



Chapitre III - Les fonctions trigonométriques

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

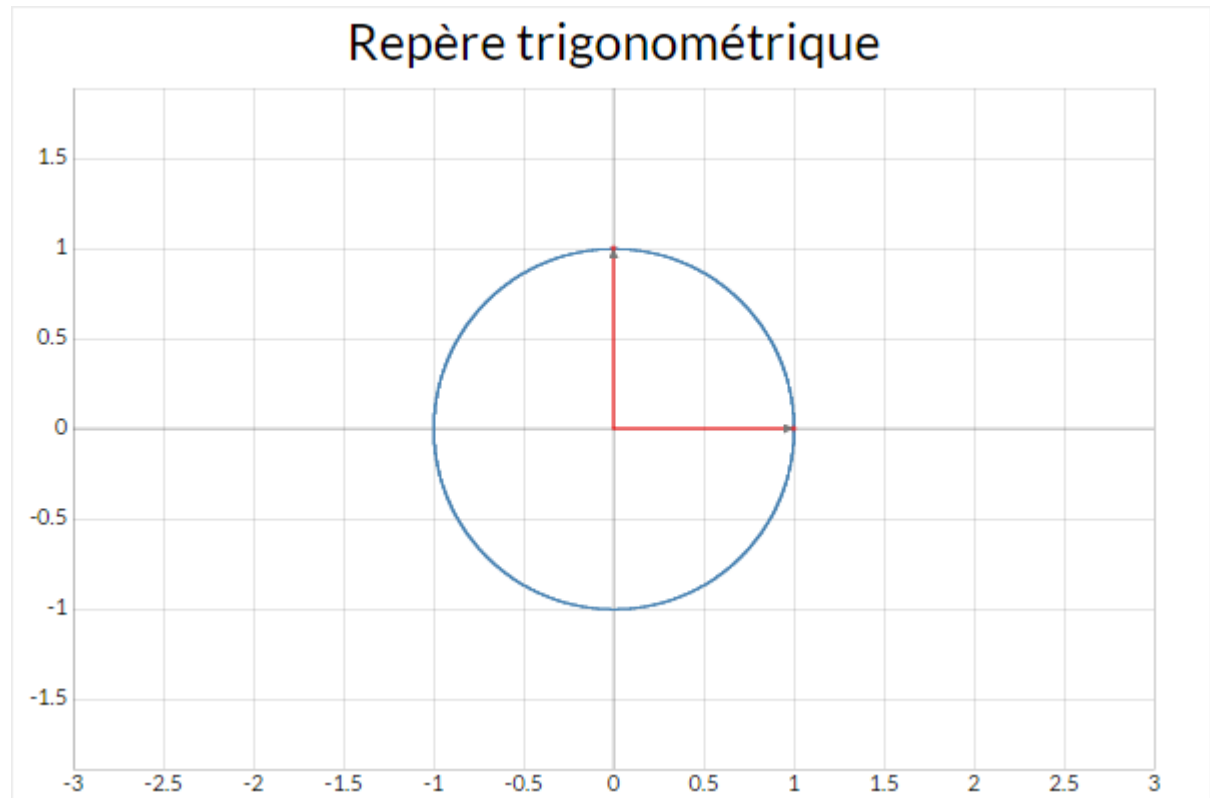
Table des matières

I - Sinus et cosinus	1
1. Définition	1
2. Périodicité	2
3. Formules de trigonométrie	2
4. Résolution d'équations	4
5. Fonctions réciproques	4
II - Étude des fonctions trigonométriques	5
1. Dérivée	5
2. Signe et variations	5
3. Limite	6
4. Valeurs remarquables	6
5. Représentation graphique	7

I - Sinus et cosinus

1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni dans repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Il sera également muni d'un cercle appelé **cercle trigonométrique** \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



Soit M un point quelconque d'abscisse x et d'ordonnée y situé sur le cercle \mathcal{C} . Les coordonnées de M sont :

