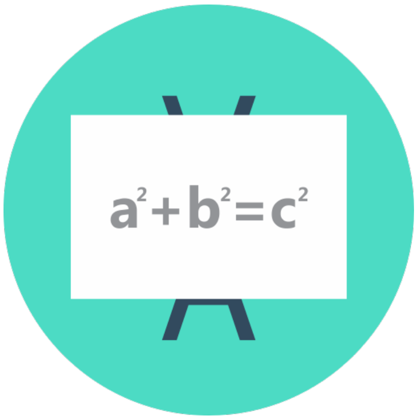


Chapitre II – Limites de fonctions

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Limite d'une fonction en un point . . . 1
1. Limite infinie . . . 1
2. Limite finie . . . 3
3. Limites à gauche et à droite . . . 4
4. Asymptote verticale . . . 5

II - Limite d'une fonction en l'infini . . . 6
1. Limite infinie . . . 6
2. Limite finie . . . 7
3. Asymptote horizontale . . . 8

III - Calcul de limites . . . 10
1. Limites de fonctions de référence . . . 10
2. Opérations sur les limites . . . 10
3. Comparaisons et encadrements . . . 12

I - Limite d'une fonction en un point

1. Limite infinie

À RETENIR : FONCTION TENDANT VERS $+\infty$ EN UN POINT

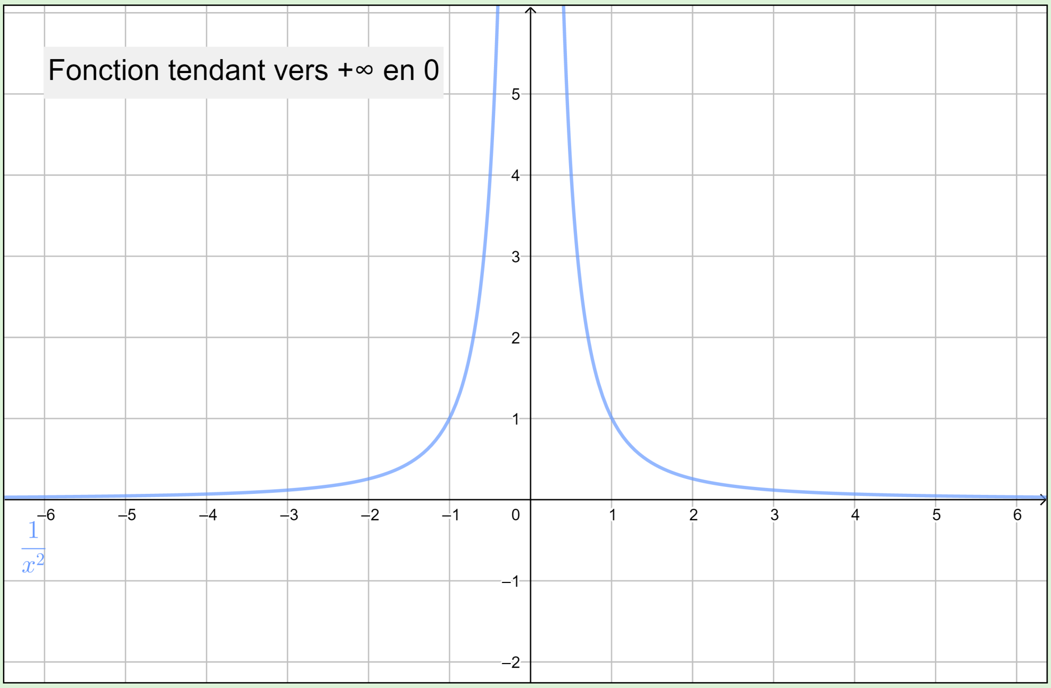
Soit f une fonction (en classe de Terminale, on se limite aux fonctions réelles) d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit a un réel appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou étant une borne de $\mathcal{D}_f$.

On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.

On note ceci $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$, tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.



