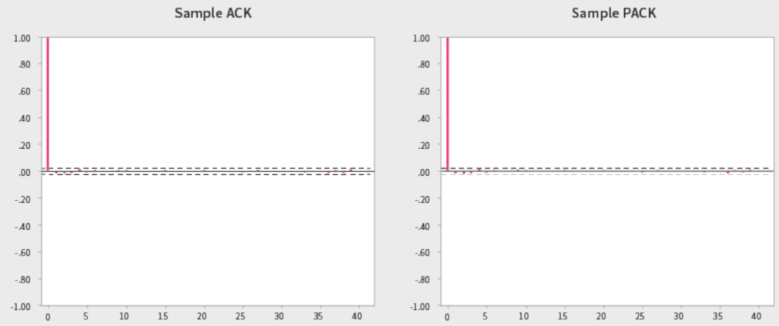
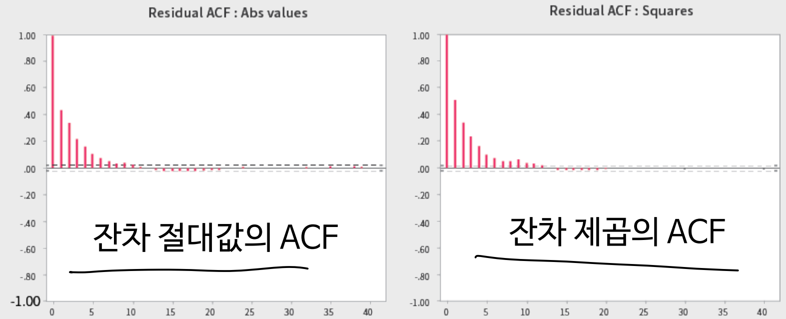
ARCH 모형

ARCH모형의 필요성

- 지금까지의 시계열모형에서 오차항은 일정한 분산을 갖는 독립적인 백색잡음으로 가정
- 대부분 금융관련 시계열에서 잔차는 백색잡음 처럼 보이지만 잔차의 절대값 또는 잔차 제곱항은 자기상관관계를 갖음
- 또한, 오차항 분산이 시간에 따라 일정하지 않고 변한다는 관측이 있음
- 오차항의 조건부 분산 (conditional variance)에 대한 모형을 고려
- 재무상품의 수익률 분산을 변동성 (volatility)이라 하며 이의 분석이 중요
- Engle (1982)이 ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형을 제시
- GARCH모형은 ARCH모형의 일반화 형태



잔차의 ACF & PACF



ARCH 모형

모형의 표현

- 시계열이 예를 들어 AR(1)모형을 따른다 하자

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$$

- 이 때, 오차항의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$E[u_t] = 0, Var[u_t] = \sigma_u^2$$

- 오차항이 서로 독립이 아니고 다음 관계를 갖는다 가정

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t \text{ (w_t는 백색잡음)}$$

(즉, 제곱오차항이 AR(q)모형을 따른다고 가정)

- 오차항의 조건부 분산

$$\sigma_t^2 = Var[u_t|u_{t-1}, \dots] = E[u_t^2|u_{t-1}, \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

이 형태 모형을 ARCH(q) 모형이라 함.

제곱 오차항이 AR(q)

ARCH 모형

ARCH모형의 정상성 조건

- 오차항의 $\boxed{\text{조건없는 분산}}$ (unconditional variance)은 시간에 따라 일정 (상수)

  $Var[u_t] = E[u_t^2] = \sigma_u^2$

- 오차항의 조건부 분산 σ_t^2은 확률변수이며 시간에 따라 변화

  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

- 오차항의 조건부 분산 과 조건없는 분산의 관계

  $Var[u_t] = \sigma_u^2 = E[\sigma_t^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2]$

- ARCH모형이 정상적일 때 다음이 성립

  $\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q}$

  $\sigma_u^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_u^2 + \cdots + \alpha_q \sigma_u^2.$

- ARCH (q)모형의 정상적 조건

  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$

  분산이 0보다 커야됨

  $\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q}$

ARCH 모형

시계열자체 오차항

평균 방정식과 분산 방정식

- ARCH모형은 오차항의 분산에 대한 것이므로 분산 방정식이라 함.
- 시계열 모형에서는 오차항이 포함된 평균방정식이 함께 사용되어야 함.
- (예 1) AR(1)-ARCH(1) 모형
  - 평균방정식: $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$
- (예 2) MA(1)-ARCH(2) 모형
  - 평균방정식: $Z_t = u_t - \theta u_{t-1}$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$
- (예 3) 회귀모형-ARCH(3) 모형
  - 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2$

ARCH 모형

ARCH-M (ARCH in mean) 모형

- 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형
- 평균방정식이 회귀모형인 경우 ARCH-M 형태
  - 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \boxed{\gamma g(\sigma_t^2)} + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

여기서 $g(\sigma_t^2)$ 는 다음 함수 사용

$$g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2;\ g(\sigma_t^2) = \sigma_t;\ g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$$

GARCH 모형

- GARCH (Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형은 Bollerslev (1986)이 ARCH모형을 확장한 것임.

