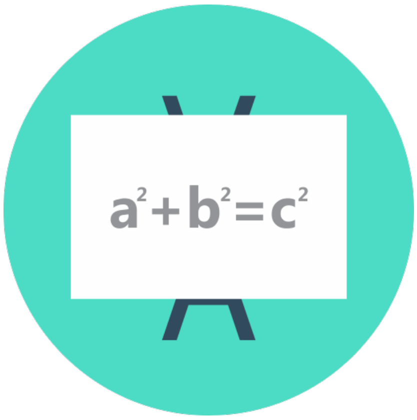


Chapitre VIII – Les nombres complexes

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. Qu'est-ce que l'ensemble $\mathbb{C}$?

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi qu'un nombre $i \in \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante :

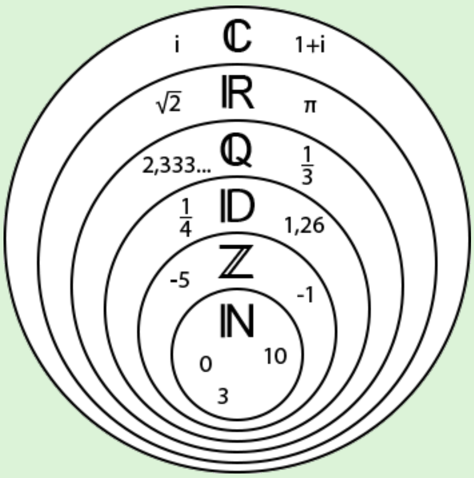
À RETENIR

$i^2 = -1$

Cet ensemble est appelé **ensemble des nombres complexes** et obéit aux mêmes règles de calcul que l'ensemble $\mathbb{R}$.

À LIRE

Il peut être dur de se représenter l'ensemble des nombres complexes, voici un schéma représentant les ensembles de nombres déjà connus :



Comme on peut le voir ici, l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ mais également des nombres qui ne sont pas réels (i, $1+i$, etc...).

2. Qu'est-ce qu'un nombre complexe ?

Soient x et y deux réels. Le **nombre complexe** z correspondant peut s'écrire sous cette forme :

À RETENIR

$z = x + iy$

Cette écriture est appelée **forme algébrique**. On note $x = \text{Re}(z)$ (la **partie réelle** de z) et $y = \text{Im}(z)$ (la **partie imaginaire** de z).

Le nombre z est dit **réel** si $y = 0$ et il est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

3. Égalité entre nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z'. Ces deux nombres sont dits **égaux** si et seulement si :

À RETENIR

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$

La partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres doivent toutes deux être égales.

À LIRE

Attention ! Il n'y pas de relation d'ordre dans l'ensemble $\mathbb{C}$. On ne pourra donc pas avoir de relation du type "$z \leq z'$".

II - Propriétés

1. Conjugué

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre complexe **conjugué** noté $\bar{z}$. Ce conjugué est le nombre complexe suivant :

À RETENIR

$\bar{z} = x - iy$

Plusieurs propriétés peuvent se dégager à l'aide des conjugués. Soient z et z' deux nombres complexes :

À RETENIR

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$
- $\bar{z^n} = (\bar{z})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

À RETENIR

- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i \times \mathrm{Im}(z)$

2. Module d'un nombre complexe

On appelle **module** (noté $|z|$) d'un nombre complexe $z = x + iy$ le réel :

À RETENIR

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Et on a les relations suivantes pour $z, z' \in \mathbb{C}$:

À RETENIR

— $z\bar{z} = |z|^2$

— $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

— $|zz'| = |z| \times |z'|$

— $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

— $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

À LIRE

Ces propriétés peuvent sembler compliquées mais heureusement il est possible de les retrouver par le calcul. Par exemple, pour la première propriété du second encadré :

On pose $z = x + iy$, on a $\bar{z} = x - iy$:

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = |z|^2$.

3. Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous trois formes la **forme algébrique**, la **forme trigonométrique** et la **forme exponentielle**. Pour obtenir la forme trigonométrique du nombre complexe, il faut tout d'abord obtenir son module. La forme trigonométrique est ensuite donnée par la formule suivante :

À RETENIR

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Avec θ **l'argument** de z (noté $\arg(z)$) qui doit vérifier les deux conditions suivantes :

À RETENIR

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

Une fois la forme trigonométrique obtenue, on peut passer à la forme exponentielle, qui est :

À RETENIR

$$z = |z|e^{i\theta}$$

À LIRE

Exemple : On veut passer le nombre complexe $z = 1 + i$ sous forme exponentielle.

