



## 시계열 분석 기법과 응용

Week 5. ARCH/GARCH 모형

5-1. ARCH 모형

\* ARCH, GARCH  $\rightarrow$  금융시계열에서 변동성 분석에 널리 사용됨

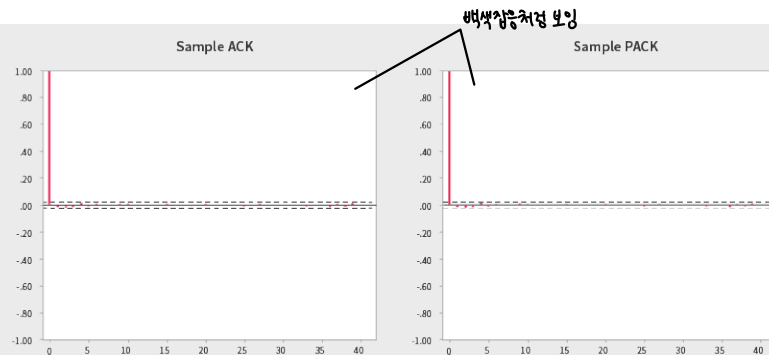
전치혁 교수  
(포항공과대학교 산업경영공학과)

# ARCH 모형

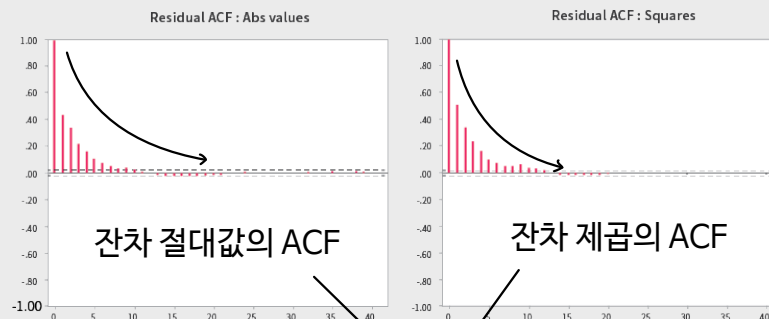
## ARCH모형의 필요성

- 지금까지의 시계열모형에서 오차항은 일정한 분산을 갖는 독립적인 백색잡음으로 가정
- 대부분 금융관련 시계열에서 잔차는 백색잡음처럼 보이지만 잔차의 절대값 또는 잔차 제곱항은 자기상관관계
- 또한, 오차항 분산이 시간에 따라 일정하지 않고 변한다는 관측이 있음
- 오차항의 조건부 분산 (conditional variance)에 대한 모형을 고려 필요
- 재무상품의 수익률 분산을 변동성 (volatility)이라 하며 이의 분석이 중요
- Engle (1982)이 ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형을 제시
- GARCH모형은 ARCH모형의 일반화 형태

\* 조건부분산이 heteroskedastic → 이분산성!



잔차의 ACF & PACF



ACF ≠ 0 !

# ARCH 모형

## 모형의 표현

- 시계열이 예를 들어 AR(1)모형을 따른다 하자

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$$

- 이 때, 오차항의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$E[u_t] = 0, Var[u_t] = \sigma_u^2$$

- 오차항이 서로 독립이 아니고 다음 관계를 갖는다 가정

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t \quad (w_t \text{는 백색잡음})$$

(즉, 제곱오차항이 AR(q)모형을 따른다고 가정)

- 오차항의 조건부 분산

$$\sigma_t^2 = Var[u_t | u_{t-1}, \dots] = E[u_t^2 | u_{t-1}, \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 \rightarrow \text{오차항의 제곱: AR형태를 가정} \rightarrow \text{ARCH(q)}$$

이 형태 모형을 ARCH(q) 모형이라 함.

