Chapitre IX – Dénombrement

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Définitions

1. Ensemble d'éléments

Cette partie donne quelques rappels sur la notion d'ensemble en mathématiques.

À RETENIR : DÉFINITION

Un **ensemble** E désigne une collection finie ou infinie d'objets distincts qu'on appelle ses **éléments**.

On note $x \in E$ si l'objet x appartient à E. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

À noter que l'ordre des objets n'a aucune importance lorsque l'on compare deux ensembles.

À LIRE : EXEMPLE

Voici quelques exemples d'ensembles :

— $\{2; 4; 6\}$ est un ensemble contenant 3 éléments.

— $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ sont deux ensembles contenant une infinité d'éléments.

— $\{\}$ est un ensemble ne contenant aucun élément : c'est **l'ensemble vide**, noté $\emptyset$.

— $\{1\}$ est un ensemble content 1 élément : c'est un **singleton**.

À LIRE

Il est possible de créer des ensembles contenant autre choses que des nombres. Par exemple, on définit les fonction $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3 + 1$. Alors l'ensemble $E = \{f; g\}$ est un ensemble contenant des fonctions.

À RETENIR : RÉUNION ET INTERSECTION

Soient E et F deux ensembles.

— Leur **réunion** notée $E \cup F$ est l'ensemble constitué des éléments de E et des éléments de F.

— Leur **intersection** notée $E \cap F$ est l'ensemble constitué des éléments communs à E et F.

— Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

2. Sous-ensemble

À RETENIR : DÉFINITION

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** (ou une partie) de E si tout élément de F est un élément de E.

On note ceci par $F \subset E$ (qui signifie "F est inclus dans E").

À LIRE : EXEMPLE

Soient E et F deux ensembles. Alors $E \cap F \subset E$ et $E \cap F \subset F$.

3. Liste d'éléments

Nous allons désormais voir un type de collection similaire aux ensembles, mais qui prend en compte l'ordre des éléments.

À RETENIR : DÉFINITION

Un p-**uplet** (ou une p-liste) d'un ensemble E désigne une collection ordonnée de p éléments de E.

Remarquons que l'on ne demande pas que les éléments d'un p-uplet soient tous distincts.

À LIRE : ATTENTION À L'ORDRE DES ÉLÉMENTS

Il faut bien faire attention à l'ordre des éléments ! Prenons par exemple deux points du plan $A = (1; 2)$ et $B = (2; 1)$.

On peut voir A et B comme des 2-uplets de $\mathbb{R}$. Or, ce sont deux points différents, d'où la nécessité de bien faire attention à ne pas mélanger $(1; 2)$ et $(2; 1)$.

À LIRE : NOTATION

Bien que l'on note un ensemble avec des accolades, on note plutôt un p-uplet avec des parenthèses. Ainsi :

— $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ désigne l'ensemble constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a $\{1; 2; 3; 4; 5\} = \{2; 1; 3; 4; 5\} = \{5; 4; 3; 2; 1\} = ...$).

— $(1; 2; 3; 4; 5)$ désigne le 5-uplet constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a $(1; 2; 3; 4; 5) \neq (2; 1; 3; 4; 5) \neq (5; 4; 3; 2; 1) \neq ...$).

II - Combinaisons

1. Factorielle

À RETENIR : DÉFINITION

Soit n un nombre entier. On appelle factorielle de n le nombre entier $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

À LIRE : CONVENTION

Par convention, on pose $0! = 1$.

Il est très courant de rencontrer des calculs avec des factorielles en mathématiques, leur utilisation ne se limitant pas au dénombrement.

2. Qu'est-ce-qu'une combinaison ?

À RETENIR : DÉFINITION

Une **combinaison** de k éléments parmi n éléments, notée $\binom{n}{k}$, est le nombre de sous-ensembles de k éléments que possède un ensemble de n éléments.

