FORMULARIO DI FISICA 2

Per segnalare errori scrivimi alla mail emanuele.urso@studenti.unipd.it oppure correggi tu stesso usando il file sorgente in LaTeχ su GitHub cercando Baelish. **Buona fortuna per l'esame!**

NOME:
COGNOME:
MATRICOLA:

FONDAMENTALI

· **Teorema (divergenza)**

$$\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \int_\tau \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

· **Teorema (Stokes)**

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_\Sigma \nabla\times\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{\Sigma} \tag{2}$$

· **Teorema (Gradiente)**

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_\gamma \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \tag{3}$$

· **Flusso di un campo**

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \oint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{\Sigma} \tag{4}$$

· **Equazioni di Maxwell**
Nel vuoto:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{8}$$

$$\oint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

$$\oint_\Sigma \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = 0 \tag{11}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 I_{conc} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} \tag{12}$$

Nei mezzi:

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{libere} \tag{13}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_{C,lib} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{14}$$

$$\oint_\Sigma \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = Q_{int,lib} \tag{15}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = I_{conc,lib} + \frac{d\Phi_D}{dt} \tag{16}$$

· **Discontinuità dei campi**
Generali

$$\Delta B_\perp = 0 \tag{17}$$

$$\Delta E_\parallel = 0 \tag{18}$$

$$\Delta D_\perp = \sigma_L \tag{19}$$

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

$$\Delta H_\parallel = |\mathbf{K}_c\times\mathbf{u}_n| \tag{21}$$

In ipotesi di linearità

$$\frac{D_{1,\parallel}}{k_1} = \frac{D_{2,\parallel}}{k_2} \tag{22}$$

Se $\sigma_L = 0$

$$k_1 E_{1,\perp} = k_2 E_{2,\perp} \tag{23}$$

Rifrazione linee di B

$$\frac{\tan(\theta_2)}{\tan(\theta_1)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{24}$$

ELETTROSTATICA

· **Forza di Coulomb**

$$\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{u}_{1,2} \tag{25}$$

· **Definizione campo elettrico**

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)}{q_0} \tag{26}$$

· **En. potenziale due cariche**

$$U = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}} + c \tag{27}$$

· **Potenziale scalare V**

$$V(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q_0} \tag{28}$$

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{29}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{30}$$

· **Energia di E**

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})\mathrm{d}\tau \tag{31}$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{E}^2\mathrm{d}\tau \tag{32}$$

· **Equazione di Poisson**

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{33}$$

· **E e V di particolari distribuzioni**
Carica puntiforme

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{u}_r \tag{34}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{35}$$

Sfera carica uniformemente

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & \text{se r < R} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & \text{se r} \geq \text{R} \end{cases} \tag{36}$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} & \text{se r < R} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{se r} \geq \text{R} \end{cases} \tag{37}$$

Guscio sferico carico uniformemente

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se r < R} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & \text{se r} \geq \text{R} \end{cases} \tag{38}$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & \text{se r < R} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{se r} \geq \text{R} \end{cases} \tag{39}$$

Filo infinito con carica uniforme λ

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{u}_r \tag{40}$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{41}$$

Piano Σ infinito con carica uniforme

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_n \tag{42}$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x - x_0) \tag{43}$$

Anello con carica uniforme (sull'asse)

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda R x}{2\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}\mathbf{u}_x \tag{44}$$

$$V(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}} \tag{45}$$

Disco carico uniformemente

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}}\right)\mathbf{u}_x \tag{46}$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2 + R^2} - x) \tag{47}$$

Disco carico uniformemente ($x >> R$)

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{x^2}\mathbf{u}_x \tag{48}$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{x} \tag{49}$$

Guscio cilindrico uniformemente carico

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se r < R} \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h r} & \text{se r} \geq \text{R} \end{cases} \tag{50}$$

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{se r < R} \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) & \text{se r} \geq \text{R} \end{cases} \tag{51}$$

CONDUTTORI

· **Conduttori in equilibrio**
All'interno

– il campo è nullo

$$\mathbf{E} = 0 \tag{52}$$

– il potenziale è costante

$$\Delta V = 0 \tag{53}$$

Le cariche si distribuiscono sempre su superfici, mai all'interno

· **Pressione elettrostatica**

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{d\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_n = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 \tag{54}$$

· **Capacità**

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{55}$$

Il più delle volte c'è induzione completa e C dipende dalla configurazione geometrica.

