Chapitre VII - Les intégrales

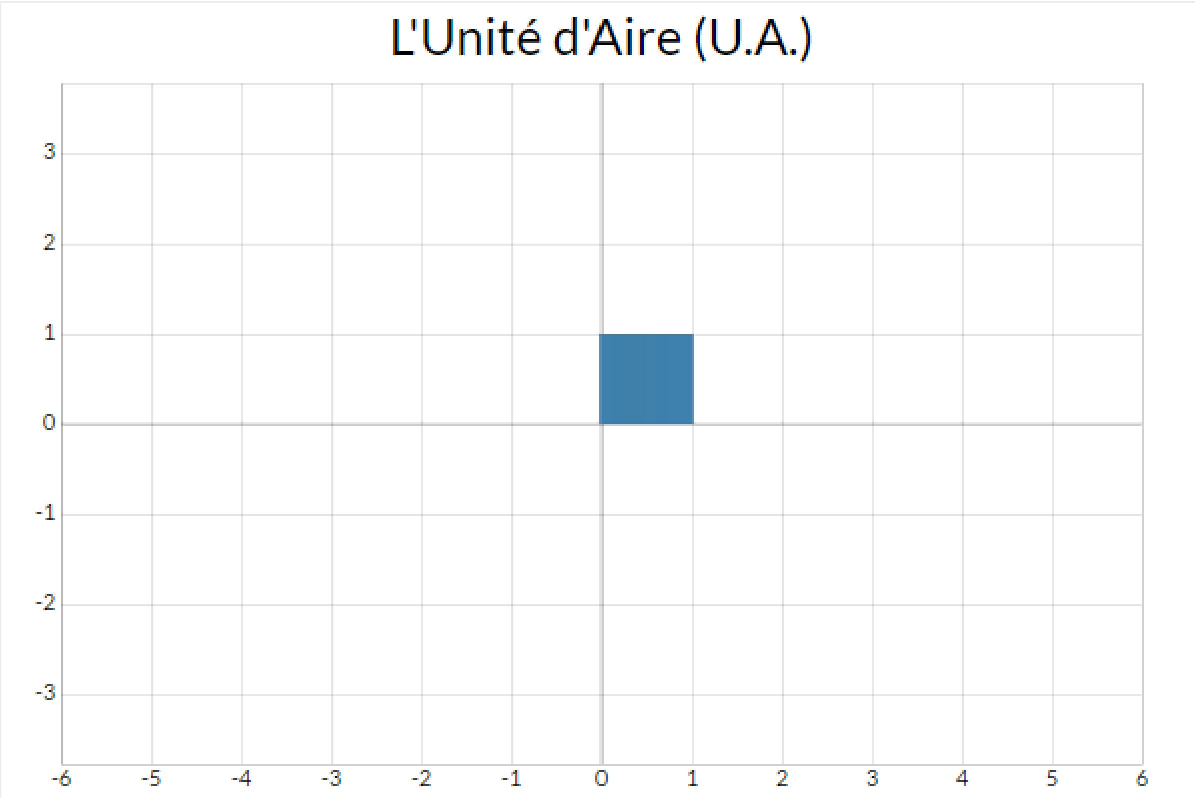
Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

