



Chapitre II - Continuité et dérivabilité

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

I - Continuité	1
1. Définition	1
2. Théorème des valeurs intermédiaires	1
3. La partie entière $[x]$	2
II - Dérivation	3
1. Définition	3
2. La tangente	3
3. Fonction dérivée	3
4. Applications	4
III - Tables de dérivation	5
1. Dérivées usuelles	5
2. Opérations sur les dérivées	5
3. Dérivées de composées	6

I - Continuité

1. Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. La fonction f est continue en a si on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f est dite continue sur I , si on peut appliquer la formule ci-dessus à tous les réels de l'intervalle I .

On dit de manière générale qu'une fonction est continue sur un intervalle s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur cet intervalle "sans lever le crayon".

- Toute somme, produit, composée ou quotient (avec le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues est également continue sur le même intervalle.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (la réciproque n'est pas vraie cependant).

Exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition (\mathbb{R}^*) mais n'est pas continue sur \mathbb{R} .

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction, a et b deux réels tels que $a < b$. Voici l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f et à a et b :

Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel y_0 si on a $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **au moins** un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Ce théorème est **très important** !

Voici un exemple : prenons $f(x) = x^3 + x^2 - x$ et prouvons qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x_0) = 5$. On a $f(0) = 0$ et $f(3) = 33$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[0; 3]$ et que $0 < 5 < 33$, il existe un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x_0) = 5$.

On peut encore tenter d'affiner la précision : $f(1) = 1$ et $f(2) = 10$. On a bien $1 < 5 < 10$ donc $x_0 \in [1; 2]$, etc...

Une conséquence de ce théorème est que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors la fonction f s'annule au moins une fois entre a et b .

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : Si f est continue sur $[a; b]$ et que f est **strictement monotone** sur cet intervalle, alors pour tout réel y_0 si on a $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **un unique** réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

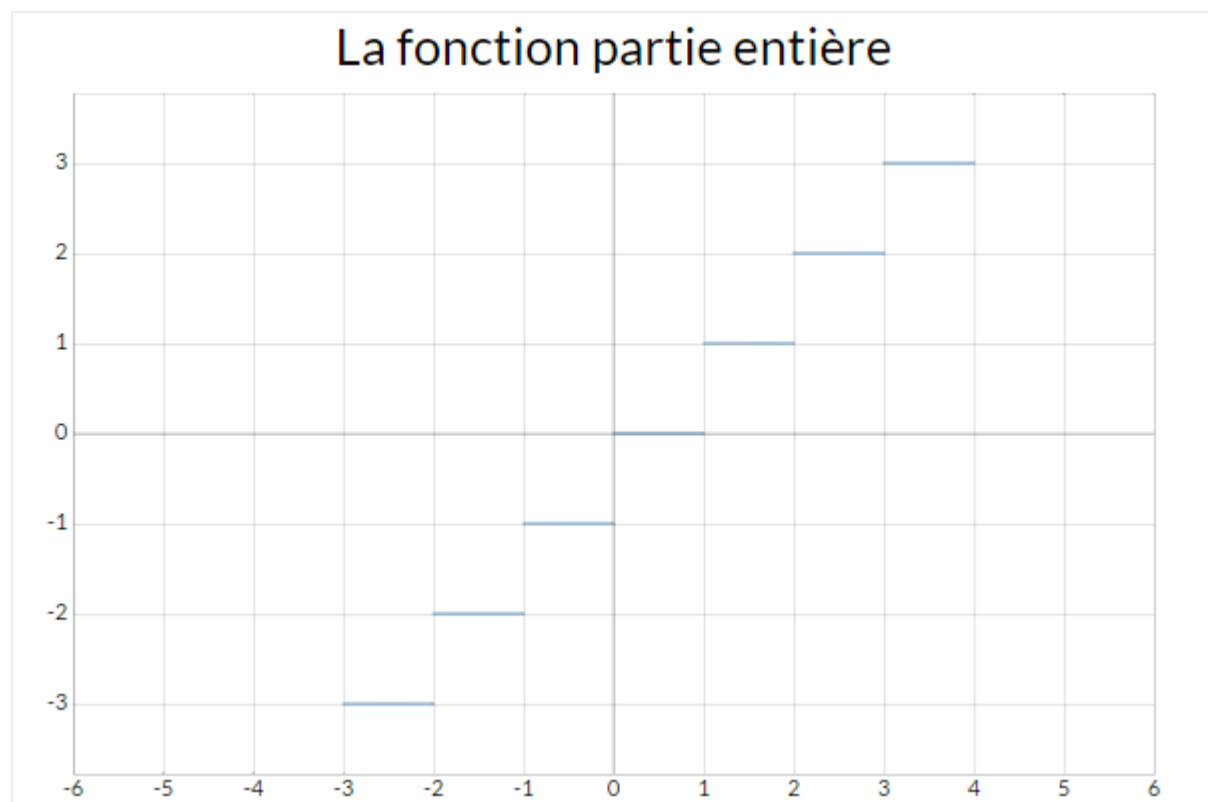
3. La partie entière $[x]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x notée $[x]$ (ou $E(x)$) est l'unique réel tel que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Exemple : $[1, 216] = 1$ et $[-2, 198] = -3$.

