

Chapitre III – Continuité, dérivabilité et convexité

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

I - Continuité	1
1. Définition	1
2. Théorème des valeurs intermédiaires	1
3. La partie entière $[x]$	2
II - Dérivation	3
1. Nombre dérivé	3
2. La tangente	4
3. Fonction dérivée	5
4. Applications	5
III - Tables de dérivation	7
1. Dérivées usuelles	7
2. Opérations sur les dérivées	7
3. Dérivées de composées	8
IV - Convexité	9
1. Dérivée seconde d'une fonction	9
2. Fonction convexe	9
3. Lien avec les tangentes	10

I - Continuité

1. Définition

À RETENIR : DÉFINITION

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. La fonction f est continue en a si on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

f est dite **continue** sur I , si on peut appliquer la formule ci-dessus à tous les réels de l'intervalle I .

On dit de manière générale qu'une fonction est continue sur un intervalle s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur cet intervalle "sans lever le crayon".

À RETENIR : OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

- Toute somme, produit, composée ou quotient (avec le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues est également continue sur le même intervalle.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (la réciproque n'est pas vraie cependant).

À LIRE : EXEMPLE

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition (\mathbb{R}^*) mais n'est pas continue sur \mathbb{R} .

2. Théorème des valeurs intermédiaires

À RETENIR : THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel y_0 tel que $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **au moins** un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

À LIRE : EXEMPLE

Ce théorème est **très important** ! Voici un exemple : soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$. Prouvons qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x_0) = 5$. On a $f(0) = 0$ et $f(3) = 33$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[0; 3]$ et que $0 < 5 < 33$, il existe un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x_0) = 5$.

On peut encore tenter d'affiner la précision : $f(1) = 1$ et $f(2) = 10$. On a bien $1 < 5 < 10$ donc $x_0 \in [1; 2]$, etc...

À LIRE ☞

Une conséquence de ce théorème est que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors la fonction f s'annule au moins une fois entre a et b .

Enfin, il existe un corollaire permettant qui donne en plus **l'unicité** du point x_0 .

À RETENIR : COROLLAIRE 💡

Si f est continue sur $[a; b]$ et que f est **strictement monotone** sur cet intervalle, alors pour tout réel y_0 tel que $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **un unique** réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

