



Chapitre VII - Les intégrales

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

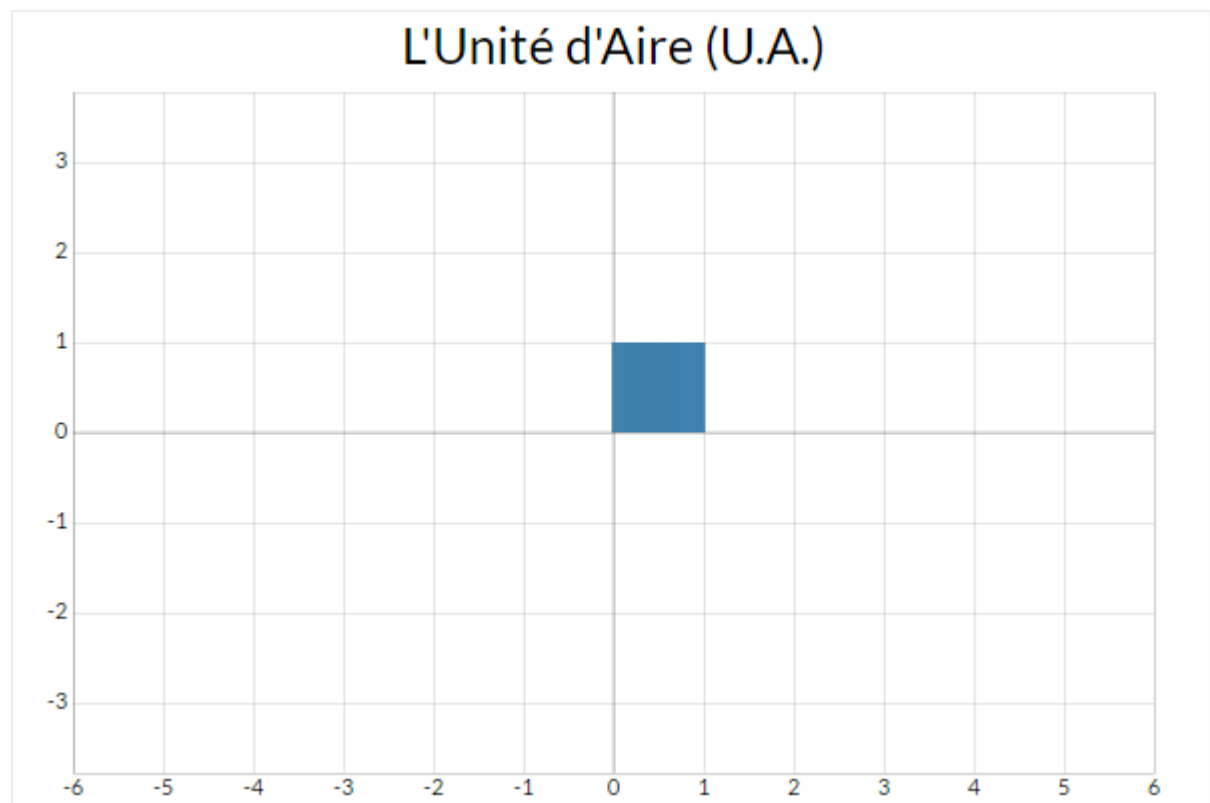
Table des matières

I - Calcul d'aire	1
1. Qu'est-ce-qu'une intégrale ?	1
2. Comment calculer une intégrale ?	2
3. Positivité de l'intégrale	3
II - Propriétés de l'intégrale	5
1. Propriétés algébriques	5
2. Linéarité	5
3. Relation de Chasles	5
III - Calculs particuliers	7
1. Intégrales de fonctions paires et impaires	7
2. Intégrales de fonctions périodiques	8
3. Valeur moyenne d'une fonction	8
4. Aire entre deux courbes	9
5. Primitive s'annulant en a	9

