Chapitre IV - La fonction exponentielle

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Propriétés de la fonction exponentielle

1. Définition

La fonction exponentielle notée e^x (ou parfois $exp(x)$) est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ remplissant les critères suivants :

— f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = f$

— $f > 0$ sur $\mathbb{R}$

— $f(0) = e^0 = 1$

Comme la fonction exponentielle est composé d'un réel ($e \approx 2,718$) et d'un exposant (x), **les opérations sur les exposants** sont disponibles, comme par exemple (liste non exhaustive) pour $x, y \in \mathbb{R}$:

— $e^{x+y} = e^x \times e^y$

— $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

— $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

— $(e^x)^y = e^{x \times y}$

Et bien entendu, $e^0 = 1$.

2. Relations algébriques

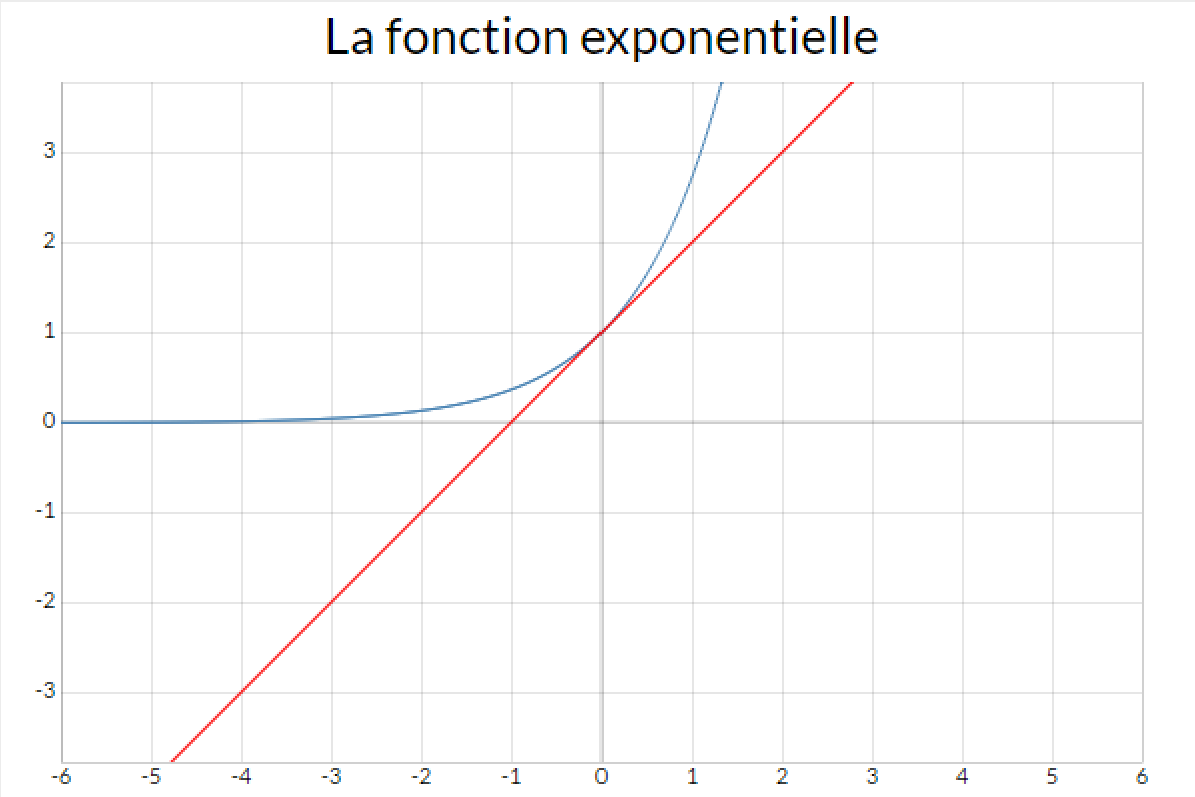
La fonction exponentielle a plusieurs propriétés algébriques qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels x et y :

— $e^x = e^y \iff x = y$

— $e^x < e^y \iff x < y$

3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction exponentielle (courbe bleue) et de sa tangente au point d'abscisse 0 :



On voit plusieurs propriétés données précédemment : la fonction est **strictement positive**, $e^0 = 1$, etc... Mais également d'autres propriétés que verrons par la suite comme les limites aux bornes de l'ensemble de définition. La **tangente** en $x = 0$ est $y = x + 1$.

II - Étude de la fonction

1. Limites

Les limites de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition sont :

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction exponentielle "l'emporte sur" (elle croît plus vite que) la fonction puissance :

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x \times e^x = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = exp'(0) = e^0 = 1$

2. Dérivée

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Ainsi, si on a $u(x) = x$ (avec $x \in \mathbb{R}$) :

$$(e^x)' = e^x$$

Cette propriété a été donnée dans la section "Définition".

3. Variations

Avec la dérivée trouvée précédemment, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0		$+\infty$

On remarque sur le tableau de variation que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.