벡터자기회귀모형

- 벡터 시계열
  - 여러 시계열을 동시에 고려하여 상호 연관성을 분석
  - 예 (3개의 시계열)

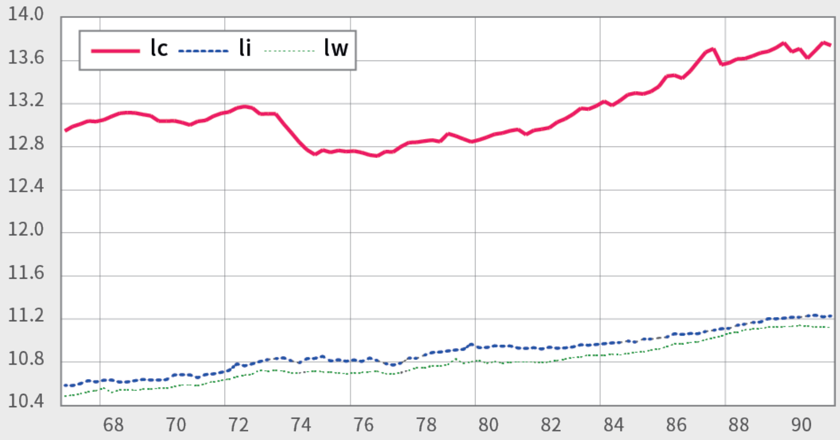
    시계열 1: Z_{1t} – 분기별 소비

    시계열 2: Z_{2t} – 분기별 소득

    시계열 3: Z_{2t} – 분기별 자산
  - 벡터시계열의 표현:

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \\ Z_{3t} \end{pmatrix}, t = 1,2, \ldots$$

  - 벡터자기회귀 (vector autoregressive; VAR)모형이 주로 사용



벡터자기회귀모형

- 벡터자기회귀 (VAR)모형

  - 한 시계열에 대한 AR(1) 모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

  - 두 시계열에 대한 VAR(1) 모형

$$Z_{1t} = \phi_{11}Z_{1,t-1} + \phi_{12}Z_{2,t-1} + a_{1t}$$
$$Z_{2t} = \phi_{21}Z_{1,t-1} + \phi_{22}Z_{2,t-1} + a_{2t}$$

$Z_{1,t}$ $\left\langle \begin{matrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{matrix} \right.$ 모두 영향

여기서 $a_{1t} \sim Nor(0, \sigma_1^2), a_{2t} \sim Nor(0, \sigma_2^2)$ 이며, $Cov[a_{1t}, a_{2t}] = \underline{\sigma_{12}}$ ⇒ (벡터로 표현)

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_t = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}, \Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t, \ \boldsymbol{a}_t \sim \underbrace{MVN}_{\text{다변량 정규분포}}(\boldsymbol{0}, \Sigma), \ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$ → 분산이 행렬로 표현됨.

VAR 모형

- m차원 시계열의 VAR(1) 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ \vdots \\ Z_{mt} \end{pmatrix};\ \boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t$$ (여기서 Φ_1는 m×m 행렬)

- m차원 시계열의 VAR(p) 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$$

$$\Phi(x) = I - \Phi_1 x - \cdots - \Phi_p x^p \Rightarrow \Phi(B)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t$$

VAR(1)형태의 표현

$$\boldsymbol{y}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_t \\ \boldsymbol{z}_{t-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{t-p+1} \end{pmatrix}; \boxed{F} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \Phi_2 & & \cdots & \Phi_p \\ I & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & I & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{y}_t = F\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$$

⇒ VAR(1)이 더 간소하기 때문

VAR 모형

- 정상성 조건

VAR(1)모형 의 정상성 조건

- 모형: $\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t$
- 계수행렬 Φ_1의 고유치들의 크기가 모두 1보다 작아야 한다.
- $det\Phi(x) = \det(I - \Phi_1 x) = 0$ 의 근들의 크기가 모두 1보다 커야 한다.

