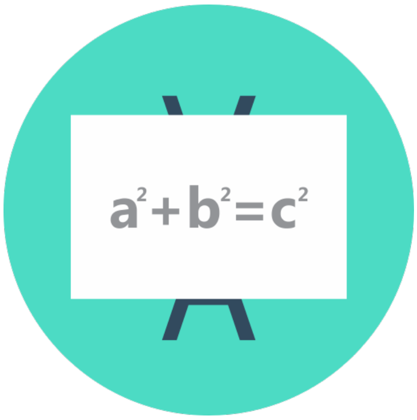


Chapitre II – Les polynômes du second degré

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Qu'est-ce qu'une fonction polynômiale du second degré ?

1. Définition

À RETENIR : DÉFINITION

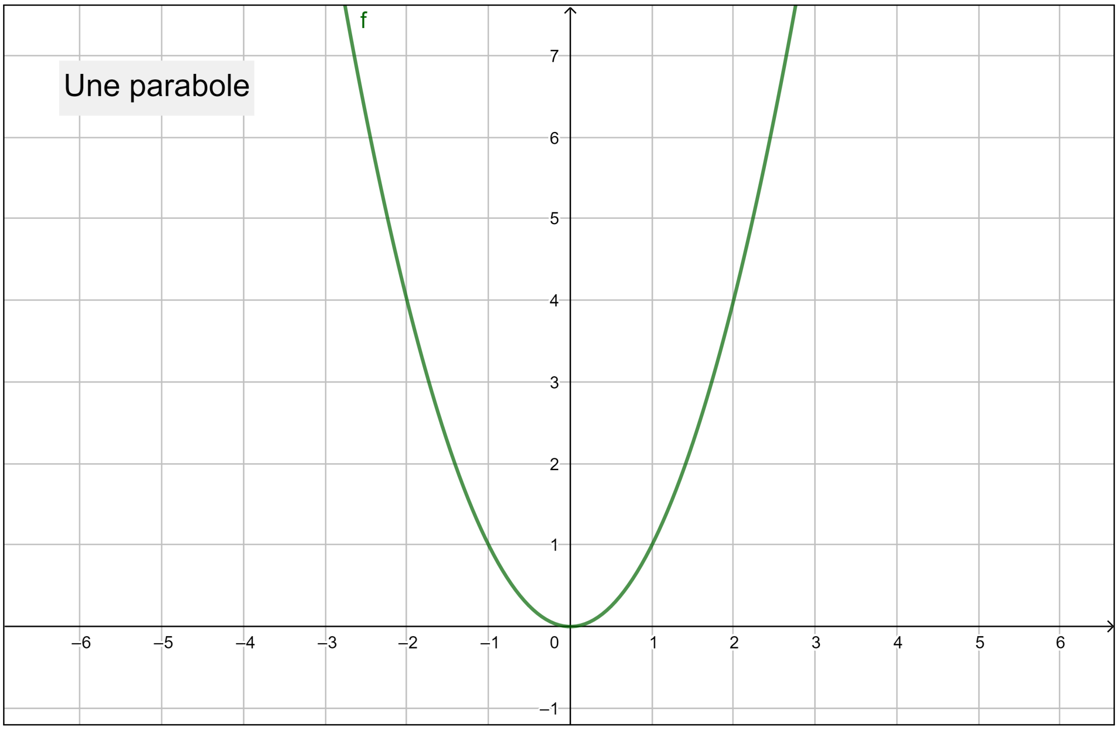
Soit f une fonction. f est une fonction polynômiale si elle est de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, b et c réels qui sont les **coefficients** de f.

En classe de Première, ces fonctions auront pour ensemble de départ et d'arrivée $\mathbb{R}$ mais il faut savoir qu'il est possible d'en prendre d'autres.

2. Représentation graphique

À RETENIR : PARABOLE

Soit f une fonction polynômiale. Alors la courbe représentative de f (notée $\mathcal{C}_f$) est une **parabole**.



À LIRE : PARITÉ D'UNE FONCTION

On voit sur la représentation ci-dessus que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : la fonction f représentée est **paire** (i.e. pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$).

Inversement si une fonction f est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, elle est dite **impaire** (i.e. pour tout $x \in D_f$, $-f(x) = f(x)$).

Chaque coefficient d'une fonction polynômiale a un rôle dans le tracé de sa parabole.

À RETENIR : RÔLE DES COEFFICIENTS DANS LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Soit f de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels). Alors on a que :

— a et b contrôlent **l'allure générale** de la courbe (son orientation, son inclinaison, ...).

— c contrôle l'éloignement de la courbe par rapport à **l'axe des abscisses**.

À LIRE

Rien que le signe de a peut changer toute l'allure de la courbe :

— Si $a < 0$, la fonction est décroissante puis croissante.

— Si $a > 0$, la fonction est croissante puis décroissante.

II - Recherche de racines

1. Qu'est-ce qu'une racine ?

À RETENIR : DÉFINITION

Soient f une fonction polynômiale du second degré et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est **une racine** de f si $f(x_0) = 0$.

À LIRE

Autrement dit, résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à rechercher les racines de f. Pour cela il existe beaucoup de méthodes et nous en détaillerons certaines par la suite.

