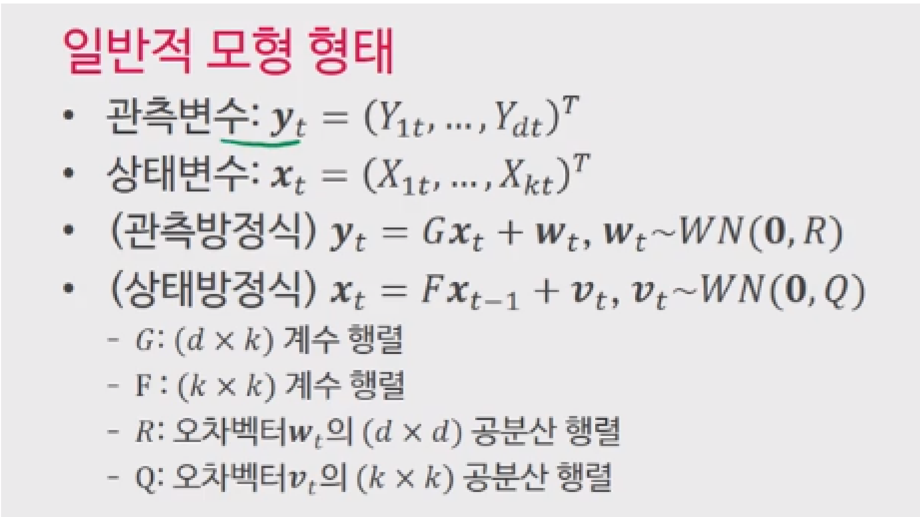
Week 7.상태공간모형

7-1. 상태공간모형의 표현

상태공간모형

- 관측되는 변수와 관측되지 않는 변수를 구분
- 시간에 따라 변하는 관측되지 않는 변수가 **상태변수** → 확률변수
- 상태공간모형은 관측방정식과 상태방정식으로 구성됨
- 회귀모형, ARMA모형 등을 포함한다
- 다변량 시계열도 모형화 가능
- 동적시스템 (시간에 따라 상태변수 및 관측변수가 변하는 시스템)에 주로 활용



7-2. 상태공간모형의 칼만필터 유도

최적선형예측식

- 관측치를 예측하기 위해서 상태변수 xt를 먼저 예측해야 한다
- 새로운 관측치가 발생할 때 상태변수의 예측식을 이전 예측식으로부터 갱신하는 것을 칼만 필터
- 칼만 필터식은 관측치의 선형 함수에서 제곱합을 최소로 하는 계수 추정식

- 최적선형예측식은 베이지안 기법에 의거해서 상태변수의 사전활률분포로부터 사후활률분포의 기대치 및 분산을 구하는 식

목적: 확률변수를 예측하는데 관측치의 선형식 사용

- 예측식 형태: $E[L|Y] = \alpha + \beta Y$
  - α, β: 추정필요 계수
- 계수추정을 위해 다음 제곱합 기대치 최소화
  - $Q = E[(L - \alpha - \beta Y)^2]$
  - Q를 풀면 다음과 같다
  - $Q = Var[L] + E^2[L] + \beta^2\{Var[Y] + E^2[Y]\} - 2\beta\{Cov[L,Y] + E[L]E[Y]\} + \alpha^2 - 2\alpha E[L] + 2\alpha\beta E[Y]$
  - $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0;\ \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$ 풀면
  - $\alpha^* = E[L] - \beta^* E[Y]$
  - $\beta^* = \frac{Cov[L,Y]}{Var[Y]}$
- 최적 선형예측식
  - $E^*[L|Y] = \alpha^* + \beta^* Y = E[L] + \frac{Cov[L,Y]}{Var[Y]}(Y - E[Y])$
  - $Q^* = Var[L] - \frac{Cov^2[L,Y]}{Var[Y]}$

칼만 필터

- $E[L|Y_t, Y_{t-1}, \dots] = E[L|Y_{t-1}, \dots] + \frac{Cov[L, Y_t|Y_{t-1}, \dots]}{Var[Y_t|Y_{t-1}, \dots\}}(Y_t - E[Y_t|Y_{t-1}, \dots])$

- 분산의 갱신 공식

$$p_t = Var[\mu_t|Y_t, \dots] = Var[\mu_t|Y_{t-1}, \dots] - \frac{Cov^2[\mu_t, Y_t|Y_{t-1}, \dots]}{Var[Y_t|Y_{t-1}, \dots\}} = K_t^{\mu}\sigma_\varepsilon^2$$

$$q_t = Var[\beta_t|Y_t, \dots] = q_{t-1} + \sigma_b^2 - K_t^{\beta}(q_{t-1} + r_{t-1})$$

$$r_t = Cov[\mu_t, \beta_t|Y_t, \dots] = K_t^{\beta}\sigma_\varepsilon^2$$

7-3. 상태공간모형의 파라미터 추정 방법과 예측 및 응용

상태공간모형에 포함된 계수행렬 또는 오차항의 공분산 행렬을 모르는 경우

- 최우추정법

- 우도함수

바탕으로 추정

- 관측치: $Y_t = (\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_T)$
- 로그우도함수

$$logL(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_T) = logL(\boldsymbol{y}_1) + \sum_{t=2}^{T} logL(\boldsymbol{y}_t | Y_{t-1})$$

- 다변량 정규분포 가정

$$\boldsymbol{y}_1 \sim MVN(\boldsymbol{\mu}_1, C_1); \quad \boldsymbol{y}_t | Y_{t-1} \sim MVN(\boldsymbol{\mu}_t, C_t)$$

- 다변량 정규분포하에서 로그우도함수

$$logL(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_T) = -\frac{Td}{2} log2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \log|C_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} (\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)^T C_t^{-1} (\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)$$

y에 대한 예측

- 한단계 이후 예측

$$\boldsymbol{f}_{t,1} = E[\boldsymbol{y}_{t+1} | \boldsymbol{y}_t, \dots] = E[G\boldsymbol{x}_{t+1} + \boldsymbol{w}_{t+1} | \boldsymbol{y}_t, \dots]$$
$$= E[G(F\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_{t+1}) + \boldsymbol{w}_{t+1} | \boldsymbol{y}_t, \dots] = GF\boldsymbol{m}_t$$

- 예측오차

$$\boldsymbol{e}_{t,1} = \boldsymbol{y}_{t+1} - \boldsymbol{f}_{t,1}$$

- 예측오차 분산

$$V_{t,1} = Var[\boldsymbol{y}_{t+1} | \boldsymbol{y}_t, \dots] = Var[G(F\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_{t+1}) + \boldsymbol{w}_{t+1} | \boldsymbol{y}_t, \dots]$$
$$= GFP_t F^T G^T + GQG^T + R$$

mt는 칼만 필터 상태변수에 대한 갱신된 식