



## Chapitre VII - Les intégrales

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

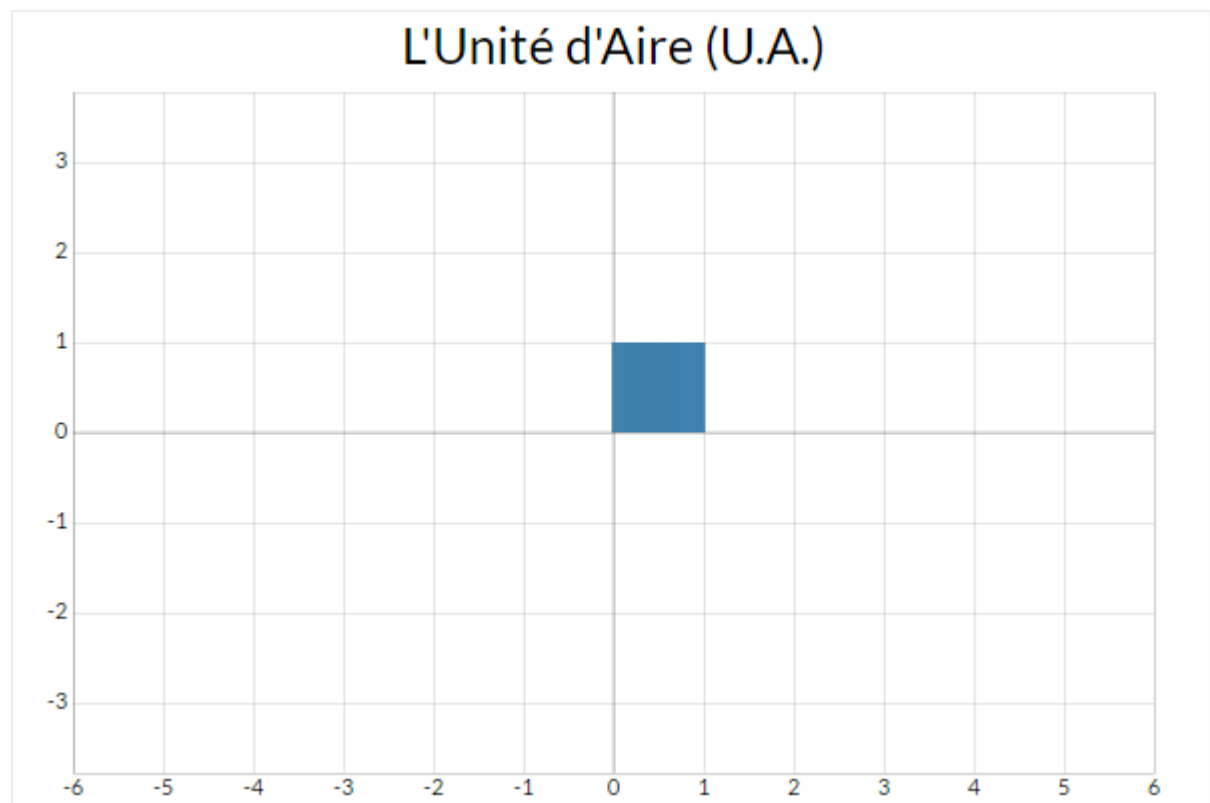
### Table des matières

<b>I - Calcul d'aire</b>	<b>1</b>
1. Qu'est-ce-qu'une intégrale ? . . . . .	1
2. Comment calculer une intégrale ? . . . . .	2
3. Positivité de l'intégrale . . . . .	3
<b>II - Propriétés de l'intégrale</b>	<b>5</b>
1. Propriétés algébriques . . . . .	5
2. Linéarité . . . . .	5
3. Relation de Chasles . . . . .	5
<b>III - Calculs particuliers</b>	<b>7</b>
1. Intégrales de fonctions paires et impaires . . . . .	7
2. Intégrales de fonctions périodiques . . . . .	8
3. Valeur moyenne d'une fonction . . . . .	8
4. Aire entre deux courbes . . . . .	9
5. Primitive s'annulant en $a$ . . . . .	9

