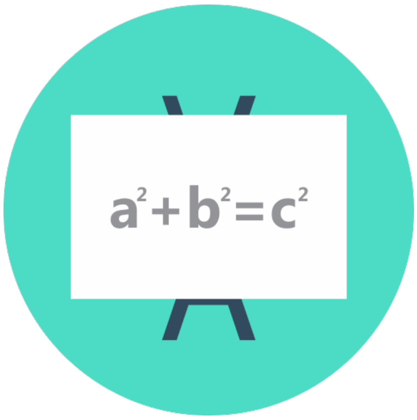


Chapitre II – Continuité et dérivabilité

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Continuité

1. Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. La fonction f est continue en a si on a :

À RETENIR

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f est dite **continue** sur I, si on peut appliquer la formule ci-dessus à tous les réels de l'intervalle I.
On dit de manière générale qu'une fonction est continue sur un intervalle s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur cet intervalle "sans lever le crayon".

À RETENIR

- Toute somme, produit, composée ou quotient (avec le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues est également continue sur le même intervalle.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (la réciproque n'est pas vraie cependant).

À LIRE

Exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition ($\mathbb{R}^*$) mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction, a et b deux réels tels que $a < b$. Voici l'énoncé du **théorème des valeurs intermédiaires** appliqué à f et à a et b :

À RETENIR

Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel y_0 si on a $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **au moins** un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

À LIRE

Ce théorème est **très important** !

Voici un exemple : prenons $f(x) = x^3 + x^2 - x$ et prouvons qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x_0) = 5$. On a $f(0) = 0$ et $f(3) = 33$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[0; 3]$ et que $0 < 5 < 33$, il existe un réel $x_0 \in [0, 3]$ tel que $f(x_0) = 5$.

On peut encore tenter d'affiner la précision : $f(1) = 1$ et $f(2) = 10$. On a bien $1 < 5 < 10$ donc $x_0 \in [1; 2]$, etc...

Une conséquence de ce théorème est que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors la fonction f s'annule au moins une fois entre a et b.

À RETENIR

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue sur $[a; b]$ et que f est **strictement monotone** sur cet intervalle, alors pour tout réel y_0 si on a $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **un unique** réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

3. La partie entière $[x]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, la **partie entière** de x notée $[x]$ (ou $E(x)$) est l'unique réel tel que :

