



Chapitre V - La fonction logarithme népérien

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

Table des matières

I - Propriétés du logarithme népérien	1
1. Définition	1
2. Relations algébriques	2
3. Représentation graphique	2
II - Étude de la fonction	4
1. Limites	4
2. Dérivée	5
3. Variations	5
III - Le logarithme décimal	6

I - Propriétés du logarithme népérien

1. Définition

Le logarithme népérien est une fonction qui est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto \ln(x)$$

Et on a la relation fondamentale suivante pour tout x et y **strictement positifs** :

$$\ln(x) = y \iff x = e^y$$

Ainsi, à tout réel **strictement positif** x , la fonction logarithme népérien y associe **son unique antécédent** y par rapport à la fonction exponentielle.

De même pour la fonction exponentielle. On dit que ces fonctions sont des **fonctions réciproques** (à la manière de $\sin(x)$ et $\arcsin(x)$ ou $\cos(x)$ et $\arccos(x)$).

Cette relation peut sembler compliquer à assimiler mais il n'en est rien ! Prenons $x = 0$, on a :

$e^0 = 1$ (tout réel mis à la puissance zéro vaut un), la relation précédente nous donne $\ln(1) = 0$.

Si on prend maintenant $x = 1$, on a :

$e^1 = e$, on a donc $\ln(e) = 1$.

Les relations suivantes sont par conséquent disponibles :

Pour tout réel x **strictement positif**, on a :

$$e^{\ln(x)} = x$$

Et pour tout réel x , on a :

$$\ln(e^x) = x$$

2. Relations algébriques

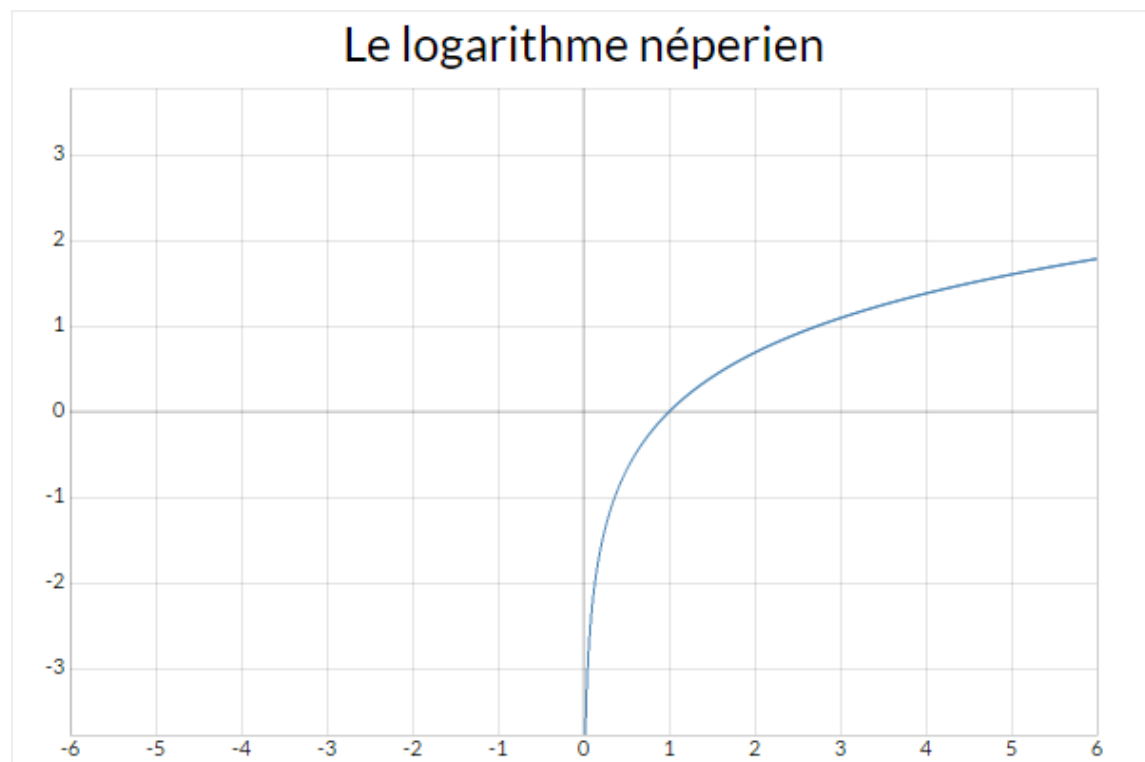
Le logarithme népérien a plusieurs propriétés intéressantes qu'il faut connaître. Ainsi, pour tout a et b **strictement positifs** :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ pour $n \in \mathbb{Z}$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(\sqrt[p]{a}) = \frac{1}{p} \times \ln(a)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

Certaines des ces propriétés peuvent se déduire les unes des autres.

