Chapitre II - Continuité et dérivabilité

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

Table des matières

I - Continuité

1. Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. La fonction f est continue en a si on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f est dite continue sur I, on peut appliquer la formule ci-dessus à tout les réels de l'intervalle I.
On dit de manière générale qu'une fonction est continue sur un intervalle s'il est de tracer sa courbe représentative sur cet intervalle "sans lever le crayon".

- Toute somme, produit, composée ou quotient (avec le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues est également continue sur le même intervalle.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (la réciproque n'est pas vraie cependant).

Exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition ($\mathbb{R}^*$) mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction, a et b deux réels tels que $a < b$. Voici l'énonce du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f et à a et b :

Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel y_0 si on a $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **au moins** un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Ce théorème est **très important** !

Voici un exemple : prenons $f(x) = x^3 + x^2 - x$ et prouvons qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x) = 5$. On a $f(0) = 0$ et $f(3) = 33$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[0; 3]$ et que $0 < 5 < 33$, il existe un réel $x_0 \in [0, 3]$ tel que $f(x_0) = 5$.

On peut encore tenter d'affiner la précision : $f(1) = 1$ et $f(2) = 10$. On a bien $1 < 5 < 10$ donc $x_0 \in [1; 2]$, etc...

Une conséquence de ce théorème est que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors la fonction f s'annule au moins une fois entre a et b.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : Si f est continue sur $[a;b]$ et que f est **strictement monotone** sur cet intervalle, alors pour tout réel y_0 si on a $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **un unique** réel $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

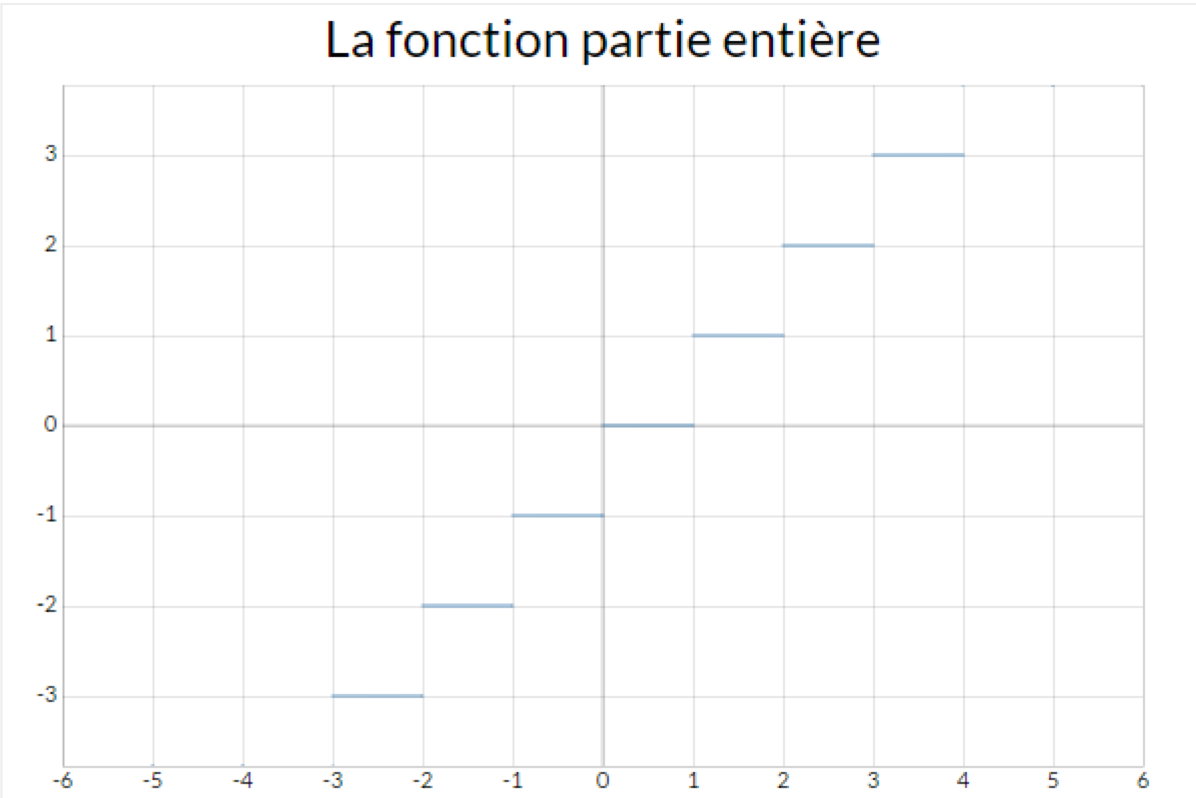
3. La partie entière $[x]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x notée $[x]$ (ou $E(x)$) est l'unique réel tel que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Exemple : $[1,216] = 1$ et $[-2,198] = -3$.