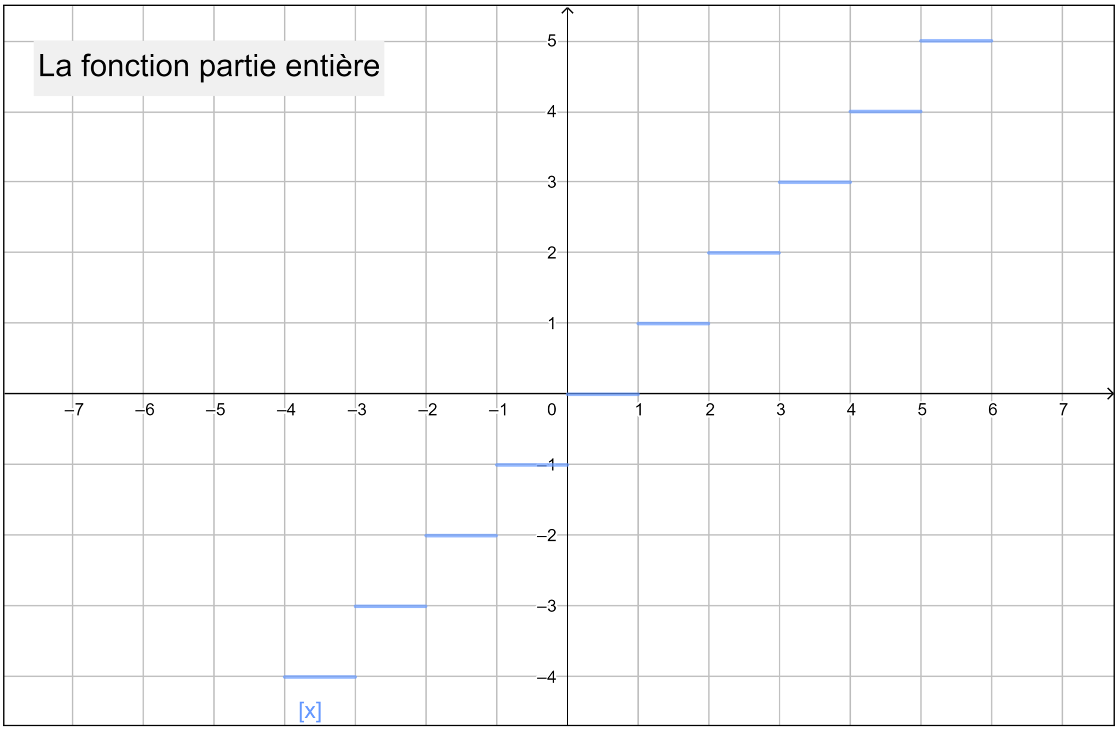
À RETENIR

$[x] \leq x < [x] + 1$

À LIRE

Exemple : $[1,216] = 1$ et $[-2,198] = -3$.

La fonction partie entière définie par $x \mapsto [x]$ **n'est pas continue** sur $\mathbb{R}$:



II - Dérivation

1. Nombre dérivé

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $(a+h) \in I$.

À RETENIR 💡

La fonction f est **dérivable** en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de f en a noté $f'(a)$.

2. La tangente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente $\mathcal{T}$ au point de coordonnées $(a; f(a))$. $f'(a)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$, et une équation de $\mathcal{T}$ est :

À RETENIR 💡

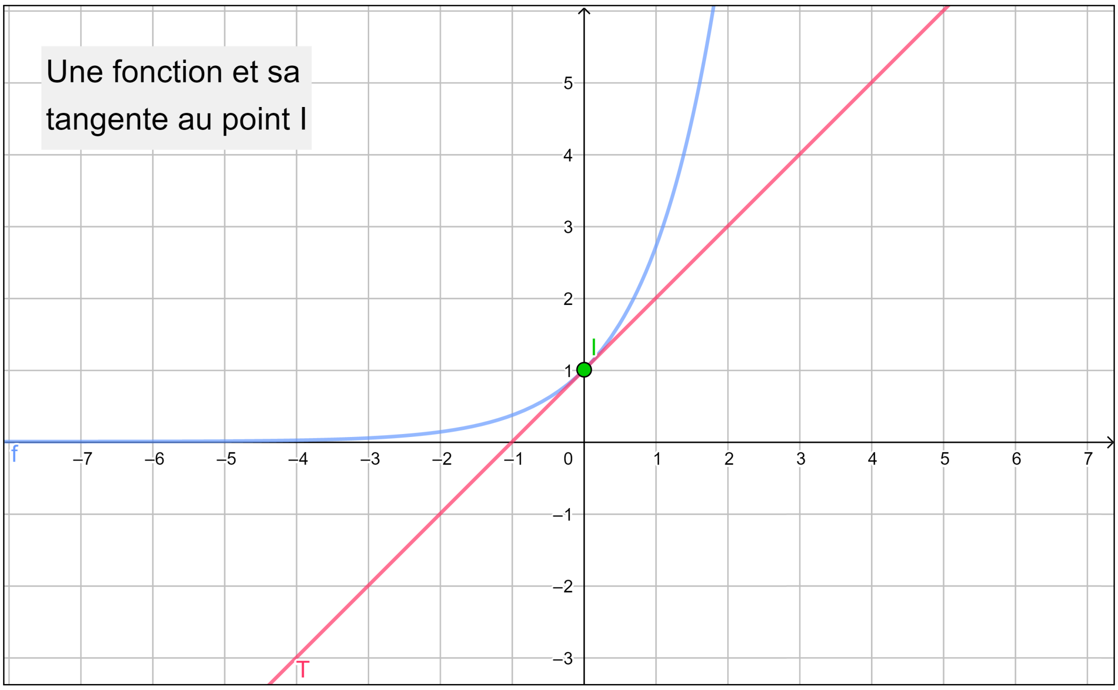
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

À LIRE 👀

Soit $f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ (voir cours sur la fonction exponentielle).

