(33)

NOME: COGNOME: MATRICOLA:

■ FONDAMENTALI

· Teorema (divergenza)

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}\tau$$

(3)

(5)

(7)

$$\mathbf{L} = - \bigvee V$$

· Teorema (Stokes)

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{\Sigma}$$
 (2)

· Teorema (Gradiente)

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_{\gamma} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

· Flusso di un campo

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} \tag{4}$$

Equazioni di Maxwell Nel vuoto:

 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\rho}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
 (8)

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$
(10)

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 0 \tag{11}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{conc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$
 (12)

Nei mezzi:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libere} \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{C,lib} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
 (14)

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Sigma} = Q_{int,lib} \tag{15}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{conc,lib} + \frac{d\Phi_D}{dt}$$
 (16)

Discontinuità dei campi Generali

 ΔB_{\perp} = 0(17)

$$\Delta E_{\parallel} = 0 \tag{18}$$

$$\Delta D_{\perp} = \sigma_L \tag{19}$$

$$\Delta F = \sigma$$
 (20)

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

 $\Delta H_{\parallel} = |\mathbf{K}_c \times \mathbf{u}_n|$ (21)In ipotesi di linearità

 $D_{1,\parallel} - D_{2,\parallel}$

(22)

Se $\sigma_L = 0$

(23) $k_1 E_{1,\perp} = k_2 E_{2,\perp}$

Rifrazione linee di B

 $\frac{\tan(\theta_2)}{\tan(\theta_1)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ (24)

■ ELETTROSTATICA

· Forza di Coulomb

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_{1,2} \tag{25}$$

· Definizione campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r} \left(\mathbf{r}_0 \right)}{q_0} \tag{26}$$

(27)

· En. potenziale due cariche $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}} + c$

· Potenziale scalare V

$$V(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q_0} \tag{28}$$

$$V(B) - V(A) = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$
 (29)

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{30}$$

· Energia di E

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\tau$$
 (31)

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}^2 d\tau \tag{32}$$

· Equazione di Poisson

Carica puntiforme

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
 (33)
· E e V di particolari distribuzioni

(34)

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{35}$$

Sfera carica uniformemente

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} & \text{se } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & \text{se } r \ge R \end{cases}$$
(36)

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} & \text{se r < R} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{se r \ge R} \end{cases}$$
(37)

Guscio sferico carico uniformemente

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se r < R} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & \text{se r \ge R} \end{cases}$$
(38)

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & \text{se } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{se } r \ge R \end{cases}$$
(39)

Filo infinito con carica uniforme λ

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathbf{u}_r \tag{40}$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{41}$$

Piano Σ infinito con carica uniforme

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{u}_n \tag{42}$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x - x_0) \tag{43}$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda Rx}{2\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \tag{44}$$

$$V(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \tag{45}$$

Disco carico uniformemente
$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma}{1 - \frac{1}{1 -$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \mathbf{u}_x \tag{46}$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$
 (47)

Disco carico uniformemente
$$(x >> R)$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{x^2} \mathbf{u}_x \tag{48}$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{R^2}{x} \tag{49}$$

Guscio cilindrico uniformemente carico

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se r < R} \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h r} & \text{se r \ge R} \end{cases}$$
 (50)

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{se r < R} \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln(\frac{r}{R}) & \text{se r \ge R} \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ CONDUTTORI}$$

· Conduttori in equilibrio

All'interno

 $\Delta V = 0$

$$\mathbf{E} = 0 \tag{52}$$

(53)

Le cariche si distribuiscono sempre su superfici, mai all'interno

· Pressione elettrostatica

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{d\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{u}_n = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2$$
 (54)

· Capacità

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{55}$$

Il più delle volte c'è induzione completa e C dipende dalla configurazione geometrica.