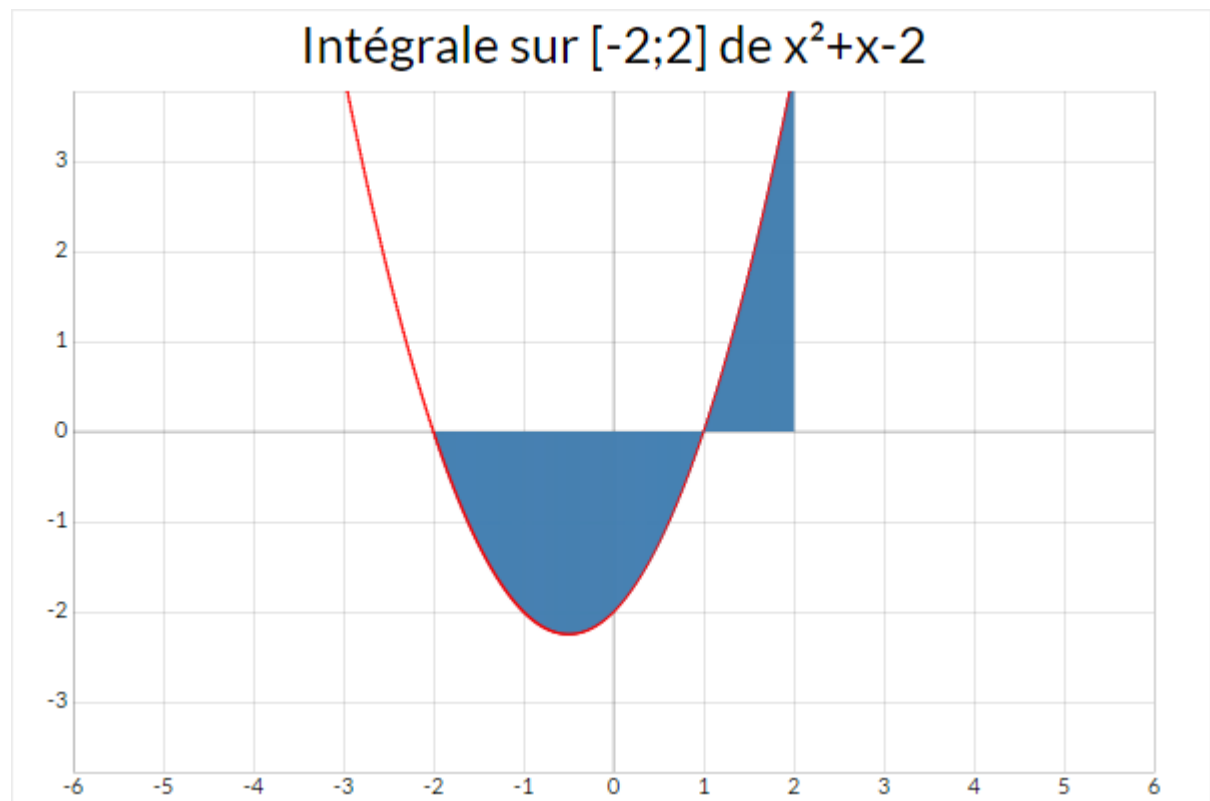
I - Calcul d'aire

1. Qu'est-ce-qu'une intégrale ?

Dans un repère orthogonal, on prend un point $A(1; 1)$ et on appelle **Unité d'Aire (U.A.)** l'aire du rectangle formée par les points O , A et J .



Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction **continue** sur $[a; b]$. L'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ notée $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses délimitée par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et est exprimée en **U.A.**.



On dit que les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

2. Comment calculer une intégrale ?

Pour connaître une intégrale, il faut savoir calculer la primitive d'une fonction donnée (voir le cours sur les Primitives). Soient deux réels a et b avec une fonction f **continue** sur un intervalle I (on note F la primitive de cette fonction). Alors l'intégrale de la fonction f entre les bornes a et b est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple : On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; 4]$:

1^{ère} étape : On cherche une primitive de f . On trouve $F(x) = x^2 + x = x(x + 1)$.

2^{nde} étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_1^4 2x + 1 \, dx = [x(x + 1)]_1^4 = 4(4 + 1) - 1(1 + 1) = 3 - 20 = 18$ U.A.

3. Positivité de l'intégrale

Soient deux réels a et b et une fonction f **continue** sur un intervalle I . De manière générale, le signe de l'intégrale de f sur $[a; b]$ dépend du signe de f . Ainsi :