VAR(p)모형 의 정상성 조건

- 모형: $\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$

$$\Phi(B)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t, \Phi(x) = I - \Phi_1 x - \cdots - \Phi_p x^p$$

AR(p) 모형과 유사

- $det\Phi(x) = \det\left(I - \ \Phi_1 x - \cdots - \ \Phi_p x^p\right) = 0$ 의 근들의 크기가 모두 1보다 커야 한다.
- $\boldsymbol{y}_t = F\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$의 형태에서 행렬 F의 고유치들의 크기가 모두 1보다 작아야 한다.

eigenvalue

VAR 모형

- 정상성 조건

(예) 다음의 두 시계열에 대한 VAR(2)모형이 정상적인지 알아보자.

$$\begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.05 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & -0.75 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-2} \\ Z_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{1t} 분산

공분산

a_{2t} 분산

(풀이) $\boldsymbol{y}_t = F\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$ 형태로 표시하면 행렬 F는 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.2 & -0.75 \\ -0.05 & 0.25 & -0.1 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 고유치는 다음과 같다. $\lambda_1 = 0.9627, \lambda_2 = 0.2376, \lambda_3 = -0.0356, \lambda_4 = -0.6148$
- 즉, 고유치 크기가 모두 1보다 작으므로 위의 VAR(2)모형은 정상적이다.

VAR 모형

- 모형의 식별 – 시차 p 결정

방법 1: 이론적 ACF/PACF를 구하고 표본 ACF/PACF와 비교

- 교차상관관계 등이 존재하므로 쉽지 않음
- 개별 시계열에 대한 표본 ACF/PACF를 관찰하고 충분한 시차 p를 추정할 수도 있음

방법 2: 정보기준 (information criteria) 사용

- 실제적으로 널리 사용되고 있음
- 여러 시차에 대해 AIC, BIC, HQ 등을 산출하고 정보기준값이 최소인 시차 선택
- $AIC(p) = ln|\hat{\Sigma}| + \frac{2m^2p}{N}$: Akaike information criteria

$$AIC = T\log\frac{SSE}{T} + 2(k+2)$$

- $BIC(p) = ln|\hat{\Sigma}| + \frac{m^2plnN}{N}$: Schwarz (Bayesian) information criteria
- $HQ(p) = ln|\hat{\Sigma}| + \frac{2m^2plnlnN}{N}$: Hannan –Quinn information criteria

$$-2\ln L_x(\beta, S_x(\beta)/n) + 2(p+q+1)$$

방법 3: 우도비 검정

VAR 모형의 식별

(예) 다음은 세가지 벡터 시계열에 대한 여러 시차에 따른 VAR모형을 추정한 후 정보기준값을 산출한 결과이다.

적절한 시차 p를 선택하라.

- SC 기준으로는 시차 1이 가정 적절하다고 볼 수 있으나 대부분 기준은 시차 2가 적절하다고 선언하므로 결과적으로 시차 2가 최적이라 하겠다.
- 기준마다 서로 다른 최적 시차를 제시하는 경우에는 가장 작은 시차를 최종적으로 선택하는 것도 방법이라 하겠다.

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-1415.48	NA	5.05e+11	35.46	35.55	35.49
1	-1070.11	656.19	1.13e+08	27.05	**27.41***	27.19
2	-1055.28	**27.07***	**9.74e+07***	**26.90***	27.53	**27.16***
3	-1046.40	15.53	9.79e+07	26.91	27.80	27.27
4	-1039.98	10.75	1.05e+08	26.97	28.14	27.44
5	-1038.50	2.37	1.28e+08	27.16	28.59	27.73

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: final prediction error

VAR모형 분석

여러 시계열의 인과관계 파악 – VAR.

Granger Causality Test

↓

단위근 검정

* 단위근 있는 경우
차분 → 정상적 시계열로 변환
↓
VAR 모형

정상적 시계열	비정상적 시계열
VAR모형 추정	공적분 분석
↓	↓
• 충격-반응 함수 • 예측오차분산분해	오차수정모형

* MLE

그래인저 인과관계

(그래인저 인과관계: Granger causality) 시계열 $\{X_t, t \geq 1\}$이 시계열 $\{Y_t, t \geq 1\}$의 미래값을 예측하는 데 도움이 될 때, $\{X_t, t \geq 1\}$이 $\{Y_t, t \geq 1\}$에 영향을 준다 (Granger-cause) 말한다.

