



## Chapitre XIV – Arithmétique (Maths expertes)

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Divisibilité et congruence</b>	<b>1</b>
1. Divisibilité . . . . .	1
2. Division euclidienne . . . . .	1
3. Congruences dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	2
<b>II - PGCD et théorème de Bézout</b>	<b>4</b>
1. Plus Grand Commun Diviseur . . . . .	4
2. Théorème de Bézout . . . . .	5
3. Lemme de Gauss . . . . .	6
4. Équations diophantiennes . . . . .	6
<b>III - Nombres premiers</b>	<b>8</b>
1. Définition . . . . .	8
2. Propriétés . . . . .	8
3. Décomposition de nombres . . . . .	9

## I - Divisibilité et congruence

### 1. Divisibilité

Dans toute la suite de cette section, on notera par  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des nombres entiers relatifs (i.e.  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ) et par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres entiers naturels (i.e.  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ).

#### À RETENIR : DÉFINITION

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs. On dit que  $b$  **divise**  $a$  (ou que  $a$  est **un multiple** de  $b$ ) s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = kb$ . On note ceci par  $b \mid a$ .

#### À LIRE

Si on a  $b$  divise  $a$ , alors  $-b$  divise  $a$ . Par exemple, comme 6 divise 12, alors  $-6$  divise également 12.

#### À RETENIR : PROPRIÉTÉS

- Tout entier relatif  $b$  divise 0 (car  $0 = 0 \times b$ ).
- 1 divise tout entier relatif  $a$  (car  $a = a \times 1$ ).
- Si  $c \mid a$  et  $c \mid b$  alors  $c \mid (au + bv)$  pour tout  $u, v \in \mathbb{Z}$ .

### 2. Division euclidienne

La **division euclidienne** est une notion mathématique que l'on aborde très tôt au cours de notre scolarité (dès la classe de CM1). Nous allons tenter de formaliser ceci :

#### À RETENIR : THÉORÈME DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On suppose  $b \neq 0$ . On appelle **division euclidienne** de  $a$  par  $b$ , l'opération qui à  $(a, b)$ , associe le couple d'entiers relatifs  $(q, r)$  tel que  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < |b|$ . Un tel couple **existe** forcément et est **unique**.

#### À RETENIR : VOCABULAIRE

En reprenant les notations du théorème,  $a$  s'appelle le **dividende**,  $b$  le **diviseur**,  $q$  le **quotient** et  $r$  le **reste** de la division euclidienne.

## À LIRE : EXEMPLE ☞

On souhaite effectuer la division euclidienne de 314 par 7. Posons-la :

$$\begin{array}{r|l} 314 & 7 \\ 34 & 44 \\ \hline 6 & \end{array}$$

- On cherche combien de fois 7 est contenu dans 31 (cela ne sert à rien de commencer par 3 car  $3 < 7$ ). On a  $4 \times 7 = 28$  et  $5 \times 7 = 35$  donc on écrit 4 sous le diviseur et le reste  $31 - 28 = 3$ . Puis, on abaisse le chiffre des unités qui est 4.
- On recommence : combien de fois 7 est-il contenu dans 34 ? Comme  $4 \times 7 = 28$  et  $5 \times 7 = 35$ , 7 est contenu 4 fois dans 34 et il reste  $34 - 28 = 6$ .
- Comme  $6 < 7$ , la division euclidienne est terminée : on a  $314 = 7 \times 44 + 6$ .

Donnons enfin une propriété qui nous sera utile dans la section suivante.

## À RETENIR : PROPRIÉTÉ 💡

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \neq 0$ . Deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $n$  si et seulement si  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

3. Congruences dans  $\mathbb{Z}$ 

## À RETENIR : DÉFINITION 💡

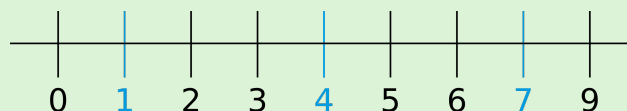
On dit que deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont **congrus modulo  $n$**  (où  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2) si  $a$  et  $b$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $n$ . On note alors  $a \equiv b \pmod{n}$ .

## À LIRE ☞

On remarque que  $a$  est un multiple de  $n$  si et seulement si  $a \equiv 0 \pmod{n}$ .

## À LIRE : EXEMPLE ☞

Par exemple,  $1 \equiv 4 \equiv 7 \pmod{3}$ .