Il est tout-à-fait possible d'établir une définition similaire pour une fonction tendant vers $-\infty$ en un point.

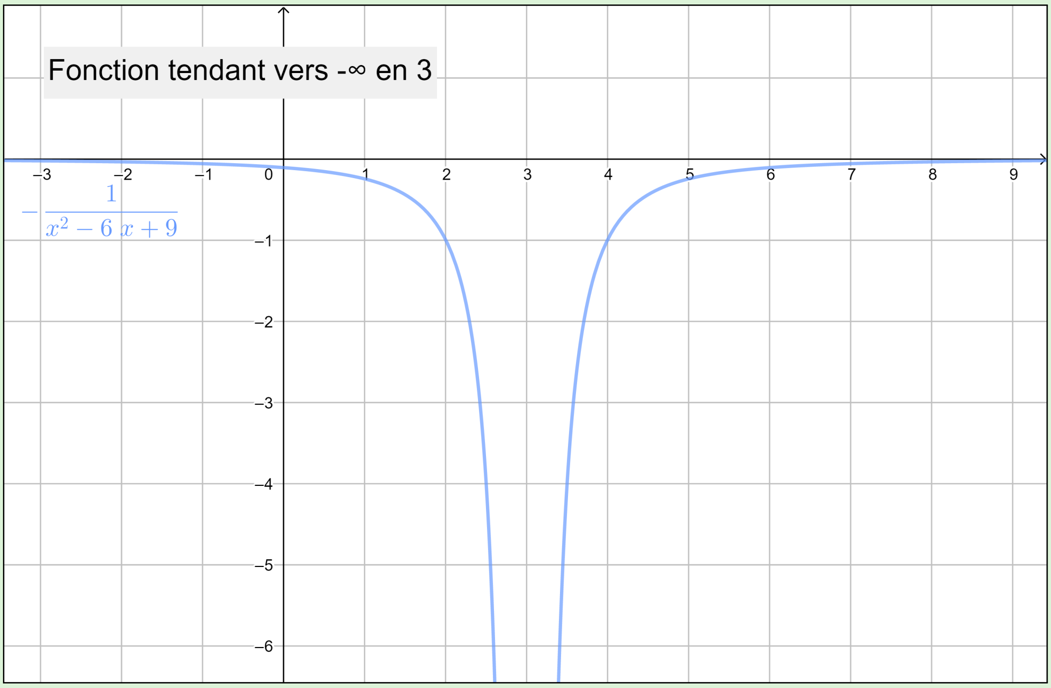
À LIRE : FONCTION TENDANT VERS $-\infty$ EN UN POINT

En reprenant les notations précédentes, on dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut pourvu que x suffisamment proche de a.

On note ceci $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction f définie sur $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x^2-6x+9}$, tend vers $-\infty$ quand x tend vers 3.



