시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형

2-2. 편자기상관함수

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

편자기상관함수

- 편자기상관 함수 (PACF)

partial

ACF나 PACF를 통해 시계열 모형 식별 (시계열이 어떤 모형을 따르는지 모르기 때문)

  - 정상적 시계열의 형태를 식별하는데 ACF외에 PACF의 정보를 활용함.

표본으로 구함

  - PACF란 시차가 k인 두 값들 간의 상관계수가 중간 시점들의 값들이 이미 설명한 이후 추가적인 영향만을 고려하기 위하여 고안된 것임. 따라서 다음과 같은 조건부 상관계수를 고려함

given 중간값

    - $P(k) = Corr[Z_t, Z_{t-k} | Z_{t-1}, \dots, Z_{t-k+1}],\ k = 0, 1, 2, \dots$
      - $P(1) = \rho(1)$: 중간 값이 없으므로
      - $P(k)$ 는 다음의 회귀모형의 계수 ϕ_{kk}와 동일하다
        - $Z_t = \phi_{k1} Z_{t-1} + \phi_{k2} Z_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_{t-k} + b_t$

	t-4	t-3	t-2	t-1	t	
	Z_{t-4}	Z_{t-3}	Z_{t-2}	Z_{t-1}	Z_t	

$P(4)$

편자기상관함수

- 아래 회귀모형에서 $P(k) = \phi_{kk}$

  \- $Z_t = \phi_{k1}Z_{t-1} + \phi_{k2}Z_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}Z_{t-k} + b_t$

  \- 위의 식으로 부터 k개의 다음 식들이 유도된다.

$$\begin{cases} \rho(1) = \phi_{k1} + \phi_{k2}\rho(1) + \cdots + \phi_{kk}\rho(k-1) \\ \rho(2) = \phi_{k1}\rho(1) + \phi_{k2} + \cdots + \phi_{kk}\rho(k-2) \\ \cdots \\ \rho(k) = \phi_{k1}\rho(k-1) + \phi_{k2}\rho(k-2) + \cdots + \phi_{kk} \end{cases}$$

k개

\- 위의 연립방정식을 풀면 ϕ_{kk}를 ACF로 부터 산출할 수 있다. → 소프트웨어 이용

편자기상관함수

(예 2-3) 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$이 다음의 관계를 가질 때 이의 PACF를 구하라.

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

(풀이)

ppt 2-2 p.5~6

1) $\underline{\boldsymbol{P(1)=\rho(1)}}$ 인데 (예2-2)에서 $\boldsymbol{\rho(1)} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$ 이다.

2) $\boldsymbol{P(2) = \phi_{22}}$ 를 구하기 위해 연립방정식을 기술하면

$$\begin{cases} \rho(1) = \boldsymbol{\phi_{21}} + \boldsymbol{\phi_{22}}\rho(1) \\ \rho(2) = \boldsymbol{\phi_{21}}\rho(1) + \boldsymbol{\phi_{22}} \end{cases}$$

ϕ_{22} 구할 것

$$\longrightarrow \rho(1) = \phi_{21} + \phi_{22}\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$: \phi_{21} + \phi_{22} \cdot \frac{-\theta}{1+\theta^2} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$(1-\phi_{22})\frac{\theta}{1+\theta^2} = -\phi_{21}$$

$$\rho(2) = (1-\phi_{22})\underbrace{\left(\frac{-\theta}{1+\theta^2}\right)^2}_{=A} + \phi_{22} = 0$$

$$A - \phi_{22}A + \phi_{22} = 0 \quad (1-A)\phi_{22} = -A$$

$$\phi_{22} = \frac{-A}{1-A} = -\frac{\frac{\theta^2}{\cancel{(1+\theta^2)^2}}}{\frac{\theta^4+\theta^2+1}{\cancel{(1+\theta^2)^2}}} = -\frac{\theta^2}{\theta^4+\theta^2+1}$$

$\rho(2) = 0$을 이용하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P(2) = \phi_{22}} = \frac{\boldsymbol{-\rho^2(1)}}{\boldsymbol{1-\rho^2(1)}} = \frac{\boldsymbol{-\theta^2}}{\boldsymbol{1+\theta^2+\theta^4}}$$

3) 위와 같은 방법으로 $\boldsymbol{P(k), k = 3, 4, \ldots}$ 을 구할 수 있다.