On signale que la congruence est une **relation d'équivalence**.

**À RETENIR : PROPRIÉTÉS**

Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  :

- $a \equiv a \pmod{n}$  (**réflexivité**)
- Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , alors  $b \equiv a \pmod{n}$  (**symétrie**)
- Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , et si  $b \equiv c \pmod{n}$ , alors  $a \equiv c \pmod{n}$  (**transitivité**)

De plus, le congruence est compatible avec les opérations usuelles sur les entiers relatifs.

**À RETENIR : PROPRIÉTÉS**

Soit  $n \geq 2$ . Soient  $a, b, c$  et  $d \in \mathbb{Z}$  tels que  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $c \equiv d \pmod{n}$ . Alors on a la compatibilité avec :

- L'**addition** :  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ .
- La **multiplication** :  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .
- Les **puissances** : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ .

**À LIRE : EXEMPLE**

Comme  $7 \equiv 3 \pmod{4}$ , et  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ , on a  $35 = 5 \times 7 \equiv 1 \times 5 \pmod{4}$ .

## II - PGCD et théorème de Bézout

### 1. Plus Grand Commun Diviseur

#### À RETENIR : DÉFINITION

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  non tous nuls. Le **Plus Grand Commun Diviseur** de  $a$  et  $b$  (noté  $\text{PGCD}(a; b)$ ) est le plus grand entier positif qui les divise simultanément.

Avec cette définition, on peut dégager quelques propriétés.

#### À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  non tous nuls.

- $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a)$
- $\text{PGCD}(a; 1) = 1$
- $\text{PGCD}(a; 0) = a$
- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{PGCD}(ka; kb) = k \text{PGCD}(a; b)$
- Si  $b \mid a$ , alors  $\text{PGCD}(a; b) = |b|$

Il existe une manière de déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  avec  $b < a$  appelée **Algorithme d'Euclide**.

#### À RETENIR : ALGORITHME D'EUCLIDE

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  non tous nuls. Pour obtenir  $\text{PGCD}(a; b)$ , on procède comme suit :

1. On fait la division euclidienne de  $a$  par  $b$  et on appelle  $r$  le reste.
2. Si  $r = 0$ , alors  $\text{PGCD}(a; b) = b$ .
3. Sinon on recommence l'étape 1 en remplaçant  $a$  par  $b$  et  $b$  par  $r$ .

Terminons cette section par une définition.

#### À RETENIR : NOMBRES PREMIERS ENTRE-EUX

On dit que deux nombres sont **premiers entre-eux** si leur PGCD est égal à 1.

#### À LIRE

Petite remarque : si on note  $d$  le PGCD de deux nombres  $a$  et  $b$ , alors on a que  $\frac{a}{d}$  et  $\frac{b}{d}$  sont deux nombres premiers entre-eux.

## 2. Théorème de Bézout

Un résultat fondamental de l'arithmétique est le **théorème de Bachet-Bézout** (que l'on rencontre parfois sous le nom d'**identité de Bézout**).

### À RETENIR : THÉORÈME DE BACHET-BÉZOUT

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. On note  $d$  leur PGCD. Alors il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $ua + vb = d$ .

### À RETENIR : THÉORÈME DE BÉZOUT

Une conséquence de ce théorème est que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $ua + vb = 1$ .

### À LIRE : EXEMPLE

Calculons  $\text{PGCD}(250; 150)$  et déduisons-en deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $50 = 250u + 150v$ . Commençons par calculer le PGCD de 250 et 150 par l'algorithme d'Euclide :

La division euclidienne de 250 par 150 donne  $250 = 150 \times 1 + 100$ .

La division euclidienne de 150 par 100 donne  $150 = 100 \times 1 + 50$ .

La division euclidienne de 100 par 50 donne  $100 = 50 \times 2 + 0$ .

On a  $\text{PGCD}(250; 150) = 50$ . Déterminons  $u$  et  $v$  :

$$250 = 150 \times 1 + 100 \iff 150 = 1 \times 250 - 1 \times 100$$

$$150 = 1 \times 100 + 50 \iff 50 = 150 - 1 \times 100$$

$$\text{Donc } 50 = 1 \times 250 - 1 \times 100 - 1 \times 100 = 1 \times 250 - 2 \times 100.$$

On a par conséquent  $u = 1$  et  $v = -2$ . L'algorithme que l'on vient d'utiliser pour trouver  $u$  et  $v$  s'appelle l'**algorithme d'Euclide étendu**.

