Week 6

6-1. VAR 모형의 식별 및 추정 이론

벡터자기회귀 모형

벡터 시계열

- 여러 시계열을 동시에 고려하여 상호 연관성을 분석 (벡터)
- 벡터 시계열 분석은 벡터자기회귀 모형 (Vector Autoregressive VAR)
- 지금까지 봤던 AR(1) 모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

- 두 시계열에 대한 VAR(1) 모형

$$\begin{aligned} Z_{1t} &= \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + a_{1t} \\ Z_{2t} &= \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + a_{2t} \end{aligned}$$

z1, z2 둘 다 고려해서 모형이 만들어진다 (z1과 z2가 서로에게 영향을 줄 수 있기 때문)

행렬로 만들어주면:

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_t = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}, \Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

- 분산은 행렬로 표현

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

- m차원 시계열의 VAR(1) 모형 (phi를 제외한 나머지는 벡터)

- m차원 시계열의 VAR(1) 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ \vdots \\ Z_{mt} \end{pmatrix}; \boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t \text{ (여기서 } \Phi_1 \text{는 mxm 행렬)}$$

m차원 시계열의 VAR(p) 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$$

$$\Phi(x) = I - \Phi_1 x - \cdots - \Phi_p x^p \Rightarrow \Phi(B)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t$$

$$\boldsymbol{y}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_t \\ \boldsymbol{z}_{t-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{t-p+1} \end{pmatrix}, F = \begin{bmatrix} \Phi_1 \Phi_2 & \cdots & & \Phi_p \\ I & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & I & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{y}_t = F\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$$

VAR 모형의 정상성 조건

VAR(1)

- 계수행렬 (phi)의 고유치들의 크기가 모두 1보다 작아야 한다

$det\Phi(x) = \det(I - \Phi_1 x) = 0$ 의 근들의 크기가 모두 1보다 커야

VAR(P)

$\boldsymbol{y}_t = F\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$의 형태에서 행렬 F의 고유치들의 크기가 모두 1보다 작아야 한다.

VAR(p)의 p 결정

1. 이론적 ACF/PACF를 구하고 표본 ACF/PACF와 비교
    a. 교차상관관계 등이 존재하므로 쉽지 않음
    b. 개별 시계열에 대한 표본 ACF/PACF를 관찰하고 충분한 시차 p를 추정할 수도 있음
2. 정보기준 사용
    a. 널리 사용되고 있음

b. AIC, BIC, HQ 등을 구하고 정보기준값이 최소인 시차를 선택하는 방법

- $AIC(p) = ln|\hat{\Sigma}| + \frac{2m^2p}{N}$: Akaike information criteria
- $BIC(p) = ln|\hat{\Sigma}| + \frac{m^2plnN}{N}$: Schwarz (Bayesian) information criteria
- $HQ(p) = ln|\hat{\Sigma}| + \frac{2m^2plnlnN}{N}$: Hannan –Quinn information criteria

3. 우도비 검정

6-2. 충격-반응함수의 이론과 응용, 예측오차 분산분해

VAR 모형을 학습하기 전에 Granger Causality Test를 진행해서 한 시계열이 다른 시계열에 어떤 영향을 주는지 확인한다

그래인저 인과관계

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_q X_{t-q} + a_t$$

- Y의 이전 시차도 영향이 있지만 X들도 영향을 준다는 모형

$$H_0:\ \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$$

귀무가설: X가 Y에 영향을 주지 않는다. 기각 → X가 Y에 영향을 준다

$$F = \frac{(SSE_r - SSE_{ur})/q}{SSE_{ur}/(N-p-q-1)}$$

서로 영향을 주지않을 때는 (귀무가설 기각 X) VAR 모형 분석의 의미가 없다

충격-반응 함수 (impulse-response function)

한 시계열에 특정시점에서 충격이 발생할 때 다른 시계열에 어떤 영향을 주는 분석

- VAR 모형에서는 시계열간의 상관관계가 있어 충격-반응 함수를 산출하기 어렵다

- VAR를 MA 형태 모형에서 직교오차 MA형태 모형을 바꿔서 IRF 산출을 할 수 있다

예측오차 분산분해의 필요성

- 여러 시계열의 충격이 특정 시계열의 미래 불확실성에 영향을 줄 수 있다
- 어떤 시계열이 상대적으로 어떤 영향을 끼치고 있는지 중요도 산출이 의미있다
    - 이를 위해서는 미래값을 예측하고 예측오차의 분산을 시계열별로 분

- 모형: $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$
- k-단계 예측치

$$\boldsymbol{f}_{t,k} = E[\boldsymbol{z}_{t+k} | \boldsymbol{z}_t, \ldots] = \Psi_k^* \boldsymbol{v}_t + \Psi_{k+1}^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \cdots$$

- k-단계 예측오차

$$\boldsymbol{e}_{t,k} = \boldsymbol{v}_{t+k} + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t+k-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t+k-2} + \cdots + \Psi_{k-1}^* \boldsymbol{v}_{t+1}$$

- i-번째 시계열의 k-단계 예측오차
- $e_{t,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k} + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^* v_{j,t+k-1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,k-1}^* v_{j,t+1}$

예측오차 분산분해 (variance decomposition)

i-번째 시계열의 k-단계 예측오차

$$e_{t,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k} + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^* v_{j,t+k-1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,k-1}^* v_{j,t+1}$$

i-번째 시계열의 k-단계 예측오차 분산

$$Var[e_{t,k}^{(i)}] = m + \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,1}^*)^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,k-1}^*)^2 = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,s}^*)^2$$

이중 j-번째 시계열 분산 비중

$$Var[e_{t,k}^{(ij)}] = 1 + (\psi_{ij,1}^*)^2 + \cdots + (\psi_{ij,k-1}^*)^2 = \sum_{s=0}^{k-1} (\psi_{ij,s}^*)^2$$

i-번째 예측오차분산 중 j-번째 시계열 기여율

$$R_{ij,k} = \frac{Var[e_{t,k}^{(ij)}]}{Var[e_{t,k}^{(i)}]} \times 100 = \frac{\sum_{s=0}^{k-1} (\psi_{ij,s}^*)^2}{\sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,s}^*)^2} \times 100(\%)$$

기여율을 구해서 상대적 중요도 산출