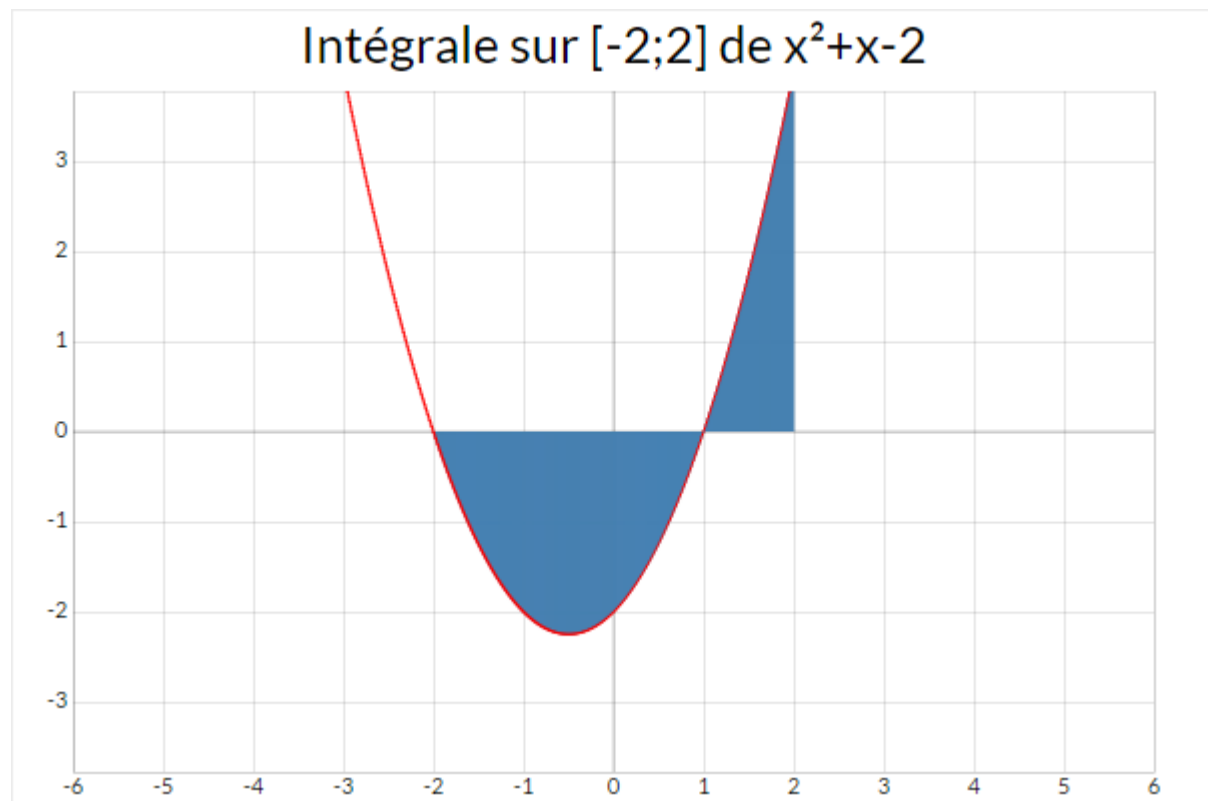
## I - Calcul d'aire

### 1. Qu'est-ce-qu'une intégrale ?

Dans un repère orthogonal, on prend un point  $A(1; 1)$  et on appelle **Unité d'Aire (U.A.)** l'aire du rectangle formée par les points OIA et J.



Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a \leq b$  et  $f$  une fonction **continue** sur  $[a; b]$ . L'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$  notée  $\int_a^b f(x) dx$  représente l'aire entre la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses délimitée par les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  et est exprimée en **U.A.**.



On dit que les réels  $a$  et  $b$  sont les **bornes** de l'intégrale.