Table des matières

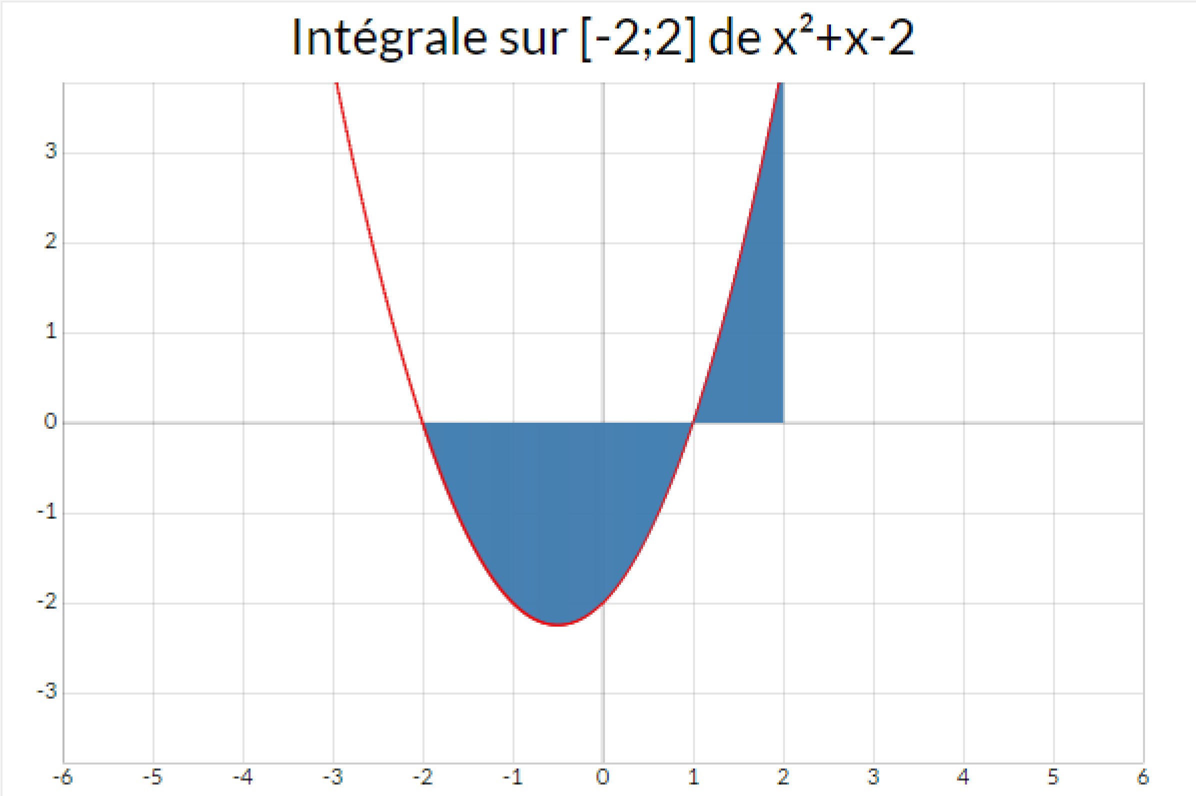
I - Calcul d'aire

1. Qu'est-ce-qu'une intégrale ?

Dans un repère orthogonal, on prends un point A(1 ; 1) et on appelle **Unité d'Aire** (U.A.) l'aire du rectangle formé par les points OIA et J.



Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction **continue** sur $[a;b]$. L'intégrale de la fonction f sur $[a;b]$ notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses délimitée par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et est exprimée en **U.A.**.



On dit que les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

2. Comment calculer une intégrale ?

Pour connaître une intégrale, il faut savoir calculer la primitive d'une fonction donnée (voir le cours sur les Primitives). Soient deux réels a et b avec une fonction f **continue** sur un intervalle I (on note F la primitive de cette fonction). Alors l'intégrale de la fonction f entre les bornes a et b est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$$

Exemple : On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; 4]$:

1ère étape : On cherche une primitive de f. On trouve $F(x) = x^2 + x = x(x + 1)$.

2nde étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_1^4 2x + 1 \, \mathrm{d}x = [x(x + 1)]_1^4 = 4(4 + 1) - 1(1 + 1) = 3 - 20 = 18$ U.A.

3. Positivité de l'intégrale

Soient deux réels a et b et une fonction f **continue** sur un intervalle I. De manière générale, le signe de l'intégrale de f sur $[a; b]$ dépend du signe de f. Ainsi :

