Chapitre VI – Les primitives de fonctions continues

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Définition

Soit f un fonction définie et continue sur un intervalle I, on appelle **primitive** de f, toute fonction F définie sur I et qui vérifie pour tout $x \in I$:

À RETENIR 💡

$F'(x) = f(x)$

À LIRE 👀

Note : Une primitive est toujours définie à une constante près.

En effet. Si on considère la fonction définie pour $x \in R$: $f(x) = 2x$.
Alors, $F_1(x) = x^2 + 1$ est une primitive de la fonction f (car $F'(x) = 2x = f(x)$).

Mais $F_1(x)$ **n'est pas la seule primitive** de f !
On peut citer par exemple $F_2(x) = x^2 + 10$ et $F_3(x) = x^2 + 3$ qui sont également des primitives de f.

C'est pour cette raison que l'ont dit que les primitives sont définies à une constante près (lorsque l'on dérive, la constante devient nulle).

Ainsi, toute **fonction continue** sur un intervalle I admet **une infinité de primitives** sur I de la forme suivante :

À RETENIR 💡

$x \mapsto F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ avec F une primitive de f.

II - Primitive de fonctions usuelles

Le tableau suivant est à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR 💡

Fonction	**Primitive**	**Domaine de définition de la primitive**
k	kx	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^a avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

III - Opérations sur les primitives

Le tableau suivant est également à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR 💡

Fonction	**Primitive**	**Domaine de définition de la primitive**
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	En tout point où u est définie.
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	En tout point où u est définie. On peut retirer la valeur absolue si u est positive.
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$	En tout point où u est définie et est positive.
$u'(x)(u(x))^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}(u(x))^{a+1}$	En tout point où u est définie.
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	En tout point où u est définie.
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	En tout point où u est définie.