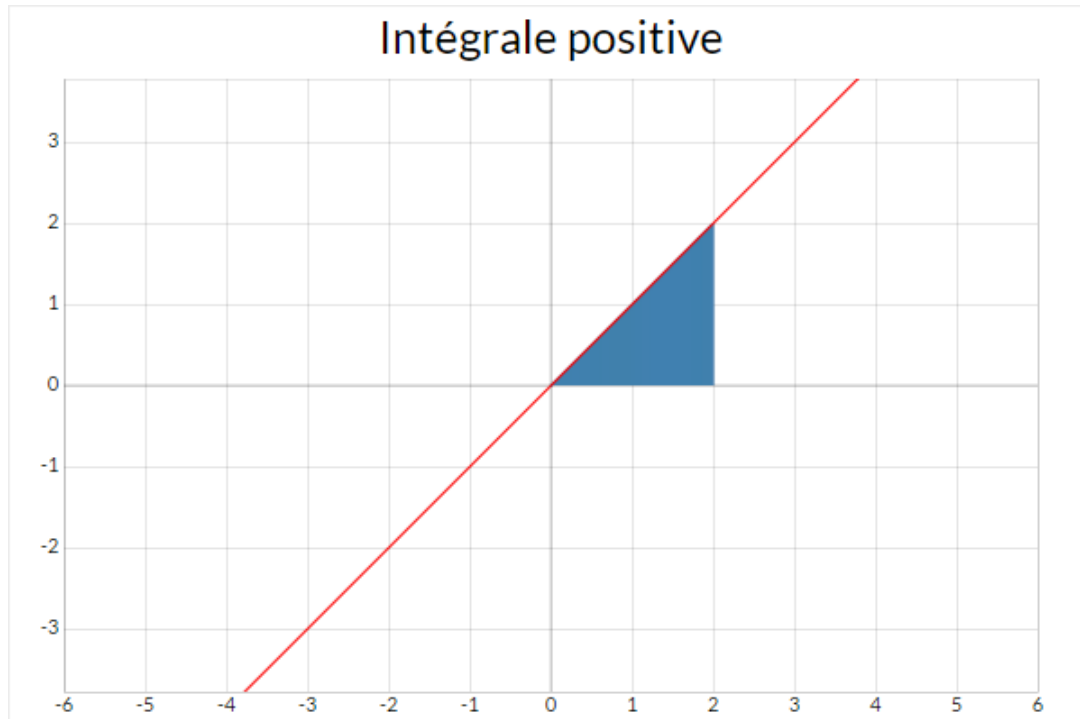
- Si $f > 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx > 0$
- Si $f < 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx < 0$
- Soit $c \in \mathbb{R}$ avec $a < c < b$. Si $f > 0$ sur $[a; c]$ et si $f < 0$ sur $[b; c]$ (ou inversement si $f < 0$ sur $[a; c]$ et si $f > 0$ sur $[b; c]$), on ne connaît pas le signe de l'intégrale. Le signe dépend de l'aire qui sera la plus "grande".
- Si $a = b$, alors $\int_a^b f(x) \, dx = 0$.
- Soit g une fonction définie sur I avec $f > g$ sur I , alors $\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b g(x) \, dx$.

Exemple : On veut calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-2; 2]$:

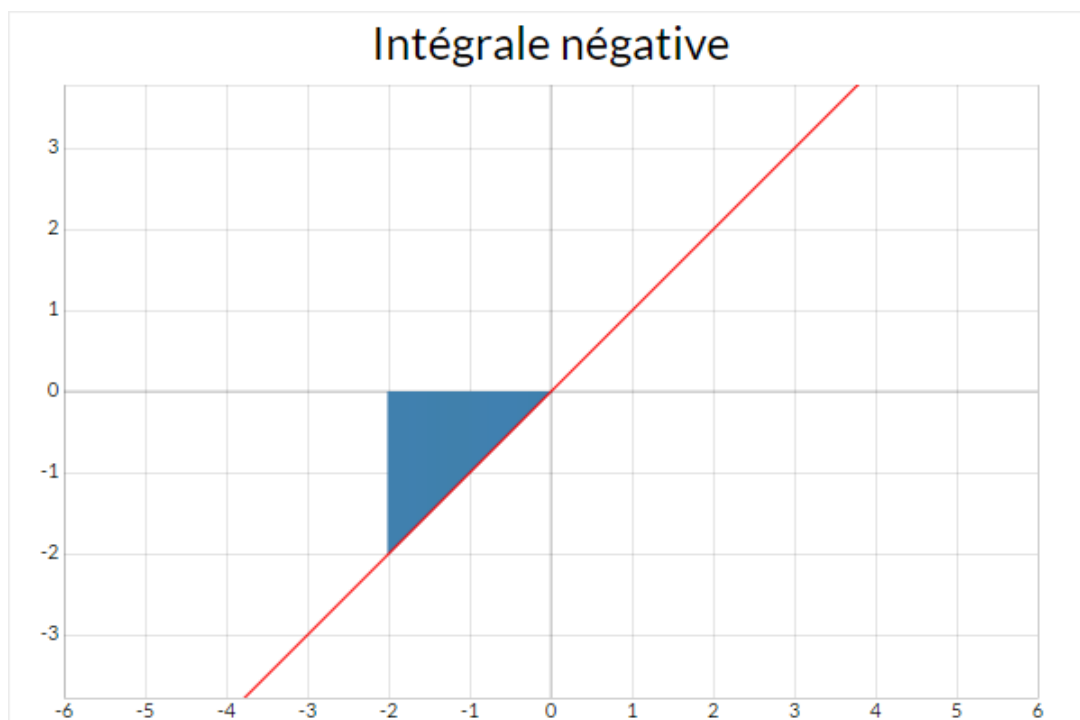
1^{ère} étape : On cherche une primitive de f . On trouve $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