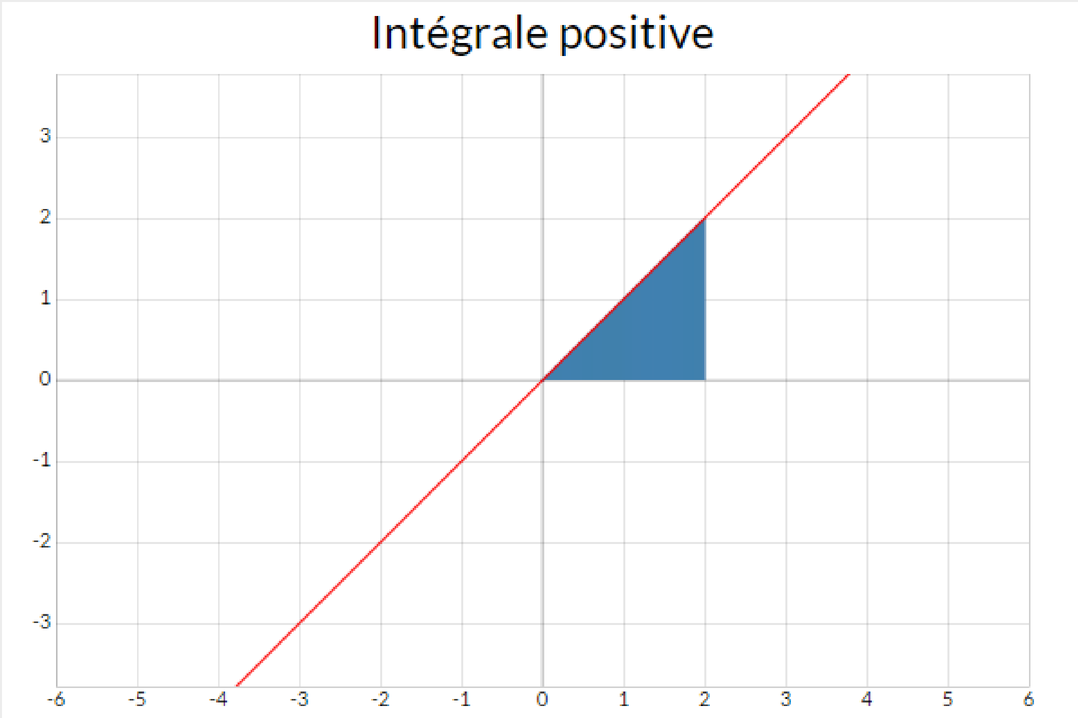
- Si $f > 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x > 0$
- Si $f < 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x < 0$
- Soit $c \in \mathbb{R}$ avec $a < c < b$. Si $f > 0$ sur $[a; c]$ et si $f < 0$ sur $[b; c]$ (ou inversement si $f < 0$ sur $[a; c]$ et si $f > 0$ sur $[b; c]$), on ne connaît pas le signe de l'intégrale. Le signe dépend de l'aire qui sera la plus "grande".
- Si $a = b$, alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = 0$.
- Soit g une fonction définie sur I avec $f > g$ sur I, alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x > \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$.

Exemple : On veut calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-2; 2]$:

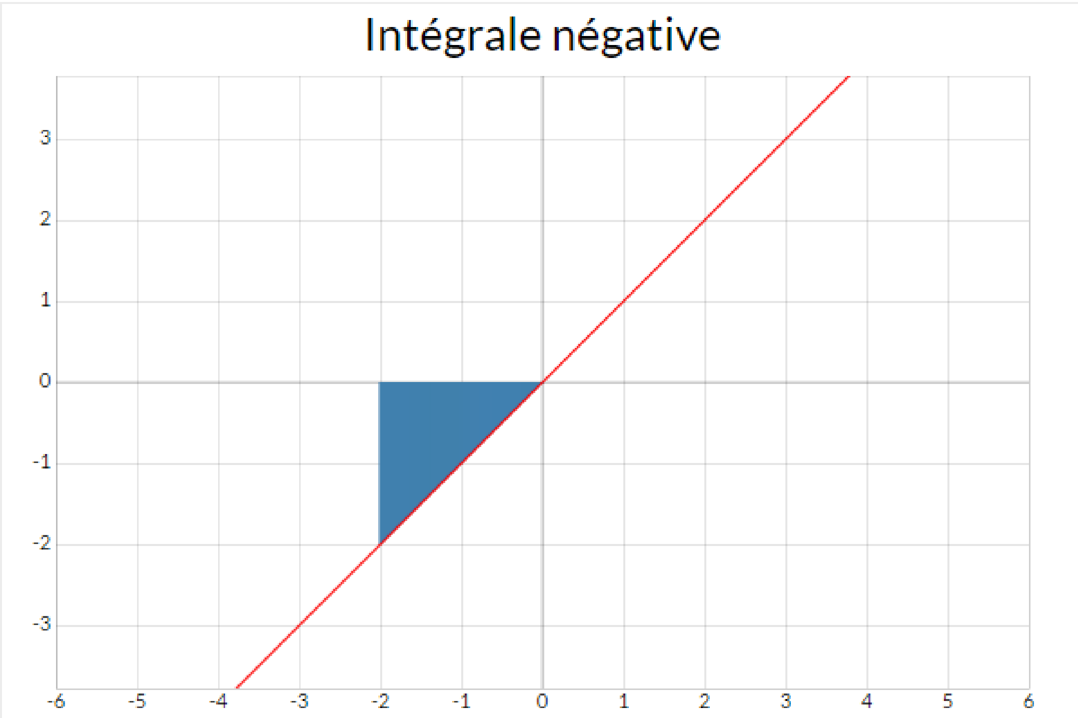
1ère étape : On cherche une primitive de f. On trouve $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