Condensatori

Piano

$$C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d} \tag{56}$$

Sferico

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{Rr}{R - r} \tag{57}$$

Cilindrico

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R}{r}} \tag{58}$$

In serie

$$C_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$$
In parallelo (59)

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{60}$$

Con dielettrico

$$C_{diel} = k_e C_0 \tag{61}$$

Energia interna del condensatore

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{62}$$

Differenziale circuito RC

$$RQ'(t) + \frac{Q(t)}{C} = V \tag{63}$$

Carica

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$
 (64)

Scarica

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{65}$$

· Condensatore pieno Condensatore riempito di materiale di resistività ρ

$$RC = \varepsilon_0 \rho \tag{66}$$

Forza fra le armature

$$F = \frac{Q^2}{2} \partial_x \left(\frac{1}{C}\right) \tag{67}$$

Condensatore piano

$$F = \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} \tag{68}$$

■ DIPOLO ELETTRICO

· Momento di dipolo

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a} \tag{69}$$

$$V(r) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
 (70)

$$\mathbf{E} = \frac{qd\left(2\cos\left(\theta\right)\mathbf{u}_r + \sin\left(\theta\right)\mathbf{u}_\theta\right)}{4\pi\varepsilon r^3}$$
 (71)

· Momento torcente

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \times q \mathbf{E}(x, y, z) \tag{72}$$

Se E uniforme $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ (73)

· Lavoro per ruotario
$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta \tag{74}$$

(74)

(76)

(80)

(84)

(89)

Se E uniforme

$$W = pE[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_f)]$$
 (75)

Frequenza dipolo oscillante
Se E costante e uniforme
$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{pE}{I}}$$
 (76)

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{77}$$

· Forza agente sul dipolo

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \tag{78}$$
· Energia pot. tra due dipoli

$$U = \frac{\left[\mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2} - 3(\mathbf{p_1}\mathbf{u}_r)(\mathbf{p_2} \cdot \mathbf{u}_r)\right]}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$
 (79)

Forza tra dipoli

Dipoli concordi = F repulsiva $\mathbf{F} = \frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4} \mathbf{u}_r$

· Campo elettrico in un dielettrico

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{E}_0}{I} \tag{81}$$

· Vettore P polarizzazione

$$\mathbf{P} = \frac{dp}{d\tau} \tag{82}$$

· Dielettrici lineari

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_E \mathbf{E}_k = \varepsilon_0 (k - 1) \mathbf{E}_k \tag{83}$$

· Dens. superficiale di q polarizzata
$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = \frac{k-1}{L} \sigma_l \tag{84}$$

· Dens. volumetrica di q polarizzata
$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{85}$$

· Spostamento elettrico

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_k + \mathbf{P} = \varepsilon_0 k \mathbf{E}_k = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \tag{86}$$

■ CORRENTI

· Lavoro del generatore

$$W_{gen} = \int_{t_1}^{t_2} V dq(t) = 2U_E$$
 (87)

· Densità di corrente

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} = \frac{Nq\mathbf{v}}{\tau} \tag{88}$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\Sigma$$

· Intensità di corrente

· Leggi di Ohm
$$V = RI \tag{90}$$

$$V = RI$$

$$R = \int_{\Gamma} \frac{\rho}{\Sigma} dl \tag{91}$$

$$b = \rho \mathbf{J}$$
 (92)

$$\rho = \frac{1}{2} \tag{93}$$

$$\rho = \frac{-}{\sigma}$$

· Potenza conduttore ohmico

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{94}$$

$$dP = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\tau \tag{95}$$

· Resistori

In serie

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{96}$$

In parallelo

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\right)^{-1} \tag{97}$$

· Generatore reale

$$\Delta V = V_0 - r_i I \tag{98}$$

· Leggi di Kirchhoff

Legge dei nodi

$$\sum_{k=0}^{N} I_k = 0 (99)$$

Legge delle maglie

$$\sum_{k=0}^{N} \Delta V_k = 0 \tag{100}$$

■ MAGNETOSTATICA

· Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{101}$$

· Prima legge di Laplace

$$\mathbf{B(r)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2}$$
 (102)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau$$
 (103)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_r \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau\right) \tag{104}$$

· Seconda legge di Laplace

$$\mathbf{F} = \int I(\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathrm{d}\mathbf{B}) \tag{105}$$

· B di corpi notevoli (ATTENZIONE: viene indicata la direzione, il verso dipende dalla corrente I) Asse di una spira

