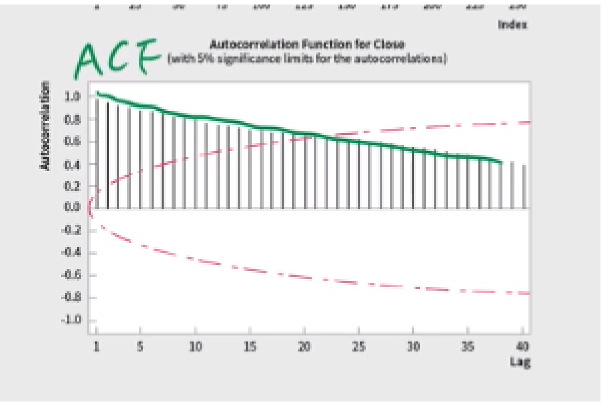
Week 4 비정상적 시계열

비정상적 시계열: 추세 또는 계절성이 포함되는 경우

판단 방법:

- 그래프를 보고 시각적으로 판단
- ACF가 시차에 대하여 서서히 감소



- 단위근 검정

비정상 시계열은

- 차분을 통해 정상적 시계열로 변환
- 함수변환을 통해 분산 안정화 (ex: log)
- 분해법으로 추세 및 계절성 제거

차분

- 1차 차분: 인근한 두 값의 차이를 산출하는

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t$$

B는 후방 연산자

- 2차 차분: 1차 차분에 대한 차분 (보통 2차 차분으로 문제 해결됨)

$$\Delta^2 Z_t = \Delta(\Delta Z_t) = \Delta(Z_t - Z_{t-1}) = (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-1} - Z_{t-2}) = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$
$$= (1 - 2B + B^2)Z_t = (1 - B)^2 Z_t$$

- d차 차분

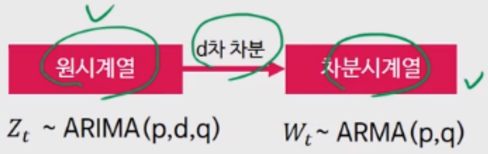
$$\Delta^d Z_t = (1-B)^d Z_t$$

ARIMA 모형

- 누적시계열: d차 차분 후 정상적일 때, 원 시계열을 차수 d 누적시계열이라고 함 I(d)

- ARIMA (autoregressive integrated moving average) 모형
  - d차 차분한 시계열이 정상적 ARMA(p,q)모형을 따를 때, 원 시계열이 ARIMA(p,d,q)모형을 따른다고 함.
  - 차분시계열 $W_t = (1-B)^d Z_t$
  - 차분시계열이 ARMA(p,q): $\phi_p(B) W_t = \theta_q(B) a_t$
  - 즉, 다음이 성립

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B) a_t$$



- 차분시계열이 ARMA 모형이 될 때 원시계열은 ARIMA 모형이고 차분한 횟수만큼 ARIMA 모형
- 일반적인 비정상적 모델은 비계절성과 계절성 ARIMA 모델이 결합된

계절성 시계열

- 차분으로는 계절성이 남을 수 있음
- 계절성 차분: 계절성 주기 s (월별 s = 12, 분기 s = 4)

- 1차 계절성 차분: 인근한 두 계절 값의 차이를 산출

$$\Delta_s Z_t = Z_t - Z_{t-s} = (1-B^s) Z_t$$

모형 식별 및 추정

1. 시계열도를 그려서 추세 및 계절성 존재여부 판단
2. 차분 실시
   a. 추세 X 계절성 O - 해당 주기에 대한 계절성 차분

b. 추세 O 계절성 X - 선형 추세 → 1차 차분 / 곡선형태 추세 > 차분 전에 함수 변환 시도 (로그)

c. 추세 O 계절성 O - 우선 계절성 차분을 하고 추세 검토 / 있으면 1차 차분

3. 차분 시계열에 대한 ACF와 PACF를 바탕으로 p,q, P,Q 결정
4. 모형 파라미터 추정
5. 잔차 검정

ACF 산출 예

- 계절성 $ARIMA\,(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$
- 차분시계열 산출 $W_t = (1-B)(1-B^{12})Z_t$
- 모형: $W_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})a_t = a_t - \theta a_{t-1} - \Theta\, a_{t-12} + \theta\Theta\, a_{t-13}$
- W_t 분산

  $\gamma(0) = Var[W_t] = (1+\theta^2+\Theta^2+\theta^2\Theta^2)\sigma_a^2 = (1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2$
- 시차 k의 자기공분산

$$\gamma(k) = E[W_t W_{t-k}] = E[(a_t - \theta a_{t-1} - \Theta\, a_{t-12} + \theta\Theta\, a_{t-13})(a_{t-k} - \theta a_{t-k-1} - \Theta\, a_{t-k-12} + \theta\Theta\, a_{t-k-13})]$$

- ACF

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-\theta(1+\Theta^2)\sigma_a^2}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$\rho(11) = \frac{\gamma(11)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\Theta\sigma_a^2}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2} = \frac{\theta\Theta}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)} = \rho(13)$$

$$\rho(12) = \frac{\gamma(12)}{\gamma(0)} = \frac{-\Theta(1+\theta^2)\sigma_a^2}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2} = \frac{-\Theta}{1+\Theta^2}$$

단위근 검정

시계열의 정상성 여부를 판단하는 통계적 검정. (대표적으로 ADF 검정)

- ADF의 가정: 모든 정상적 시계열은 고차원의 AR모형으로 근사될 수 있

ADF 검정 (형태 1)

- 다음 모형을 고려

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j\, \Delta Z_{t-j} + a_t \quad (\Delta Z_{t-j} = Z_{t-j} - Z_{t-j-1})$$

- 가설

$$H_0:\ \phi = 1$$

- 검정통계량

$$\mathrm{T} = \frac{\hat{\phi} - 1}{se(\hat{\phi})}$$

- phi가 1이냐 아니냐를 검정

- 기각 → 단위근이 없다 → 정상적 시계열
- 기각 X → 단위근이 있다 → 차분해서 시계열 분석

ADF 검정 (형태 2)

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j \Delta Z_{t-j} + a_t$$

$$\Rightarrow \Delta Z_t = (\phi - 1) Z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j \Delta Z_{t-j} + a_t$$

$$\Rightarrow \Delta Z_t = \phi^* Z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j \Delta Z_{t-j} + a_t \quad (\phi^* = \phi - 1)$$

- 가설

$$H_0: \phi^* = 0$$

- 검정통계량

$$\mathrm{T} = \frac{\widehat{\phi^*}}{se(\widehat{\phi^*})}$$