2nde étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_{-2}^2 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$ U.A. (logique car l'aire au dessus de la courbe de la fonction f sur $[-2; 0]$ est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[0; 2]$.

Ainsi, cette intégrale sera positive :



Et cette intégrale sera négative :



II - Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés algébriques

Soient deux réels a et b et une fonction f **continue** sur un intervalle I. k est un réel quelconque. On a les propriétés suivantes :

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Linéarité

Soient deux réels a et b et deux fonction f et g **continues** sur un intervalle I. k et l sont deux réels quelconques :

- $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b k \times f(x) + l \times g(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + l \times \int_b^a g(x)\,\mathrm{d}x$

3. Relation de Chasles

Soient trois réels a, b, c et une fonction f **continue** sur un intervalle I. La relation de Chasles nous donne la propriété suivante :

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple : On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie par $f(x) = |x|$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2; 4]$ (*Rappel : la fonction valeur absolue est définie par* $x \mapsto -x$ *sur* $]-\infty; 0]$ *et par* $x \mapsto x$ *sur* $[0; +\infty[$).

1ère étape : On sépare l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles : $I = \int_{-2}^4 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 -x\,\mathrm{d}x + \int_0^4 x\,\mathrm{d}x$.

2nde étape : On calcule l'intégrale. On a $I = \int_{-2}^0 -x\,\mathrm{d}x + \int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 0 - (-\frac{2^2}{2}) + ((\frac{4^2}{2}) - 0) = 10$ U.A.

III - Calculs particuliers

1. Intégrales de fonctions paires et impaires

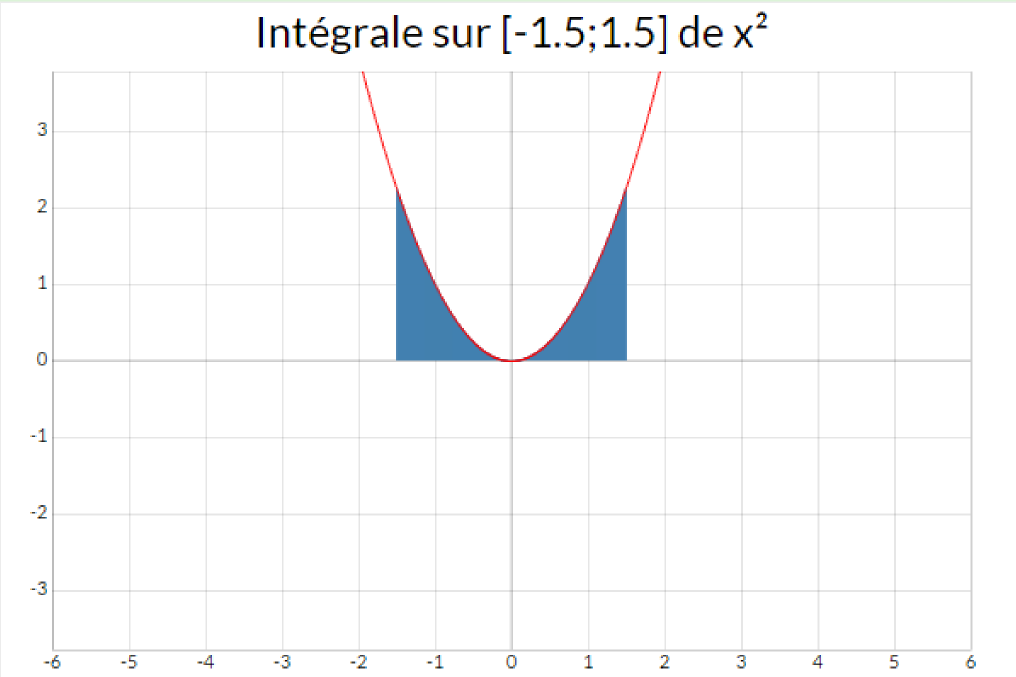
Soit f une **fonction paire** (comme $x \mapsto x^2$) définie sur I, on a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($-a$ doit être dans I) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