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \tag{106}$$

Filo indefinito

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_{\phi} \tag{107}$$

Asse filo lungo 2a

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r \sqrt{r^2 + a^2}} \mathbf{u}_{\phi} \tag{108}$$

Solenoide ideale

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \tag{109}$$

Toroide

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \mathbf{u}_{\phi} \tag{110}$$

Piano infinito su xy, con K \mathbf{u}_x densità lineare di corrente

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{K}}{2} \mathbf{u}_y \tag{111}$$

$$V_H = \frac{IB}{n|q|b} \tag{112}$$

· Forza di Ampere

Corr. equiversa = for. attrattiva

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 L}{d} \tag{113}$$

Potenziale vettore A

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{114}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r_1}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r_2})}{r_{2,1}} d\tau_2 \tag{115}$$

Invarianza di Gauge

$$\mathbf{A'} = \mathbf{A} + \nabla \Psi \tag{116}$$

Gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{117}$$

 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_r \times \left(\frac{\mu_0}{r^2} \int \mathbf{J} d\tau\right) \tag{104}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_r \times \left(\frac{r^0}{4\pi} \int \frac{\sigma}{r} d\tau\right) \tag{104}$$

$$\mathbf{F} = \int I(\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathrm{d}\mathbf{B}) \tag{105}$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \tag{106}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{\mathbf{u}} \mathbf{u} \tag{107}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 r}{2\pi r} \mathbf{u}_{\phi} \tag{107}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi m \sqrt{n^2 + a^2}} \mathbf{u}_{\phi} \tag{108}$$

$$\mathbf{3} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \tag{109}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \mathbf{u}_{\phi} \tag{110}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{K}}{2} \mathbf{u}_y \tag{111}$$

Effetto Hall

b spessore sonda, b // B, b \perp I, n car/vol

$$Y_H = \frac{IB}{n|q|b} \tag{112}$$

$$F = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 I_2 L}{I_2} \tag{113}$$

$$V \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{114}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r_1}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r_2})}{r_{2,1}} d\tau_2$$
 (115)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{117}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{118}$$

· Moto ciclotrone

Raggio

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{119}$$

Periodo

Periodo
$$T = \frac{2\pi m}{qB} \tag{120}$$

Angolo deflessione elica (v 2 dimensioni)

$$\sin(\theta) = \frac{qBR}{mv} \tag{121}$$

Passo elica

$$d = \frac{2\pi R}{\tan(\theta)} \tag{122}$$

■ INDUZIONE

· Coefficienti mutua induzione

$$\Phi_{1,2} = MI_1 \qquad \Phi_{2,1} = MI_2 \tag{123}$$

· Flusso generato da 1 attraverso 2

$$\Phi_{1,2} = NB_1\Sigma_2 \tag{124}$$

Induttanza Φ autoflusso

$$\Phi(\mathbf{B}) = IL \tag{125}$$

Solenoide ideale

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \Sigma = \mu_0 n^2 \ell \Sigma \tag{126}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+b}{R} \right) \tag{127}$$

· Fem autoindotta

$$\Phi = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{128}$$

 \cdot Fem indotta

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{129}$$

· Corrente indotta

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{B})}{R\mathrm{d}t} \tag{130}$$

Energia dell'induttanza

Mutua (solo una volta ogni coppia):

$$U_{1,2} = \frac{1}{2}MI_1I_2 + \frac{1}{2}MI_2I_1 \tag{131}$$

Interna

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \tag{132}$$

In un circuito (conta una volta ogni induttanza ed una ogni coppia)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (L_i I_i^2 + \sum_{j=1}^{N} M_{i,j} I_i I_j) \quad i \neq j$$
(133)

· Legge di Felici

$$Q(t) = \frac{\Phi(0) - \Phi(t)}{R} \tag{134}$$

· Circuito RL in DC

L si oppone alle variazioni di I smorzan-

Appena inizia a circolare corrente

$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$
Quando il circuito viene aperto

 $I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ (136)

za barra) F.e.m. indotta

$$\varepsilon(t) = -Bbv(t)$$
 (137)
Corrente in un circuito chiuso

$$I(t) = \frac{Bbv(t)}{R} \tag{138}$$

Lavoro fornito per muovere la barra

$$W = \frac{(Bbv(t))^2}{R} \tag{139}$$

Forza magnetica sulla barra

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Bb)^2 v(t)}{R} \tag{140}$$

ATTENZIONE: per tenere v costante è necessaria una F esterna; altrimenti essa è opposta a v e il moto è smorzato esponenzialmente