- 조건부 분산항에 과거 시차의 조건부 분산항들이 추가된 것으로 다음의 형태를 가짐
  - $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$
  - 오차항이 GARCH(p,q) 모형을 따른다고 함 $\beta \to p$
  - alpha들을 ARCH 항, beta들을 GARCH 항이라 함. $\alpha \to q$
  - ARCH모형은 제곱오차항이 AR모형을 따르는 반면 ,GARCH모형은 제곱오차항이 ARMA모형을 따르게 됨.

GARCH 모형

GARCH모형의 정상성 조건

- 오차항의 조건없는 분산 (unconditional variance)은 시간에 따라 일정 (상수)

$$Var[u_t] = E[u_t^2] = \sigma_u^2$$

- GARCH모형이 정상적일 때 다음이 성립

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q-\beta_1-\cdots-\beta_p}$$

- ARCH(q)모형의 정상적 조건

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$$

GARCH 모형

GARCH 모형의 예측

- 평균방정식: $Y_t = c + u_t$ (수평적 모형) 예시
- 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ GARCH(1,1)
- 시계열 (반응치) 예측

$$f_{T,k} = E[Y_{T+k}|Y_T, \dots] = \boxed{c},\ k = 1,2,\dots$$

↳상수

- 시계열 예측오차 분산

$$v_{T,1} = Var[Y_{T+1}|Y_T, \dots] = Var[u_{T+1}|Y_T, \dots] = E[\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \dots]$$

$$v_{T,k} = Var[Y_{T+k}|Y_T, \dots] = Var[u_{T+k}|Y_T, \dots] = E[\sigma_{T+k}^2|Y_T, \dots],\ k = 1,2,\dots$$

- 조건부 분산 (변동성) 예측
  - 한단계이후 예측: $h_{T,1} = E[\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \dots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 | Y_T, \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$
  - 2단계이후 예측: $h_{T,2} = E[\sigma_{T+2}^2 | Y_T, \dots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 | Y_T, \dots] = \alpha_0 + \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\text{추정치}} h_{T,1}$

GARCH 모형의 변형

- GARCH-M 모형

  ARCH-M 모형과 같이 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형

  - 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$ GARCH (p, q)
    - 여기서 $g(\sigma_t^2)$ 는 다음 함수 사용
    - $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2;\ g(\sigma_t^2) = \sigma_t;\ g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$

exponential

- E-GARCH 모형

  Nelson (1991)이 제안한 것으로 로그 변동성을 모형화 비대칭유지

  - 분산방정식: $log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_i |u_{t-i}| + \gamma_i u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$
  - 나쁜 뉴스가 좋은 뉴스보다 변동성에 더 큰 충격을 준다고 가정

GARCH 모형의 변형

- T-GARCH 모형
  - Glosten 등 (1993)제안
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}(\alpha_i+\gamma_i I_{t-i})\,u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\,\sigma_{t-j}^2$
  - 여기서 $I_{t-i} = \begin{cases} 1 & u_{t-i} < 0 \\ 0 & u_{t-i} \geq 0 \end{cases}$ 지시변수 $\alpha_i + \sigma_i$ α_i → 더 큰영향
  - 오차항의 부호에 따라 변동성에 미치는 영향을 다르게 평가하는 모형
  - 즉, 오차항이 양일 때 (좋은 소식) 조건부 분산에 미치는 영향보다 오차항이 음일 때 (나쁜 소식) 미치는 영향이 크도록 고안
  - 이와 유사한 비대칭 모형이 다수 있음

ARCH 모형의 추정

- 최우추정법 사용

$$u_t|u_{t-1},\ldots \sim Nor(0,\sigma_t^2)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\right)^n e^{\Sigma -\frac{u_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

- 로그우도함수 (평균방정식이 회귀모형인 경우)

정규분포

$$\ln L(\theta|y_1,\ldots,y_n) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left[\log(2\pi)+\log(\sigma_t^2)+\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}\right]$$

$$\boxed{-\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\Sigma\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}}$$

$$u_t = y_t - x_t\beta$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0+\alpha_1 u_{t-1}^2+\cdots+\alpha_q u_{t-q}^2$$ ARCH(q)

- ARCH 시차 q는 여러가지를 시도한 후 정보기준 (information criteria)으로 결정

ACF, PACF를 보고 추정하기 쉽지 않음

ARCH 모형의 추정

$c, \phi, \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_q$

예: AR(1)-ARCH(q) 모형의 추정

- 평균방정식: $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + u_t$
- 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

(분석 결과)

- SC 및 HQ 정보기준은 시차 3에서 최소가 되고 AIC는 시차 4에서 최소이므로, 시차 3 또는 4인 모형이 적절하다고 볼 수 있다.
- 다음에서 언급할 LM 검정을 통한 잔차 진단을 사용하는 것이 바람직할 것이다.