3. La partie entière $[x]$

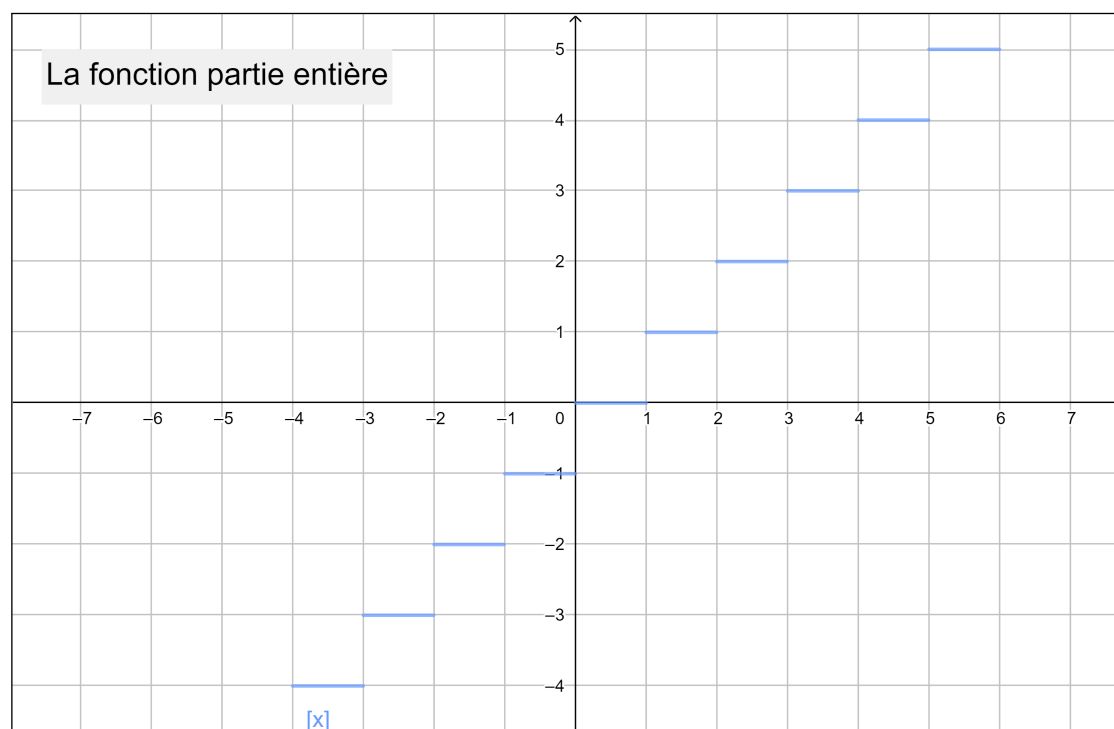
À RETENIR : DÉFINITION 💡

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **partie entière** de x notée $[x]$ (ou $E(x)$) est l'unique réel tel que : $[x] \leq x < [x] + 1$.

À LIRE : EXEMPLE ☞

$[1, 216] = 1$ et $[-2, 198] = -3$.

La fonction partie entière définie par $x \mapsto [x]$ **n'est pas continue** sur \mathbb{R} :



II - Dérivation

1. Nombre dérivé

À RETENIR : DÉFINITION

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $(a + h) \in I$.

La fonction f est **dérivable** en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$.

À LIRE : REMARQUE

Notez bien que toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

2. La tangente

À RETENIR : ÉQUATION DE LA TANGENTE

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet une tangente \mathcal{T} au point de coordonnées $(a; f(a))$.

De plus, $f'(a)$ est le coefficient directeur de \mathcal{T} , et une équation de \mathcal{T} est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

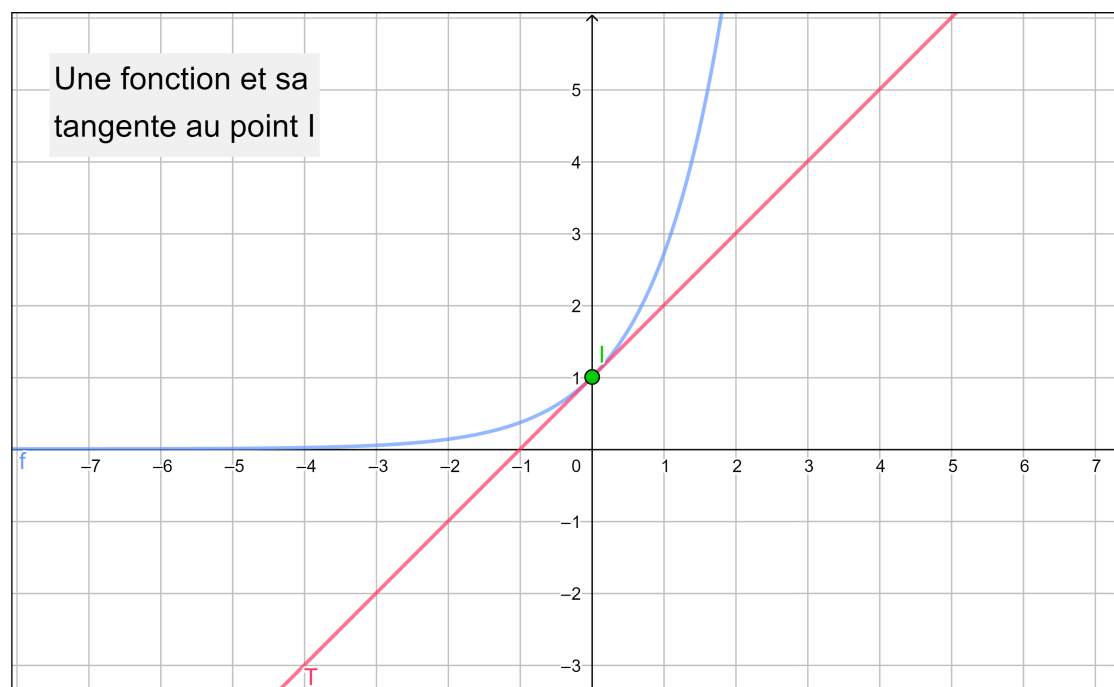
À LIRE : EXEMPLE

Soit $f(x) = e^x$ définie sur \mathbb{R} (voir cours sur la fonction exponentielle).

