



## Chapitre IV – La fonction exponentielle

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Le nombre <math>e</math></b>	<b>1</b>
<b>II - La fonction exponentielle</b>	<b>2</b>
1. Définition . . . . .	2
2. Relations algébriques . . . . .	3
3. Représentation graphique . . . . .	3
<b>III - Étude de la fonction</b>	<b>5</b>
1. Dérivée . . . . .	5
2. Variations . . . . .	5
3. La suite $(e^{na})$ . . . . .	6

## I - Le nombre $e$

Le **nombre d'Euler**  $e$  (également appelé constante de Neper) est une constante mathématique irrationnelle qui possède de nombreuses propriétés.

### À RETENIR : VALEUR APPROCHÉE

Une valeur approchée de  $e$  est  $\approx 2,71828$ .

Cependant, une définition plus exacte de  $e$  existe.

### À RETENIR : AUTRE DÉFINITION

On définit la suite  $(e_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Alors la limite de la suite  $(e_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  est  $e$ .

### À LIRE

Grâce à cette définition, il est plus facile de construire un algorithme pour approximer  $e$ .

## II - La fonction exponentielle

### 1. Définition

#### À RETENIR : DÉFINITION

La fonction exponentielle notée pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $e^x$  (ou parfois  $\exp(x)$ ) est l'unique fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  remplissant les critères suivants :

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = f$
- $f > 0$  sur  $\mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

#### DÉMONSTRATION : EXISTENCE

**L'existence** de cette fonction est admise, il faut cependant en démontrer **l'unicité**.

Soit une autre fonction  $g$  vérifiant les mêmes propriétés que notre fonction  $f$ . On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Comme  $g$  ne s'annule pas et que  $h$  est un quotient de fractions dérivables ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ ,  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = 0$  (car  $f = f'$  et  $g = g'$ ).

On a donc  $h$  constante sur  $\mathbb{R}$  et la valeur de  $h$  est  $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 1 \iff \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff f(x) = g(x)$ . Donc  $g = f$ .

#### À LIRE : FORMULES

La fonction exponentielle, telle qu'on l'a écrite, est composée d'un réel ( $e \approx 2,718$ ) et d'un exposant réel  $x$ . **Les opérations sur les exposants** sont disponibles, comme par exemple pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{x \times y}$

Et bien entendu,  $e^0 = 1$ .

## 2. Relations algébriques

### À RETENIR : RELATIONS ALGÈBRIQUES

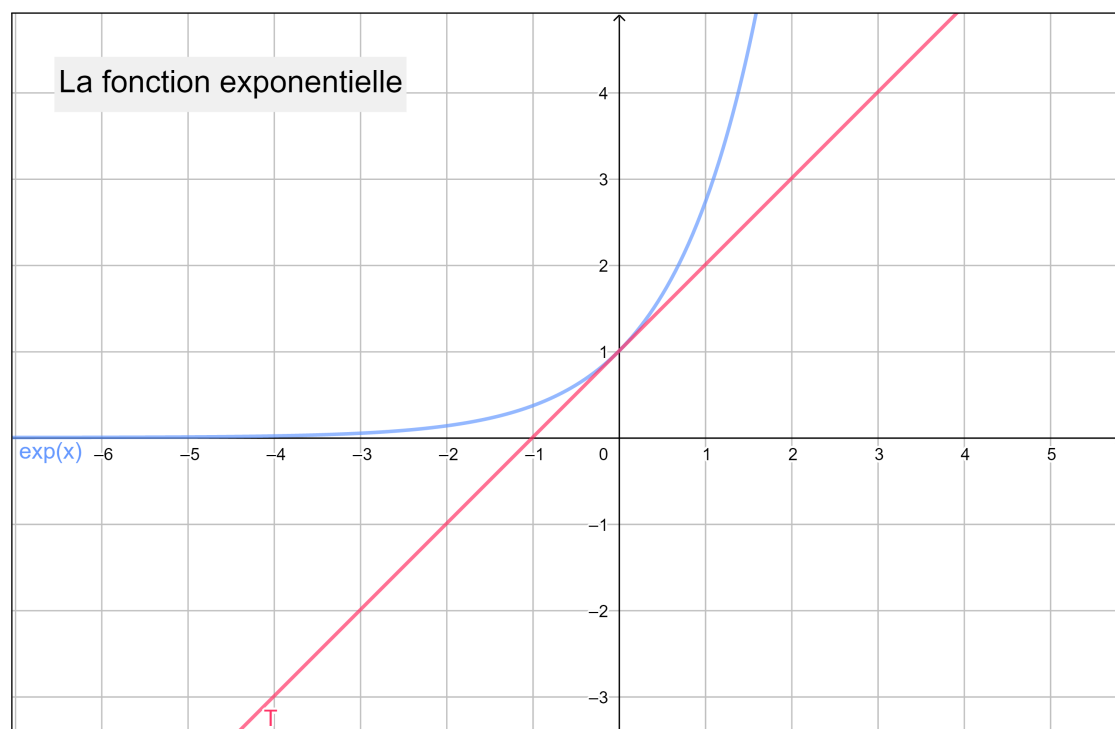
La fonction exponentielle a plusieurs propriétés algébriques qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels  $x$  et  $y$  :

$$— e^x = e^y \iff x = y$$

$$— e^x < e^y \iff x < y$$

## 3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction exponentielle (courbe bleue) et de sa tangente au point d'abscisse 0 :



On voit plusieurs propriétés données précédemment :  $e^0 = 1$ ,  $e \approx 2,718$ , etc... Mais également d'autres propriétés que verrons par la suite comme le fait que la fonction soit **strictement positive** sur  $\mathbb{R}$ . À noter que la **tangente** à sa courbe représentative en  $x = 0$  est  $y = x + 1$ .

## À LIRE : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE ↔

Il peut être utile de savoir représenter une courbe d'une fonction du type  $x \mapsto e^{kx}$  avec  $k \in \mathbb{R}$  :

- L'image de 0 par ces fonctions est toujours 1.
- Plus  $k$  est grand, plus la croissance est forte et rapide.
- Si  $k$  est négatif, la courbe est symétrique à celle de  $x \mapsto e^{-kx}$  par rapport à l'axe des ordonnées.

### III - Étude de la fonction

#### 1. Dérivée

À RETENIR : DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE 🔦

Soit une fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :  $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$ .

À RETENIR : DÉRIVÉE 🔦

Ainsi, si pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) = x$ , on retrouve :  $(e^x)' = e^x$ .

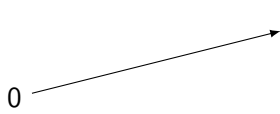
Cette propriété a été donnée dans la section “Définition”.

#### 2. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment, il est désormais possible d’obtenir les variations de la fonction exponentielle.

À RETENIR : VARIATIONS 🔦

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(x \mapsto e^x)'$	+	
$x \mapsto e^x$	0	$+\infty$



On remarque sur le tableau de variation que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### 3. La suite $(e^{na})$

#### À RETENIR 💡

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . La suite  $(e^{na})$  est une suite géométrique de raison  $e^a$  et de premier terme 1.

#### DÉMONSTRATION 🧐

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = e^{na}$ .

Calculons  $u_{n+1}$  :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a.$$

Et on a bien  $u_0 = e^0 = 1$ .