\*E(u\_t)=0 이므로

오차항<sup>2</sup> → 이전 시차의 제곱항과 관련있음

# ARCH 모형

↪ 분산 > 0

## ARCH 모형의 정상성 조건 (필요)

- 오차항의 **조건없는 분산 (unconditional variance)**은 시간에 따라 일정 (상수)

$$\text{Var}[u_t] = E[u_t^2] = \sigma_u^2$$

- 오차항의 **조건부 분산  $\sigma_t^2$** 은 확률변수이며 시간에 따라 변화

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

← 시간에 따라 변하는 관계 있음      ↪ 이전 오차항

- 오차항의 **조건부 분산과 조건없는 분산의 관계**

$$\text{Var}[u_t] = \sigma_u^2 = E[\sigma_t^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2]$$

즉, E(조건부분산) = 조건없는분산

- ARCH 모형이 정상적일 때 다음이 성립

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}$$

↪ 0      정상성 조건      유효 가능 : 오차항의 조건없는 분산 : 이와 관계 있음

- ARCH(q) 모형의 정상적 조건

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_q < 1$$

\*  $\alpha_0 > 0$  이어야하므로

# ARCH 모형

## 평균 방정식과 분산 방정식

- ARCH모형은 오차항의 분산에 대한 것이므로 분산 방정식이라 함.
- 시계열 모형에서는 오차항이 포함된 평균방정식이 함께 사용되어야 함.

AR, MA, ...

주: 시계열 모형 → 평균방정식, 분산방정식  
↑  
시계열 자체에 대한 모형  
↓  
오차항에 대한 모형

- (예 1) AR(1)-ARCH(1) 모형
  - 평균방정식:  $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$  : AR(1)
  - 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$  : ARCH(1) → 오차분산 ~ AR(1)
- (예 2) MA(1)-ARCH(2) 모형
  - 평균방정식:  $Z_t = u_t - \theta u_{t-1}$
  - 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$
- (예 3) 회귀모형-ARCH(3) 모형
  - 평균방정식:  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_t$
  - 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2$

# ARCH 모형

## ARCH-M (ARCH in mean) 모형

- 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형
- 평균방정식이 회귀모형인 경우 ARCH-M 형태
  - 평균방정식:  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$  조건부분산의 함수 포함 → 회귀모형 ∴ ARCH-M 모형
  - 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2$  → ARCH(q)

여기서  $g(\sigma_t^2)$  는 다음 함수 사용

$$g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2; g(\sigma_t^2) = \sigma_t; g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$$

↑ 조건부분산 자체      ↑  $\sqrt{\sigma_t^2}$  형태      ↑ log



## 시계열 분석 기법과 응용

### Week 5. ARCH/GARCH 모형 5-2. GARCH 모형

전치혁 교수  
(포항공과대학교 산업경영공학과)

# GARCH 모형

- GARCH (Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형은 Bollerslev (1986)이 ARCH모형을 확장한 것임.
- 조건부 분산항에 과거 시차의 조건부 분산항들이 추가된 것으로 다음의 형태를 가짐
  - $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$   
ARCH       $\alpha$ 의 조건부 분산       $\beta$  이전 조건부 분산항
  - 오차항이 GARCH(p,q) 모형을 따른다고 함
  - alpha들을 ARCH 항, beta들을 GARCH 항이라 함.
  - ARCH모형은 제곱오차항이 AR모형을 따르는 반면, GARCH모형은 제곱오차항이 ARMA모형을 따르게 됨.

⇒ ARCH의 일반화 → ARMA 모형  
ARCH    ''        → GARCH ''



# GARCH 모형

## GARCH 모형의 정상성 조건

- 오차항의 조건없는 분산 (unconditional variance)은 시간에 따라 일정 (상수)

$$Var[u_t] = E[u_t^2] = \sigma_u^2$$

- GARCH 모형이 정상적일 때 다음이 성립

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q - \beta_1 - \dots - \beta_p} > 0$$

- ARCH(q) 모형의 정상적 조건

(ARCH(p, q) 인 것 같음)

