Physics Laboratory

Last modified : 2017-10-10

단 학기 실험 4. 물체 흔들이의 운동

실험 목적

평형 상태를 갖는 모든 계는 작은 변화에 대하여 되돌이 특성을 갖는다. 역학계에서의 되돌이 특성은 복원력으로 나타난다. 특히 평형 상태로부터의 변화가 아주 작을 때 복원력의 크기는 변화의 정도에 비례한다. 또, 역학계는 운동 상태를 그대로 유지하려는 관성도 가지고 있다. 이 복원력과 관성이 함께 나타날 때 계는 홑어울림 운동(단조화 운동)을 하게 된다. 용수철에 매달린 물체, 흔들이, LC 전기 회로, 고체 물질이나 분자 내에서의 원자의 진동 등 많은 물리계에서 단조화 운동이 나타나며, 따라서 물리학에서 단조화 운동은 매우 중요시되고 있다.

이 실험에서는 1 m 막대 자에 구멍을 뚫어서 흔들이(진자)로 사용한다. 본 실험에서 막대 자의 질량이 무시할 수 없는 크기로 주어지므로, 물리진자의 주기 운동을 다루게 된다. 흔들이의 단조화 운동의 주기를 측정하고 이론 식과 비교하여 진자로 사용할 때의 물체의 운동에 대해서 살펴본다. 단조화 운동을 하는 대부분의 역학계는 평형 상태로부터의 변화가 아주 커지면 복원력이 더 이상 변화량에 비례하지 않고 비선형 효과가 나타난다. 여기서 진자의 진폭이 클 때 생겨나는 단조화 운동의 비선형 효과에 대해서도 공부한다.

– Halliday & Resnick 일반물리학 책에서

그네를 흔들이로 생각해 본 적이 있는가? 다른 시각으로 보면 같은 현상도 새롭게 보일 수 가 있다. 이제 그네를 타는 사람의 무게나 흔들림의 너비에 상관없이 그네의 주기가 일정 한 것이 당연하게 느껴질 것이다. 그네를 탄 사람이 어떻게 자신의 진동 에너지를 증가시킬 수 있는가 생각해 보라.

실험 개요

- 물체 흔들이의 운동을 실험하고 홑어울림 운동의 주기가 어떻게 결정되는지 살펴본 다.
- 자연계에서 홑어울림 운동이 흔히 보이는 이유와 홑어울림 운동을 하는 물체의 운동에너지와 퍼텐셜에너지 사이의 교환을 이해한다.
- 물체 흔들이의 홑어울림 운동의 비선형 효과에 대해 알아본다.

실험 방법

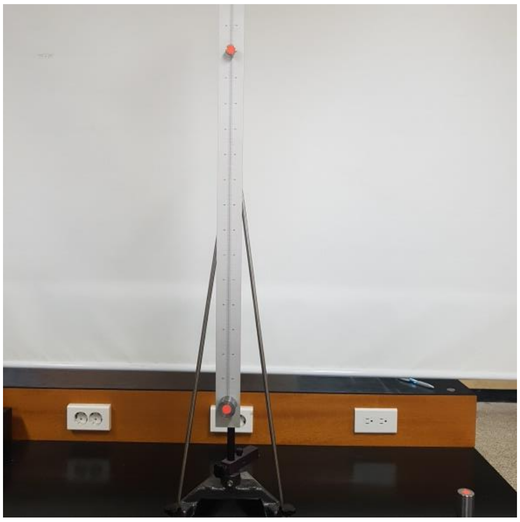
실험실에는 이 실험을 위해서 다음과 같은 장치가 준비되어 있다.

(괄호 안은 준비된 개 수)

CCD CAMERA (1)

스탠드(단진자 운동용) (1)

막대 (110cm)(1) 대략 760g



질량이 다른 추 (2)

팔 저울 (2, 공용)

이외에도 더 필요한 것이 있으면 담당 조교나 실험 준비실(19동 114호)로 문의하거나 각자가 준비하도록 한다.

- ✓ **권장할 만한 표준적인 실험 방법은 다음과 같다.**

1) 막대를 자유로이 흔들리도록 스탠드에 걸고, 흔들 운동의 주기를 측정한다.

① 스크린을 설치하고 그 앞에 스텐드를 준비하고, I-CA 시스템을 설치한다.
(참고) 카메라는 구면수차를 감안하여 2~3m 뒤에 설치하고 줌을 조절하여 실험하기 좋은 화면을 맞춘다.
스탠드는 수직이 되도록 조정하고 그 면에 카메라를 수직이 되도록 맞춘다.