La fonction partie entière définie par $x \mapsto [x]$ **n'est pas continue** :



II - Dérivation

1. Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$.

La fonction f est dérivable en a si la limite ci-dessous existe et est finie : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
On en posant $x = a + h$: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$.

Le nombre dérivé entre x et a est égal à $f'(a)$ si ce nombre existe.

2. La tangente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente $\mathcal{T}$ au point de coordonnées $(a; f(a))$. $f'(a)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$, et une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Soit $f(x) = e^x$ (voir cours sur la fonction exponentielle).

Cherchons une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$: On a $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (voir paragraphe sur les limites).

Ainsi, $f'(0) = 1$. Une équation de la tangente est donc $y = f'(0)(x-0)+f(0) = x+1$: on retrouve ce qui a été constaté sur la représentation graphique.

3. Fonction dérivée

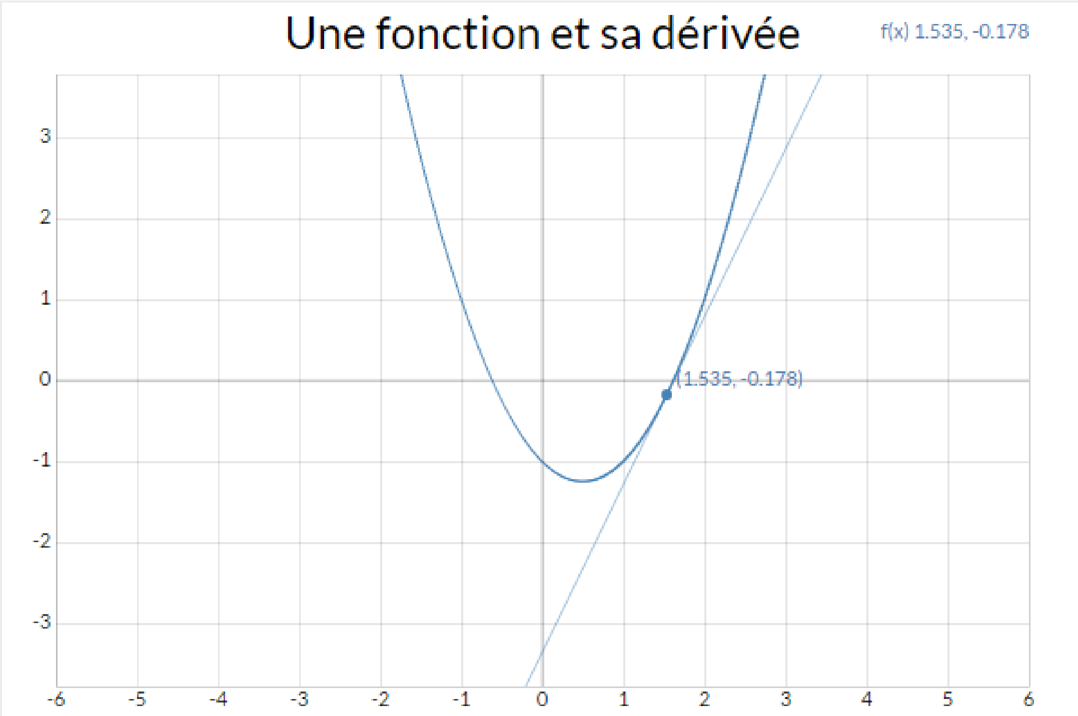
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I :

On appelle **fonction dérivée** de f sur I la fonction qui a tout réel $x \in I$ y associe $f'(x)$.

4. Applications

Plusieurs applications peuvent être trouvées aux dérivées. Ainsi, avec le signe de la dérivée, il est possible d'obtenir le sens de variation de la fonction. Pour une fonction f dérivable sur I et de dérivée f' :

- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.



Il est également possible d'en déduire diverses propriétés sur les extremums dits "locaux" (sur un certain intervalle) d'une fonction. Soient f dérivable sur I, et $a \in I$ et de dérivée f' :

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$ et le signe de f' est différent avant et après a et la réciproque :
  si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' et différent avant et après a, alors $f'(a)$ est un extremum local de f.
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

III - Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
λ	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+_*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+_*$	$\mathbb{R}^+_*$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions u et v :

Fonction	Dérivée
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'x^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
$sin(u)$	$u'cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$cos(u)$	$u' - sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

De manière générale, soient f dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$. On a alors :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$