Chapitre IX – Géométrie dans l'espace

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Vecteurs de l'espace

1. Caractérisation

Comme dans le plan, un vecteur de l'espace est caractérisé par **une norme** (sa "longueur"), **un sens** et **une direction**.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et k un réel quelconque.

À RETENIR 💡

Les opération $\vec{u} + \vec{v}$ et $k \times \vec{u}$ sont définies comme dans le plan.

La **relation de Chasles** est également disponible dans l'espace.

2. Coplanarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace et $\vec{w}$ un autre vecteur de l'espace. Ces vecteurs sont dits **coplanaires** s'il existe des représentants de ces trois vecteurs dans un même plan.

À RETENIR 💡

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels a et b tels que :
$\vec{w} = a \times \vec{u} + b \times \vec{v}$

Dans l'espace, **deux** vecteurs sont **toujours coplanaires**.

3. Repérage dans l'espace

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et O un point de l'espace. On se placera dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.

À RETENIR

Tout point M peut alors être identifié dans ce repère par un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :
$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Les coordonnées de M dans ce repère sont alors $(x; y; z)$:
x est **l'abscisse**, y est **l'ordonnée** et z est **la côte** de M.

À RETENIR

- Le repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux les uns par rapport aux autres.
- Le repère est dit **normé** si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont la même norme.
- Le repère est dit **orthonormé** si les deux conditions précédentes sont réunies.

II - Produit scalaire dans l'espace

1. Caractérisation

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points de l'espace. Il existe un plan qui contient les points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est alors égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans ce plan.
Toutes les propriétés du produit scalaire du plan sont par conséquent également applicables dans l'espace.

2. Calcul du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. On a la formule suivante :

À RETENIR

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

En notant θ l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a également :

À RETENIR

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\theta)$$

Soient A, B et C trois points distincts de l'espace. On se place dans le plan défini par ces points. On pose P le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :

À RETENIR

- Si $P \in [AB)$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AP$
- Si $P \notin [AB)$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AP$

Si on ne possède que les normes de nos vecteurs, il est possible d'utiliser la formule de polarisation. Ainsi, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace :

À RETENIR

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u+v}||^2 + ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2)$$

À LIRE

Il faut vraiment trouver la formule à utiliser selon l'énoncé de l'exercice.

Par exemple, si on se trouve dans un repère et que l'on a les coordonnées des vecteurs, on pourra utiliser la formule de analytique (la première formule donnée). À l'inverse, si on ne possède pas de coordonnées de nos vecteurs mais que l'on possède leur normes, il est possible d'utiliser la formule de polarisation.

Voici un tableau récapitulatif pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs de l'espace :

Paramètres	**Formule**	**À utiliser si on possède...**
$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + z_1 \times z_2$ (Calcul à partir des coordonnées.)	Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
θ est l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\|\vec{u}\|\| \times \|\|\vec{v}\|\| \times \cos(\theta)$ (Calcul à partir des normes et d'un angle.)	La norme de $\vec{u}$, la norme de $\vec{v}$ et l'angle entre les deux vecteurs.
On note A et B les deux extrémités de $\vec{u}$ (idem pour A et C avec $\vec{v}$), P est le projeté orthogonal de C sur (AB).	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AP$; $+$ si $P \in [AB]$ et $-$ sinon. (Calcul à partir d'une projection orthogonale.)	3 points distincts.
	$\dfrac{\|\|\overrightarrow{u+v}\|\|^2 + \|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2}{2}$ (Calcul à partir des normes.)	On possède la norme de $\vec{u}$, celle de $\vec{v}$ mais surtout celle de $\vec{u} + \vec{v}$.

III - Droites de l'espace

1. Définition

Une droite passant par deux points A et B différents peut être définie par ces points. Ainsi la droite contenant les points A et B peut se nommer la droite (AB).