② 실험 장치를 수직되게 조절한다.

③ 카메라 셋팅이 끝나면, 막대에 기준점을 표시하고 화면을 캡쳐하여 스케일 및 좌표계를 설정한다.

④ 진자의 회전축을 일정한 지점에 고정하여 (막대의 30cm 지점 홈 등) 운동시키고 화면을 캡쳐한다. 진폭은 작게 하고 촬영시간은 진자가 4~5회 정도 왕복하면 충분하다.

★ (주의) 진폭이 적어야 근사식을 쓸 수 있으나, 진폭이 너무 적으면 진자를 매단 부분에서의 실의 복원력의 영향이 지배적이고, 운동 반경이 너무 작아 색상인식에서의 오차로 인한 측정오차가 커진다.
따라서 진자의 길이는 길고, 무거운 것이 실험에 유리하고 각도는 4° 이상의 영역을 선택하는 것이 좋다.

⑤ 저장된 파일을 분석하여 주기를 구한다.

<u>*★ (참고) 분석은 그래프 그리기를 이용하여 T-X에 관한 그래프를 그리고, 이때 그래프 형식은 피사체 1, 회귀형식은 없음으로 한다.*</u>
분석결과의 X 좌표값을 이용하여 주기를 계산한다. 주기는 최대값에서 다음 최대값까지의 시간으로 계산하며 2주기 단위로 나누어 계산한다.

⑥ 진자의 높이가 최대가 되는 지점으로 이동 각도 구하기를 이용하여 진자가 Y축과 이루는 각도를 구한다. 또는 실험 결과 데이터에서 Maximum 지점 x,y 데이터를 이용하여 각도를 계산할 수 있다.

⑦ 진폭의 각도를 4~30° 사이에서 늘려가면서 동일한 실험을 3~5회 반복하다.

⑧ 회전축의 위치를 바꾸어 위의 ⑤~⑦번 과정을 반복 측정한다.

⑨ 실험데이터로부터 단진자 운동을 단순조화운동으로 근사할 수 있는 영역과 보정식을 쓸 수 있는 영역, 비선형효과를 고려하지 않을 수 없는 영역 등으로 구분하여 본다.

★ 보정식에 관한 것은 교재 등을 찾아 보도록 하자.

★ 각 실험 경우에 대해서 평행축 정리를 이용해 관성모멘트를 계산하자.

$$\mathrm{I} = \frac{1}{12}ML^2 + \mathrm{M}h^2 + m(h + \frac{1}{2}L)^2, \mathrm{m} = \text{추질량},$$

$$\mathrm{h} = \text{막대중심으로부터 회전축사이 거리}$$

이때 추의 위치는 추의 질량중심 위치의 정확한 지점으로 다시 계산한다.

⑩ 물리진자의 주기 공식과 실험결과 주기 값을 이용하여 중력가속도를 계산하여본다.

이 때 오차는 어느 정도 발생하며, 그 원인은 무엇일까?

실험 노트의 작성은 다음과 같은 방법으로 하는 것이 좋다.

1) 회전축의 위치에 따른 주기 T 의 측정

막대의 질량 중심으로부터 회전축 의 위치 = 1. 2. 3. (m)

측정 횟수 / 주기T (s) = 1. 2. 3.

1

2

3

4

5

평균값 : T_{AV} =

[위의 결과에서 실험적으로 구한 주기T와 이론적 주기 공식을 이용하여 중력가속도 g를 계산해보자.]

2) 추의 무게에 따른 주기의 변화 측정

추가 없을 때, 질량이 다른 두 추를 각각 추가했을 때

추의 무게 = 1. 2. 3.

측정 횟수 / 주기T (s) = 1. 2. 3.

1

2

3

4

5

평균값 : T_{AV} =

---

3) 흔들림의 크기에 따른 주기의 변화 측정

흔들림의 크기 = 1. 2. 3. (degree)

★실험실에는 각도기가 없으니 진자운동 진폭의 변인을 통제할 방법을 생각해보는 것이 좋다.

측정 횟수 / 주기T (s) = 1. 2. 3.