1$^{\text{ère}}$ étape : On calcule le module : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2$^{\text{nde}}$ étape : On factorise par le module : $z = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3$^{\text{ème}}$ étape : On calcule un argument : $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ (car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

4$^{\text{ème}}$ étape : On passe à la forme exponentielle : $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On peut étendre l'égalité entre nombres complexes donnée au début : deux nombres complexes sont égaux s'ils ont le **même module** et le **même argument (modulo 2π)**.

4. Affixe et représentation

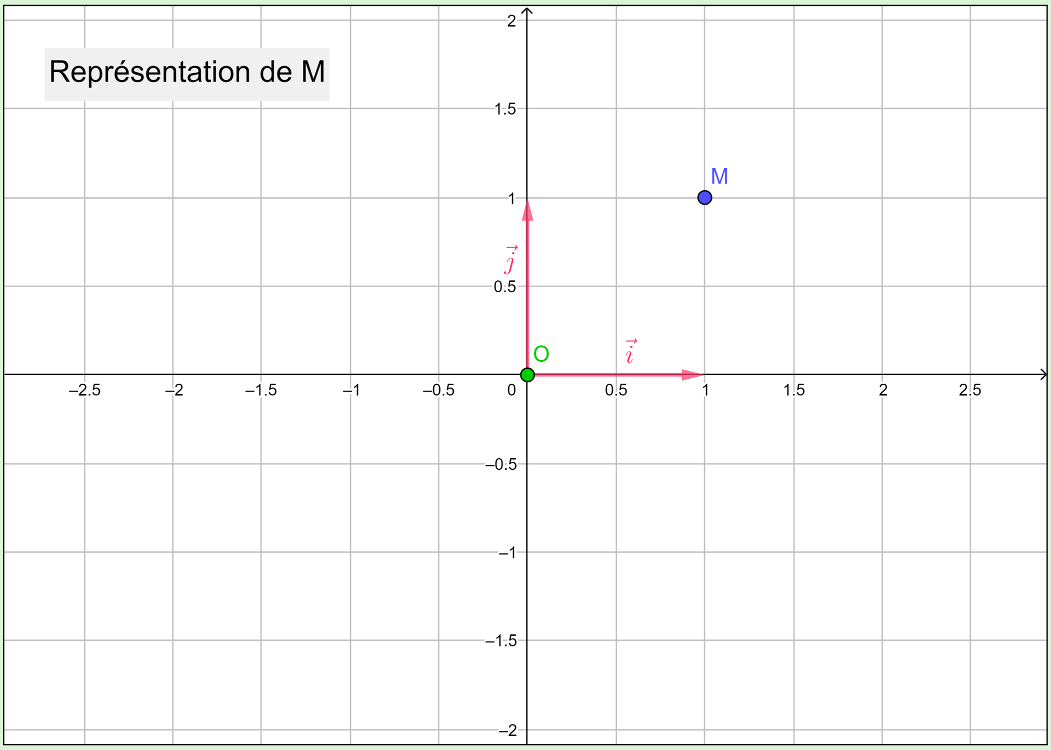
Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan par un point M de coordonnées $(x; y)$. z est alors appelé **affixe** du point M (et réciproquement le point M est **l'image** de z).

Un nombre complexe $z' = |z'| \times e^{\theta}$ peut être représenté dans le plan par un point M' situé sur le cercle d'origine $O = (0; 0)$ et de rayon $|z'|$. Le point M' est alors situé à l'angle θ sur ce cercle.
Le module est donc une **distance** et l'argument est un **angle**.

