



## Chapitre IV – La fonction exponentielle

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Propriétés de la fonction exponentielle</b>	<b>1</b>
1. Définition . . . . .	1
2. Relations algébriques . . . . .	1
3. Représentation graphique . . . . .	2
<b>II - Étude de la fonction</b>	<b>3</b>
1. Limites . . . . .	3
2. Dérivée . . . . .	3
3. Variations . . . . .	4

## I - Propriétés de la fonction exponentielle

### 1. Définition

La **fonction exponentielle** notée  $e^x$  (ou parfois  $\exp(x)$ ) pour tout  $x$  réel est l'unique fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  remplissant les critères suivants :

#### À RETENIR

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = f$
- $f > 0$  sur  $\mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

#### À LIRE

Comme la fonction exponentielle est composée d'un réel ( $e \approx 2,718$ ) et d'un exposant réel ( $x$ ), **les opérations sur les exposants** sont disponibles, comme par exemple pour  $x, y \in \mathbb{R}$  :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{x \times y}$

Et bien entendu,  $e^0 = 1$ .

### 2. Relations algébriques

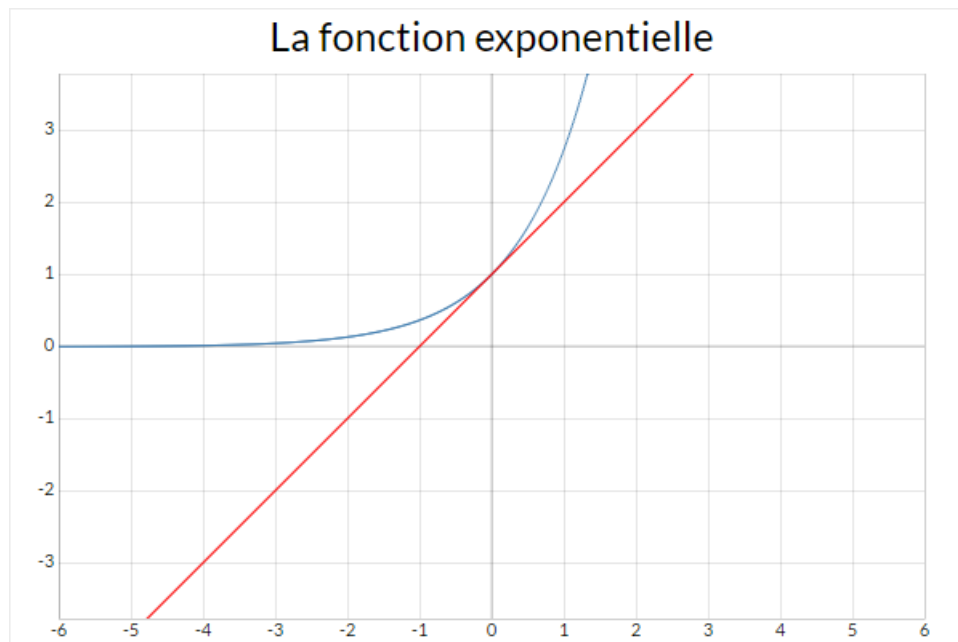
La fonction exponentielle a plusieurs propriétés algébriques qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels  $x$  et  $y$  :

#### À RETENIR

- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e^x < e^y \iff x < y$

### 3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction exponentielle (courbe bleue) et de sa tangente au point d'abscisse 0 :



On voit plusieurs propriétés données précédemment :  $e^0 = 1$ ,  $e \approx 2,718$ , etc... Mais également d'autres propriétés que verrons par la suite comme le fait que la fonction soit **strictement positive** sur  $\mathbb{R}$ . À noter que la **tangente** à sa courbe représentative en  $x = 0$  est  $y = x + 1$ .

## II - Étude de la fonction

### 1. Limites

Les limites de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition sont :

À RETENIR

$$\begin{aligned} & \text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ & \text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{aligned}$$

Il faut aussi savoir que la fonction exponentielle “l’emporte sur” (elle croît plus vite que) la fonction puissance :

À RETENIR

$$\begin{aligned} & \text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ & \text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0 \\ & \text{— } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1 \end{aligned}$$

### 2. Dérivée

Soit une fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :

À RETENIR

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Ainsi, si pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) = x$  :

À RETENIR

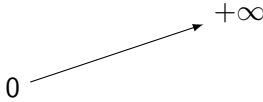
$$(e^x)' = e^x$$

Cette propriété a été donnée dans la section “Définition”.

### 3. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction exponentielle :

À RETENIR 💡

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
$e^x$		

On remarque sur le tableau de variation que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur  $\mathbb{R}$ .