1

2

3

4

5

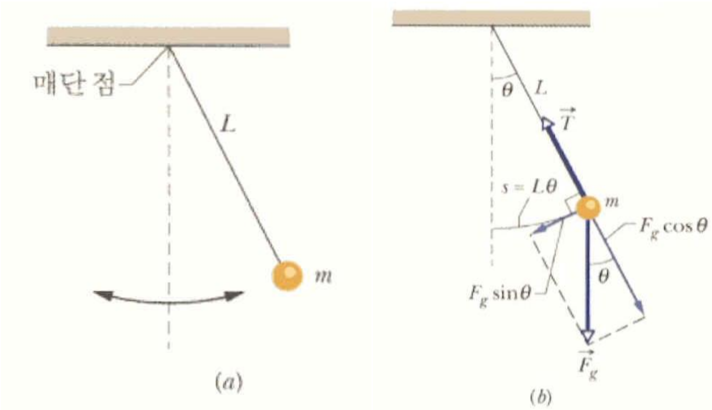
평균값 : T_{AV} =

배경 이론

➢ 질량이 없는 실에 매달린 물체의 주기 운동

한 끝이 고정된 줄에 사과를 매달고 좌우로 흔들면 사과가 앞뒤로 작은 거리를 왔다갔다 하며 주기적인 운동을 하는데 이 운동이 과연 단조화 운동이겠는가? 만일 그렇다면 진동의 주기 T는 얼마인가? 그림(1.a)는 단진자로서 질량이 m인 입자(추)와 질량이 없고 늘어나지 않는 길이가 L인 실로 구성되어 있다. 추는 매단 점을 지나는 수직선의 좌우로

그림면 위에서 자유롭게 진동한다. 추에 가해지는 힘은 그림(1.b)와 같이 같이 장력 T와 중력 F_g가 있다 줄과 수직선이 이루는 각도가 θ일때 중력 F_g를 지름성분 $F_g\cos\theta$와 접선성분 $F_g\sin\theta$로 나누자. 이 때 중력의 접선성분은 항상 진자의 각변위를 줄이려는 방향으로 작용하여 진자의 매단 점을 지나는 축에 대한 회전운동을 평형상태($\theta=0$)로 복원시키려는 돌림힘을 주게 된다.



[그림(1)]

돌림힘 τ 는 $\tau = r \times F$ 에서 복원 돌림힘은 다음과 같다.

$$\tau = -L(F_g\ sin\theta) \tag{1}$$

위 식에서 음의 부호는 돌림힘이 각도 θ를 줄이려는 방향으로 작용함을 뜻한다. L은 힘 $F_g sin\theta$ 가 가해질 때의 매단 점을 회전축으로 하는 모멘트팔의 크기이다. 식(1)을 $\tau = I\alpha$에 대입하여 풀면

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha \tag{2}$$

를 얻는다. 여기서 I는 진자의 매단 점에 대한 회전관성(관성모멘트)이고 α는 회전운동의 각가속도이다.

식(2)에서 각변위 θ가 작다면 $\sin\theta$를 θ로 근사할 수 있다. (라디안으로 나타냈을 경우) 예컨대, $\theta = 5.00°\ = 0.0873$ rad인 경우 $\sin\theta\ = 0.0872$이므로 두 값의 차이는 0.1%밖에 나지 않는다. 따라서 어림잡아서 식을 정리하면

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \tag{3}$$

가 된다. 그런데 이 식은 단조화진동에서 단진자의 각가속도 α의 크기는 각변위 θ와

비례하고 부호가 반대임을 보여주고 있다. 따라서 진자의 추가 그림(1.a)처럼 오른쪽으로 움직이면 가속도가 증가하여 추가 잠깐 섰다가 왼쪽으로 다시 움직이게 된다. 정확히 말하자면 작은 각도 내에서 움직이는 단진자의 움직임은 어림잡아서 단조화진동과 같다. 즉, 각진폭 θ_m(진자가 움직이는 최대 각도)이 작아야 한다. 식 (3)과 단조화진동 운동에서 각가속도와 변위의 관계식 $\alpha(t) = -\varpi^2 x(t)$ 을 비교하면 진자의 진동 각진동수는 $\varpi = \sqrt{mgL/I}$ 임을 알 수 있다. 또한 식 $\varpi = 2\pi/T$ 를 이용하면 진자의 진동주기는 다음과 같다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (4)$$