· **Condensatori**
Piano

$$C = \frac{\varepsilon_0\Sigma}{d} \tag{56}$$

Sferico

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{Rr}{R - r} \tag{57}$$

Cilindrico

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R}{r}} \tag{58}$$

In serie

$$C_{eq} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}\right)^{-1} \tag{59}$$

In parallelo

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \tag{60}$$

Con dielettrico

$$C_{diel} = k_e C_0 \tag{61}$$

Energia interna del condensatore

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV = \frac{1}{2}QV \tag{62}$$

Differenziale circuito RC

$$RQ'(t) + \frac{Q(t)}{C} = V \tag{63}$$

Carica

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{64}$$

Scarica

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{65}$$

· **Condensatore pieno**
Condensatore riempito di materiale di resistività ρ

$$RC = \varepsilon_0\rho \tag{66}$$

· **Forza fra le armature**

$$F = \frac{Q^2}{2}\partial_x\left(\frac{1}{C}\right) \tag{67}$$

Condensatore piano

$$F = \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0\Sigma} \tag{68}$$

DIPOLO ELETTRICO

· **Momento di dipolo**

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a} \tag{69}$$

· **Potenziale del dipolo**

$$V(r) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{70}$$

· **Campo elettrico E generato**

$$\mathbf{E} = \frac{qd\,(2\cos(\theta)\,\mathbf{u}_r + \sin(\theta)\,\mathbf{u}_\theta)}{4\pi\varepsilon r^3} \tag{71}$$

· **Momento torcente**

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}\times q\mathbf{E}(x,y,z) \tag{72}$$

Se E uniforme

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}\times\mathbf{E} \tag{73}$$

· **Lavoro per ruotarlo**

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\mathrm{d}\theta \tag{74}$$

Se E uniforme

$$W = pE[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_f)] \tag{75}$$

· **Frequenza dipolo oscillante**
Se E costante e uniforme

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}} \tag{76}$$

· **Energia del dipolo**

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \tag{77}$$

· **Forza agente sul dipolo**

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) \tag{78}$$

· **Energia pot. tra due dipoli**

$$U = \frac{[\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{p_2} - 3(\mathbf{p_1}\mathbf{u}_r)(\mathbf{p_2}\cdot\mathbf{u}_r)]}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{79}$$

· **Forza tra dipoli**
Dipoli concordi = F repulsiva

$$\mathbf{F} = \frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\mathbf{u}_r \tag{80}$$

DIELETTRICI

· **Campo elettrico in un dielettrico**

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{E}_0}{k} \tag{81}$$

· **Vettore P polarizzazione**

$$\mathbf{P} = \frac{dp}{d\tau} \tag{82}$$

· **Dielettrici lineari**

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_E\mathbf{E}_k = \varepsilon_0(k - 1)\mathbf{E}_k \tag{83}$$

· **Dens. superficiale di q polarizzata**

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}_n = \frac{k - 1}{k}\sigma_l \tag{84}$$

· **Dens. volumetrica di q polarizzata**

$$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P} \tag{85}$$

· **Spostamento elettrico**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}_k + \mathbf{P} = \varepsilon_0 k\mathbf{E}_k = \varepsilon_0\mathbf{E}_0 \tag{86}$$

CORRENTI

· **Lavoro del generatore**

$$W_{gen} = \int_{t_1}^{t_2} V\mathrm{d}q(t) = 2U_E \tag{87}$$

· **Densità di corrente**

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} = \frac{Nq\mathbf{v}}{\tau} \tag{88}$$

· **Intensità di corrente**

$$I = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \int_\Sigma \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\Sigma \tag{89}$$

· **Leggi di Ohm**

$$V = RI \tag{90}$$

$$\mathrm{d}R = \int_\Gamma \frac{\rho}{\Sigma}\mathrm{d}l \tag{91}$$

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{J} \tag{92}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{93}$$

· **Potenza conduttore ohmico**

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{94}$$

$$\mathrm{d}P = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathrm{d}\tau \tag{95}$$

· **Resistori**
In serie

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{96}$$

In parallelo

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\right)^{-1} \tag{97}$$

· **Generatore reale**

$$\Delta V = V_0 - r_i I \tag{98}$$

· **Leggi di Kirchhoff**
Legge dei nodi

$$\sum_{k=0}^{N} I_k = 0 \tag{99}$$

Legge delle maglie

$$\sum_{k=0}^{N} \Delta V_k = 0 \tag{100}$$

■ MAGNETOSTATICA

· **Forza di Lorentz**

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{101}$$

· **Prima legge di Laplace**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \tag{102}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \mathrm{d}\tau \tag{103}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_r \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{r} \mathrm{d}\tau\right) \tag{104}$$

· **Seconda legge di Laplace**

$$\mathbf{F} = \int I(\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathrm{d}\mathbf{B}) \tag{105}$$

· **B di corpi notevoli** (ATTENZIONE: viene indicata la direzione, il verso dipende dalla corrente I)
Asse di una spira

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \tag{106}$$

Filo indefinito

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \tag{107}$$

Asse filo lungo 2a

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r \sqrt{r^2 + a^2}} \mathbf{u}_\phi \tag{108}$$

Solenoide ideale

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N}{L} I \tag{109}$$

Toroide

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \tag{110}$$

Piano infinito su xy, con K $\mathbf{u}_x$ densità lineare di corrente

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{K}}{2} \mathbf{u}_y \tag{111}$$

· **Effetto Hall**
b spessore sonda, b // B, b ⊥ I, n car/vol

$$V_H = \frac{IB}{n|q|b} \tag{112}$$

· **Forza di Ampere**
Corr. equiversa = for. attrattiva

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 L}{d} \tag{113}$$

· **Potenziale vettore A**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{114}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r_1}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r_2})}{r_{2,1}} \mathrm{d}\tau_2 \tag{115}$$

Invarianza di Gauge

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \tag{116}$$

Gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{117}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{118}$$

· **Moto ciclotrone**
Raggio

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{119}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \tag{120}$$

Angolo deflessione elica (v 2 dimensioni)

$$\sin(\theta) = \frac{qBR}{mv} \tag{121}$$

Passo elica

$$d = \frac{2\pi R}{\tan(\theta)} \tag{122}$$

■ INDUZIONE

· **Coefficienti mutua induzione**

$$\Phi_{1,2} = MI_1 \qquad \Phi_{2,1} = MI_2 \tag{123}$$

· **Flusso generato da 1 attraverso 2**

$$\Phi_{1,2} = NB_1\Sigma_2 \tag{124}$$

· **Induttanza**
Φ autoflusso

$$\Phi(\mathbf{B}) = IL \tag{125}$$

Solenoide ideale

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{L} \Sigma = \mu_0 n^2 L \Sigma \tag{126}$$

Toroide

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \tag{127}$$

· **Fem autoindotta**

$$\Phi = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{128}$$

· **Fem indotta**

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{129}$$

· **Corrente indotta**

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{B})}{R\mathrm{d}t} \tag{130}$$

· **Energia dell'induttanza**
Mutua (solo una volta ogni coppia):

$$U_{1,2} = \frac{1}{2}MI_1I_2 + \frac{1}{2}MI_2I_1 \tag{131}$$

Interna

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \tag{132}$$

In un circuito (conta una volta ogni induttanza ed una ogni coppia)

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(L_iI_i^2 + \sum_{j=1}^{N} M_{i,j}I_iI_j) \quad i \neq j \tag{133}$$

· **Legge di Felici**

$$Q(t) = \frac{\Phi(0) - \Phi(t)}{R} \tag{134}$$

· **Circuito RL in DC**
L si oppone alle variazioni di I smorzandole
Appena inizia a circolare corrente

$$I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{135}$$

Quando il circuito viene aperto

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{136}$$

· **Circuiti con barra mobile** (b lunghezza barra)
F.e.m. indotta

$$\varepsilon(t) = -Bbv(t) \tag{137}$$

Corrente in un circuito chiuso

$$I(t) = \frac{Bbv(t)}{R} \tag{138}$$

Lavoro fornito per muovere la barra

$$W = \frac{(Bbv(t))^2}{R} \tag{139}$$

Forza magnetica sulla barra

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Bb)^2 v(t)}{R} \tag{140}$$

ATTENZIONE: per tenere v costante è necessaria una F esterna; altrimenti essa è opposta a v e il moto è smorzato esponenzialmente

· **Disco di Barlow**
Campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega x B \mathbf{u}_x \tag{141}$$

