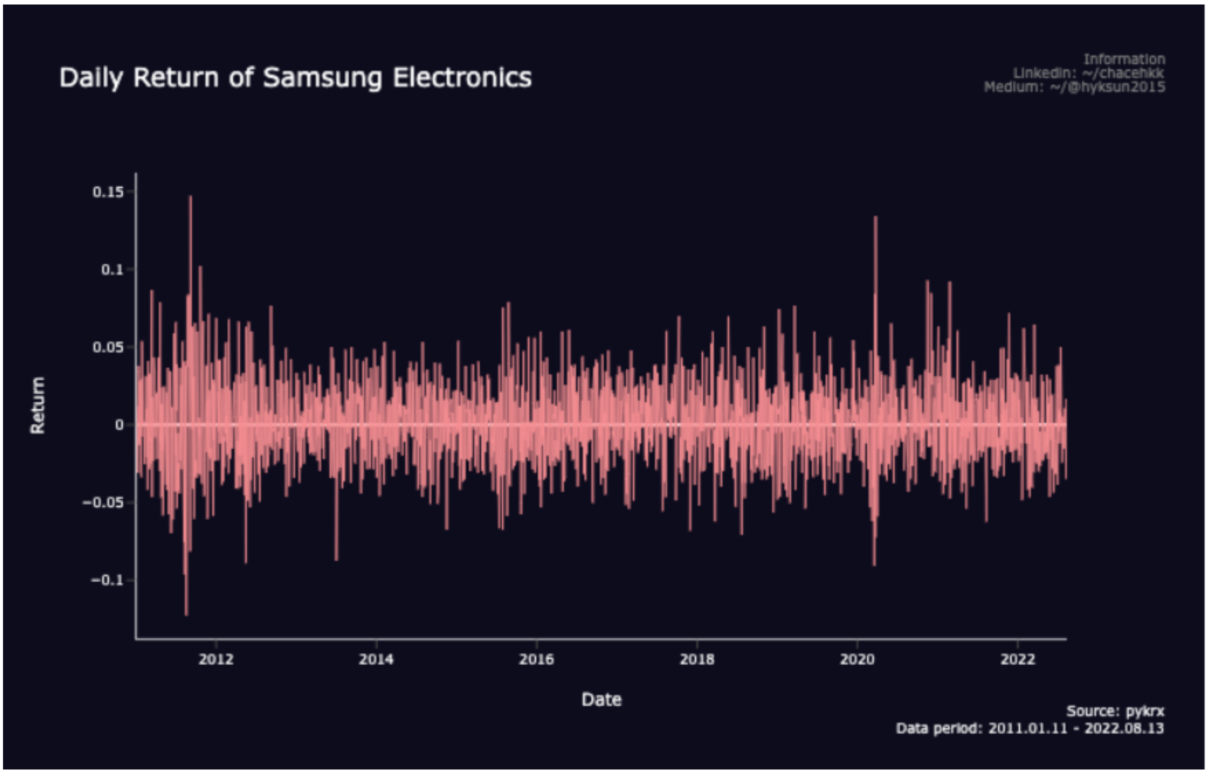
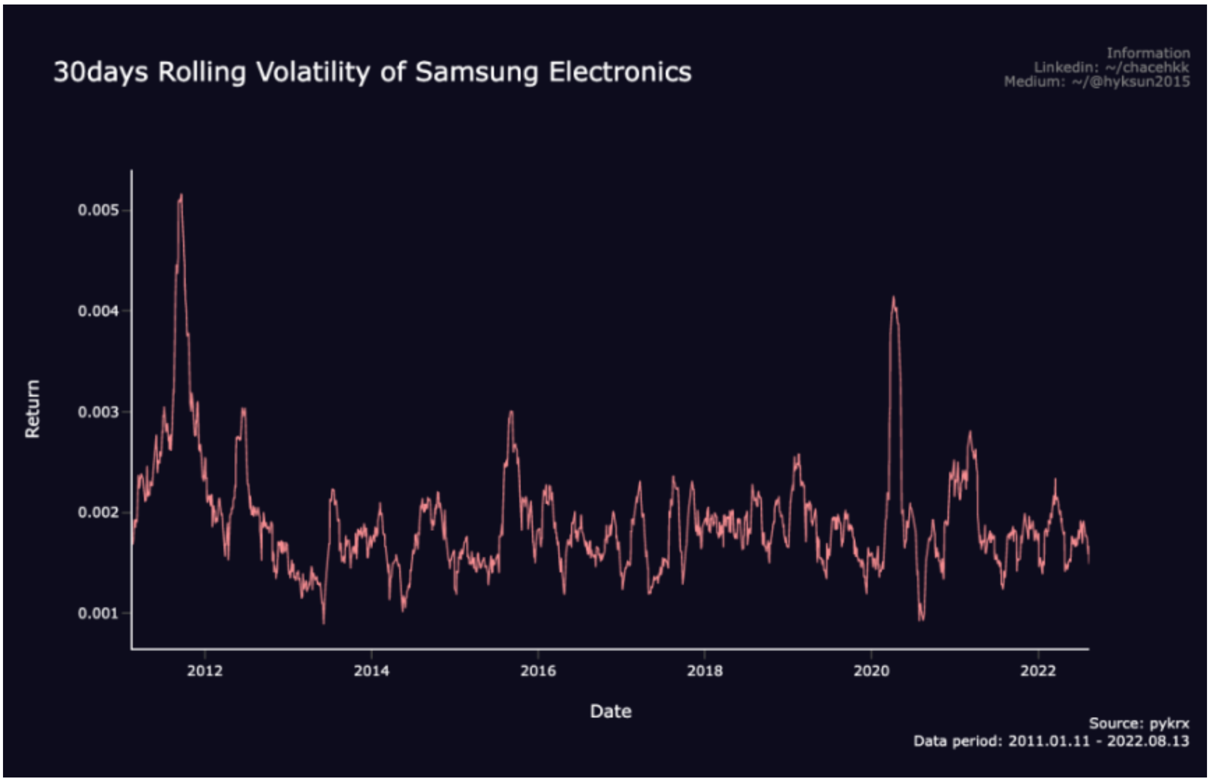
WEEK5