- L'abscisse de M appelée **cosinus** est notée $\cos(x)$.
- L'ordonnée de M appelée **sinus** est notée $\sin(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on aura $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π . Ainsi pour tout x réel et k entier relatif :

$$\begin{aligned} &— \cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \\ &— \sin(x) = \sin(x + 2k\pi) \end{aligned}$$

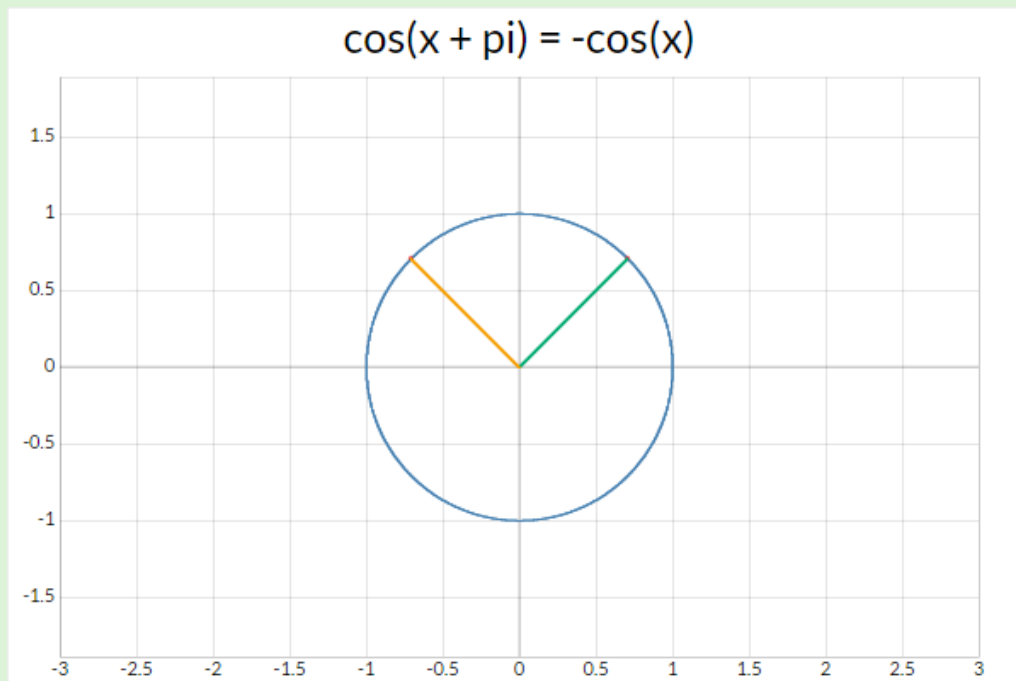
Concrètement, cela signifie que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$ et idem pour $\sin(x)$.

3. Formules de trigonométrie

On a les relations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &— \cos(-x) = \cos(x) \text{ (la fonction cosinus est **paire**)} \\ &— \sin(-x) = -\sin(x) \text{ (la fonction sinus est **impaire**)} \\ &— \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ &— \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ &— \cos(x - \pi) = -\cos(x) \\ &— \sin(x - \pi) = \sin(x) \\ &— \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ &— \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ &— \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ &— \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\ &— \cos(x + y) = \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) \\ &— \sin(x + y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y) \\ &— \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \end{aligned}$$

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de $\cos(x + \pi)$:



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus. Ainsi, soient x et y deux réels et k un entier relatif. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} - \cos(x) = \cos(y) &\iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases} \\ - \sin(x) = \sin(y) &\iff \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

5. Fonctions réciproques

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à $\cos(x)$ (notée $\arccos(x)$) et une **fonction réciproque** à $\sin(x)$ (notée $\arcsin(x)$). On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} - \cos(x) = y &\iff x = \arccos(y) \\ - \sin(x) = y &\iff x = \arcsin(y) \end{aligned}$$

Cela signifie que à tout réel x , la fonction $\arccos(x)$ y associe son **antécédent** y par rapport à $\cos(x)$ (pareil pour $\arcsin(x)$ avec $\sin(x)$).