· Disco di Barlow

Campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega x B \mathbf{u}_x \tag{141}$$

F.e.m. indotta

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\omega Br^2 \tag{142}$$

Corrente in un circuito chiuso

Momento torcente frenante

$$I = \frac{\omega B r^2}{2R} \tag{143}$$

Se nnon ci sono forze esterne il moto è

$$\mathbf{M} = -\frac{\omega B r^4}{4R} \mathbf{u}_z \tag{144}$$

Velocità angolare

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{2mR}{B^2 r^2} \tag{145}$$

■ DIPOLO MAGNETICO

· Momento di dipolo

$$d\mathbf{m} = Id\Sigma \mathbf{u}_n \tag{146}$$
· Potenziale del dipolo

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\mathbf{m} \times \mathbf{u}_r) \tag{147}$$

 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3\mathbf{u}_r(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r) - \mathbf{m}]$

(149) $M = m \times B$

· Energia del dipolo

 $\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \tag{151}$$

· Energia pot. tra due dipoli

$$U = -\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{B_2} = -\mathbf{m_2} \cdot \mathbf{B_1} \tag{152}$$

tro dipolo · Forza tra dipoli

B è il campo magnetico generato dall'al-

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0}{4\pi r^4} [(\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{m_2} + (\mathbf{m_2} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{m_1} +$$

 $+(\mathbf{m_1}\cdot\mathbf{m_2})\mathbf{u}_r - 5(\mathbf{m_1}\cdot\mathbf{u}_r)(\mathbf{m_2}\cdot\mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r$

■ MAGNETISMO

· Campo magnetico nella materia

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \tag{154}$$

$$\mathbf{B} = k_m \mathbf{B}_0 = (1 + \chi_m) \mathbf{B}_0 \tag{155}$$

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}\tau} \tag{156}$$

· Campo magnetizzazione M

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m \mathbf{B}}{(\chi_m + 1)\mu_0} \tag{157}$$

· Campo magnetizzante H

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{B}}{k_m \mu_0} = \frac{\mathbf{M}}{\chi_m}$$
 (158)

· Dens. LINEARE di corrente sulla **SUPERFICIE**

$$\mathbf{K_m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_r \tag{159}$$

$$\mathbf{M}$$
 = $M\mathbf{u}_z$ $\mathbf{K_m}$ = $K_m\mathbf{u}_\phi$

$$\mathbf{j_m} = \nabla \times \mathbf{M} \tag{160}$$

$$\oint \mathbf{M} \cdot \mathbf{dl} = I_{m,c} \tag{161}$$

Dens. SUPERFICIALE corrente **LIBERA**

$$\mathbf{j}_1 \neq \mu_0 \mathbf{j} \tag{162}$$

$$\mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{H} \tag{163}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I_{l,c} \tag{164}$$

· Energia di B

$$U_B = \frac{1}{2u_0} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{B}^2 d\tau \tag{165}$$

$$U_B = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\tau \tag{166}$$

con N circuiti filiformi

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i \tag{167}$$

■ CIRCUITI RLC

· Impedenza

La somma delle impedenze in serie e parallelo segue le regole dei resistori

$$Z = R + i\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) \tag{168}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{169}$$

RLC serie in DC smorzato

(170)

(171)

(174)

(176)

(179)

$$I''(t) + 2\gamma I'(t) + \omega_0 I(t) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \tau = \frac{1}{2L}$$

(148)

(150)

(153)

Smorz. DEBOLE
$$\gamma^2 < \omega_0^2$$

 $I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$ Smorz. FORTE $\gamma^2 > \omega_0^2$

$$I(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{\omega} + Be^{-\omega})$$
 (172)

Smorz. CRITICO
$$\gamma^2 = \omega_0^2$$

 $I(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt)$ (173)A, B e φ si ricavano impostando le