시계열 표현방식

각각 장단점 존재

- **자기회귀 (autoregressive; AR) 표현방식**

  ~ 자기변수만 가지고 표현

  - 시점t의 값 (Z_t)을 과거시점의 값들을 이용한 회귀식으로 표현
  - $Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t$
  - 여기서 π_1, π_2 등은 상수이며 a_t는 백색잡음 (white noise)
  - 자기회귀 과정 (autoregressive process)라고도 함

- **이동평균 (moving average; MA) 표현방식**
  - 시점t의 값 (Z_t)을 현재와 과거시점의 백색잡음으로 표현
  - $Z_t = a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \cdots$
  - 여기서 ψ_1, ψ_2 등은 상수
  - 이동평균 과정 (moving average process)라고도 함

시계열 표현방식

일반화를 위한 표현

- 후향 연산자 (backward shift operator/ backshift operator) 사용 → t시점 기준으로 표현

  - $Z_{t-1} = BZ_t$
  - $Z_{t-2} = \underline{BZ_{t-1}} = B^2 Z_t$
  - $Z_{\underline{t-k}} = B^k Z_t,\ k = 1,2, \ldots$

AR과정의 표현

묶어낼 수 있음!

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t \Rightarrow Z_t = (\pi_1 B + \pi_2 B^2 + \cdots) Z_t + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots) Z_t = a_t$$

$$\Rightarrow Z_t = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots)^{-1} a_t$$

MA과정의 표현

$$Z_t = a_t - \psi_1 \underbrace{a_{t-1}}_{Ba_t} - \psi_2 \underbrace{a_{t-2}}_{B^2 a_t} - \cdots \Rightarrow Z_t = (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \cdots) a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \ldots)^{-1} Z_t = a_t$$

시계열 표현방식

(예 2-4) 다음의 시계열을 AR표현방식과 MA표현방식으로 나타내라.

$$Z_t = a_t - \underbrace{0.5a_{t-1}}_{0.5Ba_t} + \underbrace{0.3a_{t-2}}_{0.3B^2a_t}$$

(풀이)

- 이미 MA방식으로 표현되어있다. 즉,

$$\psi_1 = 0.5, \psi_2 = -0.3, \psi_k = 0, k = 3,4, \ldots$$

시차가 무한대까지 가능

- AR방식으로 표현하기 위해 후방연산자를 사용하면

$$Z_t = (1 - 0.5B + 0.3B^2 - \cdots)a_t \Rightarrow (1 - 0.5B + 0.3B^2 - \ldots)^{-1} Z_t = a_t$$

$$\Rightarrow (1 + 0.5B - 0.05B^2 - 0.175B^3 - \cdots)Z_t = a_t$$

1÷(1−0.5β+0.3β²−…)의 값을 구해줌

$$\Rightarrow Z_t = -0.5Z_{t-1} + 0.05Z_{t-2} + 0.175Z_{t-3} + \cdots + a_t$$

$a_t = Z_t + 0.5\beta Z_t - 0.05\beta^2 Z_t - 0.175\beta^3 Z_t \sim \cdots$

$\therefore Z_t = 0.5Z_{t-1} - 0.05Z_{t-2} - 0.175Z_{t-3} + a_t$

따라서

$$\pi_1 = -0.5, \pi_2 = 0.05, \pi_3 = 0.175, \cdots$$

시계열 분석 기법과 응용

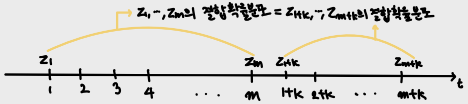
Week 2. ARMA 모형

2-1. 자기상관함수

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

정상적 시계열

- 정상적 시계열 (Stationary Time Series)
  - 실제 시계열은 추세, 계절성을 포함하는 비정상적 (non-stationary)인 것이 많으나 우선 정상적 시계열 의 성질을 알아본다.
  - 비정상적 시계열은 적절한 변환을 통하여 정상적 시계열로 바꿀 수 있다.
- 강 정상성 (Strong Stationarity)
  - 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$에 대해 $(Z_1, \dots, Z_m)$과 $(Z_{1+k}, \dots, Z_{m+k})$이 동일한 결합확률분포를 가질 때 강 정상성을 갖는 시계열이라 함
  - 기대치가 시간에 따라 일정
  - 분산이 시간에 따라 일정
  - 자기공분산 또는 자기상관계수가 시간 간격 (time lag)에만 의존



자기공분산은 시간간격에만 의존

- 약 정상성 (Weak Stationarity):
  - 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$에 대해 기대치가 시간에 따라 일정하고 임의 두 시점 자기공분산이 시간 간격에만 의존하고 유한할 때 약 정상성을 갖는 시계열이라 함
  - 강 정상성이 성립하면 약 정상성이 성립; 역은 성립하지 않음
  - 결합확률분포가 다변량정규분포를 따를 때 강 정상성과 약 정상성은 일치
  - 시계열분석에서는 주로 약 정상성을 가정함; 본 강의에서도 약 정상성을 가정하여 이론 전개