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$$

# GARCH 모형

~ ARCH 모형 포함된 것

## GARCH 모형의 예측 (ARCH도 유사하게 진행)

- 평균방정식:  $Y_t = c + u_t$  (수평적 모형) ex)
- 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$  ex) GARCH(1,1)
- 시계열 (반응치) 예측

□ 금융시장의 변동성  
□ 결국 조건부 분산을 예측하는 것

$$f_{T,k} = E[Y_{T+k} | Y_T, \dots] = c, k = 1, 2, \dots$$

수평적 모형

- 시계열 예측오차 분산

$$v_{T,1} = \text{Var}[Y_{T+1} | Y_T, \dots] = \text{Var}[u_{T+1} | Y_T, \dots] = E[\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \dots]$$

$$v_{T,k} = \text{Var}[Y_{T+k} | Y_T, \dots] = \text{Var}[u_{T+k} | Y_T, \dots] = E[\sigma_{T+k}^2 | Y_T, \dots], k = 1, 2, \dots$$

- 조건부 분산 (변동성) 예측 → 변동성 크기 예측 → 금융시장에 대한 상당한 정보를 주 수 있음

- 한단계이후 예측:  $h_{T,1} = E[\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \dots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 | Y_T, \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$
- 2단계이후 예측:  $h_{T,2} = E[\sigma_{T+2}^2 | Y_T, \dots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 | Y_T, \dots] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) h_{T,1}$

관련된 값

두번치 사용

# GARCH 모형의 변형

## GARCH-M 모형

ARCH-M 모형과 같이 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형

- 평균방정식:  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
- 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$  : GARCH(p,q)
  - 여기서  $g(\sigma_t^2)$  는 다음 함수 사용
  - $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$ ;  $g(\sigma_t^2) = \underline{\sigma}_t$ ;  $g(\sigma_t^2) = \underline{\ln}(\sigma_t^2)$

exponential

## E-GARCH 모형

Nelson (1991)이 제안한 것으로 로그 변동성을 모형화

- 분산방정식:  $\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \frac{\alpha_i |u_{t-i}| + \gamma_i u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$
- 나쁜 뉴스가 좋은 뉴스보다 변동성에 더 큰 충격을 준다고 가정

이전 시점이 갖는 의미

이전 과거 조건부분산의 로그값의 합

절댓값과 부호를 모두 반영 → 비대칭성 유지

비대칭성  
예) 주식시장 - 나쁜 뉴스가 좋은 뉴스  
변동성에 더 큰 충격을 준  
∴ 나쁜 뉴스가 변동성 더 크게 변화시켜 주는 것임

# GARCH 모형의 변형

비대칭 모형

## • T-GARCH 모형

- Glosten 등 (1993) 제안

- 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) \underbrace{u_{t-i}^2}_{\substack{\text{나쁜 소식을 때는 } \gamma_i \text{ (차이적 영향) 존재} \\ \therefore \text{나쁜 소식이 더 큰 영향}}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \underbrace{\sigma_{t-j}^2}_{\substack{\text{과거 오차} \\ \text{과거 조건분산}}}$   
전제적으로는 GARCH 모형

- 여기서  $I_{t-i} = \begin{cases} 1 & u_{t-i} < 0 \\ 0 & u_{t-i} \geq 0 \end{cases}$  : 나쁜 소식  
: 좋은 소식

- 오차항의 부호에 따라 변동성에 미치는 영향을 다르게 평가하는 모형
- 즉, 오차항이 양일 때 (좋은 소식) 조건부 분산에 미치는 영향보다 오차항이 음일 때 (나쁜 소식) 미치는 영향이 크도록 고안
- 이와 유사한 비대칭 모형이 다수 있음



## 시계열 분석 기법과 응용

Week 5. ARCH/GARCH 모형

5-3. ARCH/GARCH 모형의 추정

전치혁 교수  
(포항공과대학교 산업경영공학과)

# ARCH 모형의 추정

- 최우추정법 사용

$$u_t | u_{t-1}, \dots \sim \text{Nor}(0, \sigma_t^2)$$

$\nearrow$  모형의 구조적 오차항     $\nearrow$  이전시점의 오차가 주어질 때의  $t$ 시점의 오차  $\sim$  정규분포  
 $\nwarrow$  이를 통해     $\nwarrow$  log likelihood function 유도