RLC serie in AC forzato Forzante

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\Omega t + \Phi)$$

condizioni iniziali

$$I''(t) + 2\gamma I'(t) + \omega_0 I(t) = -\frac{\Omega \varepsilon_0}{L} \sin(\Omega t + \Phi)$$
(175)

Soluzione

$$I(t) = I_0(\Omega)\cos(\Omega t)$$

Corrente massima

$$I_0(\Omega) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}}$$
 (17)
Sfasamento

 $\tan\Phi(\Omega) = \frac{L\Omega - \frac{1}{\Omega C}}{R}$

$$\tan \Phi(\Omega) = \frac{BS - \Omega C}{R}$$
 (178)
NOTA: Lo sfasamento di *I* rispetto a ε è

Risonanza

$$Im(Z) = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{IC}}$$

· Effetto Joule		· Indice di rifrazione		· Interferenza generica Onda risultante		Massimi secondari $m \in \mathbb{Z} - \{kN, kN - 1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$	
$\langle P_R \rangle = \frac{V_0}{2R}$	(180)	$n = \frac{c}{v} = \sqrt{k_e k_m}$	(198)	$f(\mathbf{r},t) = Ae^{i(kr_1 - \omega t + \alpha)}$	(220)	$\delta = \frac{2m+1}{2N}\pi \to \sin\theta = \frac{2m+1}{2N}\frac{\lambda}{d}$	(238)
· Potenza media totale		· Legge di Snell-Cartesio		Ampiezza		2N N M	(200)
$\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi)$	(181)	$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$	(199)	$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$	(221)	$I_{SEC} = \frac{I_0}{\left(\sin\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)^2}$	(239)
· V e I efficace		· Coefficienti di Fresnel Definizione		Diff. cammino ottico		Minimi $m \in \mathbb{Z} - \{kN\}$	
$V_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2}V_0 \qquad I_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2}I_0$	(182)	$r = \frac{E_r}{E_i} \qquad R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{I_r}{I_i}$	(200)	$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = (\Phi_2 - \Phi_1 + k(r_2 - r_1))$ Intensità	(222)	$\delta = \frac{2m}{N}\pi \to \sin\theta = \frac{m\lambda}{Nd}$	(240)
■ CAMPO EM e OTTICA		$t = \frac{E_t}{E_c}$ $T = \frac{P_t}{P_c} = \frac{I_t}{I_c}$	(201)	$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$	(223)	$I_{MIN} = 0$	(241)
· Campi in un'onda EM (Nel vuoto $v = c$)		E_i F_i I_i Raggio RIFLESSO polarizzato		Fase risultante α		Separazione angolare (distanza artra min. e max. adiacente)	ngolare
$E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$	(183)	$r_{\sigma} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$	(202)	$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$	(224)	$\Delta\theta \approx \frac{1}{N} \frac{\lambda}{d\cos\theta}$	(242)
$B(x,t) = \frac{E_0}{v}\cos(kx - \omega t)$	(184)	$r_{\pi} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}$	(203)	Massimi		Potere risolutore	
$\omega = kv k = \frac{2\pi}{\lambda} \lambda = \frac{v}{v}$		$ an(heta_t + heta_i)$ $R_{\sigma} = r_{\sigma}^2$ $R_{\pi} = r_{\pi}^2$	(204)	$\delta = 2n\pi$	(225)	$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nn}$	(243)
λ ν		Raggio TRASMESSO polarizzato	(201)	Minimi			
· Vettore di Poynting		$t_{\sigma} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	(205)	$\delta = (2n+1)\pi$	(226)	· Diffrazione Intensità	
$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$	(185)		· · · · /	· Condizione di Fraunhofer		$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$	(244)
· Intensità media onda		$t_p i = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	(206)	$\theta = \frac{\Delta y}{L}$	(227)	$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$	(=11)
$I = \langle S \rangle = \langle E^2 \varepsilon v \rangle$	(186)	$T_{\sigma} = 1 - R_{\sigma}$ $T_{\pi} = 1 - R_{\pi}$	(207)	L grande tale che $\tan\theta\approx\theta$		Massimo pincipale in $\theta = 0$	
· Potenza		Luce NON polarizzata	()	· Interferenza in fase Diff. cammino ottico		$I_{MAX} = I_0$	(245)
$P = I\Sigma$	(187)	$R = \frac{1}{2}(R_{\sigma} + R_{\pi})$ $T = \frac{1}{2}(T_{\sigma} + T_{\pi})$	(208)	$\delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$	(228)	Massimi secondari $m \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$	
L'intensità varia in base alla scelta	ı di Σ	Incidenza normale $(\cos \theta_i ? \cos \theta_t = 1)$	1)	λ Costruttiva		$\sin\theta = \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda}{a}$	(246)