그래인저 인과관계 검정

- 자기회귀 시차모형

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_q X_{t-q} + a_t$$

β가 0이면 영향없음

- 가설

$$H_0\colon \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$$

- 검정통계량

$$F = \frac{(SSE_r - SSE_{ur})/q}{SSE_{ur}/(N-p-q-1)}$$

여기서 SSE_{ur} 는 상기 모형 (비제한모형)의 SSE이며, SSE_r는 H_0가 옳을 때 (제한모형) SSE임

- 결과 해석 : 쌍방에 대해 검정. 서로 영향을 주지않을 때는 VAR모형 분석의 의미가 없음.

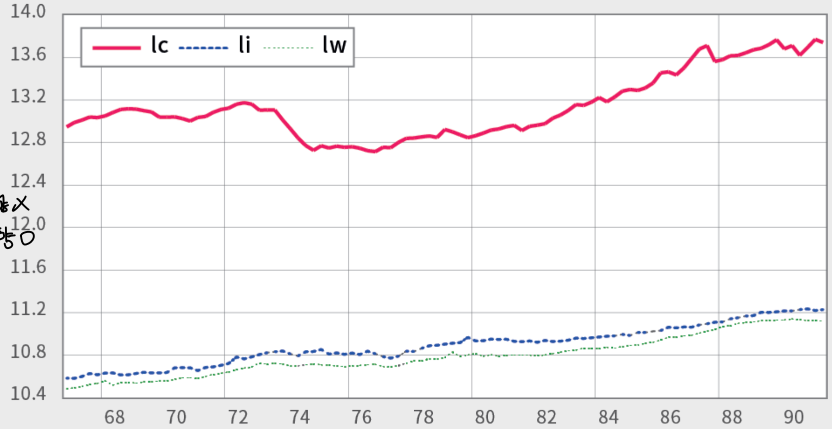
그래인저 인과관계

(예 6-1) 영국 소비(LC)/소득 (LI)/자산 (LW) 데이터에 대한 그래인저 인과관계 검정을 실시하면 아래와 같다.

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 07/19/19 Time: 11:13
Sample: 1966Q4 1991Q2
Lags: 4

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
LI does not Granger Cause LC	95	1.77913	0.1404
LC does not Granger Cause LI		8.15510	1.E-05
LW does not Granger Cause LC	95	2.25700	0.0695
LC does not Granger Cause LW		0.72713	0.5758
LW does not Granger Cause LI	95	1.34091	0.2614
LI does not Granger Cause LW		0.52232	0.7196

기각 X
↳ 영향 X
기각
↳ 영향 O



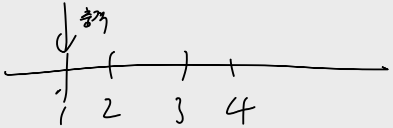
결과해석: 소비가 소득에 유의하게 영향을 미침, 유의수준 10%에서 자산이 소비에 영향을 미침

충격-반응 함수

예1) 달러환율 ↑ 유로환율

충격-반응 함수 (impulse-response function; IRF)

한 시계열에 특정시점에서 충격이 발생할 때 다른 시계열에 시간에 따라 어떤 영향을 주는지 분석



- VAR(1)모형 예

$$Z_{1t} = \phi_{11}Z_{1,t-1} + \phi_{12}Z_{2,t-1} + a_{1t}$$
$$Z_{2t} = \phi_{21}Z_{1,t-1} + \phi_{22}Z_{2,t-1} + a_{2t}$$

충격: 시점 1에서 Z_{1t}에만 σ_1의 충격이 있고 Z_{2t}에는 충격이 없음. 다른 시점에는 충격 없음

($a_{11} = \sigma_1, a_{1t} = 0, t > 1, a_{2t} = 0, t \geq 1; Z_{10} = Z_{20} = 0$ 가정)