II - Étude des fonctions trigonométriques

1. Dérivée

Soit une fonction u dérivable sur un interval I , on a pour tout x appartenant à cet interval :

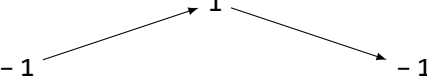
$$\begin{aligned} - \cos'(u(x)) &= u'(x) * -\sin(u(x)) \\ - \sin'(u(x)) &= u'(x) * \cos(u(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, si on a $u(x) = x$:

$$\begin{aligned} - \cos'(x) &= -\sin(x) \\ - \sin'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$


2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permettent d'obtenir les variations de celles-ci. Voici donc le signe et la variation de ces fonctions. Tout d'abord celui de la fonction cosinus :

x	$-\pi$		0		π
$(\cos(x))'$	0	$+$	0	$-$	0
$\cos(x)$					

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période 2π .

Voici maintenant celui de la fonction sinus :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$(\sin(x))'$	-	0	+	0	-
$\sin(x)$					

Ce tableau est également périodique de période 2π .

3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en $\pm\infty$. Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre -1 et 1 .

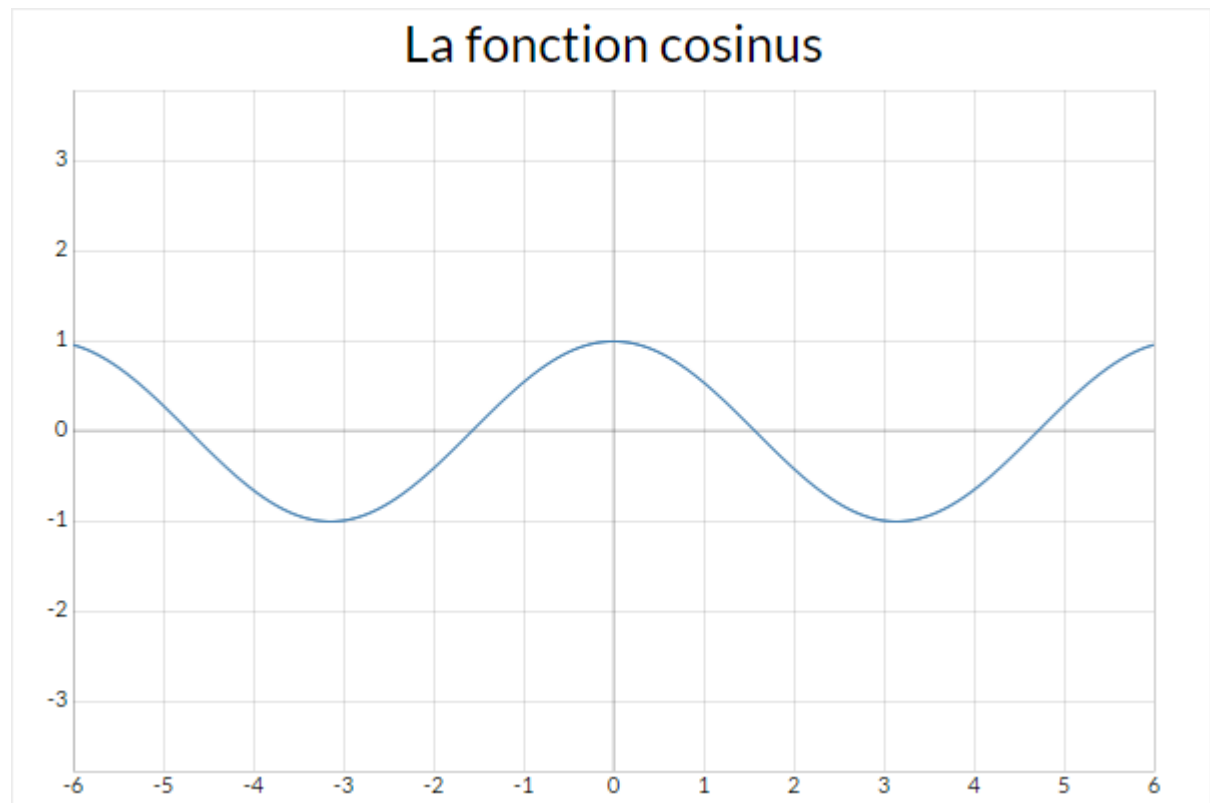
4. Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