자기상관함수

↱ 시계열 모형 식별에 이용

시간에 따른 변수의 관계

- 자기 공분산 (autocovariance)
  - 시계열의 시간에 따른 연관 패턴을 자기공분산으로 요약
  - 시차 k의 자기공분산

k만큼 떨어짐 / by 공분산 정의

✓ $\gamma(k) = Cov[Z_t, Z_{t-k}] = E[(Z_t - \mu_Z)(Z_{t-k} - \mu_Z)]$ (약 정상성 가정)

약정상성 가정에 의해 평균동일

시차=0 ∴ 분산과 동일 $= E[Z_t Z_{t-k}]$ $(\mu_Z = 0$ 가정)

✓ $\gamma(0) = Var[Z_t]$

✓ $\gamma(k)$=$\gamma(-k)$ 공분산은 0에 대해 대칭

✓ $\gamma(k)$ 를 k의 함수 $(k = 0, 1,2, \ldots)$로 볼 때, 자기공분산 함수 (autocovariance function)라 함

$\gamma(2)$

시간에 따라 다른값

* t가 기준이 아니어도 떨어진 시차만큼만 표현해주면 됨

	t-4	t-3	t-2	t-1	t	
	Z_{t-4}	Z_{t-3}	Z_{t-2}	Z_{t-1}	Z_t	

$\gamma(3)$ $\gamma(2)$

자기상관함수

- 자기상관 함수 (autocorrelation function; ACF)

  시차 k의 자기상관계수:

$$\rho(k) = Corr[Z_t, Z_{t-k}] = \frac{Cov[Z_t, Z_{t-k}]}{Var[Z_t]} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

정의상 분모: $\sqrt{Var(Z_t)}\underbrace{\,\sqrt{Var(Z_{t-k})}}_{\text{같은값}}$

✓ $\rho(0) = 1$

✓ $\rho(k) = \rho(-k)$: 대칭

✓ $\rho(k)$ 를 k의 함수 ($k = 0, 1, 2, \ldots$)로 볼 때, 자기상관 함수 (autocorrelation function; ACF)라 함

✓ 비교적 단순한 형태의 정상적 시계열 모형을 주로 다루며 ACF로 모형을 식별함

$\rho(1)$

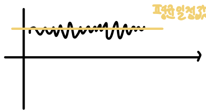
	t-4	t-3	t-2	t-1	t	
	Z_{t-4}	Z_{t-3}	Z_{t-2}	Z_{t-1}	Z_t	

$\rho(3)$

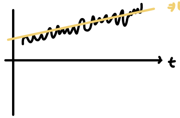
$\rho(2)$

자기상관함수

* 정상성



* $\phi > 1$



- 자기상관 함수 산출 예

t에서의 시계열값 = (t-1)의 시계열값 × ϕ + noise

(예 2-1) 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$이 다음의 관계를 가질 때 이의 ACF를 구하라. $Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$
여기서 a_t는 평균 0, 분산 σ_a^2 를 갖는 백색잡음(white noise)으로 불리는 오차항임.
↳ 다른 것들과 독립
이 시계열이 정상적이려면 $-1 < \phi < 1$이어야 한다.
(풀이)

평균 0으로 가정

① k=1에 대한 자기공분산을 구하기 위해 양변에 Z_{t-1}을 곱하고 기대치를 취하면
분산
$E[Z_t Z_{t-1}] = \phi E[Z_{t-1}^2] + E[a_t Z_{t-1}] \Rightarrow \gamma(1) = \phi\gamma(0)$ 양변을 $\gamma(0)$로 나누면, $\boxed{\rho(1) = \phi}$

→ $\gamma(1) = E(Z_t Z_{t-1})$
$= \phi E(Z_t^2) + E(a_t Z_{t-1})$
$= \phi E(Z_t^2) = \phi\gamma(0)$
by independence
$E(Z_t)=0$ 가정
$\therefore E((Z_t - E(Z_t))^2)$
$= E(Z_t^2) = Var(Z_t) = \gamma(0)$

① k=2에 대한 자기공분산을 구하기 위해 양변에 Z_{t-2}을 곱하고 기대치를 취하면 $E[Z_t Z_{t-2}] = \phi E[Z_{t-1} Z_{t-2}] + E[a_t Z_{t-2}] \Rightarrow \gamma(2) = \phi\gamma(1)$ 양변을 $\gamma(0)$로 나누면, $\boldsymbol{\rho}(2) = \phi\, \boldsymbol{\rho}(1) = \phi^2$

② 위와 같은 방식을 적용하면 ACF는 다음과 같다. $\boldsymbol{\rho}(k) = \phi\boldsymbol{\rho}(k-1) = \phi^k,\ k = 1,2,\ldots$

