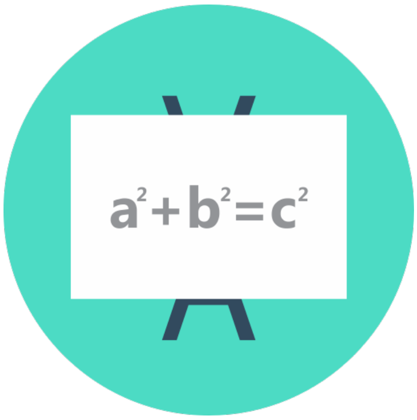


Chapitre IV – La fonction exponentielle

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Propriétés de la fonction exponentielle

1. Définition

La **fonction exponentielle** notée e^x (ou parfois $\exp(x)$) pour tout x réel est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ remplissant les critères suivants :

À RETENIR

— f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = f$

— $f > 0$ sur $\mathbb{R}$

— $f(0) = 1$

À LIRE

Comme la fonction exponentielle est composée d'un réel ($e \approx 2,718$) et d'un exposant réel (x), **les opérations sur les exposants** sont disponibles, comme par exemple pour $x, y \in \mathbb{R}$:

— $e^{x+y} = e^x \times e^y$

— $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

— $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

— $(e^x)^y = e^{x \times y}$

Et bien entendu, $e^0 = 1$.

2. Relations algébriques

La fonction exponentielle a plusieurs propriétés algébriques qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels x et y :

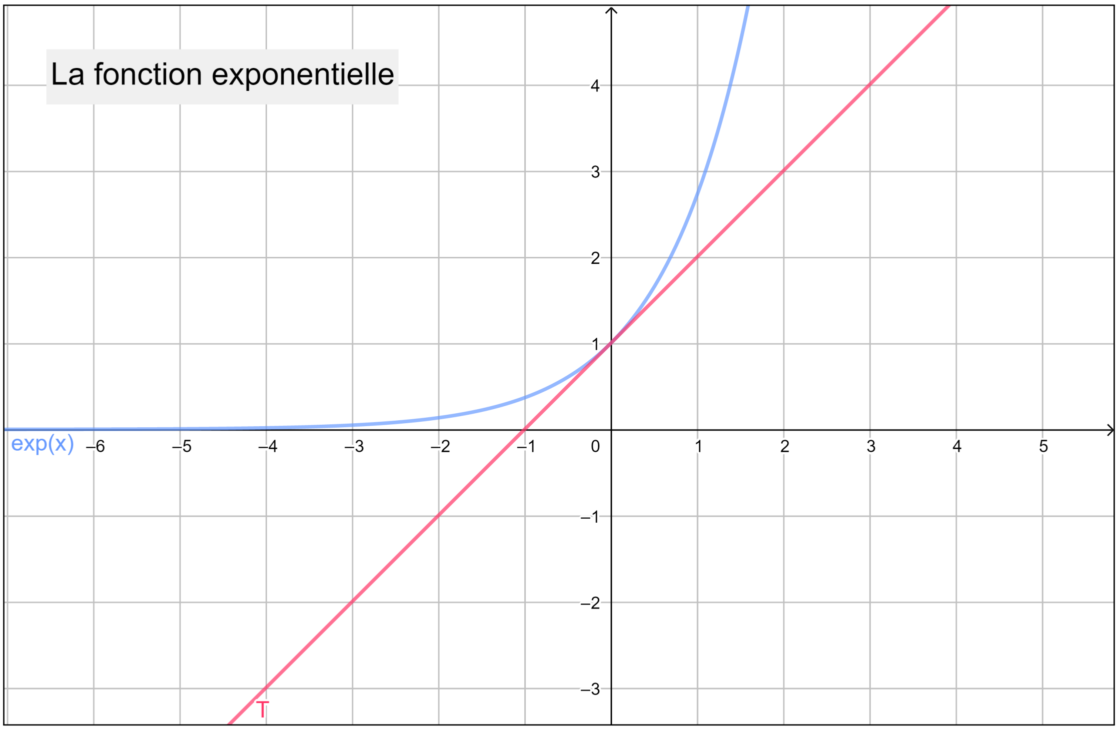
À RETENIR

— $e^x = e^y \iff x = y$

— $e^x < e^y \iff x < y$

3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction exponentielle (courbe bleue) et de sa tangente au point d'abscisse 0 :



On voit plusieurs propriétés données précédemment : $e^0 = 1$, $e \approx 2,718$, etc... Mais également d'autres propriétés que verrons par la suite comme le fait que la fonction soit **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. À noter que la **tangente** à sa courbe représentative en $x = 0$ est $y = x + 1$.

II - Étude de la fonction

1. Limites

Les limites de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition sont :

À RETENIR

— $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction exponentielle "l'emporte sur" (elle croît plus vite que) la fonction puissance :

À RETENIR

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

— $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times e^x = 0$

— $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \left(e^0\right)' = e^0 = 1$

2. Dérivée

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

À RETENIR

$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$:

À RETENIR

$(e^x)' = e^x$

Cette propriété a été donnée dans la section "Définition".

3. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction exponentielle :

À RETENIR

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque sur le tableau de variation que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.