2^{nde} étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_{-2}^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$ U.A. (logique car l'aire au dessus de la courbe de la fonction f sur $[-2; 0]$ est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[0; 2]$ voir propriétés sur les intégrales des fonctions paires).

Ainsi, cette intégrale sera positive :



Et cette intégrale sera négative :



II - Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés algébriques

Soient deux réels a et b et une fonction f **continue** sur un intervalle I . k est un réel quelconque. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \, dx &= - \int_b^a f(x) \, dx \\ - \int_a^b k \times f(x) \, dx &= k \times \int_b^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

2. Linéarité

Soient deux réels a et b et deux fonction f et g **continues** sur un intervalle I . k et l sont deux réels quelconques :

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= \int_b^a f(x) \, dx + \int_b^a g(x) \, dx \\ - \int_a^b k \times f(x) + l \times g(x) \, dx &= k \times \int_b^a f(x) \, dx + l \times \int_b^a g(x) \, dx \end{aligned}$$

3. Relation de Chasles

Soient trois réels a , b , c et une fonction f **continue** sur un intervalle I . La relation de Chasles nous donne la propriété suivante :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Exemple : On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = |x|$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2; 4]$ (*Rappel : la fonction valeur absolue est définie par $x \mapsto -x$ sur $] -\infty; 0]$ et par $x \mapsto x$ sur $[0; +\infty[$*).

1^{ère} étape : On sépare l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles : $I = \int_{-2}^4 |x| \, dx = \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx$.

2^{nde} étape : On calcule l'intégrale. On a $I = \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 0 - \left(-\frac{2^2}{2} \right) + \left(\frac{4^2}{2} \right) - 0 = 10 \text{ U.A.}$

III - Calculs particuliers

1. Intégrales de fonctions paires et impaires

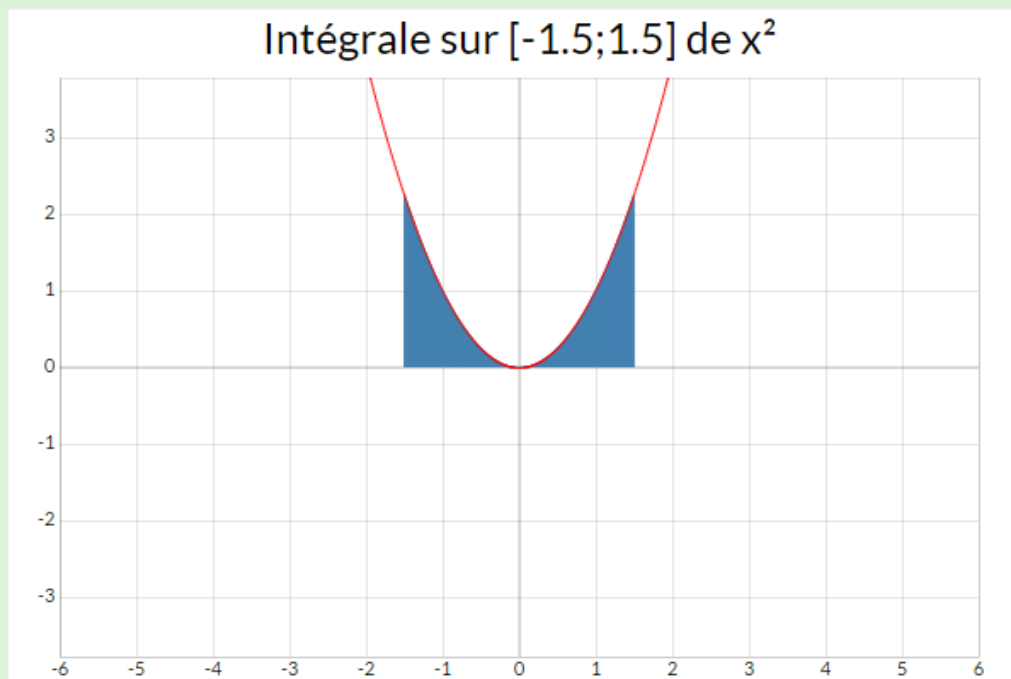
Soit f une **fonction paire** (comme $x \mapsto x^2$) définie sur I , on a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($-a$ doit être dans I) :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \times \int_0^a f(x) \, dx = 2 \times \int_{-a}^0 f(x) \, dx$$