단진자에서는 모든 질량 m이 진자의 추처럼 매단 점에서 L만큼 떨어진 곳에 몰려 있다고 가정한다. 이 경우 식 $I = mr^2$ 에 따라 진자의 회전관성은 $I = mL^2$ 이며, 이 값은 위 식에 대입하면, 작은 각도로 진동하는 단진자의 주기는 다음과 같이 된다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(단진자, 작은 진폭)} \qquad (5)$$

➢ 물리진자(Physical Pendulum)에서의 주기 운동

우리는 길이 l 의 실에 매인 질량 m 인 점(질점)의 흔들 운동의 주기가

$$T = 2\pi (l/g)^{1/2} \qquad (g : \text{중력 가속도}) \qquad (1)$$

인 것을 알고 있다. 이를 다시

$$T = 2\pi (ml^2/mgl)^{1/2} \qquad (2)$$

이라고 쓰면, 흔들 운동의 주기는 (돌기)운동을 계속하려는 회전 관성(ml^2)과 안정된 상태로 되돌아오려는 되돌이 돌림힘(mgl)의 비에 의해 결정됨을 알 수 있다.

이 실험에서 사용하는 나무 막대와 같이 질량이 한 점에 모여 있지 않고 널려져 있는 물체를 흔들이로 사용할 때 물체 흔들이(physical pendulum)라고 부른다. 물체 흔들이의 떨기 운동의 주기 T 는 일반적으로

$$T = 2\pi (I/Mgh)^{1/2} \qquad (3)$$

로 주어지며, 여기서 I 는 흔들이의 흔들 운동에 따른 관성 모멘트 , M 은 질량, h 는 흔들이의 매어진 곳에서부터 질량 중심까지의 거리, g 는 중력 가속도이다.

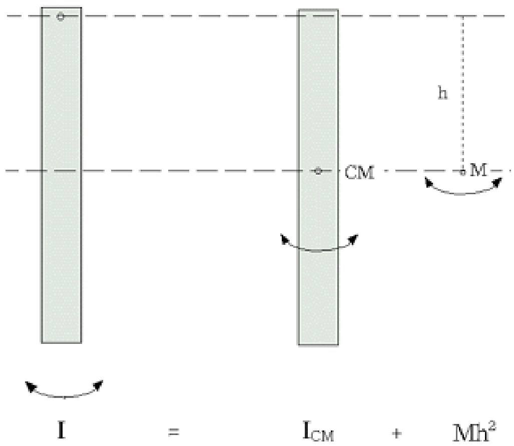
이 실험에서 흔들이의 메인 축에 대한 관성 모멘트 I 는 막대의 질량을 M, 길이를 L 이라고 하고 또, 균일한 물체로 가정하면 평행축 정리를 적용하여

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad (4)$$

이며, 여기서 I_{CM} 은 질량 중심을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트로서

$$I_{CM} = M(L^2/12) \qquad (5)$$

이다.



따라서 이 흔들이의 관성 모멘트는

$$I = M(L^2/12 + h^2) \qquad (6)$$

이고, 주기는 식(1)에서

$$T = 2\pi \left[\frac{\frac{L^2}{12}+h^2}{gh}\right]^{1/2} \qquad (7)$$

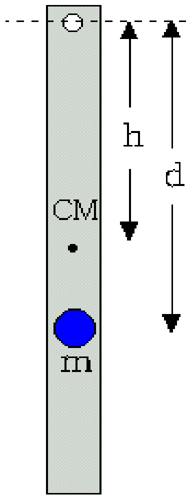
가 된다.

막대의 길이 L = 1 m 와 중력 가속도 $g = 9.8\ m/s^2$ 를 사용하면, 매단 곳으로부터 중심

까지의 거리가 h(m) 인 이 물체 흔들이의 주기는

$$T = [4.02\ h + 0.335/h\ ]^{1/2}\ (s) \qquad (8)$$

이다. 따라서 이 흔들이의 주기는 h = 0.29 m 에서 최소 T_{min} = 1.52 s 가 되며 h = 0 즉, 중심에 가까워지면 무한히 길어진다. 주기가 무한히 길어진다는 것은 거꾸로 되돌아 오지 않는다는 것을 의미하는데, 축이나 공기와의 쓸림이 없다면 중심에 뚫린 구멍에 매단 막대는 계속 한 방향으로만 돌게 될 것이기 때문이다.