2. Limite finie

À RETENIR : DÉFINITION

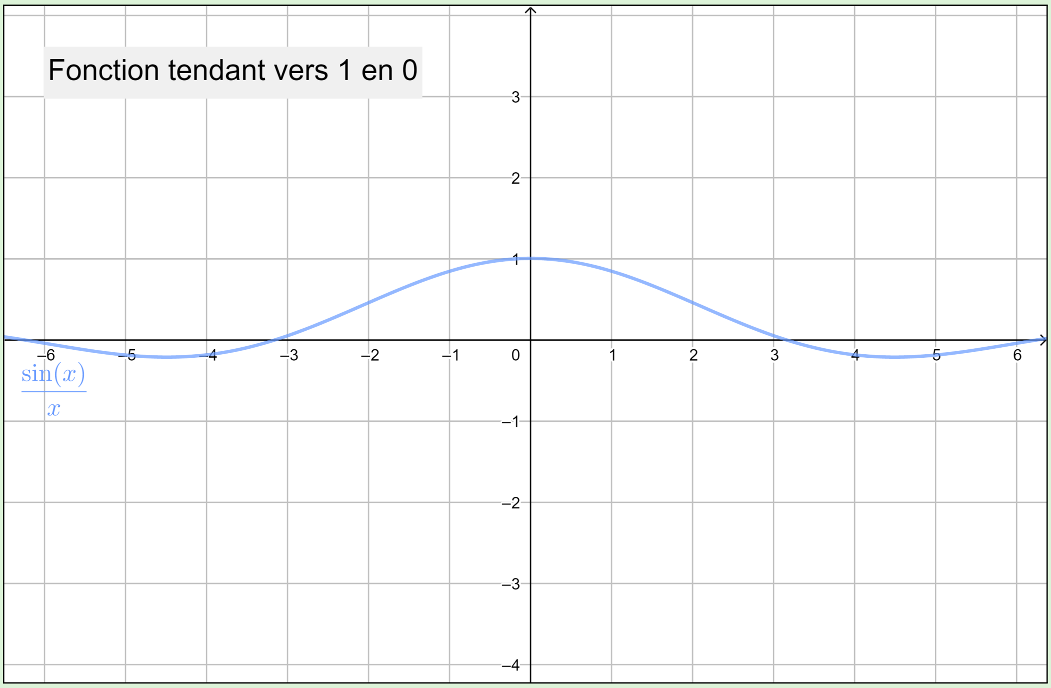
Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit a un réel appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou étant une borne de $\mathcal{D}_f$.

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.

On note ceci $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, tend vers 1 quand x tend vers 0.



Une petite remarque cependant : cette limite n'est pas triviale à démontrer. On peut cependant en proposer une preuve à l'aide de la dérivée de la fonction sin (qui est cos) : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

3. Limites à gauche et à droite

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit a un réel appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou étant une borne de $\mathcal{D}_f$.

— On dit que $f(x)$ admet une **limite à gauche** quand x tend vers a si $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$. On la note $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

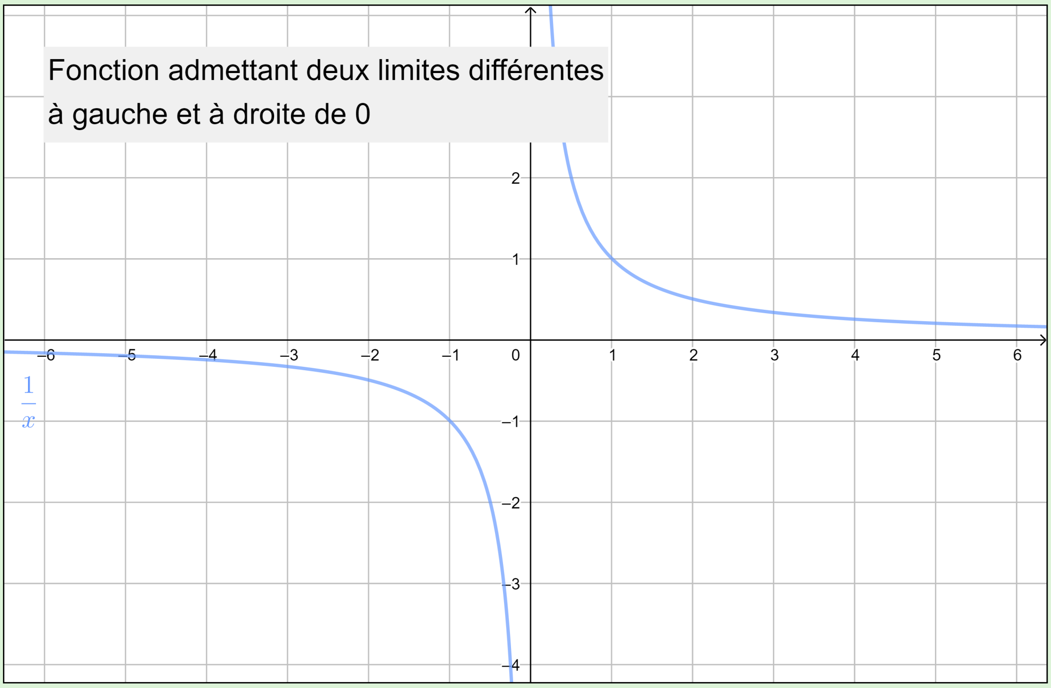
— On dit que $f(x)$ admet une **limite à droite** quand x tend vers a si $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On la note $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, admet deux limites différentes à gauche et à droite de 0 :

— $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$

— $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$



4. Asymptote verticale

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit a un réel appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou étant une borne de $\mathcal{D}_f$.