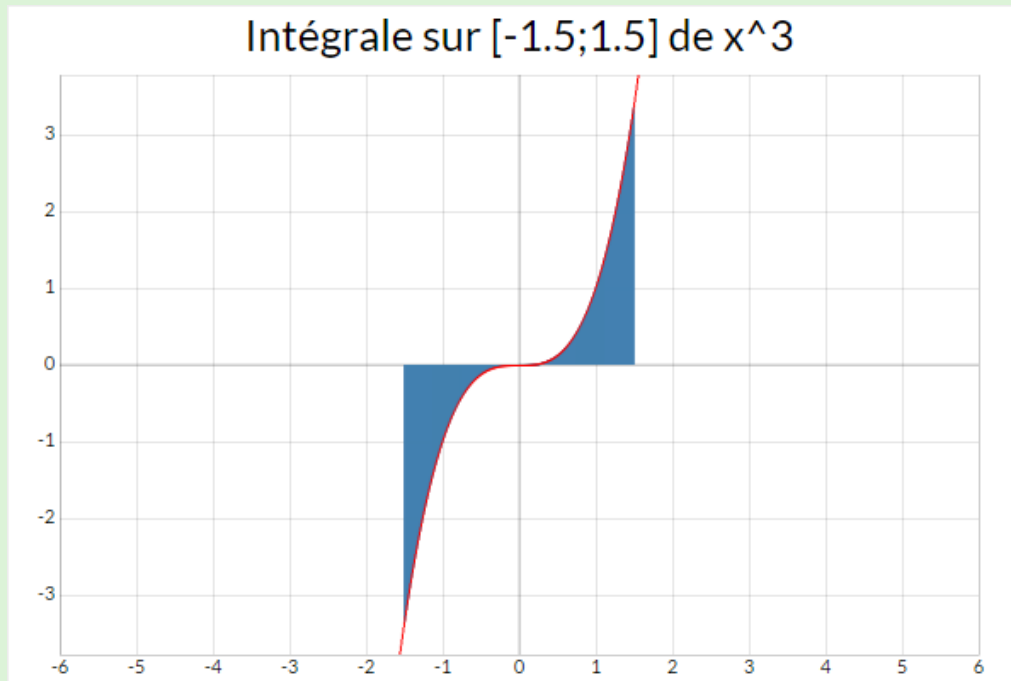
Si f est une **fonction impaire** (comme $x \mapsto x^3$), on a la relation suivante :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

Ces deux relations peuvent se retrouver visuellement, pour les **fonctions paires** (l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est égale à l'aire de l'autre côté de (Oy) , et les deux sont positives; on peut donc les additionner pour retrouver l'aire totale) :



Et pour les **fonctions impaires** (l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est négative et égale à l'aire de l'autre côté de (Oy) qui est positive, les deux s'annulent donc) :



2. Intégrales de fonctions périodiques

Soit f une **fonction périodique** de période k (comme $x \mapsto \cos(x)$ avec $k = 2\pi$) définie sur I , on a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($a + k$ doit être dans I) :

$$\int_0^k f(x) \, dx = \int_a^{a+k} f(x) \, dx$$

3. Valeur moyenne d'une fonction

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction **continue** sur $[a; b]$. La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

4. Aire entre deux courbes

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et deux fonctions f et g **continues** sur $[a; b]$. Si on $f > g$ sur cet intervalle, alors l'aire entre les deux courbes est donnée par la relation suivante :

$$\int_a^b f(x) - g(x) \, dx$$

5. Primitive s'annulant en a

Soient une fonction f **continue** sur un intervalle I et un réel $a \in \mathbb{R}$. La primitive de f (notée F) qui vaut 0 quand $x = a$ est donnée par la formule :

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, dx$$