막대가 매어진 곳으로부터 거리 d 만큼 떨어진 곳에 질량 m 인 추를 매단 경우를 생각해 보면, 주기의 표현식(3)에서의 흔들이의 관성 모멘트는

$$I_{total} = I_{막대} + I_{추} = M(L^2/12 + h^2) + md^2 \qquad (9)$$

이고, 새로운 질량 중심의 위치는 막대가 매어진 곳으로부터

$$h' = (Mh + md)/(M + m) \qquad (10)$$

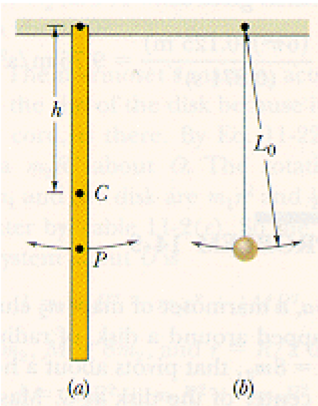
만큼 떨어진 곳이다. 이 (복합) 물체 흔들이의 흔들 운동의 주기는

$$T = 2\pi\left[\frac{M\left(\frac{L^2}{12}+h^2\right)+md^2}{(Mh+Md)g}\right]^{1/2} \qquad (11)$$

으로, 추의 질량뿐만 아니라 위치에도 의존하게 된다.

- **흔들림의 중심**(center of oscillation)

앞뒤가 또는 위아래가 구별되지 않는 가운데를 물체의 중심이라고 부른다. 또, 물체의 질량에 의한 효과(관성, 중력)가 어느 한곳에 물체의 전 질량이 점(질점)으로 되어 있는 경우와 같은 곳을 (질량) 중심이라고 부른다. 그러면 물체 흔들이와 같은 주기를 가지면서, 물체의 전 질량이 한 점으로 되어 있는 흔들이의 실의 길이 L_0 는 얼마일까?



 량이 M, 길이가 L 인 균일한 막대의 한 끝을 매달아 흔들이로 사용하는 경우, 매단 곳으로부터 질량 중심까지의 거리가 h = L/2 이므로, 식(7)에서

$$T = 2\pi \left[\frac{2l}{3g}\right]^{1/2} \qquad (A1)$$

이다. 이 주기와 같은 주기를 갖는 실의 길이 L_0 는 식(1)로부터

$$2L/3g = L_0/g \qquad (A2)$$

즉,

$$L_0 = (2/3)L \qquad (A3)$$

이다.

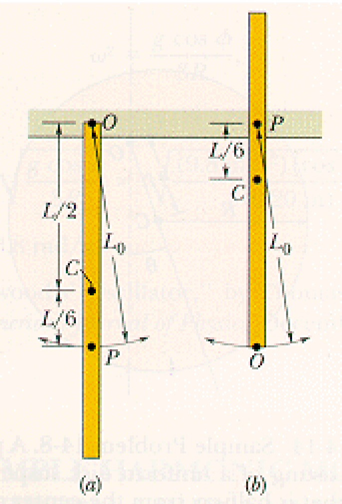
다른 한편으로 막대를 매단 곳을 서서히 질량 중심 가까이로 이동시키면 흔들이의 주기는 처음에는 감소하다가(∵ 식(7)의 분자에서 h^2 감소) 나중에는 증가한다(∵ 식(7)의 분모에서 h 감소). 따라서 원래의 주기 T 와 주기가 같아지는 거리 h' 이 존재한다. 이 거리 h' 을 구하기 위하여 식(7)에 h 대신 h' 을 사용한 주기와 T 를 같게 놓으면

$$(L^2/12 + h'^2)/h' = 2L/3 \qquad (A4)$$

이고, 이로부터

$$h'^2 - (2/3)Lh' + L^2/12 = 0 \qquad (A5)$$

이다. 즉, h' = L/6 과 L/2 인데, 이중 h' = L/2 인 경우는 주기 T = ∞ 이므로 구하는 해는 h' = L/6 이 된다. 즉, 한 끝으로부터 (A3)의 L_0 와 같은 길이인 (2/3)L 떨어진 곳을 매단 흔들이의 주기는 한 끝을 맨단 흔들이의 경우와 같다. 이 위치를 흔들림의 중심이라고 한다.



참고사항

- 흔들 운동의 주기 측정 방법 – 빛살문(photogate) 계시기
- 측정 데이터 처리 방법
- 그래프에 의한 분석 방법
- 크리스찬 호이겐스 – 흔들이 시계를 발명한 파동학의 선구자
- 흔들이의 간단한 역사
- 흔들이에서의 비선형 효과