Alors si $f(x)$ admet une limite infinie quand x tend vers a, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

À LIRE : EXEMPLE

En reprenant les exemples précédents :

— Les courbe représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ admettent toutes deux une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

— La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-6x+9}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

II - Limite d'une fonction en l'infini

1. Limite infinie

À RETENIR : FONCTION TENDANT VERS $+\infty$ EN $+\infty$

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose qu'une des bornes de $\mathcal{D}_f$ est $+\infty$.

On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Comme précédemment, on peut écrire des définitions similaires pour dire que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

À LIRE : FONCTION TENDANT VERS $-\infty$ EN $+\infty$

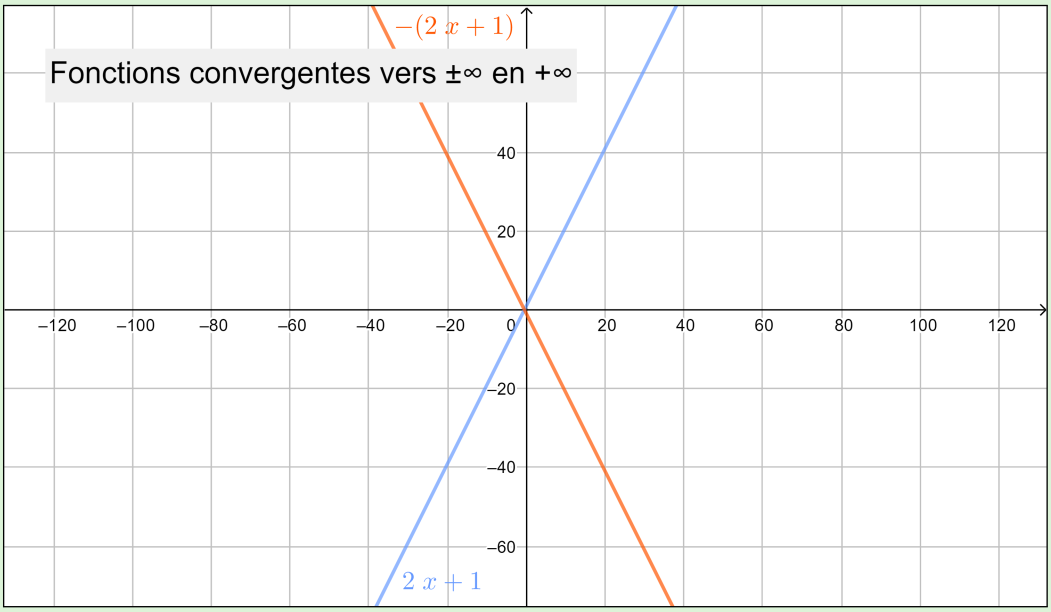
En reprenant les notations précédentes, on dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

À LIRE : FONCTION TENDANT VERS $\pm\infty$ EN $-\infty$

Pour avoir les définitions quand x tend vers $-\infty$, il suffit de remplacer "x suffisamment grand" par "x suffisamment petit" et il faut qu'une des bornes de $\mathcal{D}_f$ soit $-\infty$.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$, tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Cependant, la fonction $-f : x \mapsto -2x - 1$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.



2. Limite finie

À RETENIR : LIMITE FINIE EN $+\infty$

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose qu'une des bornes de $\mathcal{D}_f$ est $+\infty$.