- 로그우도함수 (평균방정식이 회귀모형인 경우)

$$\ln L(\theta | y_1, \dots, y_n) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[ \log(2\pi) + \log(\sigma_t^2) + \frac{u_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

$\uparrow$  ARCH parameter인  $\alpha$ 와  $\sigma$ 들로  $\theta$ 라 표현  
 $\nwarrow$  시계열 data

$$u_t = y_t - x_t \beta$$

$\nwarrow$  ARCH( $q$ ) 가정    : 평균방정식을 회귀모형으로 가정함으로! ( $y_t = x_t \beta + u_t$  꼴)  
 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2$

- ARCH 시차  $q$ 는 여러가지를 시도한 후 정보기준 (information criteria)으로 결정

$\hookrightarrow$  AR(p), ACF, PACF로 검사    but ARCH는 고정수 없음  $\therefore$  인공의 자료 and error 방법으로

# ARCH 모형의 추정

○ : 추정해야 할 parameter

예: AR(1)-ARCH(q) 모형의 추정

- 평균방정식:  $Y_t = \phi + \phi Y_{t-1} + u_t$  AR(1)
- 분산방정식:  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2$  ARCH(q)

(분석 결과)

- SC 및 HQ 정보기준은 시차 3에서 최소가 되고 AIC는 시차 4에서 최소이므로, 시차 3 또는 4인 모형이 적절하다고 볼 수 있다.
- 다음에서 언급할 LM 검정을 통한 잔차 진단을 사용하는 것이 바람직할 것이다.

	ARCH(1)	ARCH(2)	ARCH(3)	ARCH(4)
c	1.121 (4.9)	1.181 (5.9)	1.196 (6.1)	1.198 (6.1)
$\phi$	0.113 (2.8)	0.115 (3.1)	0.110 (3.0)	0.102 (2.8)
$\alpha_0$	36.84 (12.2)	30.73(10.5)	27.26 (9.4)	24.84 (7.8)
$\alpha_1$	0.175 (3.4)	0.156 (2.8)	0.155 (3.0)	0.134 (2.6)
$\alpha_2$		0.157 (2.3)	0.123 (1.9)	0.112 (1.5)
$\alpha_3$			0.118 (2.4)	0.100 (2.1)
$\alpha_4$				0.060 (1.3)
Log L	-2929.19	-2916.92	-2912.09	-2909.10
SC	6.635	6.615	<b>6.612</b>	6.621
HQ	6.622	6.599	<b>6.592</b>	6.594
AIC	6.614	6.588	6.580	<b>6.577</b>

\*괄호 안 숫자는 t값임

→ 가장 작은 것을 선택

입자 정렬 1, 2, 3, 4일 때 시도  
→ 가장 작은 것을 선택

# ARCH 효과 검정

## LM (Lagrange multiplier) 검정

- Breusch-Pagan (1979) 제안
- 잔차 진단에 사용토록 Engle (1982) 추천
- 가설:  $H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$
- 검정 절차
  1. 모형 추정으로부터 잔차  $u_t$  를 얻는다.
  2. 잔차제곱을 사용하여 다음 회귀모형의  $R^2$  을 산출한다.  
$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \varepsilon_t \rightarrow \text{ARCH}(q) \text{ 모형} : R^2 \text{ 얻음}$$
  3. 검정통계량  $LM = nR^2$  산출  
# (data)
  4.  $LM > \chi^2(q, \alpha)$  이면 가설 기각. ARCH 모형 효과 있음  
Under  $H_0$ ,  $LM \sim \chi^2$



# ARCH 효과 검정

(예) 다음은 어떤 평균 방정식 추정후의 잔차에 대한 ARCH 효과를 검정한 결과 (Eviews)이다.

