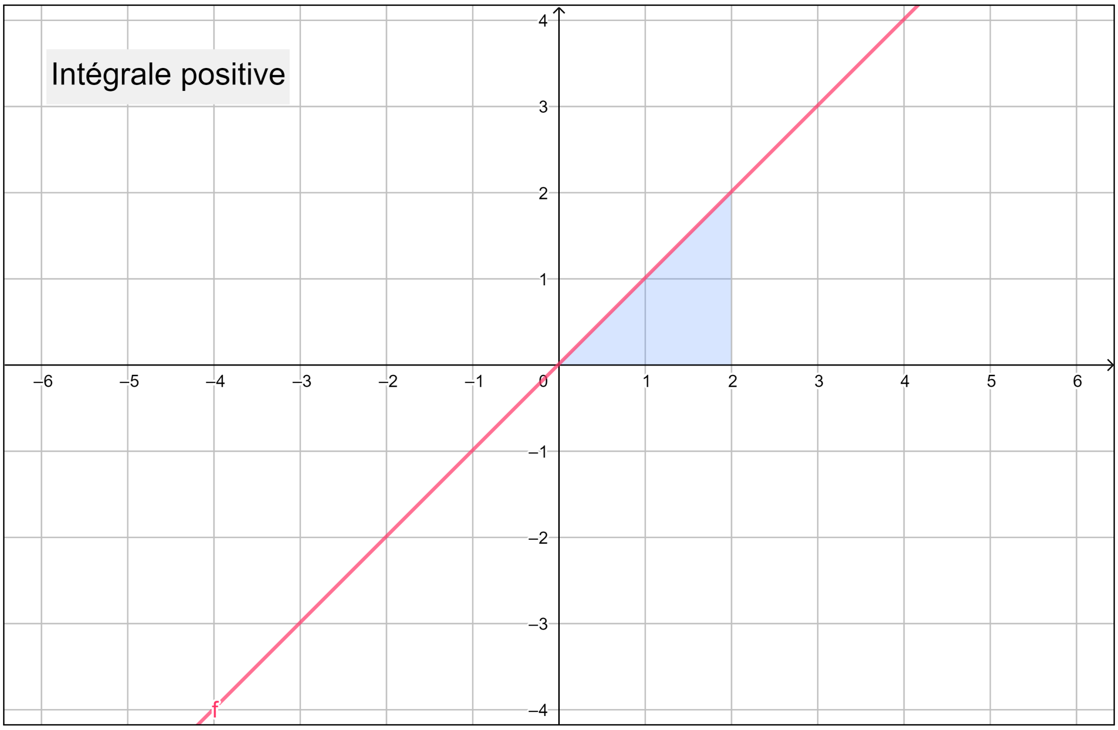
À LIRE

Exemple : On veut calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-2; 2]$:

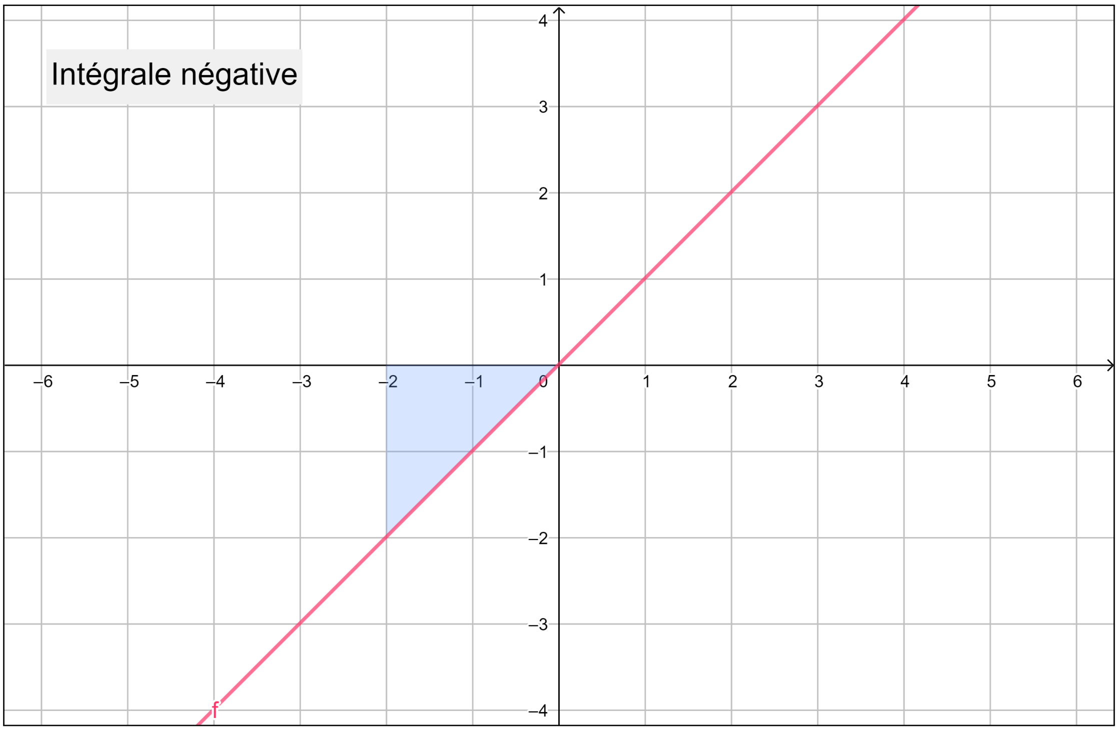
1ère étape : On cherche une primitive de f. On trouve pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