Cherchons une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$:

On a $f'(x) = f(x)$ donc $f'(0) = 1$.

Par conséquent, une équation de la tangente est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$: on retrouve ce qui a été constaté sur la représentation graphique de la fonction exponentielle.



3. Fonction dérivée

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de f la fonction g qui à tout réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ (i.e. $g(x) = f'(x)$).

Très souvent, la fonction g sera notée f' .

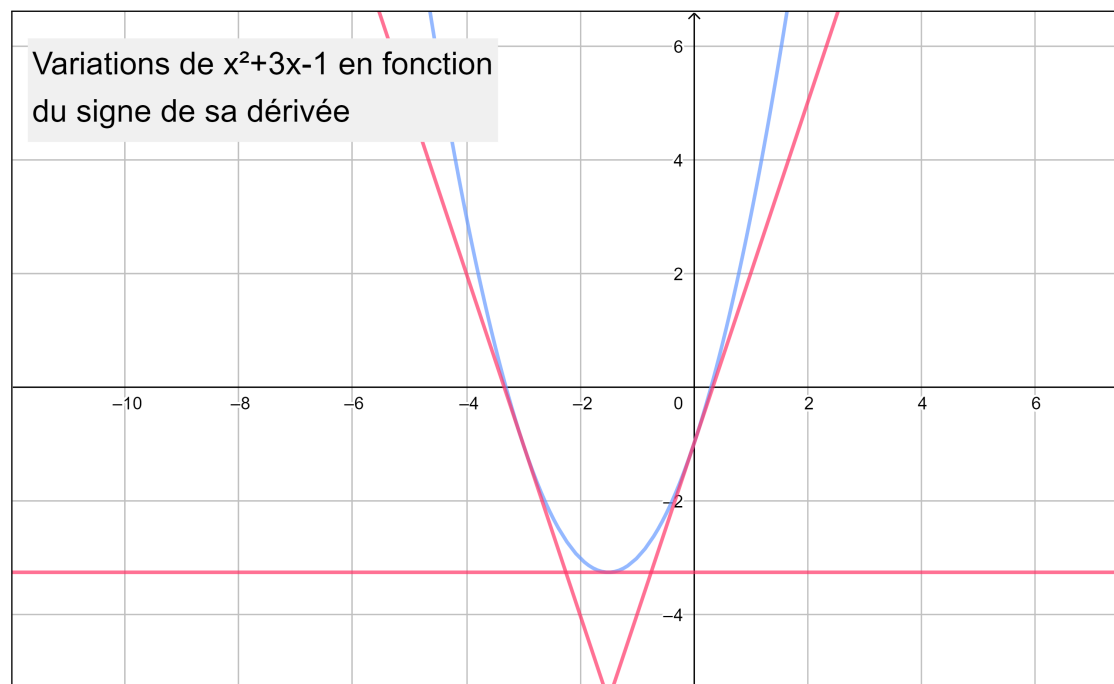
4. Applications

Plusieurs applications peuvent être trouvées aux dérivées. Avec le signe de la dérivée d'une fonction, il est possible d'obtenir le sens de variation de cette fonction.

À RETENIR : VARIATIONS D'UNE FONCTION

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .



Il est également possible d'en déduire diverses propriétés sur les extrema dits "locaux" (sur un certain intervalle) d'une fonction.

À RETENIR : ÉTUDE DES EXTREMA

Soient f dérivable sur un intervalle I , et $a \in I$:

- Si f admet un extremum local en a , alors on a $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a , alors $f'(a)$ est un extremum local de f .
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

III - Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Soit λ une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
λ	0	\mathbb{R}
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_*^+
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_*^+
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions u et v :

À RETENIR

Soient deux fonctions u et v et soit λ une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où u est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où v est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où u et v sont dérivables et non nulles.

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles :

À RETENIR 💡

Soit u une fonction.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

À RETENIR : DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE 💡

Soient f dérivable sur I et g dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par f sur I . On a alors $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

À LIRE : FONCTION COMPOSÉE ↔

On rappelle que la fonction $g \circ f$ est la fonction définie pour tout x par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

IV - Convexité

1. Dérivée seconde d'une fonction

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée f' dérivable sur I .