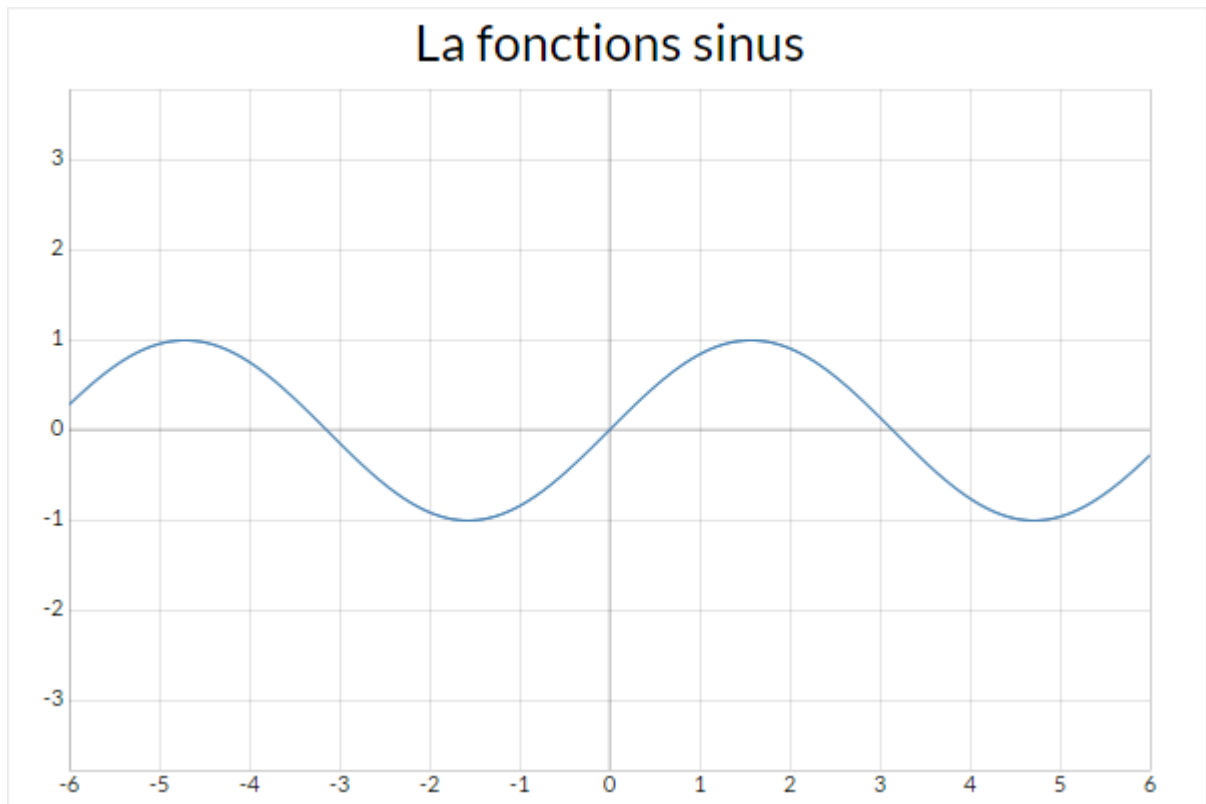
Valeur de x (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)	Valeur de $\cos(x)$	Valeur de $\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :



Ainsi que de la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc...