Chapitre V - La fonction logarithme népérien

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

Table des matières

I - Propriétés du logarithme népérien

1. Définition

Le logarithme népérien est une fonction qui est définie sur $]0;+\infty[$ par :

> $x \mapsto ln(x)$

Et on a la relation fondamentale suivante pour tout x et y **strictement positifs** :

> $ln(x) = y \iff x = e^y$

Ainsi, a tout réel **strictement positif** x, la fonction logarithme népérien y associe **son unique antécédent** y par rapport à la fonction exponentielle.
De même pour la fonction exponentielle. On dit que ces fonctions sont des **fonctions réciproques** (à la manière de $sin(x)$ et $arcsin(x)$ ou $cos(x)$ et $arccos(x)$).

> Cette relation peut sembler compliquer à assimiler mais il n'en est rien ! Prenons $x = 0$, on a :
> $e^0 = 1$ (tout réel mis à la puissance zéro vaut un), la relation précédente nous donne $ln(1) = 0$.
>
> Si on prend maintenant $x = 1$, on a :
> $e^1 = e$, on a donc $ln(e) = 1$.

Les relations suivantes sont par conséquent disponibles :

> Pour tout réel x **strictement positif**, on a :
> $e^{ln(x)} = x$
>
> Et pour tout réel x, on a :
> $ln(e^x) = x$

2. Relations algébriques

Le logarithme népérien a plusieurs propriétés intéressantes qu'il faut connaître. Ainsi, pour tout a et b **strictement positifs** :

— $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$

— $ln(a^n) = n \times ln(a)$ pour $n \in \mathbb{Z}$

— $ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$

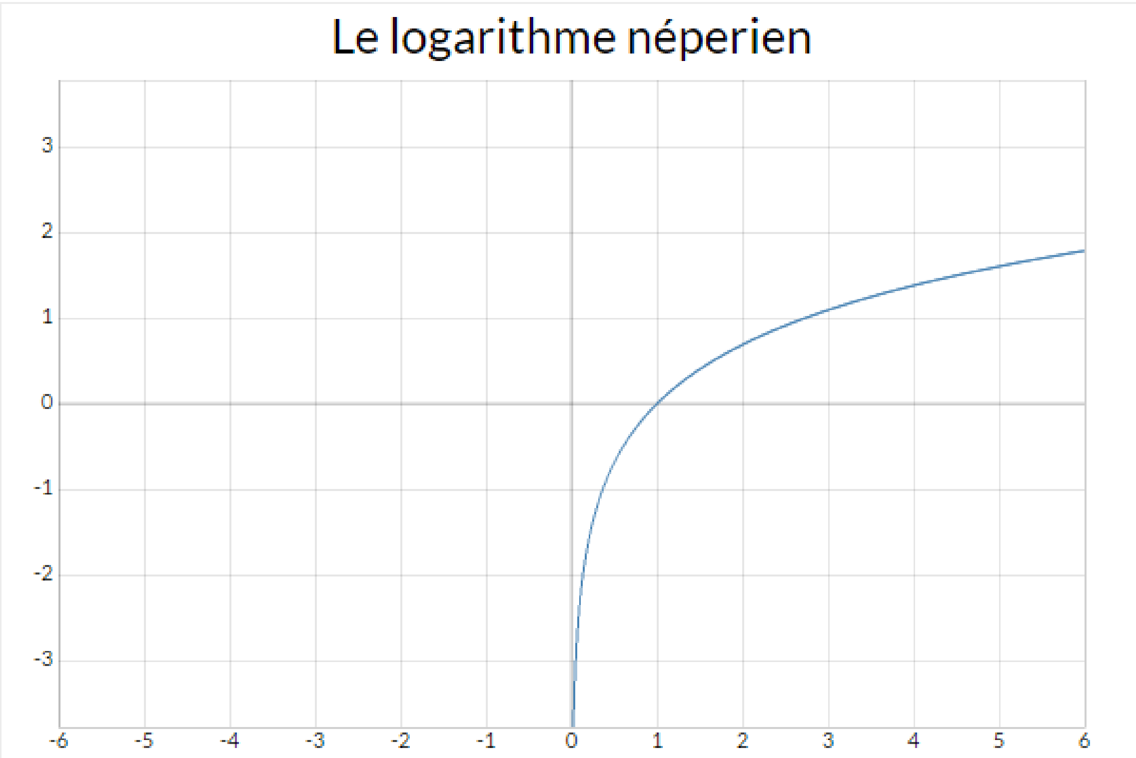
— $ln(\frac{1}{b}) = -ln(b)$

— $ln(\sqrt[p]{a}) = \frac{1}{p} \times ln(a)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

Certaines des ces propriétés peuvent se déduire les unes des autres.