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

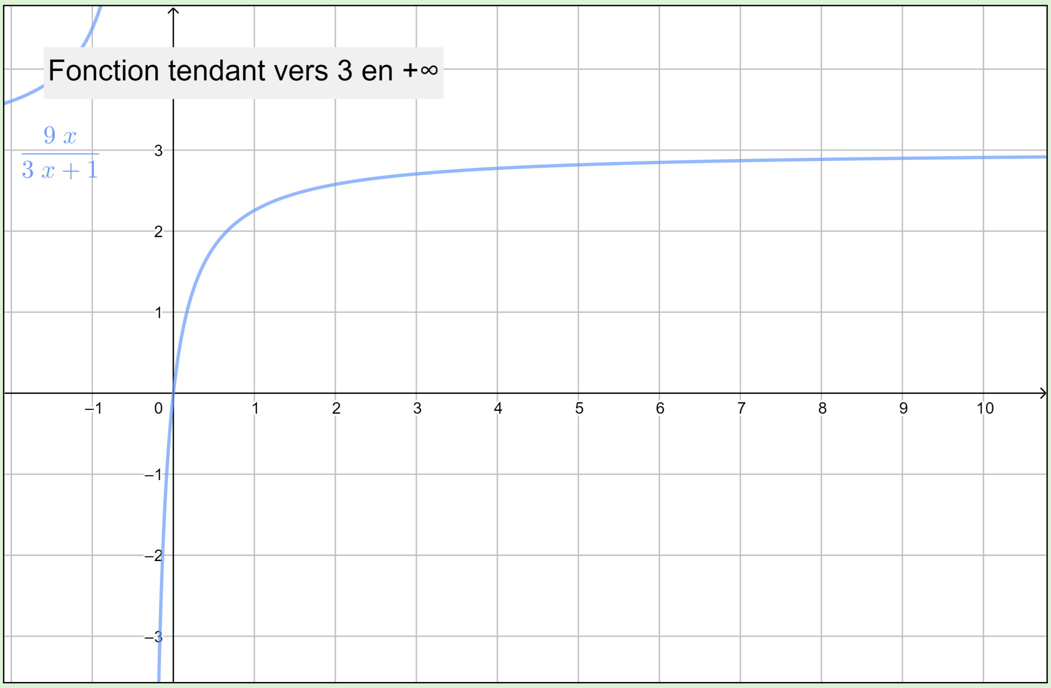
De même, on peut écrire une définition semblable quand x tend vers $-\infty$.

À LIRE : LIMITE FINIE EN $-\infty$

En reprenant les notation précédentes et en supposant qu'une des bornes de $\mathcal{D}_f$ soit $-\infty$, on dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers $-\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit suffisamment petit.

À LIRE : EXEMPLE

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{9x}{3x+1}$ tend vers 3 quand x tend vers $+\infty$.



3. Asymptote horizontale

À RETENIR : DÉFINITION EN $+\infty$

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose qu'une des bornes de $\mathcal{D}_f$ est $+\infty$.

Alors si $f(x)$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

Comme tout ce que l'on a vu avant, il existe une définition semblable en $-\infty$.

À LIRE : DÉFINITION EN $-\infty$

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose qu'une des bornes de $\mathcal{D}_f$ est $-\infty$.

Alors si $f(x)$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers $-\infty$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** en $-\infty$ à la courbe représentative de f.

À LIRE : EXEMPLE

En reprenant l'exemple précédent, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{9x}{3x+1}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

De plus, elle admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{3}$.

III - Calcul de limites

1. Limites de fonctions de référence

Nous allons donner quelques fonctions “classiques” avec leur limite en quelques points.

