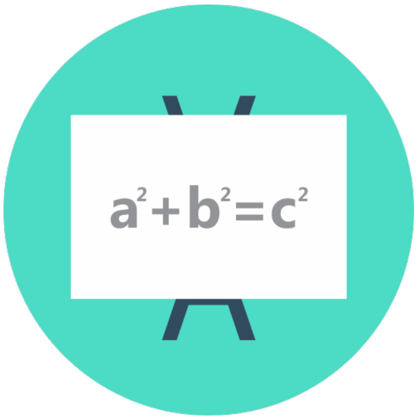


Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Qu'est-ce qu'une suite ?

1. Définition

On appelle **suite** une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: cette fonction va prendre des éléments d'un ensemble de départ $\mathbb{N}$ et va les amener dans un ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

À RETENIR

— **Par récurrence :** On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang $n+1$.

— **Par son terme général :** On donne le n-ième terme de la suite en fonction de n.

À LIRE

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :

$u_n = n$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son terme général).

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \end{cases}$ ($(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

Attention ! Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithme, motifs géométriques, ...

2. Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si elle est de la forme :

À RETENIR

$u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Le réel r est la **raison** de la suite (si $r > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, si $r < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et si $r = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante).

Il est possible de trouver le terme général d'une suite arithmétique :

À RETENIR

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$u_n = u_p + (n-p) \times r$

Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$) :

$u_n = u_0 + (n-0) \times r = u_0 + n \times r$

DÉMONSTRATION

On a $u_{p+1} = u_p + r$. Puis, $u_{p+2} = u_{p+1} + r = u_p + r + r = u_p + 2 \times r$. De même, $u_{p+3} = u_{p+2} + r = u_p + 3 \times r$ et caetera.
En fait, pour tout k entier plus grand que p, on a $u_{p+k} = u_p + k \times r$.
Donc si on pose $n = p + k$, alors $u_n = u_p + (n-p) \times r$.

Soit n un entier, alors :

À RETENIR

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

DÉMONSTRATION

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1+2+...+n$. On a également $S_n = n+(n-1)+...+1$ (en écrivant la somme à l'envers).
D'où $S_n + S_n = 2S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{n \text{ fois}} = n \times (n+1)$. Et ainsi

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

À LIRE

Exemple : On souhaite calculer $S = 24 + 25 + ... + 104$.

En fait, $S = 1+2+...+23+24+25+...+104-(1+2+...+23)$. Calculons les deux sommes séparément :

— $1 + 2 + ... + 23 = \dfrac{23 \times 24}{2} = 276$

— $1 + 2 + ... + 104 = \dfrac{104 \times 105}{2} = 5460$

D'où $S = 5460 - 276 = 5184$.

3. Suites géométriques

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si elle est de la forme :

À RETENIR

$v_{n+1} = v_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$.

Le réel q est la **raison** de la suite (si $q > 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, si $0 < q < 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et si $q = 1$ ou 0, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante). Il est possible de trouver le terme général d'une suite géométrique :

À RETENIR

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie) :

$v_n = v_p \times q^{n-p}$

Et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$) :

$v_n = v_0 \times q^{n-0} = v_0 \times q^n$

DÉMONSTRATION

On a $v_{p+1} = v_p \times q$. Puis, $v_{p+2} = v_{p+1} \times q = v_p \times q \times q = v_p \times q^2$. De même, $v_{p+3} = v_{p+2} \times q = v_p \times q^3$ et caetera.
En fait, pour tout k entier plus grand que p, on a $v_{p+k} = v_p \times q^k$.
Donc si on pose $n = p + k$, alors $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Soit $n \neq 0$ un entier et q un réel, alors :

À RETENIR

- Si $q \neq 1$, alors $1 + q^1 + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Si $q = 1$, alors $1 + q^1 + q^2 + ... + q^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ fois}} = n$.

DÉMONSTRATION

Le cas $q = 1$ étant donné juste au dessus, on supposera $q \neq 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^n$.

On a : $qS_n = q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}$, puis : $S_n - qS_n = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^n - q^1 - q^2 - q^3 - ... - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$.

Donc on a en factorisant par S_n : $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1} \iff S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

À LIRE

Exemple : On souhaite calculer $S = 3^5 + 3^6 + ... + 3^10$.

En fait, $S = 1 + 3 + ... + 3^4 + 3^5 + 3^6 + ... + 3^10 - (1 + ... + 3^4)$. Calculons les deux sommes séparément :

— $1 + 3 + ... + 3^4 = \dfrac{1 - 3^5}{1 - 3} = 121$

— $1 + 3 + ... + 3^10 = \dfrac{1 - 3^11}{1 - 3} = 88573$

D'où $S = 88573 - 121 = 88452$.