· Equazioni di continuità Teorema di Poynting		$r = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$	(209)	$r_2 - r_1 = n\lambda \to \sin\theta = n\frac{\lambda}{d} n \in \mathbb{Z}$	(229)	$I_{SEC} = \frac{I_0}{\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2}$	(247)
$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	(188)	$R = \left(\frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}\right)^2$	(210)	Distruttiva		Minimi $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$	
Conservazione della carica		$t = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$	(211)	$r_2 - r_1 = \frac{2n+1}{2}\lambda \rightarrow \sin\theta = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{d}$		$\sin\theta = \frac{m\lambda}{a}$	(248)
$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	(189)	$T = \frac{4n_i n_t}{(n_i + n_t)^2}$	(212)		(230)	$I_{MIN} = 0$	(249)
· Densità di en. campo EM		Angolo di Brewster (il raggio rifles ha polar. parallela)	so non	· Interf. riflessione su lastra sot (n indice rifr., t spessore lastra) Diff. cammino ottico		· Reticolo di diffrazione Sovrapposizione di diffrazione e i	interfe-
$u_{EM} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$	(190)	$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta_B = \theta_i = \arctan \frac{n_t}{n_i}$	(213)	$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2nt}{\cos \theta_t}$	(231)	renza, l'intensità è il prodotto d effetti	
$U_{EM} = \int_{\mathbb{R}^3} u_{EM} \mathrm{d} au$	(191)	$R = \frac{1}{2}\cos^2(2\theta_i)$	(214)	Massimi $m \in \mathbb{N}$			2
· Densità di quantità di moto		$T = \frac{1}{2} - R$	(214) (215)	$t = \frac{2m+1}{4n}\lambda\cos\theta_t$	(232)	$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right) \frac{\sin(\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda})}{\sin(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda})}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$	(192)	· Pressione di radiazione	\ '')	$4n$ Minimi $m \in \mathbb{N}$, χ Σ(χ)	(250)
· Effetto Doppler		Superficie ASSORBENTE		$t = \frac{m}{2n}\lambda\cos\theta_t$	(233)	Dispersione	
$\nu' = \nu \frac{v - v_{oss}}{v - v_{sorg}}$	(193)	$p = \frac{I_i}{v}$	(216)	· Interferenza N fenditure		$D = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta_m}$	(251)
Oscillazione del dipolo		Superficie RIFLETTENTE		Diff. cammino ottico 2π		· Fattore molt. di inclinazione	
$I(r,\theta) = \frac{I_0}{r^2} \sin^2(\theta)$	(194)	$p = \frac{I_i + I_t + I_r}{v}$	(217)	$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$	(234)	$f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$	(252)
$P = \int \int I(r,\theta) dr d\theta = \frac{8}{3}\pi I_0$	(195)	· Rapporto di polarizzazione $P^{\sigma} = P^{\pi}$		Intensità $\int \sin(N\frac{\delta}{2})^2$	(007)	· Filtro polarizzatore	
· Velocità dell'onda	(===)	$\beta_R = \frac{P_R^{\sigma} - P_R^{\pi}}{P_R^{\sigma} + P_R^{\pi}}$	(218)	$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(N\frac{\delta}{2})}{\sin\frac{\delta}{2}} \right)^2$	(235)	Luce NON polarizzata	
$v^2 = \frac{1}{k_e \varepsilon_0 k_m \mu_0}$	(196)	$\beta_T = \frac{P_T^{\sigma} - P_T^{\pi}}{P_T^{\sigma} + P_T^{\pi}}$	(219)	Massimi principali $m \in \mathbb{Z}$	()	$I = \frac{I_0}{2}$	(253)
$c^2 = \frac{1}{}$	(197)	■ INTERFERENZA e DIFFRA NE	AZIO-	$\delta = 2m\pi \to \sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$ $I_{MAX} = N^2 I_0$	(236)	Luce polarizzata (Legge di Malus) $I = I_0 \cos^2(\theta)$	
$arepsilon_0\mu_0$. /	1117		$I_{MAX} = I_{V} I_{0}$	(237)	1 - 10 COS (U)	(254)
■ UNITÀ DI MISURA		· Lavoro		· Attrito viscoso		$\int \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{r^2 \sqrt{r^2 + x^2}}$	(271)
$H = \frac{Wb}{A} = Tm^2 = \frac{m^2kg}{A^2s^2}$	(255)	$F = \nabla W = -\nabla U$	(261)	Equazione differenziale	(0.27)	, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	
$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{V^2}{W} = \frac{m^2 kg}{A^2 s^3}$	(256)	· Moto circolare unif. accelerate		$v' + \frac{v}{\tau} = K$	(267)	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \mathrm{d}x = \sqrt{r^2 + x^2}$	(272)
$A W A^2s^3$	()	$v = \omega r$	(262)	Soluzione			