참고로 Z_t의 분산은 다음과 같다. 양변에 분산을 취하면,

$$\gamma(0) = Var[Z_t] = \phi^2 Var[Z_{t-1}] + Var[a_t] + 2Cov[Z_{t-1}, a_t] \Rightarrow \gamma(0) = \phi^2\gamma(0) + \sigma_a^2 \Rightarrow \gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$$

↳ $Var(Z_t) = E(Z_t^2) = E((\phi Z_{t-1} + a_t)^2) = \phi^2 Var(Z_{t-1}) + 2\phi E(Z_{t-1}, a_t) + \underbrace{Var(a_t)}_{\sigma_a^2} = \phi^2\gamma(0) + \sigma_a^2 = \gamma(0)$ ⟶ $\gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$

$= \phi^2 Z_{t-1}^2 + 2\phi Z_{t-1} a_t + a_t^2$

$= Cov(Z_{t-1}, a_t)$
↳ $Z_{t-1} \perp a_t$
$\therefore 0$

자기상관함수 ☆

(예 2-2) 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$이 다음의 관계를 가질 때 이의 ACF를 구하라.

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

t시점 시계열값 = 이전 시점의 백색 noise × θ + noise

(풀이)

① 우선 분산은 다음과 같이 산출된다.

$$\gamma(0) = E[Z_t^2] = E[(a_t - \theta a_{t-1})^2] = (1+\theta^2)\sigma_a^2$$

*백색잡음은 모두 독립!

② k=1에 대한 자기공분산을 구하면

$$\gamma(1) = E[Z_t Z_{t-1}] = E[(a_t - \theta a_{t-1})(a_{t-1} - \theta a_{t-2})] = E[-\theta a_{t-1}^2] = \underline{-\theta\sigma_a^2}$$

따라서, $\boxed{\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}}$

③ k=2에 대한 자기공분산을 구하면

$$\gamma(2) = E[Z_t Z_{t-2}] = E[(a_t + \theta a_{t-1})(a_{t-2} + \theta a_{t-3})] = 0$$

따라서 ACF는 다음과 같다.

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2} & k = 1 \\ 0 & k = 2,3,\ldots \end{cases}$$

시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형
2-3. AR모형과 MA모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

ARMA 모형

- AR 모형
  - AR 표현방식이며 $\boxed{\text{유한 시차}}$로 구성
  - AR(1): 시차 1 변수 포함

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

- MA 모형
  - MA표현방식이며 $\boxed{\text{유한 시차}}$로 구성
  - MA(1): 시차 1 백색잡음 포함

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

- ARMA 모형
  - AR방식과 MA방식이 결합된 형태
  - ARMA(1,1): 시차1의 변수와 시차1의 백색잡음 포함

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

AR 모형

- AR(1) 모형: 가장 단순한 상태
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$
  - a_t는 평균 0, 분산 σ_a^2의 독립인 백색잡음 (white noise)이라 부르는 오차항
  - 시점 t의 값은 시점 t-1의 값과 오차항으로 생성된다
  - 상수항을 포함시킬 수 있으나 통상 Z_t의 평균을 0으로 가정하여 생략함
  - 정상성을 갖기 위해 모수 ϕ_1에 대한 조건 필요: $-1 < \phi_1 < 1$

    이 조건 만족 X → 증가 or 감소 추세로 나타나게 됨

- AR(2) 모형: 시차 2변수까지 포함
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$
  - 정상성 조건: $-1 < \phi_2 < 1, \phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1$

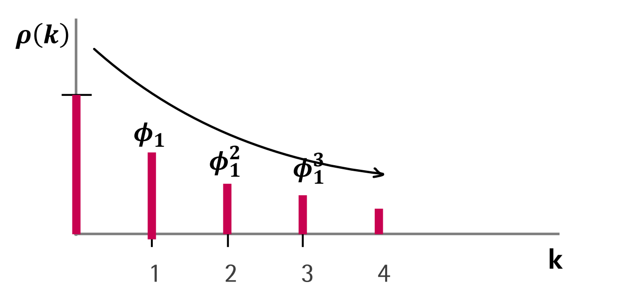
- AR(p) 모형: 시차 p의 변수까지 포함
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$
  - 정상성을 갖기 위해 모수 $\phi_1, \ldots, \phi_p$에 대한 조건 필요: 다소 복잡