1. **ARCH 모형**

- 모형의 필요성
  1) 금융 데이터를 분석함에 있어, 상품의 변동성을 분석하는 것이 중요
  → 잔차가 백색잡음을 따르지 않고, 오차항의 분산이 이분산성을 띠게 됨
  → 수익률의 변동성 분포가 일정하지 않고, 어느 순간 한번에 영향을 받고 나머지는 평온한 변동성 군집현상(Volatility Clustering)을 띠게 됨
  → 오차항의 조건부 분산에 대한 모형을 고려해야 함



삼성전자 수익률 분포



주식의 변동성(=표준편차)의 분포 → 특정 기간에 변동성이 급증하는 모습을 보임

- 위같은 변동성을 분석하기 위해 도입된 모형이 ARCH, GARCH임
- ARCH의 일반화 형태가 GARCH임

\- 모형의 표현
(ex. AR(1)을 따르는 시계열)

시계열이 예를 들어 AR(1)모형을 따른다 하자

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$$

이 때, 오차항의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$E[u_t] = 0, Var[u_t] = \sigma_u^2$$

오차항이 서로 독립이 아니고 다음 관계를 갖는다 가정

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t \text{ } (w_t\text{는 백색잡음})$$

(즉, 제곱오차항이 AR(q)모형을 따른다고 가정)

→ 오차항의 조건부 분산을 구하면, (E$[u_t|u_{t-1}, ...]^2$은 0이므로)

$$\sigma_t^2 = Var[u_t|u_{t-1}, ...] = E[u_t^2|u_{t-1}, ...] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

- 해당 모형을 ARCH(q) 모형이라고 함
  → 오차항의 제곱이 AR모형을 따르면, ARCH 모형이라고 판단할 수 있음

- ARCH 모형의 정상성 조건
  - 오차항의 조건없는 분산은 상수
  - 오차항의 조건부 분산은 확률변수이며, 시간에 따라 변화함
  - 조건없는 분산과 조건부 분산과의 관계는 다음과 같음

$$Var[u_t] = \sigma_u^2 = E[\sigma_t^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2]$$