## 2. Comment calculer une intégrale ?

Pour connaître une intégrale, il faut savoir calculer la primitive d'une fonction donnée (voir le cours sur les Primitives). Soient deux réels  $a$  et  $b$  avec une fonction  $f$  **continue** sur un intervalle  $I$  (on note  $F$  la primitive de cette fonction). Alors l'intégrale de la fonction  $f$  entre les bornes  $a$  et  $b$  est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Exemple :** On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x + 1$  et l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[1; 4]$  :

**1<sup>ère</sup> étape :** On cherche une primitive de  $f$ . On trouve  $F(x) = x^2 + x = x(x + 1)$ .

**2<sup>nde</sup> étape :** On calcule l'intégrale. On a  $\int_1^4 2x + 1 \, dx = [x(x + 1)]_1^4 = 4(4 + 1) - 1(1 + 1) = 3 - 20 = 18$  U.A.

### 3. Positivité de l'intégrale

Soient deux réels  $a$  et  $b$  et une fonction  $f$  **continue** sur un intervalle  $I$ . De manière générale, le signe de l'intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$  dépend du signe de  $f$ . Ainsi :

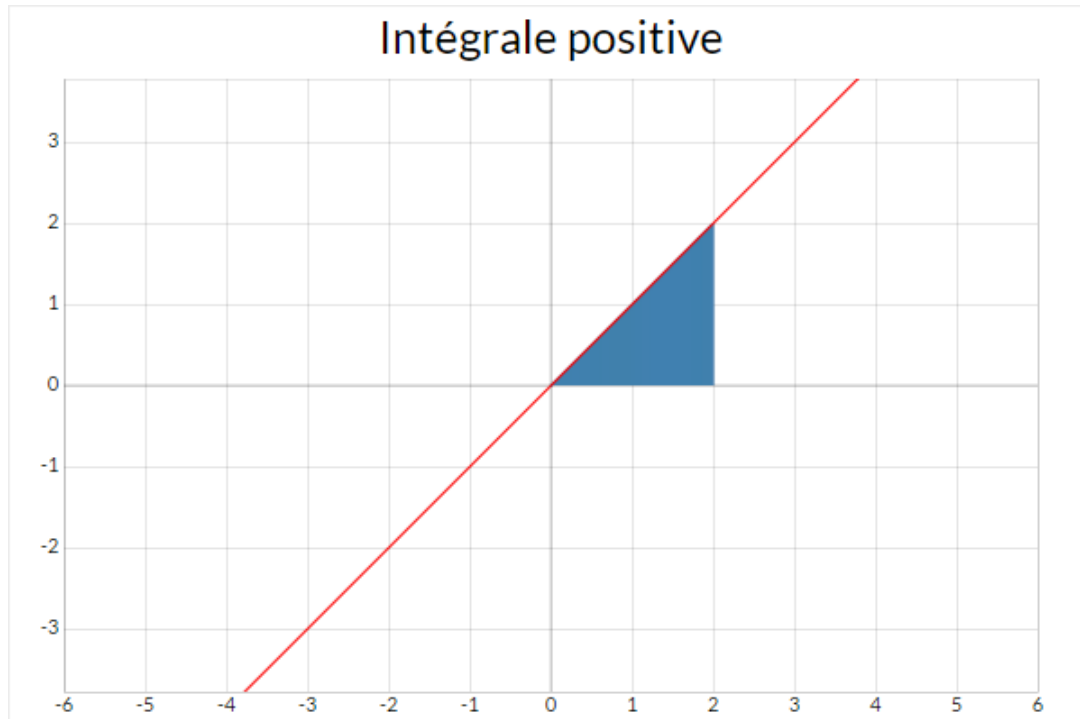
- Si  $f > 0$  sur  $[a; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx > 0$
- Si  $f < 0$  sur  $[a; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx < 0$
- Soit  $c \in \mathbb{R}$  avec  $a < c < b$ . Si  $f > 0$  sur  $[a; c]$  et si  $f < 0$  sur  $[b; c]$  (ou inversement si  $f < 0$  sur  $[a; c]$  et si  $f > 0$  sur  $[b; c]$ ), on ne connaît pas le signe de l'intégrale. Le signe dépend de l'aire qui sera la plus "grande".
- Si  $a = b$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ .
- Soit  $g$  une fonction définie sur  $I$  avec  $f > g$  sur  $I$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b g(x) \, dx$ .

