Chapitre V – La fonction logarithme népérien

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Propriétés du logarithme népérien

1. Définition

Le **logarithme népérien** est une fonction qui est définie sur $]0; +\infty[$ par :

À RETENIR

$x \mapsto \ln(x)$

Et on a la relation fondamentale suivante pour tout $x > 0$ et y réels :

À RETENIR

$\ln(x) = y \iff x = e^y$

Ainsi, a tout réel **strictement positif** x, la fonction logarithme népérien y associe **son unique antécédent** y par rapport à la fonction exponentielle.
De même pour la fonction exponentielle. On dit que ces fonctions sont des **fonctions réciproques** (à la manière de sin et arcsin ou cos et arccos).

À LIRE

Cette relation peut sembler compliquer à assimiler mais il n'en est rien ! Prenons $x = 0$, on a :
$e^0 = 1$ (tout réel mis à la puissance zéro vaut un), la relation précédente nous donne $\ln(1) = 0$.

Si on prend maintenant $x = 1$, on a :
$e^1 = e$, on a donc $\ln(e) = 1$.

Les relations suivantes sont par conséquent disponibles :

À RETENIR

Pour tout réel x **strictement positif**, on a :
$e^{\ln(x)} = x$

Et pour tout réel x, on a :
$\ln(e^x) = x$

2. Relations algébriques

Le logarithme népérien a plusieurs propriétés intéressantes qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels x et y **strictement positifs** :

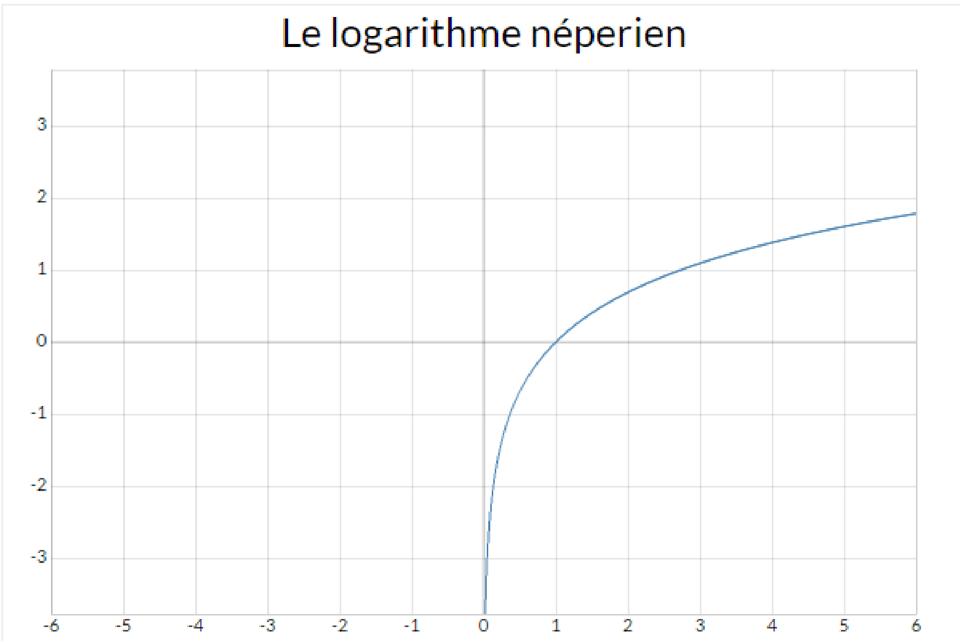
À RETENIR

— $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
— $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$
— $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
— $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
— $\ln(\sqrt[p]{x}) = \dfrac{1}{p} \times \ln(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

Certaines des ces propriétés peuvent se déduire les unes des autres.