반응

t=1: $Z_{11} = a_{11} = \sigma_1; Z_{21} = a_{21} = 0$

t=2: $Z_{12} = \phi_{11}Z_{11} + \phi_{12}Z_{21} + a_{12} = \boxed{\phi_{11}\sigma_1}; Z_{22} = \phi_{21}Z_{11} + \phi_{22}Z_{21} + a_{22} = \boxed{\phi_{21}\sigma_1}$

t=3: $Z_{13} = \phi_{11}Z_{12} + \phi_{12}Z_{22} + a_{13} = (\phi_{11}^2 + \phi_{12}\phi_{21})\sigma_1$

$Z_{23} = \phi_{21}Z_{12} + \phi_{22}Z_{22} + a_{23} = (\phi_{21}\phi_{11} + \phi_{22}\phi_{21})\sigma_1$

- 반응함수: 시간에 따른 Z_{1t}에의 영향, 시간에 따른 Z_{2t}에의 영향

충격-반응 함수

VAR 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$$

시계열간의 상관관계가 있어 IRF산출 어려움

MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t + \Psi_1 \boldsymbol{a}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{a}_{t-2} + \cdots$$

$\boldsymbol{a}_t \sim MVN(0, \Sigma)$ 이므로 여전히 오차항간의 상관관계가 있어 IRF산출 어려움

직교오차 MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1 \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$$

$\boldsymbol{v}_t \sim MVN(0, I)$ 이므로 IRF산출 용이

공분산이 없는 형태

$IRF(i, j, s)$
= j번째 시계열의 충격에 대한 i번째 시계열의 시간 s이후의 반응
= Ψ_s^*의 (i,j)원소

충격-반응 함수

$z_t = a_t + \Psi(B) a_t$

- MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t + \Psi_1 \boldsymbol{a}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{a}_{t-2} + \cdots,\ \boldsymbol{a}_t \sim MVN(0, \Sigma)$$

- Σ 의 분해

  - LDL 분해: positive definite 대칭행렬 분해

    $\Sigma = LDL^T$ (L: 대각원소가 1인 아래쪽 삼각행렬; D: 양의 원소를 갖는 대각행렬)

  - Cholesky 분해: 양의 대각원소를 갖는 삼각행렬로 분해

    $\Sigma = PP^T$ $(P = LD^{1/2})$

  - 직교오차 변환

$$\boxed{\boldsymbol{v}_t = P^{-1} \boldsymbol{a}_t}$$

$$Var[\boldsymbol{v}_t] = Var[P^{-1} \boldsymbol{a}_t] = P^{-1} \Sigma (P^{-1})^T = I$$