2nde étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_{-2}^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$ U.A. (logique car l'aire au dessus de la courbe de la fonction f sur $[-2; 0]$ est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[0; 2]$ voir les propriétés sur les intégrales des fonctions paires).

Ainsi, cette intégrale sera positive :



Et cette intégrale sera négative :



II - Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés algébriques

Soient deux réels a et b et une fonction f continue sur un intervalle $I = [a; b]$. On a les propriétés suivantes :

À RETENIR

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

— $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. Linéarité

Soient deux réels a et b et deux fonction f et g continues sur un intervalle $I = [a; b]$. λ est un réel quelconques :

À RETENIR

— $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a g(x)\,\mathrm{d}x$

— $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Relation de Chasles

Soient deux réels a et b. On note $I = [a; b]$. Soient $c \in I$ et une fonction f continue sur I. La relation de Chasles appliquée aux intégrales nous donne la propriété suivante :

À RETENIR

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

À LIRE

Exemple : On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = |x|$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2; 4]$ (*Rappel : la fonction valeur absolue est définie par* $x \mapsto -x$ *sur* $]-\infty; 0]$ *et par* $x \mapsto x$ *sur* $[0; +\infty[$).

1$^{\text{ère}}$ étape : On sépare l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles : $I = \int_{-2}^{4} |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_0^4 x\,\mathrm{d}x$.

2$^{\text{nde}}$ étape : On calcule l'intégrale. On a $I = \int_{-2}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 0 - (-\frac{2^2}{2}) + ((\frac{4^2}{2}) - 0) = 10$ U.A.

III - Calculs particuliers

1. Intégrales de fonctions paires et impaires

Soit f une **fonction paire** (comme $x \mapsto x^2$) définie sur un intervalle I, on a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($-a$ doit aussi être dans I) :

À RETENIR

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

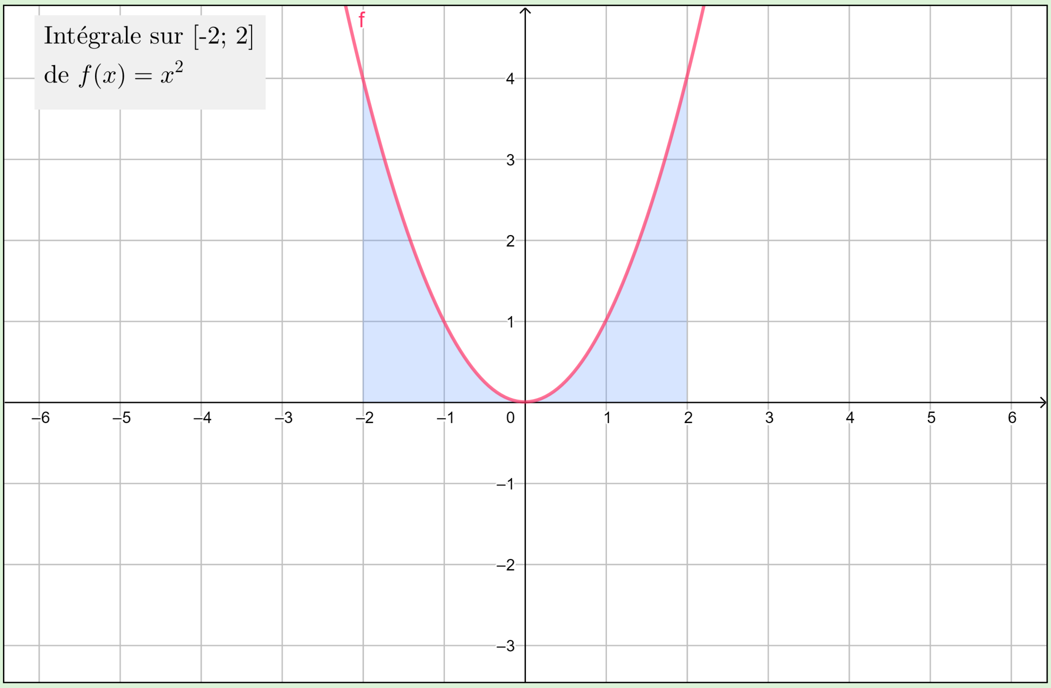
Si f est une **fonction impaire** (comme $x \mapsto x^3$), on a la relation suivante :