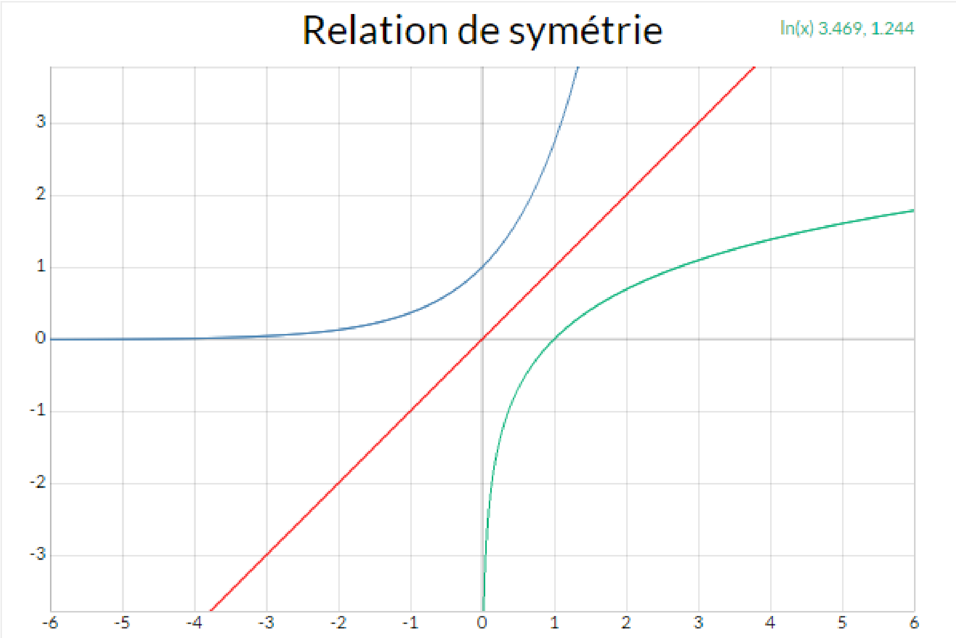
3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



On voit sur ce graphique plusieurs propriétés données précédemment : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ par exemple.

On trace maintenant le graphe de la fonction logarithme népérien, avec celui de la fonction exponentielle. On trace également la droite d'équation $y = x$:



On remarque plusieurs choses : le graphe de la fonction logarithme népérien est le symétrique de celui de la fonction exponentielle par rapport à la droite $y = x$ et on voit que la fonction logarithme népérien croît moins vite que la fonction puissance qui elle-même croît moins vite que la fonction exponentielle. Cette propriété est importante : c'est la **croissance comparée**.

II - Étude de la fonction

1. Limites

Les limites de la fonction logarithme népérien aux bornes de son ensemble de définition sont :

À RETENIR

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction puissance “l’emporte” sur le logarithme népérien (voir la partie “Représentation graphique”) :

À RETENIR

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) = 0$

Une autre limite est à connaître (ainsi que sa démonstration) :

À RETENIR

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

DÉMONSTRATION

La fonction logarithme népérien est définie et continue en $x = 1$, on peut donc écrire :

$\ln'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$

Ce qui est équivalent à (car on a $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$) :

$1 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$

On pose $y = x - 1$ ce qui nous donne finalement :

$\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(y - 1)}{y} = 1$

2. Dérivée

Soit une fonction u dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

À RETENIR

$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$:

À RETENIR

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

3. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment ainsi que les limites données, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction logarithme népérien :

À RETENIR

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque qu'avec le tableau de variation, il est possible d'obtenir le signe de la fonction (avec le théorème des valeurs intermédiaires).
Ainsi, sur $]0; 1[$, $\ln$ est **strictement négative** et sur $]1; +\infty[$, $\ln(x)$ est **strictement positive** et, comme vu précédemment, $\ln(1) = 0$.
On observe également les variations de la fonction : strictement croissante sur son ensemble de définition.

III - Le logarithme décimal

Le **logarithme décimal** (utilisé en physique-chimie en classe de Terminale S) est défini sur $]0; +\infty[$ par :

À RETENIR

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Et on a les propriétés suivantes :

À RETENIR

— $\log_{10}(10) = 1$

— $\log_{10}(10^n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$

À LIRE

Ces formules peuvent se retrouver très facilement ! En effet, pour la première : $\log_{10}(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$.

Et pour la seconde :
$\log_{10}(10^n) = \frac{n \times \ln(10)}{\ln(10)} = n \times \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = n$.