  - 직교오차 MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$$

$z_t = a_t + \Psi(B) P P^{-1} a_t = a_t + H(B) v(t)$

충격-반응 함수

(예 6-2) 영국 소비/소득/자산 1차 차분 데이터에 대한 충격-반응 함수 도출

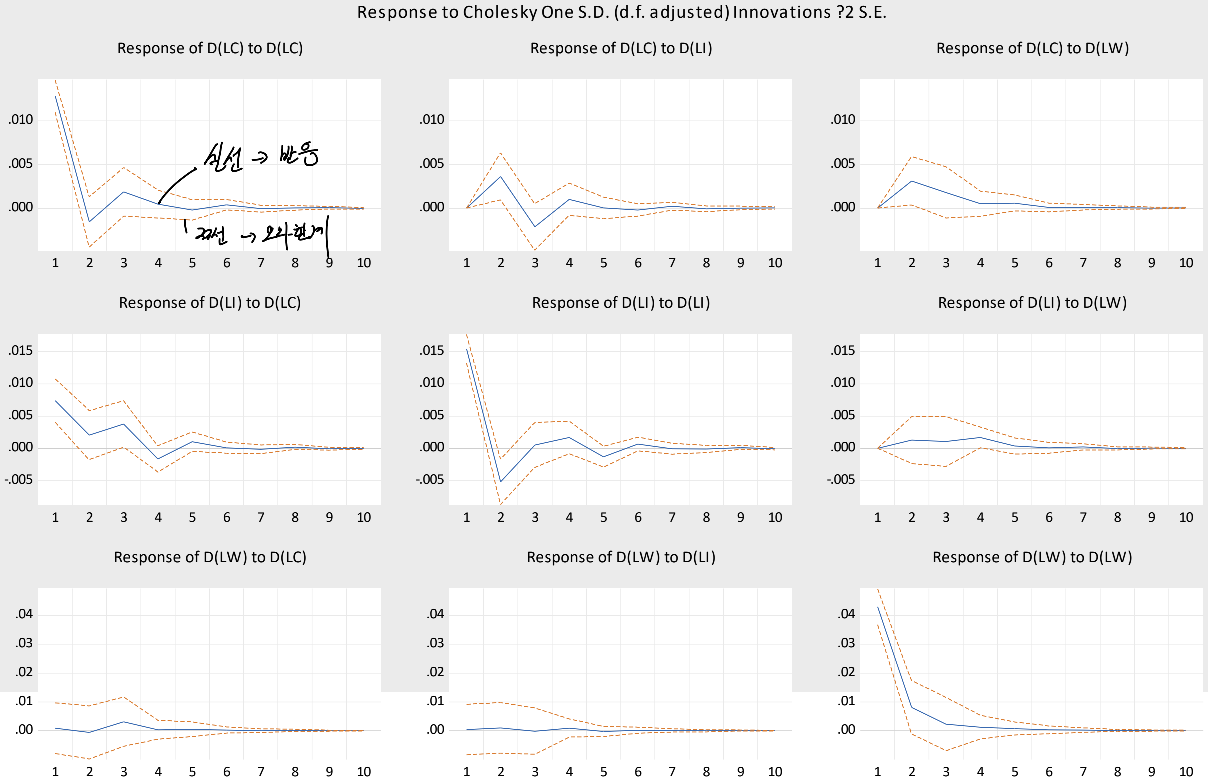
* 연관성이 많은 시계열일 수록 충격에 대해 민감하게 반응함

LC 충격 | LI 충격 | LW충격

LC 반응

LI 반응

LW 반응



예측오차 분산분해

- 필요성
  - 특정 시계열의 미래 불확실성에 다른 여러 시계열의 충격이 영향을 줄 수 있음
  - 어떤 시계열이 상대적으로 어떤 영향을 끼치고 있는지 중요도 산출이 의미있음
  - 이를 위해 미래값을 예측하고 예측오차의 분산을 시계열별로 분해함
- 예측오차
  - 모형: $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$
  - k-단계 예측치

$$\boldsymbol{f}_{t,k} = E[\boldsymbol{z}_{t+k} | \boldsymbol{z}_t, \ldots] = \Psi_k^* \boldsymbol{v}_t + \Psi_{k+1}^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \cdots$$

  - k-단계 예측오차

$$\boldsymbol{e}_{t,k} = \boldsymbol{v}_{t+k} + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t+k-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t+k-2} + \cdots + \Psi_{k-1}^* \boldsymbol{v}_{t+1}$$

  - i-번째 시계열의 k-단계 예측오차
  - $e_{t,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k} + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^* v_{j,t+k-1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,k-1}^* v_{j,t+1}$

예측오차 분산분해

- 예측오차 분산분해 (variance decomposition)

  i-번째 시계열의 k-단계 예측오차

$$e_{t,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k} + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^{*} v_{j,t+k-1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,k-1}^{*} v_{j,t+1}$$

  i-번째 시계열의 k-단계 예측오차 분산 $\sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k}$ $\sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^{*} v_{j,t+k-1}$

$$Var[e_{t,k}^{(i)}] = m + \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,1}^{*})^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,k-1}^{*})^2 = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,s}^{*})^2$$