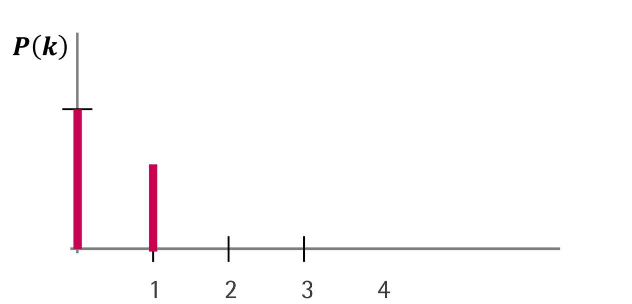
    소프트웨어 이용

AR 모형

- AR(1) 모형의 ACF
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$ $-1<\phi_1<1$
  - $Var[Z_t] = \gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$ by ppt 2-1 p.5
  - $\gamma(k) = \phi_1^k \gamma(0),\ k = 0, 1, 2, \ldots$
  - $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi_1^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$: 지수적으로 감소하는 패턴 ($-1 < \phi < 1$ 이므로)

- AR(1) 모형의 PACF
  - $P(1) = \rho(1) = \phi_1$
  - $P(k) = 0$, $k = 2, 3, \cdots$: 시차 1 이후 절단 패턴





AR 모형

- AR(2) 모형의 ACF

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

- 양변에 분산을 취하면

$$(1-\phi_1^2-\phi_2^2)\gamma(0) = \sigma_a^2 + 2\phi_1\phi_2\gamma(1)$$

- 양변에 Z_{t-1} 곱하고 기대치 취하면

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) \Rightarrow \gamma(1) = \frac{\phi_1\gamma(0)}{1-\phi_2}$$

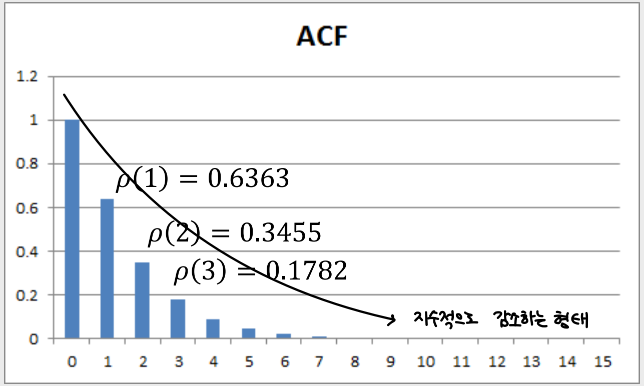
- 분산은 다음과 같다

$$\gamma(0) = \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)}\sigma_a^2$$

- AR(2)의 ACF

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2},\ \rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2),\ k = 2,3,\ldots$$

(지수적으로 감소)



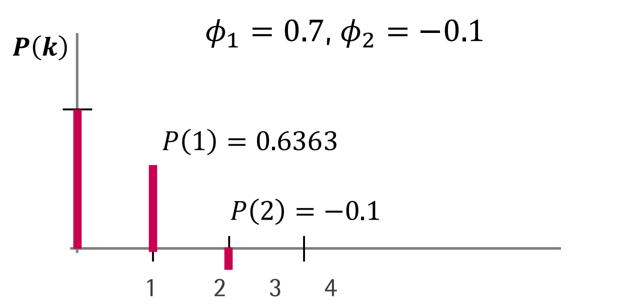
$$\phi_1 = 0.7,\ \phi_2 = -0.1$$

AR 모형

- AR(2) 모형의 PACF

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

- $\boldsymbol{P}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{1}) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$
- $\boldsymbol{P}(2) = \phi_2$
- $\boldsymbol{P}(k) = 0,\ k = 3,4, \ldots$ (시차2이후 절단)



$P(3)$는 다음 회귀모형에서 ϕ_{33} 값:

✓ $Z_t = \phi_{31} Z_{t-1} + \phi_{32} Z_{t-2} + \phi_{33} Z_{t-3} + a_t$

✓ AR(2)모형과 비교하면 $P(3) = \phi_{33} = 0$

AR 모형

ACF : 지수적 감소
PACF : p 이후 절단

- AR(p) 모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Z_t = a_t \Rightarrow \underline{\Phi_p(B) Z_t} = a_t$$

ACF

Yule-Walker방정식을 풀어 산출 가능

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p),\ k = 1,2, \ldots$$

정상성 조건

다항식 $\Phi_p(x) = 0$의 p개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야한다. → 이론적 조건

↳ 후향연산자로 표현한 다항식

MA 모형

↳ 그 자체로 정상성을 가지나
가역성 조건 필요

- MA(1) 모형: 시차1의 백색잡음 포함

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

  - a_t는 평균 0, 분산 σ_a^2의 독립인 백색잡음 (white noise)이라 부르는 오차항
  - 시점 t의 값은 시점 t와 시점 t-1의 오차항으로 생성된다
  - 정상성을 갖는다.
  - AR형태로 표현하기 위해 모수 θ_1에 대한 가역성 (invertibility)조건 필요: $-1 < \theta_1 < 1$