→ 정상성 조건: (모든 알파값의 합) < 1

- 평균방정식과 분산방정식
  - ARCH 모형은 오차항의 분산에 대한 것이므로 분산방정식이라 함
  - 시계열 모형으로 구성하기 위해서는 해당 오차항이 포함된 평균방정식과 함께 쓰여야 함
  - 평균방정식은 시계열 자체에 대한 모형임

(예 1) AR(1)-ARCH(1) 모형

평균방정식: $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$ → ARCH (1)

분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$

(예 2) MA(1)-ARCH(2) 모형

평균방정식: $Z_t = u_t - \theta u_{t-1}$

분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$

(예 3) 회귀모형-ARCH(3) 모형

평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_t$

분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2$

—> 예를 들어, AR(1)-ARCH(1) 모형이라면, 앞의 AR(1) 모형이 평균 방정식임.

Z라는 시계열을 다루면, Z는 AR(1) 모형을 따르는데 오차항은 ARCH(1) 모형을 따름.

즉, ARCH(1)을 따르니까 조건부 분산이 AR 형태를 띰.

AR(1)-ARCH(1)이라면 시계열은 AR(1)을 따르고 오차항은 ARCH(1)을 따른다고 볼 수 있음.

2. **GARCH 모형**
   - ARCH 모형은 시차 q가 커질수록 구조를 표현하기 복잡해지고, 추정해야하는 모수가 많아지는 문제가 있음
   → 이를 해결하고자 일반화 모형인 GARCH 모형을 생각함

- t시점의 오차항은 이전 시점의 오차항 제곱값과 함께, 이전 시점의 조건부 분산의 제곱값에 영향받음

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

- 오차항이 GARCH(p,q)를 따른다고 함
  - alpha 항들은 ARCH항, beta 항들은 GARCH항이라고 부름
- ARCH 모형은 제곱오차항이 AR모형을 따랐지만, GARCH 모형에서는 ARMA 모형을 따름
  (ARMA 모형이 AR 모형의 일반화된 형태라고 생각하면 당연함)

- 정상성 조건

- 오차항의 조건없는 분산은 상수
- (알파 값의 합) + (베타 값의 합) < 1

- GARCH 모형의 예측

- 평균방정식은 수평적 모형, 오차항의 조건부 분산이 GARCH(1,1)을 따름
- 시점 T에 대해서, k시점 이후의 시계열치의 예측치는 평균방정식이 수평이었으므로 상수임

- 평균방정식: $Y_t = c + u_t$ (수평적 모형)
- 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ GARCH(1,1)
- 시계열 (반응치) 예측

$$f_{T,k} = E[Y_{T+k}|Y_T, \ldots] = c \quad k = 1,2, \ldots$$

- 시계열 예측오차 분산

$$v_{T,1} = Var[Y_{T+1}|Y_T, \ldots] = Var[u_{T+1}|Y_T, \ldots] = E[\sigma_{T+1}^2|Y_T, \ldots]$$

$$v_{T,k} = Var[Y_{T+k}|Y_T, \ldots] = Var[u_{T+k}|Y_T, \ldots] = E[\sigma_{T+k}^2|Y_T, \ldots],\ k = 1,2, \ldots$$

- 조건부 분산 (변동성) 예측
  - 한단계이후 예측: $h_{T,1} = E[\sigma_{T+1}^2|Y_T, \ldots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2|Y_T, \ldots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$
  - 2단계이후 예측: $h_{T,2} = E[\sigma_{T+2}^2|Y_T, \ldots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2|Y_T, \ldots] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) h_{T,1}$

- GARCH-M 모형

- ARCH-M 모형과 유사하게 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형

평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$ GARCH(p,q)
- 여기서 $g(\sigma_t^2)$ 는 다음 함수 사용
- $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2;\ g(\sigma_t^2) = \sigma_t;\ g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$