  이중 j-번째 시계열 분산 비중

$$Var[e_{t,k}^{(ij)}] = 1 + (\psi_{ij,1}^{*})^2 + \cdots + (\psi_{ij,k-1}^{*})^2 = \sum_{s=0}^{k-1} (\psi_{ij,s}^{*})^2$$

  i-번째 예측오차분산 중 j-번째 시계열 기여율

$$R_{ij,k} = \frac{Var[e_{t,k}^{(ij)}]}{Var[e_{t,k}^{(i)}]} \times 100 = \frac{\sum_{s=0}^{k-1} (\psi_{ij,s}^{*})^2}{\sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,s}^{*})^2} \times 100(\%)$$

예측오차 분산분해

(예 6-3) 영국 소비/소득/자산 데이터에 대한 예측오차 분산분해

차분

Variance Decomposition of D(LC):

Period	S.E.	D(LC)	D(LI)	D(LW)
1	0.012824	100.0000	0.000000	0.000000
2	0.013775	87.97436	6.915991	5.109644
3	0.014178	84.78336	8.791400	6.425242
4	0.014230	84.26114	9.232929	6.505934
5	0.014244	84.12672	9.215815	6.657461
6	0.014251	84.11612	9.230617	6.653260
7	0.014253	84.09334	9.250909	6.655749
8	0.014253	84.08904	9.253813	6.657074
9	0.014253	84.08914	9.253787	6.657074
10	0.014253	84.08885	9.253944	6.657206

증가하다가 일정하게 유지

VAR모형 분석

Granger Causality Test

↓

단위근 검정

↓

정상적 시계열	비정상적 시계열
VAR모형 추정	공적분 분석
↓	↓
• 충격-반응 함수 • 예측오차분산분해	오차수정모형

비정상적시계열을 그대로

비정상적 시계열 분석

필요성

- VAR모형은 정상적 시계열에 대하여 적용
  - 비정상적 시계열에 대해서는 차분을 통해 정상성 확보후에 VAR모형화
- 경제/금융관련 시계열들에 각각은 비정상적이나 장기적으로 균형적 관계를 갖는 경우가 있으며 이를 공적분 (cointegration)관계라 함. (예) 소득과 소비
- 이런 경우 각각을 차분하여 정상적 시계열로 변환하여 분석하는 것보다 직접적으로 회귀 모형화하는 것이 보다 많은 정보를 얻음.
- 공적분관계가 없는 비정상적 시계열을 대상으로 회귀분석할 때 가성 회귀 (spurious regression)의 문제가 발생함에 유의

  ⇒ "가짜 관계"
- 공적분 분석을 위해서는 각 시계열이 동일 차수의 (비정상적) 누적 시계열이어야 함.

공적분

1차　　　　　　2차

$x_t \to (1-B)x_t \to (1-B)^2 x_t \Rightarrow I(2)$

비정상　　　비정상　　　정상

누적 (integrated) 벡터시계열

- 벡터 시계열 $\{\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\}$에 대해 $\{(1-B)^{d-1}\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\}$는 비정상적이나 $\{(1-B)^{d}\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\}$이 정상적일 때, 차수 d의 누적 벡터시계열이라 하며 $\{\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\} \sim I(d)$ 로 표기

공적분 (cointegration)

- $I(d)$ 인 누적 벡터시계열에 대해 선형결합 $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{x}_t$이 차수 d 미만의 누적 시계열이 될 때, 공적분 벡터 $\boldsymbol{\alpha}$를 갖는 공적분 관계에 있다 함
- 총 m개의 시계열이 있을 때 최대 $\boxed{\text{m−1개}}$의 공적분 벡터가 있을 수 있음. 이 때 존재하는 공적분 벡터의 최대수를 공적분 랭크 (cointegration rank)라 함
- (예) 다음 세 시계열을 고려하자.
  - $Z_{1t} = Z_{1,t-1} + a_{1t}$; $Z_{2t} = \beta_1 Z_{1,t} + a_{2t}$; $Z_{3t} = \beta_2 Z_{1,t} + \beta_3 Z_{2,t} + a_{3t}$
  - $\boxed{\text{각 시계열은 } I(1)}$ → 1차 차분하면 백색잡음
  - $-\beta_1 Z_{1,t} + Z_{2t} + 0Z_{3t} = a_{2t} \sim I(0)$;　$-\beta_2 Z_{1,t} - \beta_3 Z_{2,t} + Z_{3t} = a_{3t} \sim I(0)$
  - 따라서 공적분 랭크는 2