À RETENIR

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

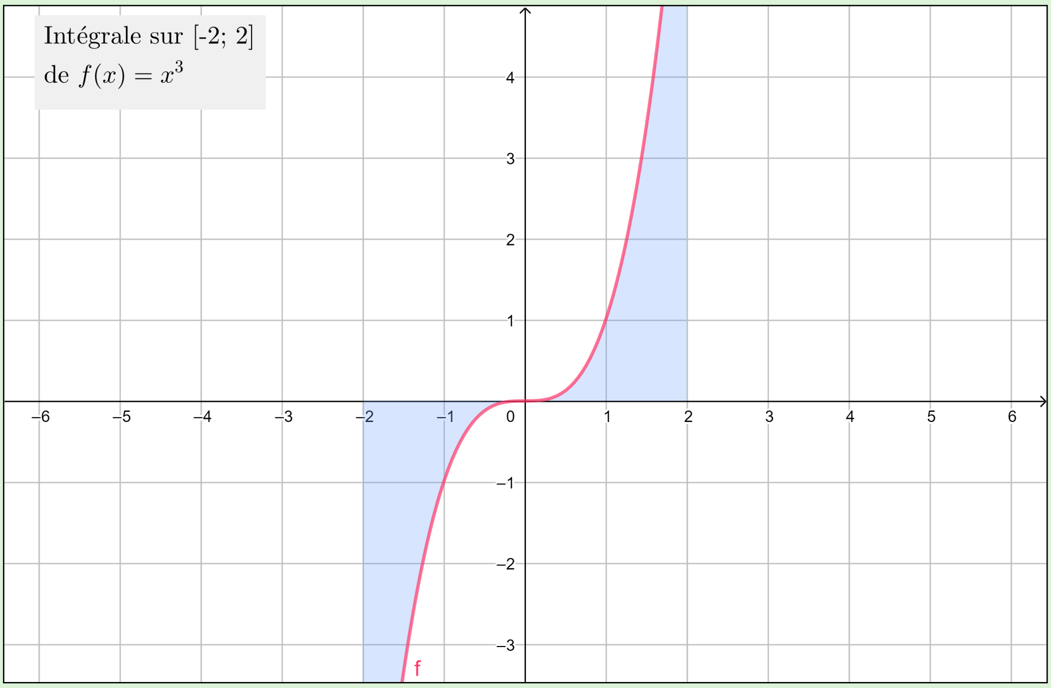
À LIRE

Ces deux relations peuvent se retrouver visuellement, pour les **fonctions paires** (l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est égale à l'aire de l'autre côté de (Oy), et les deux sont positives ; on peut donc les additionner pour retrouver l'aire totale) :



À LIRE

Et pour les **fonctions impaires** (l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est négative et égale à l'aire de l'autre côté de (Oy) qui est positive, les deux s'annulent donc) :



2. Intégrales de fonctions périodiques

Soit f une **fonction périodique** de période T (comme cos avec $T = 2\pi$) continue sur chacune de ses périodes, on a la relation suivante pour tout $a \in \mathbb{R}$:

À RETENIR

$$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Valeur moyenne d'une fonction

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$. La valeur moyenne M de f sur $[a; b]$ est donnée par la formule suivante :

À RETENIR

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Aire entre deux courbes

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et deux fonctions f et g continues sur $[a; b]$. Si on a $f > g$ sur cet intervalle, alors l'aire entre les deux courbes est donnée par la relation suivante :

À RETENIR

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Primitive s'annulant en k

Soient une fonction f continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et un réel $k \in I$. La primitive de f (notée F) qui vaut 0 en k est donnée par la formule :

À RETENIR

$$F(x) = \int_k^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'ensemble de définition de F dépend alors de la fonction f.