La fonction partie entière définie par $x \mapsto [x]$ **n'est pas continue** :



II - Dérivation

1. Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$.

La fonction f est dérivable en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$.

2. La tangente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet une tangente \mathcal{T} au point de coordonnées $(a; f(a))$. $f'(a)$ est le coefficient directeur de \mathcal{T} , et une équation de \mathcal{T} est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit $f(x) = e^x$ (voir cours sur la fonction exponentielle).

Cherchons une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$: On a $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (voir paragraphe sur les limites de la fonction exponentielle).

Ainsi, $f'(0) = 1$. Une équation de la tangente est donc $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$: on retrouve ce qui a été constaté sur la représentation graphique de la fonction exponentielle.

3. Fonction dérivée

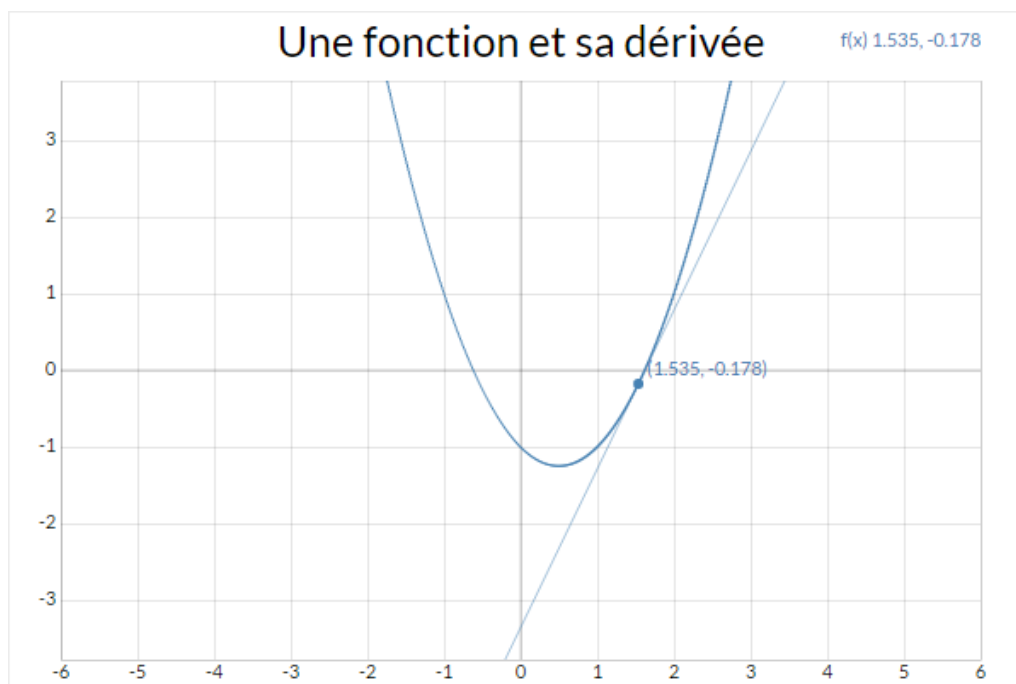
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

On appelle **fonction dérivée** de f sur I la fonction qui à tout réel $x \in I$ y associe $f'(x)$.

4. Applications

Plusieurs applications peuvent être trouvées aux dérivées. Ainsi, avec le signe de la dérivée, il est possible d'obtenir le sens de variation de la fonction. Pour une fonction f dérivable sur I et de dérivée f' :

- Si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .



Il est également possible d'en déduire diverses propriétés sur les extremums dits "locaux" (sur un certain intervalle) d'une fonction. Soient f dérivable sur I de dérivée f' , et $a \in I$:

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$ et le signe de f' est différent avant et après a et la réciproque :
si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a , alors $f'(a)$ est un extremum local de f .
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

III - Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
λ	0	\mathbb{R}	\mathbb{R}
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}^+	\mathbb{R}_*^+
e^x	e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_*^+	\mathbb{R}_*^+
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions u et v :

Fonction	Dérivée
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'x^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$\cos(u)$	$u' - \sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

De manière générale, soient f dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$. On a alors :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$