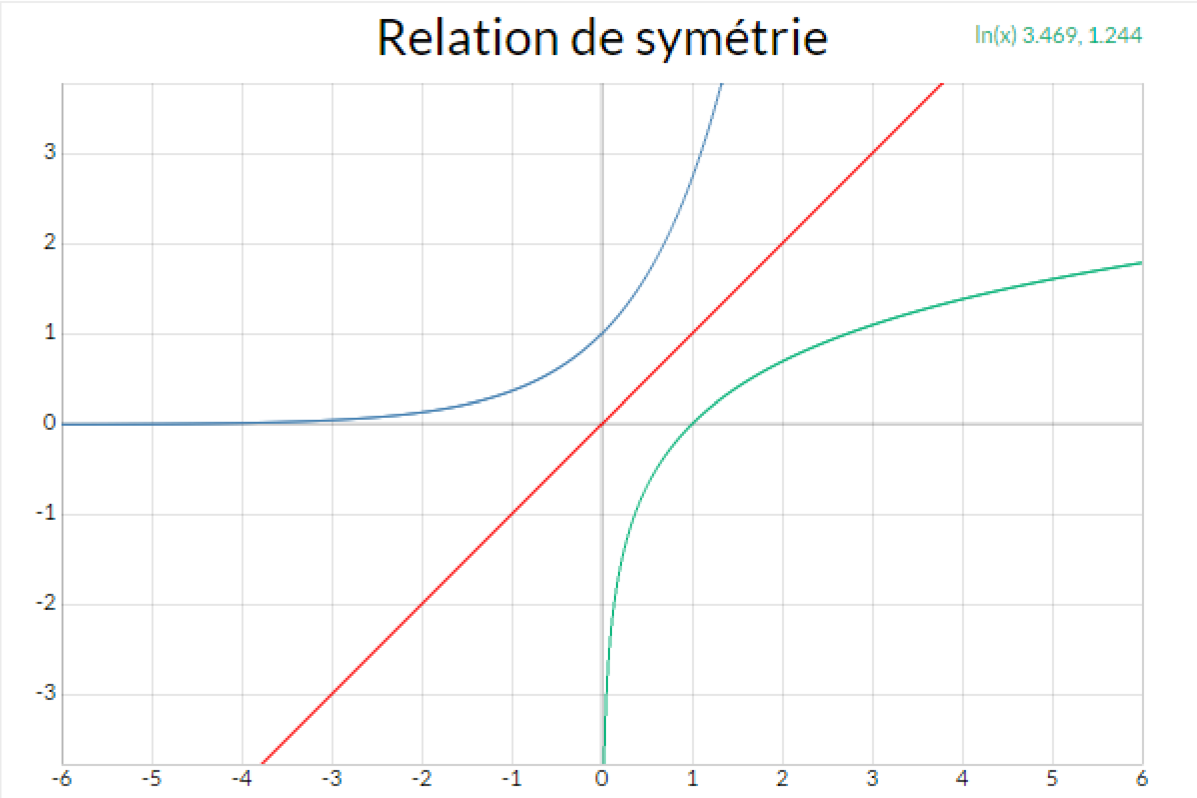
3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



On voit sur ce graphique plusieurs propriétés données précédemment : $ln(1) = 0$ et $ln(e) = 1$ par exemple.

On trace maintenant le graphe de la fonction logarithme népérien, avec celui de la fonction exponentielle. On trace également la droite d'équation $y = x$:



On remarque plusieurs choses : le graphe de la fonction logarithme népérien est le symétrique de celui de la fonction exponentielle par rapport à la droite $y = x$ et on voit que la fonction logarithme népérien croît moins vite que la fonction puissance qui elle même croît moins vite que la fonction exponentielle. Cette propriété est importante : c'est la **croissance comparée**.

II - Étude de la fonction

1. Limites

Les limites de la fonction logarithme népérien aux bornes de son ensemble de définition sont :

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} ln(x) = -\infty$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction puissance "l'emporte" sur le logarithme népérien (voir la partie “Représentation graphique”) :

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \times ln(x) = 0$

Une autre limite est à connaître (ainsi que sa démonstration) :

Démonstration de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$:

La fonction logarithme népérien est définie et continue en $x = 1$, on peut donc écrire :
$ln'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln(x) - ln(1)}{x - 1}$
Ce qui est équivalent à (car on a $ln(1) = 0$ et $ln'(1) = 1$) :
$1 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln(x)}{x - 1}$
On pose $y = x - 1$ ce qui nous donne finalement :
$\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{ln(y-1)}{y} = 1$

2. Dérivée

Soit une fonction u dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

$$ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ainsi, si on a $u(x) = x$ (avec $x \in]0; +\infty[$) :

$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

3. Variations

Avec la dérivée trouvée précédemment ainsi que les limites données, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		1		$+\infty$
$ln'(x)$	‖		$+$		
$ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On remarque qu'avec le tableau de variation, il est possible d'obtenir le signe de la fonction (avec le théorème des valeurs intermédiaires).
Ainsi, sur $]0; 1[$, $ln(x)$ est **strictement négative** et sur $]1; +\infty[$, $ln(x)$ est **strictement positive** et, comme vu précédemment, $ln(1) = 0$.
On observe également les variations de la fonction : strictement croissante sur son ensemble de définition.

III - Le logarithme décimal

Le **logarithme décimal** (principalement utilisé en physique-chimie) est défini sur $]0; +\infty[$ par :

$$log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$$

Et on a les propriétés suivantes :

- $log(10) = 1$
- $log(10^n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Ces formules peuvent se retrouver très facilement ! En effet, pour la première : $log(10) = \frac{ln(10)}{ln(10)} = 1$.

Et pour la seconde : $log(10^n) = \frac{n \times ln(10)}{ln(10)} = n \times \frac{ln(10)}{ln(10)} = n$.