가중치 $-\beta_1$　1　0

$-\beta_2$　$-\beta_3$　1

오차수정모형

- 필요성
  - 여러 시계열이 공적분 관계가 있는 경우 오차수정모형 (error correction model; ECM)을 통하여 시계열 상호간의 미치는 단기 및 장기 효과를 분석할 수 있음.
  - 공적분 관계는 ECM 표현을 위한 필요충분조건임 (그래인저 표현정리-Engle and Granger, 1987).

- ECM 유도 예
  - 두 시계열 $\{X_t\}$와 $\{Y_t\}$가 각각 $\mathrm{I}(1)$이며 다음의 공적분관계가 있다고 하자.

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$$

  - 이 관계식을 다음과 같이 쓸수있다.

$$Y_t - (Y_{t-1} - Y_{t-1}) = \beta X_t + \beta(X_{t-1} - X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Downarrow \quad e_{t-1} = Y_{t-1} - \beta X_{t-1} \text{ (이전 시점 오차)}$$

$$\underbrace{\Delta Y_t = -e_{t-1} + \beta \Delta X_t}_{\text{차분}} + \varepsilon_t$$

ECM 기본형태

오차수정모형

- ## 단순형태 ECM

$$\Delta Y_t = \lambda e_{t-1} + \beta \Delta X_t + \varepsilon_t$$

  - λe_{t-1} ($\lambda < 0$): 오차수정항 (error correction term) – 이전 시점에서 예측오차가 양수이면 (실제값이 예측값보다 크면) 다음 시점에서 Y값을 축소시켜 X와 Y의 장기적관계를 유지시키는 효과
  - X값에 변화가 있으면 Y값에 영향을 줌 (단기 효과)

- ## 시차변수를 포함한 ECM

p개의 시차

$$\Delta Y_t = \lambda e_{t-1} + \textstyle\sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{1j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_{1t} \qquad (e_{t-1} = Y_{t-1} - \beta X_{t-1})$$

$$\Delta X_t = \lambda e_{t-1} + \textstyle\sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{2j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda\beta & \lambda \\ -\lambda\beta & \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} + \textstyle\sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} \beta_{2j} & \gamma_{2j} \\ \beta_{1j} & \gamma_{1j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{t-j} \\ \Delta Y_{t-j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{1t} \end{pmatrix}$$

$$\Delta X_t = \underbrace{-\lambda\beta X_{t-1} + \lambda Y_{t-1}}_{\lambda(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) = \lambda e_{t-1}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{2j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_{2t}$$

오차수정모형

- VAR모형과 벡터 ECM → VECM.
  - 벡터 시계열의 경우 공적분관계가 있을 때 벡터 ECM (VECM)으로 확장됨
  - $I(1)$인 VAR(p)모형은 공적분관계 여부와 관계없이 다음의 VECM으로 표현

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$$

$$\Downarrow \quad \Pi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_p - I, \ \Gamma_k = -\sum_{j=k+1}^{p} \Phi_j$$

$$\boldsymbol{\Delta z}_t = \Pi \boldsymbol{z}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \boldsymbol{\Delta z}_{t-j} + \boldsymbol{a}_t$$

  - 행렬 Π $(m \times m)$의 랭크 크기에 따라 3가지 경우

    $\Pi = 0$인 경우: 공적분 관계 없으며 차분 형태가 정상적인 VAR(p−1)모형으로 변환

    Π의 랭크가 m인 경우: VAR(p)모형이 이미 정상적

    Π의 랭크가 0과 m 사이인 경우: 실제적 VECM. 공적분 관계식이 랭크수만큼 있음. 이 때 $\Pi = AB^T$가 성립하며 행렬 B의 열들이 공적분 벡터들이 됨.