À RETENIR : CALCUL D'UNE COMBINAISON

Soient n et k deux entiers. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

À LIRE : EXEMPLE

Soit $E = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. On cherche à connaître le nombre de sous-ensembles de 3 éléments que possède E. Pour cela, il suffit d'appliquer la formule :

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{27!3!} = \frac{28 \times 29 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4060$$

E contient 4060 sous-ensembles de 3 éléments.

3. Formules

À RETENIR : FORMULES

Soient n et k deux entiers.

— $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

— $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

À LIRE : TRIANGLE DE PASCAL

Une autre formule très utile est $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Elle peut se retrouver à l'aide du triangle de Pascal, que l'on construit comme tel :

1. Dans une pyramide, on place un 1 au sommet de la pyramide.
2. On place 1 et 1 en dessous, de part et d'autre.
3. Les extrémités des lignes sont toujours des 1, et les autres nombres sont la somme des deux nombres directement au-dessus.

Les premières lignes du triangle de Pascal sont donc :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

On a alors que le k-ième coefficient de la n-ième ligne est égal à $\binom{n}{k}$ (en partant de 0).

III - Dénombrement

1. Principe additif

À RETENIR : PRINCIPE ADDITIF

Soient E et F deux ensembles disjoints contenant respectivement n et m éléments. Alors $E \cup F$ contient $n + m$ éléments.

À LIRE : EXEMPLE

Si on pose $E = \{1; 3; 5\}$ et $F = \{2; 4; 6; 8\}$. On a bien que E et F sont disjoints donc $E \cup F$ contient $3 + 4 = 7$ éléments.

2. Principe multiplicatif

Commençons cette sous-section par une définition.

À RETENIR : PRODUIT CARTÉSIEN

Soient E et F deux ensembles. Leur produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(e; f)$ où $e \in E$ et $f \in F$.

À LIRE : EXEMPLE

Cette définition peut sembler un peu compliquée, mais elle est en faite très intuitive. Prenons $E = \{1; 2; 3\}$ et $F = \{4; 5\}$.

Alors on a $E \times F = \{(1; 4); (1; 5); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5)\}$.

À LIRE : CONSTRUCTION DU PLAN CARTÉSIEN

Prenons maintenant $E = F = \mathbb{R}$.

Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Il s'agit en fait du plan cartésien.

À RETENIR : PRINCIPE MULTIPLICATIF

Soient E et F deux ensembles contenant respectivement n et m éléments. Alors $E \times F$ contient $n \times m$ éléments.

Ce principe (tout comme le principe additif vu précédemment) sont notamment utilisés en probabilités.

3. Formules de dénombrement

À RETENIR : PERMUTATIONS

Soit E un ensemble de taille n. On appelle **permutation** de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

À LIRE : EXEMPLE

Prenons $E = \{1; 2; 3\}$. Alors E admet 6 permutations qui sont :

— $(1; 2; 3)$

— $(1; 3; 2)$

— $(2; 1; 3)$

— $(2; 3; 1)$

— $(3; 1; 2)$

— $(3; 2; 1)$

À RETENIR : FORMULES

Soit E un ensemble possédant n éléments.

— Le nombre de p-uplets d'éléments de E est égal à n^p.

— Le nombre de p-uplets d'éléments distincts de E est égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$.

— Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

— Le nombre de sous-ensembles de E est égal à 2^n.

— Le nombre de sous-ensembles de k éléments que possède E est égal à $\binom{n}{k}$ (pour rappel).

À noter également une dernière petite formule qu'il peut-être utile de savoir démontrer à l'aide des formules ci-dessus.

À RETENIR

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un ensemble à n éléments.

Par la dernière formule de dénombrement, E a $\binom{n}{0}$ sous-ensembles qui possèdent 0 éléments, $\binom{n}{1}$ sous-ensembles qui possèdent 1 éléments, ...

En fait, pour tout k compris entre 0 et n, E a exactement $\binom{n}{k}$ sous-ensembles qui possèdent k éléments (toujours d'après la dernière formule).

Donc finalement, on obtient bien que la somme des $\binom{n}{k}$ vaut 2^n (qui est, d'après l'avant-dernière formule, le nombre de sous-ensembles que possède E).