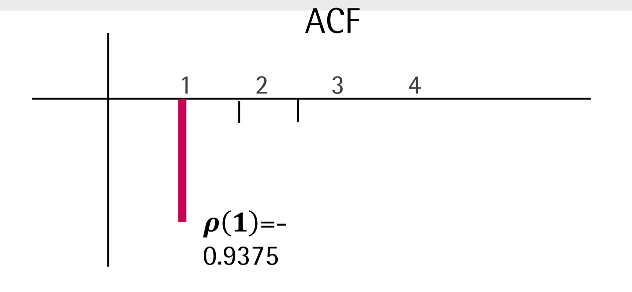
    ㄴ역수 가능해야 하므로

- MA(2) 모형: 시차 2의 백색잡음까지 포함
  - $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$
  - 가역성 조건: $-1 < \theta_2 < 1,\ \theta_1 + \theta_2 < 1,\ \theta_2 - \theta_1 < 1$

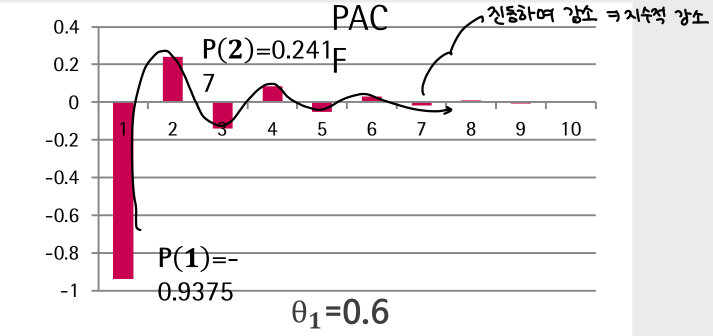
- MA(q) 모형: 시차 q의 백색잡음까지 포함
  - $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$
  - 가역성을 갖기 위해 모수 $\theta_1, \ldots, \theta_q$에 대한 조건 필요: 다소 복잡

MA 모형

- MA(1) 모형의 ACF
  - $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad -1 < \theta_1 < 1$
  - $Var[Z_t] = \gamma(0) = (1 + \theta_1^2)\,\sigma_a^2$
  - $\rho(k) = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1-\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$: 시차 1 이후 절단 패턴



- MA(1) 모형의 PACF
  - $P(1) = \rho(1) = \frac{-\theta_1}{1-\theta_1^2}$
  - $P(2) = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} = \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6}$
  - $P(k) = \frac{-\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}},\ k = 1, 2, \ldots$: 지수적으로 감소 패턴



MA 모형

- MA(2) 모형의 ACF 와 PACF

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

분산

$$\gamma(0) = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_a^2$$

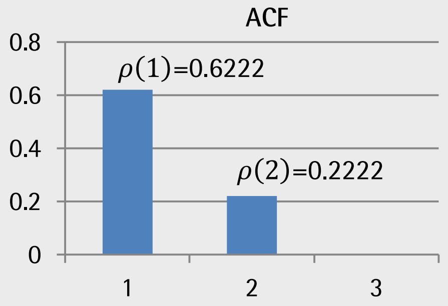
ACF

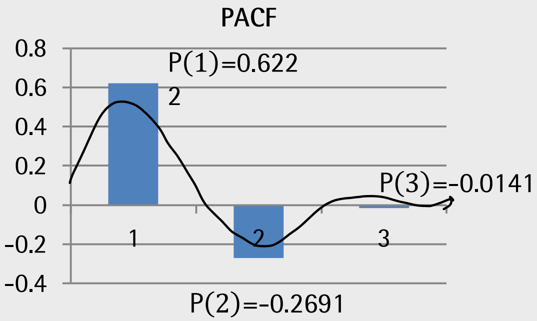
$$\rho(1) = \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2},\ \rho(2) = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2},\ \rho(k) = 0, k = 3,4,\dots$$

(시차 2 이후 절단 형태)

PACF

지수적으로 감소하는 형태





MA 모형

* ARMA
→ ACF, PACF 오두 이용해 식별해야 함.
ARMA(p, q)
p ≥ q+1 → ACF는 AR(p)와 유사한 패턴

ACF : q 이후 절단
PACF : 지수적 감소

• MA(q) 모형

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\Rightarrow Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) a_t \Rightarrow Z_t = \Theta_q(B) a_t$$

분산

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_a^2 = E(Z_t^2)$$

가역성 조건

다항식 $\Theta_q(x) = 0$의 q개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야 한다.