**Exemple :** On veut calculer l'aire sous la courbe d'une fonction  $f$  définie par  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[-2; 2]$  :

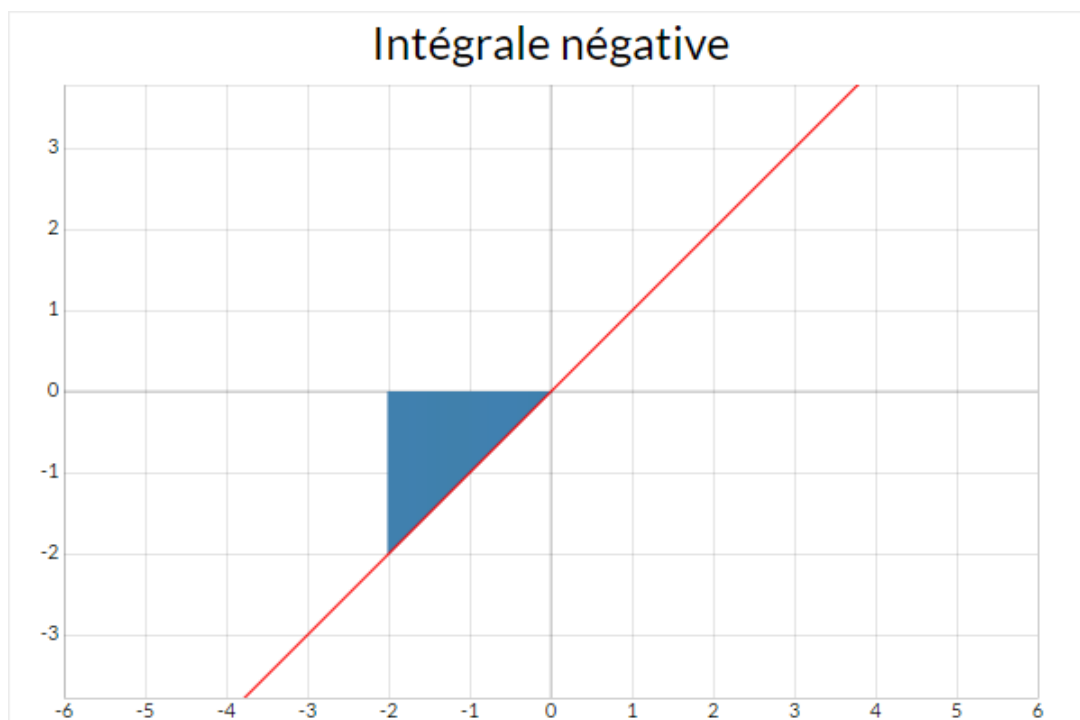
**1<sup>ère</sup> étape :** On cherche une primitive de  $f$ . On trouve  $F(x) = \frac{x^2}{2}$ .

**2<sup>nde</sup> étape :** On calcule l'intégrale. On a  $\int_{-2}^2 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$  U.A. (logique car l'aire au dessus de la courbe de la fonction  $f$  sur  $[-2; 0]$  est égale à l'aire sous la courbe de  $f$  sur  $[0; 2]$  voir propriétés sur les intégrales des fonctions paires).