- T-GARCH 모형

- threshold-GARCH: 비대칭 모형으로서, 금융권에서의 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스가 서로 대칭적인 영향을 미치는 것이 아니라는 점을 고려한 모형

$$h_t = \delta + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \gamma I_{t-1} e_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad \delta = \alpha_0 - \beta_1 \alpha_0$$

$$I_{t-1} = 1 \ if \ e_t < 0 \ (bad\ news)$$

$$= 0 \ if \ e_t \geq 0 \ (good\ news)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i I_{t-i} e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}$$

- 위는 GARCH(1,1)에서의 모형, 밑에는 GARCH(p,q)에서의 T-GARCH 모형
- 나쁜 뉴스의 경우, e_{t-1}^2만큼 분산(알파_1)에 더해짐

- 좋은 뉴스의 경우는 분산이 그대로 알파_1임
- 나쁜 뉴스가 터지면 분산이 더 커지는 것임

3. **ARCH/GARCH 모형의 추정**

최우추정법 사용

$$u_t|u_{t-1},\ldots \sim Nor(0,\sigma_t^2)$$

로그우도함수 (평균방정식이 회귀모형인 경우)

$$\ln L(\theta|y_1,\ldots,y_n) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left[\log(2\pi)+\log(\sigma_t^2)+\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}\right]$$

$$u_t = y_t - x_t\beta \quad : \text{잔차}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

ARCH 시차 q는 여러가지를 시도한 후 정보기준 (information criteria)으로 결정

→ ACF/PACF로 판단 불가

예: AR(1)-ARCH(q)모형의 추정

- 평균방정식: $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + u_t$
- 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

(분석 결과)

- SC 및 HQ 정보기준은 시차 3에서 최소가 되고 AIC는 시차 4에서 최소이므로, 시차 3 또는 4인 모형이 적절하다고 볼 수 있다.
- 다음에서 언급할 LM 검정을 통한 잔차 진단을 사용하는 것이 바람직할 것이다.

	q=1	2	3	4
	ARCH(1)	ARCH(2)	ARCH(3)	ARCH(4)
c	1.121 (4.9)	1.181 (5.9)	1.196 (6.1)	1.198 (6.1)
ϕ	0.113 (2.8)	0.115 (3.1)	0.110 (3.0)	0.102 (2.8)
α_0	36.84 (12.2)	30.73(10.5)	27.26 (9.4)	24.84 (7.8)
α_1	0.175 (3.4)	0.156 (2.8)	0.155 (3.0)	0.134 (2.6)
α_2		0.157 (2.3)	0.123 (1.9)	0.112 (1.5)
α_3			0.118 (2.4)	0.100 (2.1)
α_4				0.060 (1.3)
Log L	-2929.19	-2916.92	-2912.09	-2909.10
SC	6.635	6.615	6.612	6.621
HQ	6.622	6.599	6.592	6.594
AIC	6.614	6.588	6.580	6.577

*괄호안 숫자는 t값임

- 모형 효과 검정

검정 절차

1. 모형 추정으로 부터 잔차 u_t 를 얻는다.
2. 잔차제곱을 사용하여 다음 회귀모형의 R^2을 산출한다.

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \varepsilon_t$$

3. 검정통계량 $LM = nR^2$ 산출
4. $LM > \chi^2(q, \alpha)$ 이면 가설 기각

(예) 다음은 어떤 평균 방정식 추정후의 잔차에 대한 ARCH 효과를 검정한 결과 (Eviews)이다.

Heteroscedasticity Test: ARCH

F-statistic	122.992	Prob. F(4,155)	0.0000
Obs*R-squared (LM)	121.667	Prob. Chi-Square(4)	0.0000

→ t.s

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Included observation: 160 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.23E-24	2.91E-24	2.1416	0.0338
RESID^2(-1)	0.99761	0.08049	12.3949	0.0000
RESID^2(-2)	-0.24527	0.11185	-2.1929	0.0298
RESID^2(-3)	0.22998	0.11181	2.0570	0.0414
RESID^2(-4)	-0.12037	0.08092	-1.4875	0.1389

분석결과: 잔차에 ARCH효과가 남아 있으므로 잔차에 대한 ARCH모형을 추가하여 다시 분석해야 함.

- 모형에 포함된 ARCH 항 및 GARCH 항의 유의성 판단