ACF

$$\rho(k) = \frac{-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q \theta_{q-k}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2},\ k = 1,2,\ldots,q \quad \rho(k) = 0,\ k \geq q+1 \ \text{(절단 패턴)}$$

PACF

지수적으로 감소

시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형
2-4. ARMA모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

ARMA 모형

ARMA 中 가장 단순한 형태

- ARMA(1,1) 모형: AR(1)과 MA(1)의 복합 형태
  - $\underbrace{Z_t - \phi_1 Z_{t-1}}_{\text{AR(1)꼴}} = \underbrace{a_t - \theta_1 a_{t-1}}_{\text{MA(1)꼴}}$
  - 시점 t의 값은 시점 t-1의 값, 그리고 시점 t와 t-1의 오차항으로 생성된다
  - 정상성을 갖기 위해 모수 ϕ_1에 대한 조건 필요: $-1 < \phi_1 < 1$
  - 가역성을 위해 모수 θ_1에 대한 조건 필요: $-1 < \theta_1 < 1$

- ARMA(p,q) 모형: 시차 p까지 변수와 시차 q까지 오차항 포함
  - $Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$

    $\Rightarrow \Phi_p(B) Z_t = \Theta_q(B) a_t$ (후향연산자 활용)
  - 정상성을 갖기 위해 모수 $\phi_1, \ldots, \phi_p$에 대한 조건 필요:

    다항식 $\Phi_p(x) = 0$의 p개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야한다
  - 가역성을 갖기 위해 모수$\theta_1, \ldots, \theta_q$에 대한 조건 필요:

    다항식 $\Theta_q(x) = 0$의 q개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야한다.

ARMA 모형

• ARMA(1,1) 모형의 ACF

$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$ $\quad -1<\phi_1<1;\ -1<\theta_1<1$

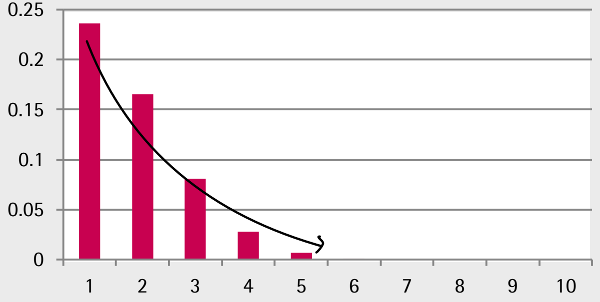
↳ 정상성, 가역성 만족 위한 조건

$$\rho(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho(k) = \phi_1^{k-1}\rho(1),\ k = 2, 3, \ldots :$$

지수적으로 감소하는 패턴

ACF



• ARMA(1,1) 모형의 PACF

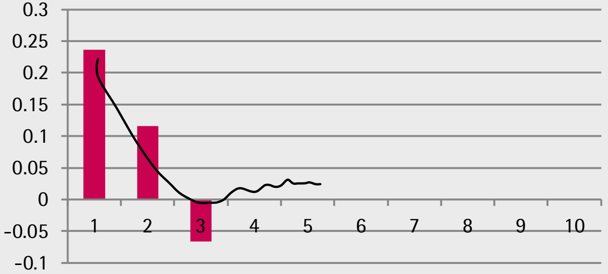
$$P(1) = \rho(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$P(2) = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} = \frac{\rho(1)(\phi_1 - \rho(1))}{1-\rho^2(1)}$$

$$P(3) = \frac{\rho^3(1) - 2\rho(1)\rho(2) + \rho(1)\rho^2(2)}{1 - 2\rho^2(1) + 2\rho^2(1)\rho(2) - \rho^2(2)}$$

지수적으로 감소하는 패턴 (절단형태 X

PACF



ϕ_1=0.7, θ_1=0.5

ARMA 모형

- ARMA(p,q) 모형

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\Rightarrow \ \Phi_p(B) Z_t = \Theta_q \ (B) a_t$$

실제 시계열 데이터에 적용시
AR, MA, ARMA 中 어떤 모형인지, p, q가 어떤 시차인지
식별하기 위해 사용

ACF

↳ Yule-Walker 방정식 풀어서 구함

- $\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \cdots + \phi_p \rho(k-p),\ k \geq \max(p, q+1)$
- ☆ $p \geq q+1$일 때, ACF는 AR(p)모형과 유사하게 0으로 떨어진다.
- $p \leq q$ 일 때, 처음 $q-p$ 값은 별개의 값을 갖고 이 이후 AR(p)모형과 유사하게 0으로 떨어진다.

PACF

- ☆ $p \geq q+1$일 때, PACF는 처음 $p-q$ 값은 별개의 값을 갖고 이 이후 MA(q)모형과 유사하게 0으로 떨어진다.
- $p \leq q$ 일 때, 처음부터 MA(q) 모형과 유사하게 0으로 떨어진다.

