



## Chapitre I - Les suites

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Qu'est-ce-que qu'une suite ?</b>	<b>1</b>
1. Définition . . . . .	1
2. Suites arithmétiques . . . . .	1
3. Suites géométriques . . . . .	2
<b>II - Étude des suites</b>	<b>4</b>
1. Sens de variation . . . . .	4
2. Limites . . . . .	4
3. Opérations sur les limites . . . . .	5
4. Majoration, minoration et bornes . . . . .	6
5. Encadrement . . . . .	6
<b>III - Raisonement par récurrence</b>	<b>7</b>

## I - Qu'est-ce-que qu'une suite ?

### 1. Définition

On appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  : cette fonction va prendre des éléments d'un ensemble de départ  $\mathbb{N}$  et va les amener dans un ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$ .

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence** : On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang  $n + 1$ .
- **Par son terme général** : On donne le  $n$ -ième terme de la suite en fonction de  $n$ .

**Exemple** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi :

$$u_n = n$$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \end{cases} .$$

On remarque que bien que définies différemment,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont égales.

### 2. Suites arithmétiques

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmétique** si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ avec } r \in \mathbb{R}.$$

Le réel  $r$  est la **raison** de la suite (si  $r > 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, si  $r < 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante et si  $r = 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite arithmétique :

On note  $p$  le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Et si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie à partir du rang 0 (on a  $p = 0$ ) :

$$u_n = u_0 + (n - 0) \times r = u_0 + n \times r$$

La somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante (on note  $S_n$  cette somme) :

$$S_n = \frac{(\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}) \times (\text{Nombre de termes})}{2}$$

**Astuce :** Pour trouver le nombre de termes, on prend le rang jusqu'auquel on souhaite calculer cette somme, on y soustrait l'indice du premier terme et on y ajoute 1.

**Exemple :** Soit une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $(u_n)_{n \geq 1} : \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 1$ .

La raison  $r$  est égale à 5. Le premier terme est  $u_1 = 10$  d'indice  $p = 1$ . Le terme général de cette suite est donc  $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$ .

Par conséquent, on a :  $u_n = 10 + (n - 1) \times 5$ . On souhaite calculer la somme des termes de cette suite jusqu'au rang  $n$ .

Par l'astuce précédente, il y a  $n - 1 + p = n$  termes. On peut calculer la somme  $S_n$  :

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n) \times (n)}{2} = \frac{(10 + (10 + (n - 1) \times 5)) \times (n)}{2} = \frac{5n^2 + 15n}{2}.$$

### 3. Suites géométriques

Une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **géométrique** si elle est de la forme :

$$v_{n+1} = v_n \times q \text{ avec } q \in \mathbb{R}.$$

Le réel  $q$  est la **raison** de la suite (si  $q > 1$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, si  $0 < q < 1$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante et si  $q = 1$  ou  $0$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite géométrique :

On note  $p$  le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Et si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie à partir du rang 0 (on a  $p = 0$ ) :

$$v_n = v_0 \times q^{n-0} = v_0 \times q^n$$

La somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante (on note  $S_n$  cette somme) :

$$S_n = (\text{Premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

**Astuce :** Pour trouver le nombre de termes, on prend le rang jusqu'auquel on souhaite calculer cette somme.

On y soustrait l'indice du premier terme et on y ajoute 1.

**Exemple :** Soit une suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  définie par  $(v_n)_{n \geq 2} : \begin{cases} v_2 = 1 \\ v_{n+1} = v_n \times 2 \end{cases}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 2$ .

La raison  $q$  est égale à 2. Le premier terme est  $v_2 = 1$  d'indice  $p = 2$ . Le terme général de cette suite est donc  $v_n = v_2 \times q^{n-2}$ .

Par conséquent, on a :  $v_n = 2^{n-2}$ . On souhaite calculer la somme des termes de cette suite jusqu'au rang  $n$ .

Par l'astuce précédente, il y a  $n - 1 + p = n + 1$  termes. On peut calculer la somme  $S_n$  :

$$S_n = v_2 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -(1 - 2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1.$$

## II - Étude des suites

### 1. Sens de variation

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** si on a :

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ ou } u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

À l'inverse, une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** si on a :

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ ou } u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Une suite est dite **constante** si on a pour  $c \in \mathbb{R}$  :

$$u_n = u_{n+1} = c.$$

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

### 2. Limites

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers une limite finie  $l$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $|u_n - l| < \epsilon$ . Cette définition est un peu technique mais elle signifie qu'il existe une infinité de réels entre  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $l$ . On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** et on note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

**Attention !** On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  mais **jamais**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'atteindra  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut également diverger vers une limite infinie. On dit à ce moment là que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente**. On note ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$$

Il est possible d'écrire une définition semblable à celle de la convergence.

Ainsi, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , cela signifie que pour tout réel  $h$  et à partir d'un certain rang  $M$ , on aura  $u_M > h$ .

Et si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , cela signifie que pour tout réel  $h$  et à partir d'un certain rang  $m$ , on aura  $u_m < h$ .

Limite d'une suite géométrique				
Si on a pour $q \in \mathbb{R} \dots$	$-1 < q < 1$	$1 < q$	$q \leq -1$	$q = 1$
La suite $q^n$ a pour limite...	0	$+\infty$	Pas de limite	1

À savoir que si une suite a une limite, alors cette limite est **unique**.

### 3. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

Limite d'une somme						
Si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit									
Si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Limite d'un quotient									
Si la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l$	0
Et la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	$0^+_{-}$	0
Alors la limite de $(\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$\pm\infty$	?

#### 4. Majoration, minoration et bornes

Soient une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et deux réels  $m$  et  $M$  :

- On dit que  $m$  est un **minorant** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si pour tout  $n$  :  $u_n > m$ .
- On dit que  $M$  est un **majorant** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si pour tout  $n$  :  $u_n < M$ .
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ .

Toute suite convergente est également bornée.

#### 5. Encadrement

Soient deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang. On a :

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  alors  $l < l'$ .

Soient trois suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n < v_n < w_n$  à partir d'un certain rang et que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers le réel  $l$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$$

Ce théorème est appelé **théorème des gendarmes**.

### III - Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  à partir d'un certain rang  $p$  :

**Initialisation** : On teste la propriété au rang  $p$ . Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

**Hérédité** : On démontre que si la propriété est vraie au rang  $p$ , alors elle est vraie au rang  $p + 1$ .

**Conclusion** : On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang  $p + 1$  et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir de ce rang  $p$  et pour tout  $n \geq p$ .

**Exemple** : Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$ . On souhaite montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $4 \leq u_n \leq 5$ .

On note  $\mathcal{P}_n$  la propriété définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$ .

On constate également que  $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$ .

**Initialisation** : On teste la propriété au rang 0 :

$\mathcal{P}_0 : 4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$ . C'est vrai.

La propriété est vraie au rang 0, on souhaite vérifier que la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

**Hérédité** :

D'après  $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$ . Donc on a :

$$\iff 4 \leq u_n \leq 5$$

$$\iff 4 + 4 \leq u_n + 4 \leq 5 + 4$$

$\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8}$  (la fonction inverse est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc on change l'inégalité)

$$\iff 4 + \frac{1}{9} \leq 4 + \frac{1}{u_n+4} \leq 4 + \frac{1}{8}$$

Or  $4 + \frac{1}{9} \approx 4.111 > 4$  et  $4 + \frac{1}{8} = 4.125 < 5$ . On a donc bien :

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

**Conclusion** :

La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites.