Liban. 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Le point D a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.
Le point B a pour coordonnées $(1, 1, 0)$, le point E a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point G a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(0, -1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG). Donc, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (EBG).

2) Le plan (EBG) est le plan passant par le point $B(1, 1, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}(1, 1, 1)$. Une équation cartésienne du plan (EBG) est donc $1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 1) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x + y + z - 2 = 0$.

3) La droite (DF) est la droite passant par $D(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}(1, 1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (DF) est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Soit $M(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (DF).

$$M \in (EBG) \Leftrightarrow t + t + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Quand $t = \frac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point I : $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Partie B

1) $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 1$. D'autre part, $[DE]$ est la diagonale d'un carré de côté 1 et donc $DE = \sqrt{2}$. De même, $DB = \sqrt{2}$ puis

$$\cos\left(\widehat{EDB}\right) = \frac{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}}{DE \times DB} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{EDB} = \frac{\pi}{3}$. D'autre part, $\widehat{EFB} = \frac{\pi}{2}$.

2) a) D'après la question 3) de la partie A, les coordonnées du point M sont de la forme (x, x, x) où $x \in \mathbb{R}$. De plus, le point M appartient au segment $[DF]$ si et seulement si $x \in [0, 1]$.

b) $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{BM} = (x - 1)(x - 1) + (x - 0)(x - 1) + (x - 1)(x - 0) = x^2 - 2x + 1 + x^2 - x + x^2 - x = 3x^2 - 4x + 1$.
$EM = \sqrt{(x - 1)^2 + (x - 0)^2 + (x - 1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$ et
$BM = \sqrt{(x - 1)^2 + (x - 1)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{3x^2 - 4x + 2} = EM$. Donc,

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB}}{EM \times BM} = \frac{3x^2 - 4x + 1}{\left(\sqrt{3x^2 - 4x + 2}\right)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

3) a) Le triangle MEB est rectangle en M si et seulement si $\cos(\theta) = 0$ ce qui équivaut à $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 1$. $x = 1$ est le cas où $M = F$. $x = \frac{1}{3}$ est le cas où M est le point J.

En résumé, le triangle EMB est rectangle en M si et seulement si $M = F$ ou $M = J$.

b) La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$ et donc θ est maximal si et seulement si $\cos(\theta)$ est minimal ce qui équivaut à $x = \frac{2}{3}$. $x = \frac{2}{3}$ est le cas où M est le point I.

En résumé, θ est maximal si et seulement si $M = I$ et dans ce cas $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 2

Partie A

1) 75 voitures attendent en moyenne 1 minute, 19 voitures attendent en moyenne 3 minutes, 10 voitures attendent en moyenne 5 minutes et 5 voitures attendent en moyenne 7 minutes. La moyenne de ces durées d'attente est

$$\frac{75\times 1+19\times 3+10\times 5+5\times 7}{75+19+10+5}=\frac{217}{109}=1,9908\ldots$$

En arrondissant, une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking est 2 minutes.

2) a) L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Il est donc cohérent de prendre $\frac{1}{\lambda}=2$ ou encore $\lambda=0,5$.

b) On sait que pour tout $t\geqslant 0$,

$$P(T\leqslant t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=\left(-e^{-\lambda t}\right)-\left(-e^{0}\right)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-0,5t}.$$

Donc, $P(T\leqslant 2)=1-e^{-0,5\times 2}=1-e^{-1}=0,6321$ arrondi à 10^{-4}.

c) La probabilité demandée est $P_{T\geqslant 1}(T\leqslant 2)$. On sait que la loi exponentielle est une loi sans vieillissement et donc cette probabilité est aussi $P(T\leqslant 1)$ avec

$$P(T\leqslant 1)=1-e^{-0,5}=0,3935 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie B

1) a) La durée moyenne de stationnement est μ minutes ou encore 70 minutes.

b) La probabilité demandée est $P(D\geqslant 120)$. La calculatrice fournit $P(D\geqslant 120)=0,0478$ arrondi à 10^{-4}.

c) Soit a le réel tel que $P(D\leqslant a)=0,99$. La calculatrice fournit $a=139,7\ldots$ ou encore 140 minutes arrondi à la minute. Donc pour au moins 99% des voitures, le temps d'attente est au maximum 140 minutes ou encore 2 heures et 20 minutes.

2) Soit G la variable aléatoire égale au tarif en euros. L'espérance de G est

$$\begin{aligned}E(G)&=P(D\leqslant 15)\times 0+P(15<D\leqslant 60)\times 3,5+P(60<D\leqslant 120)\times t+P(120<D\leqslant 180)\times 2t\\&=0,3361\times 3,5+0,5828\times t+0,0477\times 2t=1,17635+0,6782t.\end{aligned}$$

Par suite,

$$E(G)=5\Leftrightarrow 1,17635+0,6782t=5\Leftrightarrow t=\frac{5-1,17635}{0,6782}=5,63\ldots.$$

En fixant le tarif de l'heure supplémentaire à 6 euros, le prix moyen de stationnement sera au moins de 5 euros.

Partie C

L'énoncé donne $\mu'=30$ et $P(T'\leqslant 37)=0,75$. Or $T'\leqslant 37\Leftrightarrow T'-30\leqslant 7\Leftrightarrow \frac{T'-30}{\sigma'}\leqslant\frac{7}{\sigma'}$ et donc $P\left(\frac{T'-30}{\sigma'}\leqslant\frac{7}{\sigma'}\right)=0,75$. La variable $\frac{T'-30}{\sigma'}$ suit la loi centrée réduite et la calculatrice fournit $\frac{7}{\sigma'}=0,67448\ldots$ puis $\sigma'=10,4$ arrondi à 10^{-1}.

La calculatrice fournit encore $P\left(10\leqslant T'\leqslant 50\right)=94,5\%$ et on peut considérer que l'objectif est pratiquement atteint.

EXERCICE 3

Soit $k \in]0, +\infty[$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k'(x) = 1 - ke^{-x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_k'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - ke^{-x} > 0 \Leftrightarrow -ke^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{-1}{-k} \text{ (car } -k < 0) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right) < \ln\left(\frac{1}{k}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow -x < -\ln(k) \Leftrightarrow x > \ln(k). \end{aligned}$$

De même, $f_k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(k)$ et $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(k)$. Ainsi, la fonction f_k' est strictement négative sur $]-\infty, \ln(k)[$ et strictement positive sur $]\ln(k), +\infty[$. On en déduit que la fonction f_k est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(k)]$ et strictement croissante sur $[\ln(k), +\infty[$.

La fonction f_k admet un minimum en le réel $\ln(k)$. Puisque

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)} = \ln(k) + \frac{k}{e^{\ln(k)}} = \ln(k) + \frac{k}{k} = \ln(k) + 1,$$

le point A_k a pour coordonnées $(\ln(k), \ln(k) + 1)$. Mais alors, tous les points A_k, $k > 0$, appartiennent à la droite Δ d'équation $y = x + 1$.

On a montré que les points A_k, $k > 0$, sont alignés.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Pour $x \in]0,1[$, on pose $u(x) = \dfrac{20x}{1-x}$. Pour $x \in]0,1[$, $20x > 0$ et $1-x > 0$ et donc $u(x) = \dfrac{20x}{1-x} > 0$. Ainsi, la fonction u est dérivable et strictement positive sur $]0,1[$. Puisque pour tout réel x de $]0,1[$, $f(x) = 30\ln(u(x))$, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout réel x de $]0,1[$,

$$f'(x) = 30\frac{u'(x)}{u(x)} = 30 \times 20 \times \frac{1 \times (1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\dfrac{20x}{1-x}} = 30 \times 20 \times \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{20x} = \frac{30}{x(1-x)}.$$

Pour tout réel x de $]0,1[$, $x > 0$ et $1-x > 0$. Donc, pour tout réel x de $]0,1[$, $x(1-x) > 0$ puis $f'(x) > 0$. On a montré que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

2) Soit $x \in]0,1[$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Leftrightarrow 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{a}{30} \\ &\Leftrightarrow \frac{20x}{1-x} = e^{\frac{a}{30}} \Leftrightarrow 20x = e^{\frac{a}{30}} - xe^{\frac{a}{30}} \\ &\Leftrightarrow x\left(20 + e^{\frac{a}{30}}\right) = e^{\frac{a}{30}} \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{a}{30}}}{20 + e^{\frac{a}{30}}}. \end{aligned}$$

En particulier, $f(x) = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{\frac{20}{30}}}{20 + e^{\frac{20}{30}}} \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}$ et $f(x) = 120 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{\frac{120}{30}}}{20 + e^{\frac{120}{30}}} \Leftrightarrow x = \dfrac{e^4}{20 + e^4}$.

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$, pour $x \in]0,1[$,

$$20 \leqslant f(x) \leqslant 120 \Leftrightarrow f\left(\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{e^4}{20 + e^4}\right) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leqslant x \leqslant \frac{e^4}{20 + e^4}.$$

On note que $\dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} = 0,09$ à 10^{-2} près par excès et $\dfrac{e^4}{20 + e^4} = 0,73$ à 10^{-2} près par défaut. Donc, l'âge reste dans les conditions de validité pour un diamètre de tronc compris au sens large entre 8 cm et 73 cm.

Partie B

1) a) Le nombre $0,245$ écrit dans la cellule D3 est le résultat du calcul : $\dfrac{18,05 - 15,6}{80 - 70}$ qui est la croissance de la hauteur du tronc, exprimée en mètres, divisée par la durée, exprimée en année.

b) Dans la case C3, on doit rentrer la formule $= \dfrac{C2 - B2}{C1 - B1}$.

2) Un diamètre de 27 cm est modélisé par $x = 0,27$. L'âge de l'épicéa, exprimé en années, est alors

$$f(0,27) = 30\ln\left(\frac{20 \times 0,27}{1 - 0,27}\right) = 30\ln\left(\frac{540}{73}\right) = 60,033\ldots$$

soit environ 60 ans.

Soit h la hauteur de l'arbre, exprimée en mètres, quand l'arbre a 60 ans. La hauteur de l'arbre est de 11,2 m à 50 ans et 15,6 à 70 ans. En supposant la vitesse de croissance constante sur cette période, on a $\dfrac{h - 11,2}{60 - 50} = 0,22$ et donc $h = 11,2 + 10 \times 0,22 = 13,4$.

La hauteur d'arbre attendue est de $13,4$ mètres.

3) a) Tableau complété.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Ages (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par années)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

La vitesse de croissance est maximale pour un âge compris entre 80 et 95 ans.

b) $f(0,7) = 30\ln\left(\dfrac{20 \times 0,7}{0,3}\right) = 30\ln\left(\dfrac{140}{3}\right) = 115,2\ldots$ Le diamètre est de 70 cm quand l'âge est environ 115 ans. Cet âge n'est pas compris entre 80 et 95 ans et le bois sera donc de moins bonne qualité. Il n'est pas cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm.