### À RETENIR : RÉOLUTION D'UNE CONGRUENCE SIMPLE

Supposons que l'on souhaite résoudre une congruence du type  $ax \equiv b \pmod{n}$  d'inconnue  $x$ . On pose  $d = \text{PGCD}(a; n)$ . Alors :

1. Si  $d$  ne divise pas  $b$ , on cherche deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $au + nv = 1$  (avec l'algorithme d'Euclide étendu par exemple). Les solutions de la congruence sont alors les entiers  $x$  vérifiant  $x \equiv ub \pmod{n}$ .
2. Si  $d \mid b$ , cela revient à résoudre la congruence  $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$ , et on se ramène au cas 1 (avec la nouvelle congruence à résoudre).

## À LIRE : EXEMPLE

On souhaite résoudre la congruence  $6x \equiv 6 \pmod{9}$ . Alors, comme  $d = \text{PGCD}(6; 9) = 3$ , on a  $d \mid 6$ . On se ramène donc à résoudre  $2x \equiv 2 \pmod{3}$  (où 2 et 3 sont premiers entre-eux).

On écrit l'identité de Bézout appliquée à 2 et 3 :  $2 \times 2 + 3 \times -1 = 1$ . Donc les solutions à la congruence du début sont les entiers  $x$  vérifiant  $x \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$  (i.e. les  $x$  de la forme  $x = 3k + 1$  où  $k \in \mathbb{Z}$ ).

## 3. Lemme de Gauss

## À RETENIR : LEMME DE GAUSS

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers non nuls. Si  $c \mid ab$  et  $c$  est premier avec  $a$ , alors  $c \mid b$ .

## À RETENIR : COROLLAIRE

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers non nuls. Si  $b \mid a$ ,  $c \mid a$  et que  $b$  et  $c$  sont premiers entre-eux, alors  $bc \mid a$ .

## 4. Équations diophantiennes

## À RETENIR : DÉFINITION

Une **équation diophantienne linéaire en deux variables**  $x$  et  $y$  est une équation de la forme  $(E) : ax + by = c$  où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des entiers relatifs et où les solutions sont également des entiers relatifs.

À RETENIR : SOLUTIONS DE  $(E)$ 

En reprenant les notations précédentes, on pose  $d = \text{PGCD}(a; b)$ . Alors :

- Si  $d \mid c$ , on cherche une solution particulière à  $(E)$  que l'on note  $(x_0; y_0)$ . Alors les solutions de  $(E)$  sont les couples  $(x_k; y_k)$  où  $x_k = x_0 + k \frac{b}{d}$  et  $y_k = y_0 - k \frac{a}{d}$ .
- Sinon,  $(E)$  n'a pas de solution.

## À LIRE : EXEMPLE 93

On cherche à résoudre l'équation diophantienne  $(E) : 25x + 10y = 15$ . Commençons par chercher une solution particulière  $(x_0; y_0)$ .

Comme  $d = \text{PGCD}(25; 10) = 5$ , on a  $d \mid 15$ . En divisant les deux côtés de l'égalité par 5, on a  $(E) \iff 5x + 2y = 3$ .

Cherchons une solution particulière à  $(E)$ . On écrit l'identité de Bézout appliquée à 5 et 2 :  $5 \times 1 + 2 \times -2 = 1$ . Ainsi, en multipliant les deux côtés de l'égalité par 3, on obtient :  $5 \times 3 + 2 \times -6 = 3$ .

On a trouvé une solution particulière à  $(E)$  qui est le couple  $(x_0; y_0)$  où  $x_0 = 3$  et  $y_0 = -6$ . On pourrait appliquer la formule pour donner la forme générale des solutions de  $(E)$ , mais essayons de ne pas l'utiliser.

Soit  $(x; y)$  une autre solution de  $(E)$ . On a  $3 = 5x + 2y = 5x_0 + 2y_0$ . D'où  $5(x - x_0) = 2(y_0 - y)$  (en passant les  $x$  et  $x_0$  du même côté de l'égalité et en faisant de même pour  $y$  et  $y_0$ , puis en factorisant).

Ainsi, on a que  $5 \mid 2(y_0 - y)$ . Or, 5 et 2 sont premiers entre-eux, donc par le lemme de Gauss,  $5 \mid y_0 - y$ . Il existe donc  $q_1$  tel que  $5q_1 = y_0 - y$ , d'où  $y = y_0 - 5q_1$ .