Heteroscedasticity Test: ARCH

F-statistic 122.992

Prob. F(4,155)

0.0000

Obs\*R-squared (LM) 121.667

Prob. Chi-Square(4)

0.0000 → reject H<sub>0</sub>

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Included observation: 160 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.23E-24	2.91E-24	2.1416	0.0338
RESID^2(-1)	0.99761	0.08049	12.3949	0.0000
RESID^2(-2)	-0.24527	0.11185	-2.1929	0.0298
RESID^2(-3)	0.22998	0.11181	2.0570	0.0414
RESID^2(-4)	-0.12037	0.08092	-1.4875	0.1389

분석결과: 잔차에 ARCH효과가 남아  
있으므로 잔차에 대한 ARCH모형을  
추가하여 다시 분석해야 함.

즉, ARCH 효과 제거 안된 상태

# GARCH 모형의 추정

- 최우추정법 사용

$$u_t | u_{t-1}, \dots \sim \text{Nor}(0, \sigma_t^2)$$

- 로그우도함수 (평균방정식이 회귀모형인 경우)

$$\ln L(\theta | y_1, \dots, y_n) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[ \log(2\pi) + \log(\sigma_t^2) + \frac{u_t^2}{\sigma_t^2} \right] \rightarrow \text{ARCH와 동일 형태}$$

$$u_t = y_t - x_t \beta$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

↳ ARCH에서 추가된 GARCH term  
∴ 필요

# GARCH 모형의 추정

(예) 다음은 2017.7 ~ 2018.6 간의  
kosp200의 수익률에 대한 (일별 data)  
GARCH(1,1) 모형의 추정결과이다.

- ARCH항은 유의하지 않으나  
GARCH항은 유의하다.

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0.9654 < 1 \quad \therefore \text{정상성 조건 만족함}$$

Dependent Variable: RETURN : 수익률 시계열

Method: ML ARCH-Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)

Date: 07/24/19 Time: 15:59

Sample (adjusted): 7/04/2017 6/29/2018

Included observations: 238 after adjustments

Convergence achieved after 37 iterations

Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

GARCH = C(2) + C(3)\*RESID(-1)^2 + C(4)\*GARCH(-1) <sup>GARCH term</sup>

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C → 평균방정식	-9.63E-05	0.000551	-0.174835	0.8612

## Variance Equation

C	2.26E-06	1.12E-06	2.010652	0.0444
RESID(-1)^2 ARCH 추정치	0.023914 = $\hat{\alpha}_1$	0.020650	1.158062	0.2468 → 유의하지
GARCH(-1) GARCH "	0.941468 = $\hat{\beta}_1$	0.030706	30.66095	0.0000 → 유의

R-squared	-0.000011	Mean dependent var	-0.000122
Adjusted R-squared	-0.000011	S.D. dependent var	0.007719

# GARCH 모형의 추정

(예) 다음은 어떤 자산의 수익률 (RET)을 모형화하는데 GARCH(3,3)을 사용하고 Eviews로 추정한 결과이다.

- 시차 3에서 ARCH 항이 유의하며 시차 3에서 GARCH 항 역시 5%에서 유의함을 알수있다.
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.4553 \rightarrow$  정상성 조건 만족!

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.99E-05	1.43E-05	1.3908	0.1643
Variance Equation				
C 상수	2.94E-08	7.73E-09	3.81	0.0001
RESID(-1)^2 $\alpha_1$	0.0491	0.0460	1.07	0.2862
RESID(-2)^2 $\alpha_2$	-0.0567	0.0518	-1.10	0.2729
RESID(-3)^2 $\alpha_3$	0.1778	0.0564	3.15	0.0016
GARCH(-1) $\beta_1$	0.5208	0.2745	1.90	0.0578
GARCH(-2) $\beta_2$	0.1133	0.3179	0.36	0.7216
GARCH(-3) $\beta_3$	-0.3490	0.1595	-2.19	0.0286
R-squared -0.00163				
Adjusted R-squared -0.02849				

ARCH

유의

5%정도 유의