À LIRE 👀

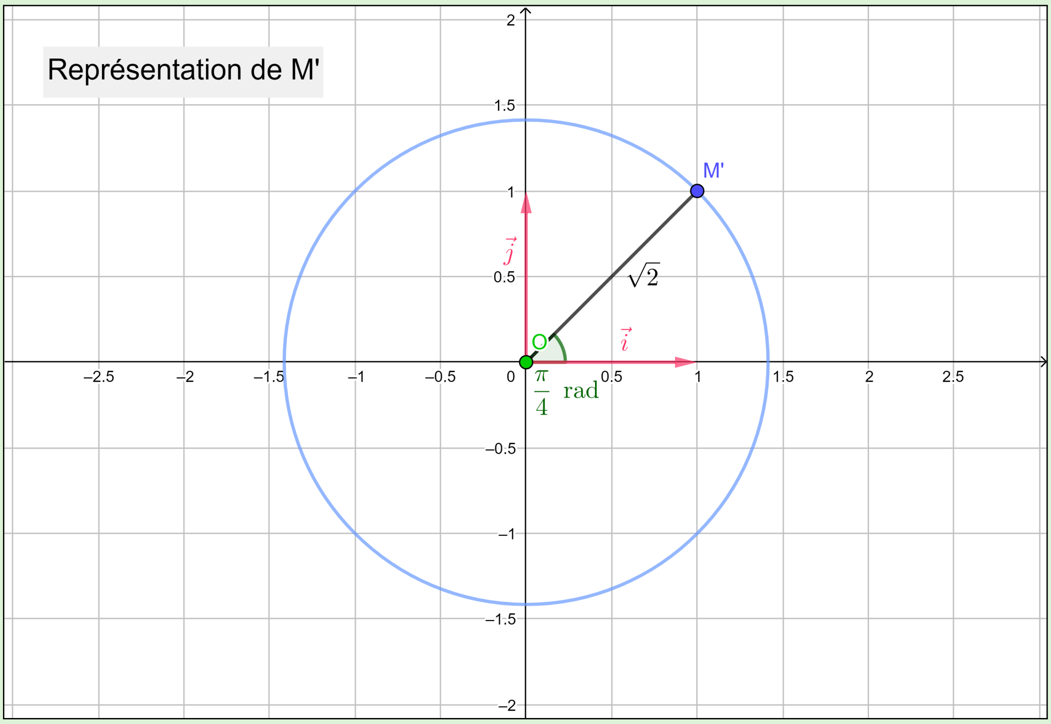
Dans tout ce qui suit, le plan sera muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exemple 1 : On souhaite représenter le point M d'affixe $z = 1 + i$ dans le plan. On a les coordonnées de M qui sont $x = 1$ et $y = 1$:



À LIRE

Exemple 2 : On souhaite représenter le point M' d'affixe $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ dans le plan. On a le module de z' : $|z'| = \sqrt{2}$, et un argument de z' : $\theta = \frac{\pi}{4}$. On va donc tracer le cercle de rayon $\sqrt{2}$ ainsi qu'une droite faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec l'axe des abscisses et leur intersection sera le point M' :



On voit à l'aide de ces deux représentation que $z = z'$ (démontré dans l'exemple de la partie précédente).

III - Calculs particuliers

1. Résolution d'équations du second degré

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit la fonction du second degré P par $P(z) = az^2 + bz + c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$). On souhaite résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et les solutions dépendent du signe de delta :

À RETENIR

Si $\Delta > 0$, il existe deux solution réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, il existe une solution réelle :

$$z = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta} i}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta} i}{2a} = \bar{z_1}$$

À LIRE

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $-2z^2 + 4z = 10$ dans $\mathbb{C}$.

1ère étape : On fait apparaître une équation du second degré : $-2z^2 + 4z - 10 = 0$.

2nde étape : On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 80 = -64$.

3ème étape : On "transforme" le discriminant négatif : $\Delta = 64i^2 = (8i)^2$.

4ème étape : On trouve les solutions :

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4-8i}{2\times -2} = 1 + 2i$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4+8i}{2\times -2} = 1 - 2i$

2. Géométrie avec les nombres complexes

Il est possible de réaliser de la géométrie avec les nombres complexes. Ainsi, soient A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

À RETENIR

La longueur AB **est :** $|z_B - z_A|$.

Le milieu du segment $[AB]$ **est :** le point M d'affixe $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

L'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{AB})$ **est :** $\arg(z_B - z_A)$ (modulo 2π).

L'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ **est :** $\arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$ (modulo 2π).

3. Complément : formules trigonométriques

Il est possible de retrouver les formules trigonométriques vues en Première à l'aide des nombres de complexes. La démonstration suivante n'est pas requise mais peut être utile pour retrouver ces formules.

À RETENIR

On part de $e^{i\times(a+b)}$:

$e^{i\times(a+b)} = e^{i\times a} \times e^{i\times b}$ (opérations sur les exposants)

$\iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b))$ (on passe à la forme trigonométrique)

$\iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\cos(b)\sin(a) - \sin(a)\sin(b)$ (on développe)

$\iff \cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a))$ (on travaille un peu l'expression)

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres sont égales, cela donne :

— $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

— $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Les formules vues en Première ont donc bien été retrouvées.