	ARCH(1)	ARCH(2)	ARCH(3)	ARCH(4)
c	1.121 (4.9)	1.181 (5.9)	1.196 (6.1)	1.198 (6.1)
ϕ	0.113 (2.8)	0.115 (3.1)	0.110 (3.0)	0.102 (2.8)
α_0	36.84 (12.2)	30.73(10.5)	27.26 (9.4)	24.84 (7.8)
α_1	0.175 (3.4)	0.156 (2.8)	0.155 (3.0)	0.134 (2.6)
α_2		0.157 (2.3)	0.123 (1.9)	0.112 (1.5)
α_3			0.118 (2.4)	0.100 (2.1)
α_4				0.060 (1.3)
Log L	-2929.19	-2916.92	-2912.09	-2909.10
SC	6.635	6.615	6.612	6.621
HQ	6.622	6.599	6.592	6.594
AIC	6.614	6.588	6.580	6.577

정보 기준

*괄호안 숫자는 t값임

ARCH 효과 검정

LM (Lagrange multiplier) 검정

- Breusch-Pagan (1979) 제안
- 잔차 진단에 사용토록 Engle (1982) 추천
- 가설: H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ α가 모두 0
- 검정 절차
  1. 모형 추정으로 부터 잔차 u_t 를 얻는다.
  2. 잔차제곱을 사용하여 다음 회귀모형의 R^2을 산출한다.

     $$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \varepsilon_t$$

  3. 검정통계량 $LM = nR^2$ 산출
  4. $LM > \chi^2(q, \alpha)$ 이면 가설 기각 → ARCH 효과가 있다.

ARCH 효과 검정

(예) 다음은 어떤 평균 방정식 추정후의 잔차에 대한 ARCH 효과를 검정한 결과 (Eviews)이다.

Heteroscedasticity Test: ARCH

F-statistic	122.992	Prob. F(4,155)	0.0000
Obs*R-squared (LM)	**121.667**	Prob. Chi-Square(4)	0.0000

LM 검정 통계량

가설 기각

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Included observation: 160 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.23E-24	2.91E-24	2.1416	0.0338
RESID^2(-1)	0.99761	0.08049	12.3949	0.0000
RESID^2(-2)	-0.24527	0.11185	-2.1929	0.0298
RESID^2(-3)	0.22998	0.11181	2.0570	0.0414
RESID^2(-4)	-0.12037	0.08092	-1.4875	0.1389

분석결과: 잔차에 ARCH효과가 남아있으므로 잔차에 대한 ARCH모형을 추가하여 다시 분석해야 함.

GARCH 모형의 추정

- 최우추정법 사용

$$u_t | u_{t-1}, \dots \sim Nor(0, \sigma_t^2)$$

- 로그우도함수 (평균방정식이 회귀모형인 경우)

$$\ln L(\theta | y_1, \dots, y_n) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left[\log(2\pi) + \log(\sigma_t^2) + \frac{u_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

$$u_t = y_t - x_t \beta$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

GARCH 모형의 추정

(예) 다음은 2017.7 ~ 2018.6 간의 kospi200의 수익률에 대한 GARCH(1,1) 모형의 추정결과이다.

- ARCH항은 유의하지 않으나 GARCH항은 유의하다.

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0.9654$$

Dependent Variable: RETURN
Method: ML ARCH-Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 07/24/19 Time: 15:59
Sample (adjusted): 7/04/2017 6/29/2018
Included observations: 238 after adjustments
Convergence achieved after 37 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

Variable	ARCH Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-9.63E-05	0.000551	-0.174835	0.8612
Variance Equation				
C	2.26E-06	1.12E-06	2.010652	0.0444
RESID(-1)^2	0.023914	0.020650	1.158062	0.2468 → 유의X
GARCH(-1)	0.941468	0.030706	30.66095	$\boxed{0.0000}$ → 유의

R-squared	-0.000011	Mean dependent var	-0.000122
Adjusted R-squared	-0.000011	S.D. dependent var	0.007719

< 1 ⇒ 정상성 조건 만족

GARCH 모형의 추정

(예) 다음은 어떤 자산의 수익률 (RET)을 모형화하는데 GARCH(3,3)을 사용하고 Eviews로 추정한 결과이다.

- 시차 3에서 ARCH 항이 유의하며 시차 3에서 GARCH 항 역시 5%에서 유의함을 알수있다.
- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.4553$

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.99E-05	1.43E-05	1.3908	0.1643
Variance Equation				
C	2.94E-08	7.73E-09	3.81	0.0001
RESID(-1)^2	0.0491	0.0460	1.07	0.2862
RESID(-2)^2	-0.0567	0.0518	-1.10	0.2729
RESID(-3)^2	0.1778	0.0564	3.15	$\boxed{0.0016}$
GARCH(-1)	0.5208	0.2745	1.90	0.0578
GARCH(-2)	0.1133	0.3179	0.36	0.7216
GARCH(-3)	-0.3490	0.1595	-2.19	$\boxed{0.0286}$
R-squared -0.00163				
Adjusted R-squared -0.02849				