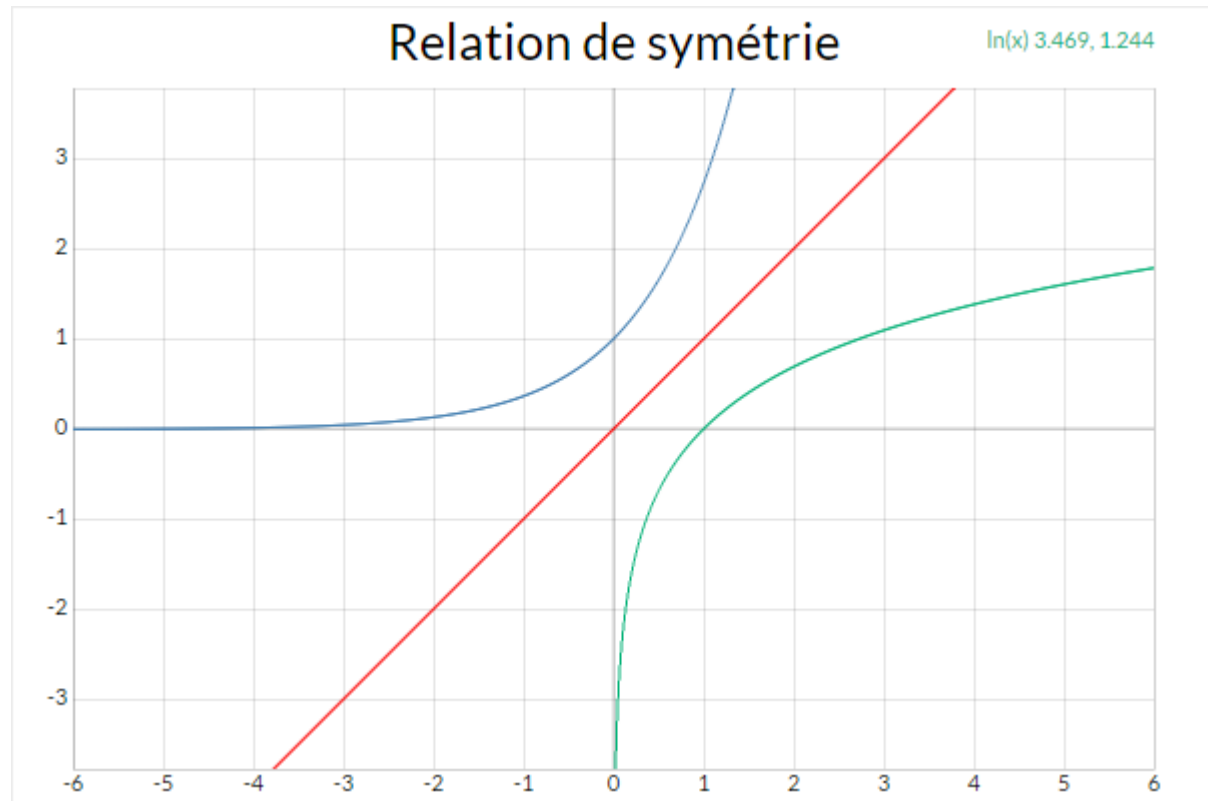
3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



On voit sur ce graphique plusieurs propriétés données précédemment : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ par exemple.

On trace maintenant le graphe de la fonction logarithme népérien, avec celui de la fonction exponentielle. On trace également la droite d'équation $y = x$:



On remarque plusieurs choses : le graphe de la fonction logarithme népérien est le symétrique de celui de la fonction exponentielle par rapport à la droite $y = x$ et on voit que la fonction logarithme népérien croît moins vite que la fonction puissance qui elle-même croît moins vite que la fonction exponentielle. Cette propriété est importante : c'est la **croissance comparée**.

II - Étude de la fonction

1. Limites

Les limites de la fonction logarithme népérien aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\begin{aligned} & \text{— } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ & \text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \end{aligned}$$

Il faut aussi savoir que la fonction puissance "l'emporte" sur le logarithme népérien (voir la partie "Représentation graphique") :

$$\begin{aligned} & \text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ & \text{— } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

Une autre limite est à connaître (ainsi que sa démonstration) :

Démonstration de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

La fonction logarithme népérien est définie et continue en $x = 1$, on peut donc écrire :

$$\ln'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$$

Ce qui est équivalent à (car on a $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$) :

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

On pose $y = x - 1$ ce qui nous donne finalement :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

2. Dérivée

Soit une fonction u dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

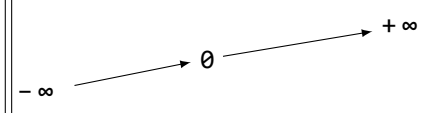
$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ainsi, si on a $u(x) = x$ (avec $x \in]0; +\infty[$) :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

3. Variations

Avec la dérivée trouvée précédemment ainsi que les limites données, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction logarithme népérien :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	
$\ln(x)$		0	$+\infty$

On remarque qu'avec le tableau de variation, il est possible d'obtenir le signe de la fonction (avec le théorème des valeurs intermédiaires).

Ainsi, sur $]0; 1[$, $\ln(x)$ est **strictement négative** et sur $]1; +\infty[$, $\ln(x)$ est **strictement positive** et, comme vu précédemment, $\ln(1) = 0$.

On observe également les variations de la fonction : strictement croissante sur son ensemble de définition.

III - Le logarithme décimal

Le **logarithme décimal** (utilisé en physique-chimie en classe de Terminale S) est défini sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Et on a les propriétés suivantes :

- $\log(10) = 1$
- $\log(10^n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Ces formules peuvent se retrouver très facilement ! En effet, pour la première :

$$\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1.$$

Et pour la seconde :

$$\log(10^n) = \frac{n \times \ln(10)}{\ln(10)} = n \times \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = n.$$