II - Étude des suites

1. Sens de variation

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si on a :

À RETENIR

$u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$

À l'inverse, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si on a :

À RETENIR

$u_{n+1} \leq u_n$ ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **constante** si on a pour $c \in \mathbb{R}$:

À RETENIR

$u_n = u_{n+1} = c$

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

2. Introduction aux limites

Quand on souhaite s'intéresser à la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on étudie le comportement de ses termes quand"n devient très grand". On préfère dire alors que n tend vers $+\infty$.

À RETENIR

— Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel, on dit qu'elle **converge**.

— Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite infinie, on dit qu'elle **diverge**.

À LIRE

Exemple : On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$. On souhaite trouver la limite possible de cette suite en $+\infty$.
Pour cela, regardons les valeurs que prend cette suite pour des valeurs de n très grandes :

100	$0,01$
1000	$0,001$
100000	$0,00001$
1000000000	$0,000000001$

Il semble que cette suite converge vers 0.

À savoir que si une suite a une limite, alors cette limite est **unique**. Mais il est également possible pour une suite de ne pas admettre de limite.

À LIRE

Exemple : On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. On souhaite trouver la limite possible de cette suite en $+\infty$.

100	1
101	-1
1000000	1
1000001	-1

En fait, si n est pair cette suite vaut 1 et si n est impair elle vaut -1. Cette suite n'admet donc pas de limite : elle diverge.

3. Représentation graphique

Il est possible de représenter graphiquement une suite. Cela peut aider, par exemple dans le but de chercher sa limite. Ainsi, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence :

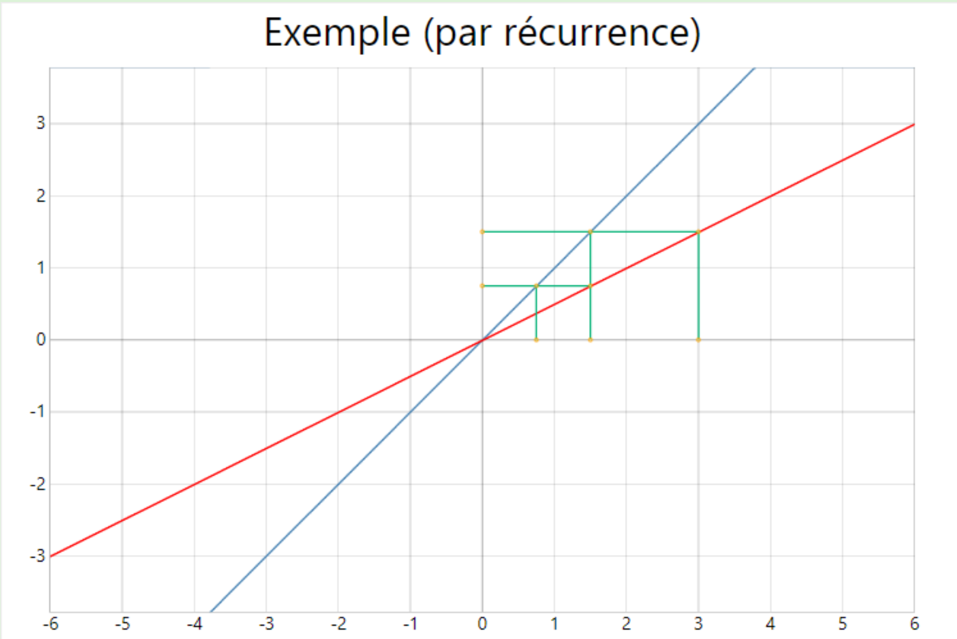
À RETENIR

Pour représenter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un graphique :

1. On trace la droite d'équation $y = x$.
2. Comme cette suite est définie par récurrence, pour tout entier n on a une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Il s'agit de tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.
3. On place le point A de coordonnées $(u_0; 0)$
4. On trace une droite verticale passant par A, son intersection avec $\mathcal{C}_f$ donne un point $B = (u_0; u_1)$.
5. À l'aide du point B, on place le point $C = (0; u_1)$.
6. On trace une droite horizontale passant par C, son intersection avec la droite $y = x$ donne un point $D = (u_1; u_1)$.
7. Une fois le point D obtenu, on place le point $(u_1; 0)$.
8. On recommence l'opération en remplaçant u_0 par u_1 et u_1 par u_2, puis on recommence, etc...

À LIRE

Exemple : Représentation des trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$.



Il est cependant plus facile de représenter graphiquement une suite dont on connait le terme général. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite :

À RETENIR

Pour représenter $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un graphique :

1. On place le point de coordonnées $(0; v_0)$.
2. On place le point de coordonnées $(1; v_1)$.
3. On place le point de coordonnées $(2; v_2)$. Etc...

À LIRE

Exemple : Représentation des trois premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2^n$.