À RETENIR : LIMITES DE FONCTIONS USUELLES

	$a = -\infty$	$a = 0$	$a = +\infty$
$\lim_{x \to a} \frac{1}{x}$	0	$-\infty$ si $a = 0^-$, $+\infty$ si $a = 0^+$	0
$\lim_{x \to a} \sqrt{x}$	**Non définie**	0 si $a = 0^+$	$+\infty$
$\lim_{x \to a} x^k$	$-\infty$ si k est impair, $+\infty$ si k est pair	0	$+\infty$
$\lim_{x \to a} e^x$	0	$e^0 = 1$	$+\infty$

À LIRE : RAPPEL

On rappelle que 0^- signifie “tend vers 0 mais en restant inférieur à 0” et 0^+ signifie “tend vers 0 mais en restant supérieur à 0”.

2. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, f et g sont deux fonctions de domaines de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Soit a un nombre réel appartenant à $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ (ou qui est au moins une borne des deux à la fois). Les tableaux suivants ressemblent beaucoup à ceux qui sont disponibles dans le cours sur les suites donc vous pouvez bien-sûr n'en retenir qu'un des deux, et tenter à partir de là de retrouver l'autre.

À RETENIR : LIMITE D'UNE SOMME

Limite d'une somme						
Si la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est...	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de g quand x tend vers a est...	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de $f+g$ quand x tend vers a est...	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

À RETENIR : LIMITE D'UN PRODUIT

Limite d'un produit									
Si la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est...	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de g quand x tend vers a est...	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $f \times g$ quand x tend vers a est...	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

À RETENIR : LIMITE D'UN QUOTIENT

Limite d'un quotient									
Si la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est...	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	ℓ	0
Et la limite de g quand x tend vers a est...	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	0^+_-	0
Alors la limite de $\frac{f}{g}$ quand x tend vers a est...	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$\pm\infty$	**?**

À RETENIR : LIMITE D'UNE COMPOSÉE

Si on pose $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Alors $\lim_{x\to} (g \circ f)(x) = c$.

À LIRE : FORMES INDÉTERMINÉES

À noter qu'il n'existe que 4 formes indéterminées : "$+\infty - \infty$", "$0 \times \pm\infty$", "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

3. Comparaisons et encadrements

À RETENIR : THÉORÈMES DE COMPARAISON

Soient deux fonctions f et g.

— Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et si $f \leq g$ à partir d'un certain point, alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

— Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $f \geq g$ à partir d'un certain point, alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

À RETENIR : THÉORÈME DES GENDARMES

Soient trois fonctions f, g et h. Si on a $f \leq g \leq h$ à partir d'un certain point, et qu'il existe ℓ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

À LIRE : EXEMPLE

Utilisons ce théorème pour montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Donc, pour tout $x > 0$, $\frac{-1}{x} \leq \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{=f(x)} \leq \frac{1}{x}$.

Comme, $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Le dernier théorème est la version fonction du théorèmes des gendarmes (que l'on a vu lors du cours sur les suites). Ils permettent notamment de démontrer une partie du **théorème des croissances comparées**.

À RETENIR : CROISSANCES COMPARÉES

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION : COISSANCES COMPARÉES

Commençons tout d'abord par montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$. Pour cela, posons $f : x \mapsto e^x - 1 - x$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Donc $f'(x)$ est positif si et seulement si $e^x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq 1$.

En regardant le graphique de la fonction exponentielle, on trouve que cela est équivalent à $x \geq 0$.

Notre fonction est donc croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et son minimum est donc atteint en $x = 0$ et vaut $f(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0 \iff e^x - 1 - x \geq 0 \iff e^x \geq 1 + x$: ce que l'on cherchait.

Pour conclure, on utilise une petite astuce. Soit $n \in \mathbb{N}$:

D'après ce que l'on vient de faire, pour tout $x > 0$, $e^{\frac{x}{n+1}} \geq 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}$. Ainsi, en mettant à la puissance $n + 1$ (qui ne change pas le sens de l'inégalité car les deux membres sont positifs), on a :

$e^x > (\frac{x}{n+1})^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ Maintenant, on divise les deux côtés par x^n (qui est un nombre strictement positif) et on obtient :

$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$

Or, le membre de droite tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc le membre de gauche aussi d'après les théorèmes de comparaison.