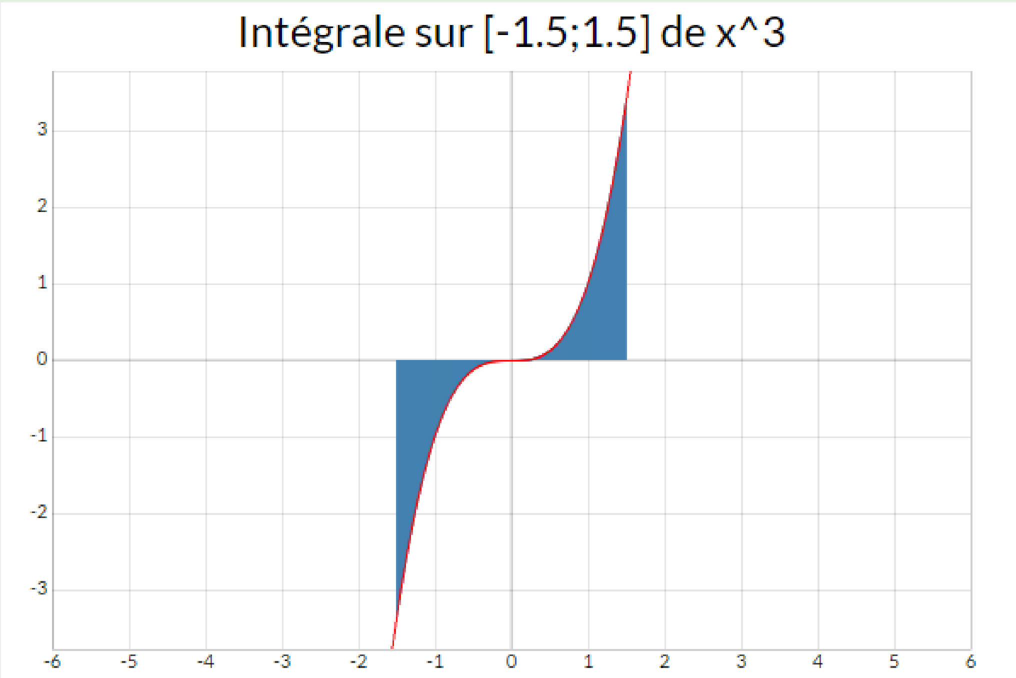
Si f est une **fonction impaire** (comme $x \mapsto x^3$), on a la relation suivante :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ces deux relations peuvent se retrouver visuellement, pour les **fonctions paires** (l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est égale à l'aire de l'autre côté de (Oy), et les deux sont positives ; on peut donc les additionner pour retrouver l'aire totale) :



Et pour les **fonctions impaires** (l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est négative et égale à l'aire de l'autre côté de (Oy) qui est positive, les deux s'annulent donc) :



2. Intégrales de fonctions périodiques

Soit f une **fonction périodique** de période k (comme $x \mapsto cos(x)$ avec $k = 2\pi$) définie sur I, on a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($-a$ doit être dans I) :

$$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{a+k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Valeur moyenne d'une fonction

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction **continue** sur $[a;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Aire entre deux courbes

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et deux fonctions f et g **continues** sur $[a; b]$. Si on $f > g$ sur cet intervalle, alors l'aire entre les deux courbes est donnée par la relation suivante :

$$\int_a^b f(x) - g(x) \, \mathrm{d}x$$

5. Primitive s'annulant en a

Soient une fonction f **continue** sur un intervalle I et un réel $a \in \mathbb{R}$. La primitive de f (notée F) qui vaut 0 quand $x = a$ est donnée par la formule :

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x$$