On appelle **dérivée seconde** (notée f'') de f , la fonction dérivée de f' .

Ainsi, pour calculer f'' , on calcule d'abord f' , puis on dérive f' .

À LIRE : EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$. Calculons f'' .

On applique la formule pour dérivée $\sin(u)$ (où u est la fonction $u : x \mapsto 2x$) :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u' \cos(u) = 2 \cos(2x)$.

Pour finir, il suffit juste de dériver f' : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2 \times (-2 \sin(2x)) = -4 \sin(2x)$.

2. Fonction convexe

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée f' dérivable sur I .

- On dit que f est **convexe** sur I si f'' est positive sur I .
- On dit que f est **concave** sur I si f'' est négative sur I .
- On dit que $a \in I$ est un **point d'inflexion** si f'' change de signe en a (i.e. $f''(a) = 0$ et f'' est positive avant a puis négative après ou inversement).

À LIRE

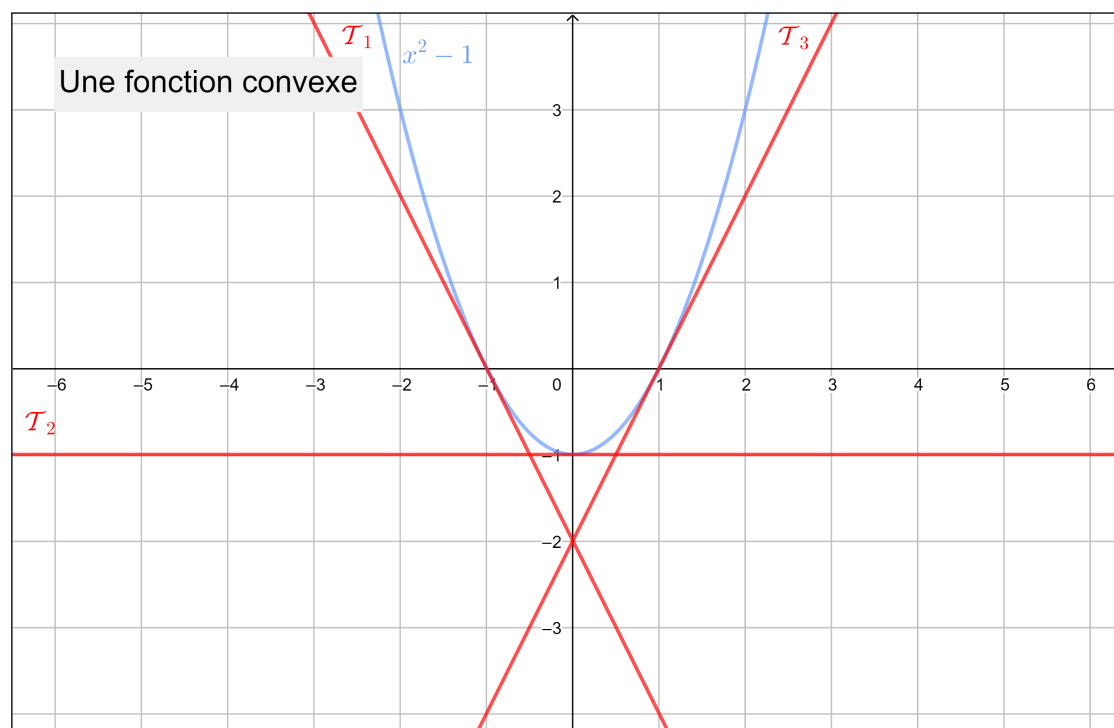
Dire que f'' est positive sur I revient à dire que f' est croissante sur I . De même, dire que f'' est négative sur I revient à dire que f' est décroissante sur I .

3. Lien avec les tangentes

À RETENIR : LIEN AVEC LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée f' dérivable sur I . On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

- f est **convexe** sur I si \mathcal{C}_f est au-dessus de chacune de ses tangentes sur I .
- f est **concave** sur I si \mathcal{C}_f est en-dessous de chacune de ses tangentes sur I .



À LIRE : EXEMPLE

À titre d'exemple, la fonction exponentielle est une fonction convexe.