Ainsi, cette intégrale sera positive :



Et cette intégrale sera négative :



## II - Propriétés de l'intégrale

### 1. Propriétés algébriques

Soient deux réels  $a$  et  $b$  et une fonction  $f$  **continue** sur un intervalle  $I$ .  $k$  est un réel quelconque. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \, dx &= - \int_b^a f(x) \, dx \\ - \int_a^b k \times f(x) \, dx &= k \times \int_b^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

### 2. Linéarité

Soient deux réels  $a$  et  $b$  et deux fonction  $f$  et  $g$  **continues** sur un intervalle  $I$ .  $k$  et  $l$  sont deux réels quelconques :

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= \int_b^a f(x) \, dx + \int_b^a g(x) \, dx \\ - \int_a^b k \times f(x) + l \times g(x) \, dx &= k \times \int_b^a f(x) \, dx + l \times \int_b^a g(x) \, dx \end{aligned}$$

### 3. Relation de Chasles

Soient trois réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et une fonction  $f$  **continue** sur un intervalle  $I$ . La relation de Chasles nous donne la propriété suivante :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

**Exemple :** On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x|$  et l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[-2; 4]$  (*Rappel : la fonction valeur absolue est définie par  $x \mapsto -x$  sur  $] -\infty; 0]$  et par  $x \mapsto x$  sur  $[0; +\infty[$ ).*

**1<sup>ère</sup> étape :** On sépare l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles :  $I = \int_{-2}^4 |x| \, dx = \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx$ .

**2<sup>nde</sup> étape :** On calcule l'intégrale. On a  $I = \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 0 - \left( -\frac{2^2}{2} \right) + \left( \frac{4^2}{2} \right) - 0 = 10$  U.A.

### III - Calculs particuliers

#### 1. Intégrales de fonctions paires et impaires

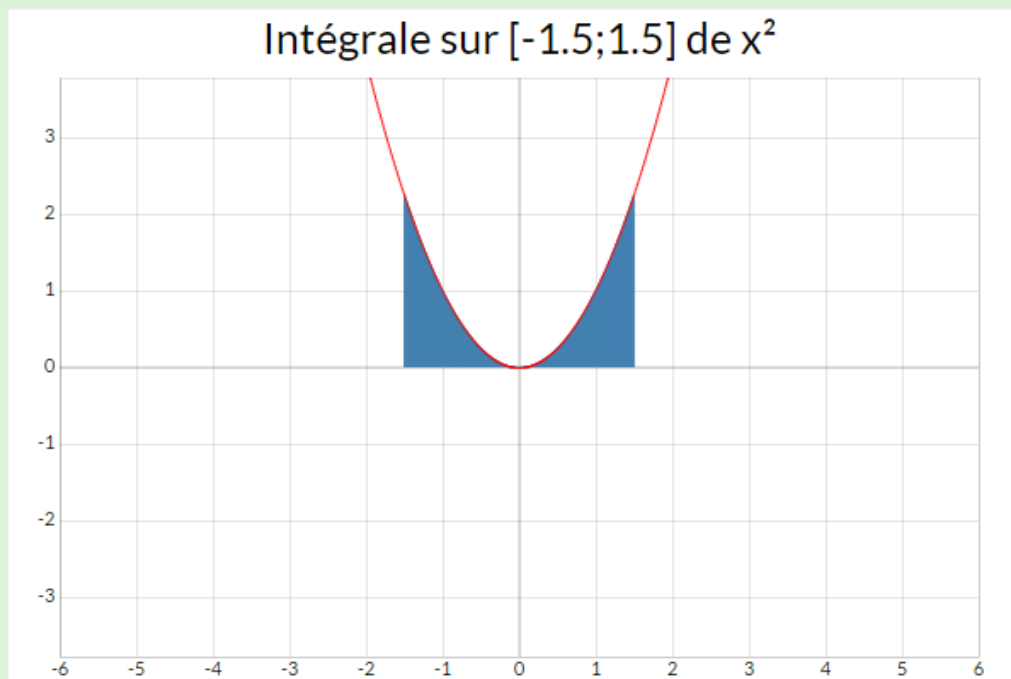
Soit  $f$  une **fonction paire** (comme  $x \mapsto x^2$ ) définie sur  $I$ , on a la relation suivante pour tout  $a \in I$  ( $-a$  doit être dans  $I$ ) :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \times \int_0^a f(x) \, dx = 2 \times \int_{-a}^0 f(x) \, dx$$

Si  $f$  est une **fonction impaire** (comme  $x \mapsto x^3$ ), on a la relation suivante :