De même,  $2 \mid 5(x - x_0)$  avec 2 et 5 premiers entre-eux, donc par le lemme de Gauss,  $2 \mid x - x_0$ . Il existe donc  $q_2$  tel que  $2q_2 = x - x_0$ , d'où  $x = x_0 + 2q_2$ .

En réinjectant tout ça dans  $(E)$ , on obtient  $5(x_0 + 2q_2) + 2(y_0 - 5q_1) = 3 \iff \underbrace{5x_0 + 2y_0}_{=3} + 10q_2 - 10q_1 = 3 \iff q_1 = q_2$ .

Les solutions de  $(E)$  sont donc les couples  $(x_k; y_k)$  où  $x_k = x_0 + 2k$  et  $y_k = y_0 - 5k$  (et on a bien les mêmes résultats qu'avec la formule).



### III - Nombres premiers

#### 1. Définition

Commençons cette section par définir ce qu'est un **nombre premier**. Il s'agit là d'une notion dont on entend parler très tôt au cours de notre scolarité, sans pour autant vraiment rentrer dans le sujet. Détaillons donc un peu tout ceci.

##### À RETENIR : NOMBRE PREMIER

Un nombre entier  $p \geq 2$  est dit **premier** si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même.

##### À LIRE : EXEMPLE

2, 3, 5, 7, 11 et 13 sont des nombres premiers.

#### 2. Propriétés

Voici quelques propriétés basiques que possèdent les nombres premiers.

##### À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supérieur ou égal à 2, alors on a les propriétés suivantes :

- Si  $n$  n'admet aucun diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ , alors  $n$  est premier.
- Si  $n$  n'est pas premier alors  $n$  admet au moins un diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ .
- Si  $n$  est premier et  $n$  ne divise pas un entier  $m$ , alors  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux.

##### À RETENIR : LEMME D'EUCLIDE

Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  et  $b$  deux entiers. Si  $p \mid ab$  alors  $p \mid a$  ou  $p \mid b$ .

On donne enfin un résultat fondamental (mais qui reste très simple) sur l'ensemble des nombres premiers.

##### À RETENIR : INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS

Il existe une infinité de nombres premiers.

## DÉMONSTRATION : INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS

Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers soit un ensemble fini. On note par  $P$  cet ensemble et par  $r$  son cardinal. On a donc  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  où  $p_1, p_2, \dots, p_r$  sont premiers.

Soit  $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_r + 1$ . Alors,  $N \notin P$  donc  $N$  n'est pas premier (et est strictement supérieur à 1). Il existe donc un nombre premier qui divise  $N$ .

En d'autres mots, il existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $p_i \mid N$ . De plus,  $p_i \mid p_1 \times p_2 \times \dots \times p_r$ .

Donc  $p_i \mid N - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_r \iff p_i \mid 1$ , donc  $p_i = 1$  ou  $p_i = 0$  : c'est absurde car  $p_i \geq 2$ .

Pour la petite histoire, c'est Euclide qui a fourni une première version de cette preuve en 300 av. J.-C !

## À RETENIR : PETIT THÉORÈME DE FERMAT

Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$ . Alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

## À LIRE

Cela revient au même de dire que si  $a$  est un entier quelconque et que  $p$  est un nombre premier, alors  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

## 3. Décomposition de nombres

Passons maintenant à un résultat fondamental de l'arithmétique : le principe de **décomposition en produit de facteurs premiers** (il s'agit même là d'un théorème qui est sobrement intitulé **théorème fondamental de l'arithmétique**).

## À RETENIR : THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supérieur ou égal à 2, alors  $n$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$$

où  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des nombres premiers tels que  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des entiers naturels non nuls.

## À LIRE : EXEMPLE 93

Décomposons 200 en produit de facteurs premiers.

- $200 = 2 \times 100$  (2 est le plus petit nombre premier qui divise 200).
- $100 = 2 \times 50$  (2 est le plus petit nombre premier qui divise 100).
- $50 = 2 \times 25$  (2 est le plus petit nombre premier qui divise 50).
- $25 = 5 \times 5$  (5 est le plus petit nombre premier qui divise 25).
- $5 = 5 \times 1$  (5 est un nombre premier, c'est terminé).

On a donc  $200 = 2 \times 100 = 2 \times (2 \times 50) = \dots = 2^3 \times 5^2$ .