2. Discriminant

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels). On appelle **discriminant** de f le réel suivant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Plusieurs propriétés découlent du signe de Δ :

— Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas de racine réelle.

— Si $\Delta = 0$ alors f admet une unique racine réelle : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$ alors f admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

À LIRE : EXEMPLE

Résolvons l'équation $x^2 = 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a $x^2 = 4 \iff x^2 - 4 = 0$. Il s'agit en fait de chercher les racines de la fonction du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$.
On identifie les coefficients : $a = 1$, $b = 0$ et $c = -4$; puis on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 1 \times -4 = 16$.

Comme $\Delta > 0$, on a deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$.

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{-2; 2\}$.

3. Racines évidentes

À RETENIR : RECHERCHE DES RACINES RATIONNELLES

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels). On note D_c l'ensemble des diviseurs de c et D_a l'ensemble des diviseurs de a. Alors :

Pour trouver une éventuelle racine rationnelle de f, on calcule $f\left(\frac{p}{q}\right)$ pour tout $p \in D_c$ et $q \in D_a$, jusqu'à tomber sur 0.

À LIRE : EXEMPLE

Utilisons cette méthode pour déterminer les éventuelles racines rationnelles de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 1$.

On a ici $a = 4$, $b = 0$ et $c = -1$; la liste des diviseurs de c est : -1 et 1.
La liste des diviseurs de a est : 4, 2, 1, -1, -2 et -4. Il ne reste qu'à tester :

$f\left(\frac{-1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{-4}\right) \neq 0$

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{-2}\right) = 0$ **Une racine !**

$f\left(\frac{-1}{1}\right) = f(-1) \neq 0$

$f\left(\frac{-1}{-1}\right) = f(1) \neq 0$

$f\left(\frac{-1}{-2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ **Une racine !**

On a deux racines rationnelles : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Pas besoin d'aller plus loin car on a trouvé deux racines et un polynôme du second degré n'admet que deux racines maximum.

Signalons de plus que l'on aurait pu s'arrêter après avoir trouvé la première racine car f est une fonction paire.

4. Somme et produit de racines

À RETENIR : RELATIONS

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels) admettant deux racines réelles x_1 et x_2. Alors :

- La somme $S = x_1 + x_2$ des racines vaut également $-\frac{b}{a}$.
- Le produit $P = x_1 \times x_2$ des racines vaut également $\frac{c}{a}$.

À LIRE : EXEMPLE

Il peut être très utile de combiner cette méthode avec celle des racines évidentes ! Par exemple, cherchons les solutions de l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Il faut donc chercher les racines de la fonction de degré 2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

On a $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$. Avec la méthode des racines évidentes, on trouve une racine $x_1 = -1$.

Or, on a $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \iff x_2 = -1$. La deuxième racine vaut aussi -1.

On dit que -1 est **racine double**.

5. Forme factorisée

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels) admettant deux racines réelles x_1 et x_2. Alors :

f admet une **forme factorisée** qui vaut $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

À LIRE : EXEMPLE

Chercher les racines de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

Avec une identité remarquable, on factorise f : $f(x) = (x - 3)^2$.

Cela correspond à la forme factorisée de f et elle nous permet d'en déduire que 3 est une racine double de f.

Une propriété découle immédiatement de cette méthode :

À RETENIR

Si $c = 0$, alors $-\dfrac{b}{a}$ et 0 sont racines.

III - Étude des fonctions polynômiales du second degré

1. Signe

À RETENIR : SIGNE D'UNE FONCTION DU SECOND DEGRÉ

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels) admettant deux racines réelles x_1 et x_2. On suppose ici que $x_1 < x_2$, alors :

— Si $a < 0$: $f(x) < 0$ sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]x_1; x_2[$.

— Si $a > 0$: $f(x) > 0$ sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $]x_1; x_2[$.

À LIRE

Si $x_1 = x_2$ ou si f n'admet pas de racine, alors f est du signe de a.

2. Variations

À RETENIR : FORME CANONIQUE

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire f de la forme :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Cette forme est appelée **forme canonique** de f et elle possède de nombreuses propriétés intéressantes.

À RETENIR : SOMMET DE LA PARABOLE

Soit S le sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$. Alors les coordonnées de S sont (α, β).
Si $a < 0$, ce sommet est un maximum et si $a > 0$, ce sommet est un minimum.

À LIRE

Cela veut tout simplement dire que :

— Si $a < 0$, le maximum de f est atteint en α et vaut β (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \beta$).

— Si $a > 0$, le minimum de f est atteint en α et vaut β (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \beta$).

Avec les remarques données précédemment, on peut en déduire les variations de la fonction f.

À RETENIR : SENS DE VARIATION

- Si $a < 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty]$.
- Si $a > 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty]$.

3. Axe de symétrie

À RETENIR : AXE DE SYMÉTRIE

Soit f une fonction polynômiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b et c réels). On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Alors :

$\mathcal{C}_f$ possède un axe de symétrie : la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

À LIRE

En fait, $\mathcal{D}$ est juste la droite verticale passant par le sommet de la parabole.