Week 5 ARCH/GARCH 모형

오차의 조건부 산 개념 및 ARCH 모형

ARCH 모형의 필요성 (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

- 오차항은 일정한 분산을 갖는 독립적인 백색잡음으로 가정했지만 금융관련 시계열에서 잔차는 백색잡음으로 보이지만 잔차의 절대값 또는 잔차 제곱항은 자기상관관계를 갖는다
    - 오차항 분산이 시간에 따라 일정하지 않고 변한다

모형의 표현

- 시계열이 예를 들어 AR(1)모형을 따른다 하자

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$$

- 이 때, 오차항의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$E[u_t] = 0, Var[u_t] = \sigma_u^2$$

- 오차항이 서로 독립이 아니고 다음 관계를 갖는다 가정

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t \ (w_t\text{는 백색잡음})$$

(즉, 제곱오차항이 AR(q)모형을 따른다고 가정)

- 오차항의 조건부 분산

$$\sigma_t^2 = Var[u_t|u_{t-1}, \ldots] = E[u_t^2|u_{t-1}, \ldots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

이 형태 모형을 ARCH(q) 모형이라 함.

ARCH 모형의 정상성 조건

- 오차항의 조건없는 분산은 시간에 따라 일정
- 오차항의 조건부 분산 σ2t 은 확률변수이며 시간에 따라 변화
- 오차항의 조건부과 조건없는 분산의 관계 (조건부 분산에 기대치는 조건없는 분산)

$$= \sigma_u^2 = E[\sigma_t^2]$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q}$$

ARCH(q)모형의 정상적 조건

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$$

평균 방적식 (시계열 자체의 모형) 분산 방정식 (오차항에 대한 모형)

ARCH-M모형

- 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형
    - 평균방정식이 회귀모형이면 ARCH-M 형태이다

- 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
- 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

여기서 $g(\sigma_t^2)$ 는 다음 함수 사용

$$g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2;\ g(\sigma_t^2) = \sigma_t;\ g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$$

GARCH 모형 (Generalized autogregressive conditional heteroskedasticity)

- 조건부 분산항에 과거 시차의 조건부 분산항들이 추가된 모형

- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$

- alpha가 ARCH항, beta들이 GARCH 항
- GARCH 모형은 제곱오차항이 ARMA모형을 따른다
- 조건
    - 오차항의 조건없는 분산은 시간에 따라 일정

- GARCH모형이 정상적일 때 다음이 성립

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q-\beta_1-\cdots-\beta_p}$$

- ARCH(q) 모형의 정상적 조건

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$$

GARCH 모형의 예측:

$$f_{T,k} = E[Y_{T+k} | Y_T, \ldots] = c,\ k = 1,2, \ldots$$

- 시계열 예측오차 분산

$$v_{T,1} = Var[Y_{T+1} | Y_T, \ldots] = Var[u_{T+1} | Y_T, \ldots] = E[\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \ldots]$$

$$v_{T,k} = Var[Y_{T+k} | Y_T, \ldots] = Var[u_{T+k} | Y_T, \ldots] = E[\sigma_{T+k}^2 | Y_T, \ldots],\ k = 1,2, \ldots$$

- 조건부 분산 (변동성) 예측
  - 한단계이후 예측: $h_{T,1} = E[\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \ldots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 | Y_T, \ldots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$
  - 2단계이후 예측: $h_{T,2} = E[\sigma_{T+2}^2 | Y_T, \ldots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 | Y_T, \ldots] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) h_{T,1}$

GARCH-M 모형

- 평균방정식에 조건부 분산을 포함한 모형

E(exponential)-GARCH 모형

- 로그 변동성을 모형화

분산방정식: $log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_i |u_{t-i}| + \gamma_i u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$

나쁜 뉴스가 좋은 뉴스보다 변동성에 더 큰 충격을 준다고 가정

T-GARCH 모형 (비대칭 모형)

분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i})\, u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2$

여기서 $I_{t-i} = \begin{cases} 1 & u_{t-i} < 0 \\ 0 & u_{t-i} \geq 0 \end{cases}$

- 오차항의 부호에 따라 변동성에 미치는 영향을 다르게 평가하는 모형
  - 나쁜 소식일 때 좋은 소식일 때보다 큰 영향을 주는 것

GARCH 모형의 추정과 관련 검정

- ARCH 모형의 추정은 최우추정법 사용
- ARCH 시차 q는 여러 시도를 한 후 정보기준으로 결정

LM 검정

- 잔차 진단에 사용

$$가설: H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$$

검정 절차

1. 모형 추정으로부터 잔차 ut를 얻는다
2. 잔차제곱을 사용해서

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \varepsilon_t$$

의 R^2값을 구한

3. LM = nR^2 산출
4. LM > X^2(q,a)이면 가설 기각

GARCH 모형의 추정

- 최우추정법 사용
- ARCH 모형의 추정과 같지만 GARCH 항들이 추가된다는 점