Cherchons une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$: On a $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (voir paragraphe sur les limites de la fonction exponentielle).

Ainsi, $f'(0) = 1$. Une équation de la tangente est donc $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$: on retrouve ce qui a été constaté sur la représentation graphique de la fonction exponentielle.



3. Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors on appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de f la fonction g suivante :

À RETENIR

Pour tout $x \in I$, $g(x) = f'(x)$ (à tout réel x de I, g y associe le nombre dérivé $f'(x)$)

Très souvent, la fonction g sera notée f'.

4. Applications

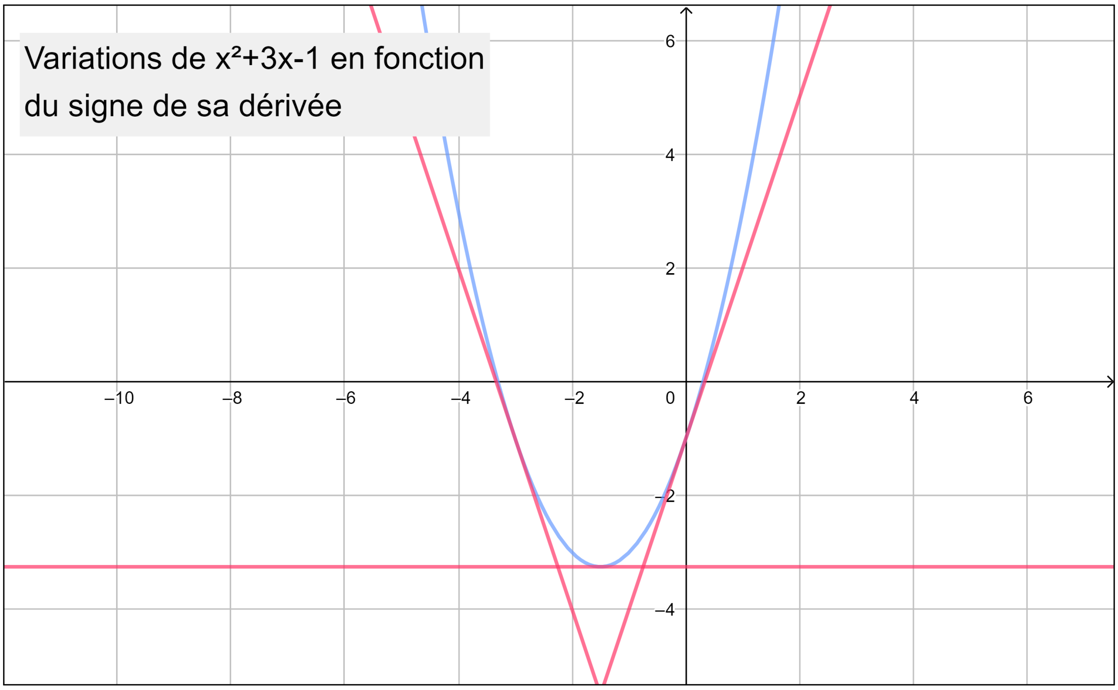
Plusieurs applications peuvent être trouvées aux dérivées. Ainsi, avec le signe de la dérivée, il est possible d'obtenir le sens de variation de la fonction. Pour une fonction f dérivable sur I et de dérivée f' :

À RETENIR

— Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.

— Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

— Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.



Il est également possible d'en déduire diverses propriétés sur les extrema dits "locaux" (sur un certain intervalle) d'une fonction. Soient f dérivable sur I de dérivée f', et $a \in I$:

À RETENIR 💡

— Si f admet un extremum local en a, alors on a $f'(a) = 0$.

— Si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a, alors $f'(a)$ est un extremum local de f.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

III - Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
λ	0	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^+$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions u et v :

À RETENIR

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où u est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où v est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où u et v sont dérivables et non nulles.

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles :

À RETENIR

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

De manière générale, soient f dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$. On a alors :

À RETENIR

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$