    ↳ 2개의 행렬로 분해

$y_t = A y_{t-1} + u_t$: Var(1)

$\Delta y_t = (A - I_k) y_{t-1} + u_t$

$= \Pi y_{t-1} + u_t.$

rank(Π) ⇒ 독립적인 column이나 row의 수

↳ 공적분 벡터 개수

공적분 검정

Engle-Granger 검정

- 회귀분석의 잔차 시계열에 대하여 ADF검정 실시
- 단위근이 없다면 공적분 관계있다고 결론

Johansen 검정

공적분 관계가 몇 개인지

- 트레이스 검정
  - $H_0: r = r_0$ vs $H_1: r > r_0$
  - $r_0 = 0$에서 귀무가설 기각되면 다음으로 $r_0 = 1$을 검정하는 과정을 반복
  - 검정통계량은 우도비에 바탕으로 산출
- 최대고유치 검정
  - $H_0: r = r_0$ vs $H_1: r = r_0 + 1$
  - 역시 $r_0 = 0, 1, \ldots$ 등으로 변화시키면서 순차적으로 진행

공적분과 오차수정모형 예

(예 6-4) 옆의 그림은 2016.1 ~ 2018.12 사이 kospi200과 kospi200 선물 지수를 나타낸다. 다음을 알아보자

1. 공적분 검정
2. 공적분 관계
3. 오차수정모형

공적분과 오차수정모형 예

(예 6-4 계속)

다음은 공적분 검정 결과이다.

- 트레이스 검정 과 최대고유치 검정에서 두 시계열간 공적분관계가 있다고 판정됨

Sample (adjusted): 1/11/2016 12/28/2018
Included observations: 728 after adjustments
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: KOSPI200 KOSPI200_FUTURE
Lags interval (in first differences): 1 to 4

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.051946	41.25473	15.49471	0.0000
At most 1	0.003319	2.420325	3.841466	0.1198

→ 1개 이상 있다.

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
*denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None*	0.051946	38.83440	14.26460	0.0000
At most 1	0.003319	2.420325	3.841466	0.1198

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
*denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

공적분과 오차수정모형 예

(예 6-4계속) 공적분관계식과 오차수정모형의 추정식을 보여준다.

공적분 관계식

$$k200_{t-1} = 0.2155 + 0.9982k200\_f_{t-1}$$

오차수정모형

오차가 발생했을 때 얼마나 빨리 조정하는지

$$\Delta k200_t = 0.0364 - 0.1183e_{t-1} - 0.1867\Delta k200_{t-1} - 0.0136\Delta k200_{t-2} + 0.1561\Delta k200_{f\,t-1} + 0.0814\Delta k200_{f\,t-2}$$

$$\Delta k200\_f_t = 0.0365 + 0.0622e_{t-1} + 0.0811\Delta k200_{t-1} + 0.045\Delta k200_{t-2} - 0.1402\Delta k200_{f\,t-1} - 0.0133\Delta k200_{f\,t-2}$$

검정통계량 통해 결정가능

공적분식

Cointegrating Eq:	CointEq1	
KOSPI200(-1)	1.000000	
KOSPI200_FUTURE(-1)	-0.998212 (0.00329) [-303.412]	
C	-0.215456	
Error Correction:	D(KOSPI200)	D(KOSPI20…
CointEq1	-0.118302 (0.12215) [-0.96850]	0.062194 (0.12706) [0.48949]
D(KOSPI200(-1))	-0.186666 (0.18259) [-1.02233]	0.081089 (0.18993) [0.42695]
D(KOSPI200(-2))	-0.013611 (0.17574) [-0.07745]	0.045013 (0.18280) [0.24624]
D(KOSPI200_FUTURE(..	0.156070 (0.17797) [0.87693]	-0.140201 (0.18512) [-0.75734]
D(KOSPI200_FUTURE(..	0.081424 (0.17234) [0.47245]	0.013280 (0.17927) [0.07408]
C	0.036415 (0.08482) [0.42932]	0.036494 (0.08823) [0.41363]

마지막 주차정리