ARMA 모형

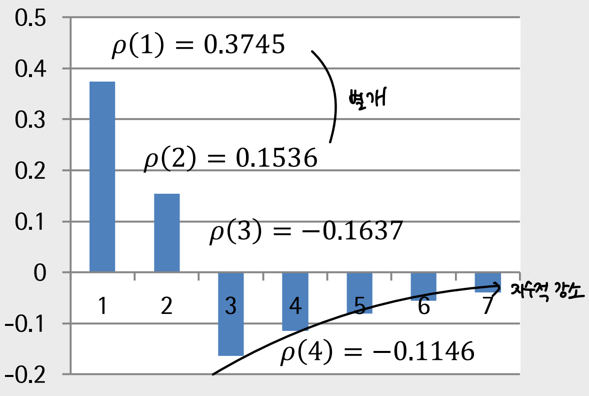
①p<q ②p>q

ARMA(1,3) 모형 vs ARMA(3,1) 모형

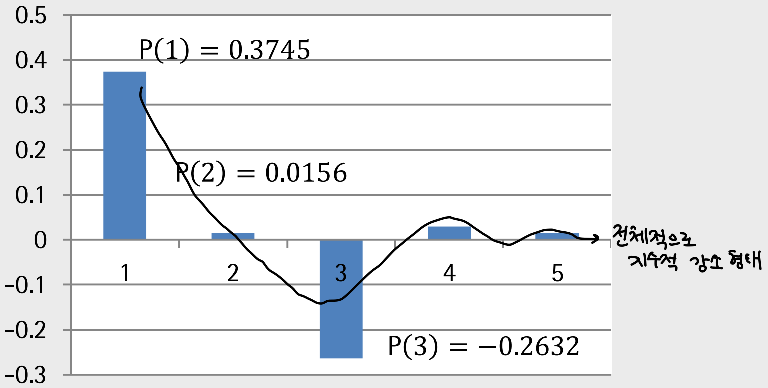
- ARMA(1,3) 모형 (p<q)

$$Z_t - 0.7Z_{t-1} = a_t - 0.7a_{t-1} - 0.2\, a_{t-2} - 0.5a_{t-3}$$

q-p=2이므로 ACF의 처음 2개는 별개 값이고 그 이후 지수적으로 감소; PACF는 처음부터 지수적으로 감소



ACF



PACF

ARMA 모형

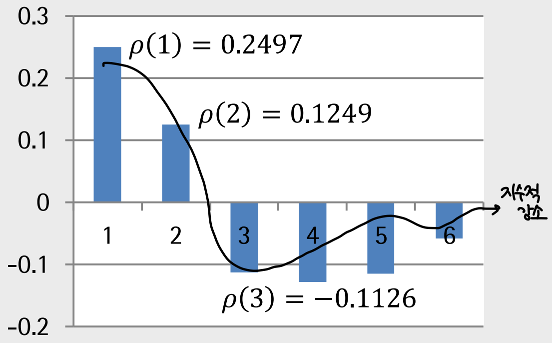
ARMA(3,1) 모형 vs ARMA(1,3) 모형

- ARMA(3,1) 모형 p>q

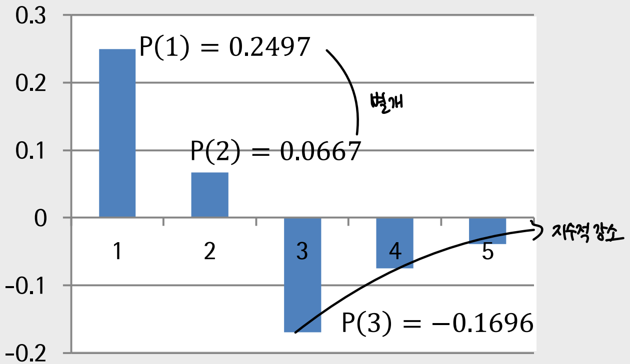
$$Z_t - 0.7Z_{t-1} + 0.1Z_{t-3} = a_t - 0.5a_{t-1}$$

$$\rho(k) = 0.7\rho(k-1) - 0.2\rho(k-3),\ \ k = 2,3,4,\ldots$$

p−q=2이므로 ACF의 처음 부터 지수적으로 감소; PACF는 처음 2개는 별개 값이며 그 이후 지수적으로 감소



ACF



PACF

Q: 그래프 어떻게 다른가..? : 어려운 점 ∴ 식별에 어려움 有

ARMA 모형

ARMA모형의 이론적 ACF와 PACF의 패턴

모형	ACF	PACF
AR(p)	지수적으로 감소	시차 p 이후 절단
MA(q)	시차 q 이후 절단	지수적으로 감소
ARMA(p, q)	시차 (q-p) 이후 지수적 감소	시차 (p-q) 이후 지수적 감소