 $\Omega = \frac{V}{A} = \frac{W}{W} = \frac{m \cdot kg}{A^2 s^3}$ $T = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$ $V = \frac{J}{C} = \frac{W}{A} = \frac{m^2 kg}{s^3 A}$ $F = \frac{C}{V} = \frac{C^2}{J} = \frac{A^2 s^4}{m^2 kg}$ (262)Soluzione $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ (257)

 $\int \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ $v(t) = k\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ (268)(263)(273)(258)(264)

 $\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ■ ANALISI MATEMATICA

 $\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x} \right)$ (274)

 $\begin{array}{c} \cdot \ \mathbf{Moto} \ \mathbf{armonico} \\ \mathbf{Equazione} \ \mathbf{differenziale} \end{array}$ (259)· Integrali ricorrenti

 $\int \frac{1}{x^2 + r^2} dx = \frac{1}{r} \arctan \frac{x}{r}$ $x'' + \omega^2 x = 0$ ■ FISICA 1 (265)(269)

 $\int \sin^3 ax dx = -\frac{3a\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12}$ $\cdot \ Momento \ torcente$ Soluzione

 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dx = \ln \sqrt{x^2 + r^2} + x$ (270)(266) $M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = I\alpha$ $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ (275)(260)

· Differenziale di primo ordine Forma generale

y'(t) + a(t)y(t) = b(t)(276)

Soluzione

 $y(t) = e^{-A(t)(c+\int b(t)e^{A(t)}dt)}$ (277)

· Differenziale di secondo ordine omo-

geneo Forma generale

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$
 (278)

 $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ sono le soluzioni dell'equazione associata

Soluzioni Se $\Delta > 0$

Se $\Delta = 0$

 $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

con $\alpha = Re(\lambda)$ e $\beta = Im(\lambda)$

 \cdot Identità vettoriali

(279)

 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(282)

 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (289)

 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (288)$

(290)

 \cdot Identità geometriche

 $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + t c_2 e^{\lambda_2 t}$ (280) $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ (285)Se $\Delta < 0$

 $\nabla \cdot (f\mathbf{A} = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$

 $\nabla \times (\nabla f) = 0$

 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ (286)(291) $y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (281)$

(283)

(284)

 $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ (292)(287)

	Contagions	Sferiche	Cilin dui ab a			
	Cartesiane	Steriche	Cilindriche			
Gradiente (∇f =)	$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\phi$	$\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z}$			
Divergenza $(\nabla \cdot \mathbf{F} =)$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$			
Rotore $(\nabla \times \mathbf{F} =)$	$ \left(\begin{array}{c} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{array}\right) $	$ \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial F_{\phi}\sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_{r}}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_{\phi})}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rF_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial F_{r}}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} $	$ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right) \end{pmatrix} $			
Il laplaciano di un campo scalare Φ , in qualunque coordinata, è $\nabla \cdot \nabla \Phi$						