2. Caractérisation

Plusieurs manières existent pour caractériser une droite de l'espace. Ainsi, soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par un point $A = (x_A; y_A; z_A)$ et qui suit un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (on dit que $\overrightarrow{u}$ est **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$).
On peut caractériser $\mathcal{D}$ de deux manières :

À RETENIR

- **Caractérisation vectorielle :** $M = (x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- **Caractérisation par système d'équations paramétriques :** $\mathcal{D} = \begin{cases} x_A + ka \\ y_A + kb \\ z_A + kc \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

À LIRE

Comment déterminer une représentation paramétrique d'une droite ?

Deux cas : soit on a directement un point de la droite ainsi qu'un vecteur directeur de cette droite. Dans ce cas, il faut appliquer la formule donnée précédemment.

Soit on nous donne deux points de la droite, disons A et B. Ce qui signifie que la droite est de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et passe par le point A. Encore une fois on utilise la formule donnée précédemment une fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$ calculé.

3. Intersection de deux droites

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites. On a les relations suivantes :

À RETENIR

- Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires, leur intersection **est vide**.
- Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires et parallèles, leur intersection **est vide**.
- Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires et confondues, leur intersection **est la droite** $\mathcal{D}_1$.
- Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires et non parallèles, leur intersection **est un point**.

4. Orthogonalité de deux droites

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites :

À RETENIR

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **orthogonales** s'il existe une parallèle à $\mathcal{D}_1$ qui est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$.

À LIRE

Ainsi, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales si un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ (i.e. leur produit scalaire vaut 0).

IV - Plans de l'espace

1. Définition

Soient trois points A, B et C non alignés (les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires). Alors ces points forment un plan qui peut se nommer (ABC).

2. Caractérisation

Plusieurs manières existent pour caractériser un plan de l'espace. Ainsi, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ le plan contenant le point A et défini par les vecteurs u et v. On se donne un vecteur de l'espace $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$ normal au plan $\mathcal{P}$.
On peut caractériser $\mathcal{P}$ de deux manières :

À RETENIR

- **Caractérisation vectorielle :** $M = (x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- **Caractérisation par une équation cartésienne :** $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

À LIRE

Comment déterminer une équation cartésienne d'un plan ?

Deux cas : soit on a directement un point du plan ainsi qu'un vecteur normal à ce plan. Dans ce cas, on remplace a, b et c par les coordonnées de ce vecteur normal. Il reste à trouver d et pour cela on remplace x, y et z par les coordonnées du point donné.

Soit on a un point du plan et on précise que le plan doit être perpendiculaire à une droite dont la représentation paramétrique est donnée. Dans ce cas le vecteur normal au plan sera un vecteur directeur de cette droite et il faudra encore une fois appliquer la formule donnée précédemment.

3. Intersections

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace :

À RETENIR

- Si $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{D}$, leur intersection **est la droite** $\mathcal{D}$.
- Si $\mathcal{P}$ ne contient pas $\mathcal{D}$ et que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles, leur intersection **est vide**.
- Si $\mathcal{P}$ ne contient pas $\mathcal{D}$ et que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles, leur intersection **est un point**.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace :

À RETENIR

- Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus, leur intersection **est le plan** $\mathcal{P}_1$.
- Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles mais pas confondus, leur intersection **est vide**.
- Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont ni parallèles ni confondus, leur intersection **est une droite**.

Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ trois plans de l'espace :

À RETENIR

Leur intersection peut être soit **vide**, soit être **une droite**, soit être **un point**.

4. Orthogonalités

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace :

À RETENIR

$\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}$ est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

À LIRE

Plusieurs propriétés découlent de ceci :

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont alors parallèles.
- Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de montrer que cette droite est orthogonale à deux droites de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont alors parallèles entre elles.

5. Plan médiateur

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, A et B deux points de l'espace :

À RETENIR

$\mathcal{P}$ est dit **plan médiateur** si $\mathcal{P}$ est orthogonal au segment $[AB]$ et passe par le milieu de ce segment.