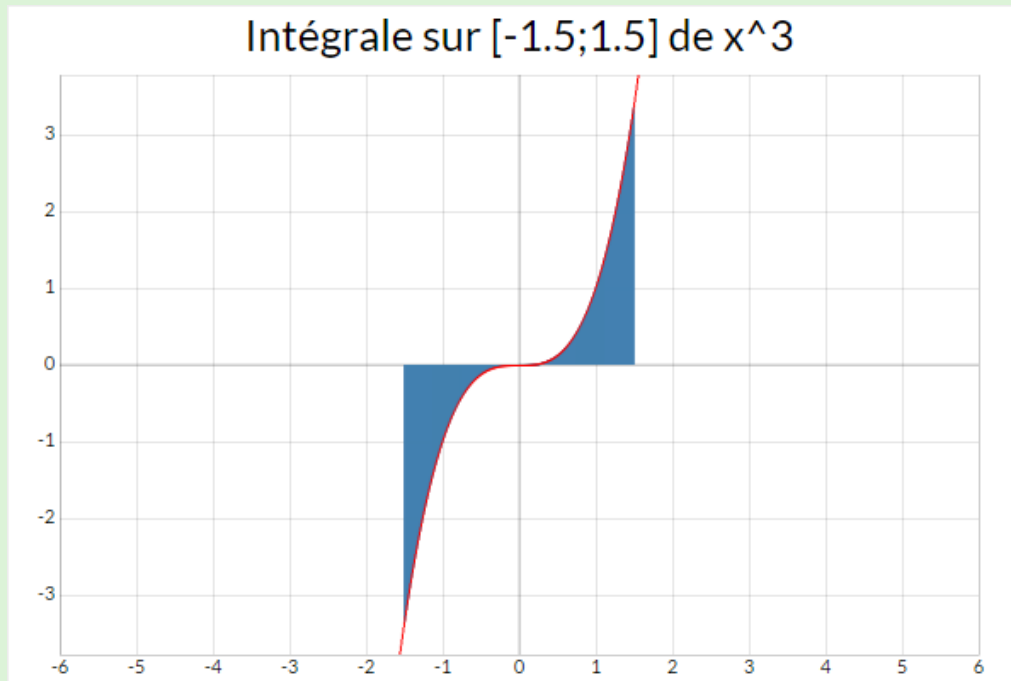
$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

Ces deux relations peuvent se retrouver visuellement, pour les **fonctions paires** (l'aire du côté gauche par rapport à  $(Oy)$  est égale à l'aire de l'autre côté de  $(Oy)$ , et les deux sont positives; on peut donc les additionner pour retrouver l'aire totale) :





Et pour les **fonctions impaires** (l'aire du côté gauche par rapport à  $(Oy)$  est négative et égale à l'aire de l'autre côté de  $(Oy)$  qui est positive, les deux s'annulent donc) :



## 2. Intégrales de fonctions périodiques

Soit  $f$  une **fonction périodique** de période  $k$  (comme  $x \mapsto \cos(x)$  avec  $k = 2\pi$ ) définie sur  $I$ , on a la relation suivante pour tout  $a \in I$  ( $a + k$  doit être dans  $I$ ) :

$$\int_0^k f(x) \, dx = \int_a^{a+k} f(x) \, dx$$

## 3. Valeur moyenne d'une fonction

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a \leq b$  et  $f$  une fonction **continue** sur  $[a; b]$ . La valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

#### 4. Aire entre deux courbes

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a \leq b$  et deux fonctions  $f$  et  $g$  **continues** sur  $[a; b]$ . Si on  $f > g$  sur cet intervalle, alors l'aire entre les deux courbes est donnée par la relation suivante :

$$\int_a^b f(x) - g(x) \, dx$$

#### 5. Primitive s'annulant en $a$

Soient une fonction  $f$  **continue** sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in \mathbb{R}$ . La primitive de  $f$  (notée  $F$ ) qui vaut 0 quand  $x = a$  est donnée par la formule :

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, dx$$