F.e.m. indotta

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\omega B r^2 \tag{142}$$

Corrente in un circuito chiuso

$$I = \frac{\omega B r^2}{2R} \tag{143}$$

Se nnon ci sono forze esterne il moto è smorzato
Momento torcente frenante

$$\mathbf{M} = -\frac{\omega B r^4}{4R}\mathbf{u}_z \tag{144}$$

Velocità angolare

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{2mR}{B^2 r^2} \tag{145}$$

■ DIPOLO MAGNETICO

· **Momento di dipolo**

$$\mathrm{d}\mathbf{m} = I\mathrm{d}\Sigma\mathbf{u}_n \tag{146}$$

· **Potenziale del dipolo**

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{u}_r) \tag{147}$$

· **Campo magnetico B generato**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3\mathbf{u}_r(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r) - \mathbf{m}] \tag{148}$$

· **Momento torcente**

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{149}$$

· **Forza agente sul dipolo**

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \tag{150}$$

· **Energia del dipolo**

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \tag{151}$$

· **Energia pot. tra due dipoli**

$$U = -\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{B_2} = -\mathbf{m_2} \cdot \mathbf{B_1} \tag{152}$$

B è il campo magnetico generato dall'altro dipolo

· **Forza tra dipoli**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0}{4\pi r^4}[(\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{m_2} + (\mathbf{m_2} \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{m_1} + (\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{m_2})\mathbf{u}_r - 5(\mathbf{m_1} \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{m_2} \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r] \tag{153}$$

■ MAGNETISMO

· **Campo magnetico nella materia**

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \tag{154}$$

$$\mathbf{B} = k_m\mathbf{B}_0 = (1 + \chi_m)\mathbf{B}_0 \tag{155}$$

· **Campo magnetizzazione M**

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}\tau} \tag{156}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m \mathbf{B}}{(\chi_m + 1)\mu_0} \tag{157}$$

· **Campo magnetizzante H**

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{B}}{k_m\mu_0} = \frac{\mathbf{M}}{\chi_m} \tag{158}$$

· **Dens. LINEARE di corrente sulla SUPERFICIE**

$$\mathbf{K_m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_r \tag{159}$$

$$\mathbf{M} = M\mathbf{u}_z \qquad \mathbf{K_m} = K_m\mathbf{u}_\phi$$

· **Dens. SUPERFICIALE corrente MAGNETIZZATA**

$$\mathbf{j_m} = \nabla \times \mathbf{M} \tag{160}$$

$$\oint \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I_{m,c} \tag{161}$$

· **Dens. SUPERFICIALE corrente LIBERA**

$$\mathbf{j_l} \neq \mu_0\mathbf{j} \tag{162}$$

$$\mathbf{j_l} = \nabla \times \mathbf{H} \tag{163}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I_{l,c} \tag{164}$$

· **Energia di B**

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{B}^2 \mathrm{d}\tau \tag{165}$$

$$U_B = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}\mathrm{d}\tau \tag{166}$$

con N circuiti filiformi

$$U_B = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i\Phi_i \tag{167}$$

■ CIRCUITI RLC

· **Impedenza**
La somma delle impedenze in serie e parallelo segue le regole dei resistori

$$Z = R + i\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) \tag{168}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{169}$$

· **RLC serie in DC smorzato**
Equazione differenziale

$$I''(t) + 2\gamma I'(t) + \omega_0 I(t) = 0 \tag{170}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \tau = \frac{1}{\gamma}$$

Smorz. DEBOLE $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) \tag{171}$$

Smorz. FORTE $\gamma^2 > \omega_0^2$

$$I(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\omega} + Be^{-\omega}) \tag{172}$$

Smorz. CRITICO $\gamma^2 = \omega_0^2$

$$I(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt) \tag{173}$$

A, B e φ si ricavano impostando le condizioni iniziali

· **RLC serie in AC forzato**
Forzante

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos(\Omega t + \Phi) \tag{174}$$

Equazione differenziale

$$I''(t) + 2\gamma I'(t) + \omega_0 I(t) = -\frac{\Omega\varepsilon_0}{L}\sin(\Omega t + \Phi) \tag{175}$$

Soluzione

$$I(t) = I_0(\Omega)\cos(\Omega t) \tag{176}$$

Corrente massima

$$I_0(\Omega) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{177}$$

Sfasamento

$$\tan\Phi(\Omega) = \frac{L\Omega - \frac{1}{\Omega C}}{R} \tag{178}$$

NOTA: Lo sfasamento di I rispetto a ε è $-\Phi$
Risonanza

$$Im(Z) = 0 \to \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{179}$$

· **Effetto Joule**

$$\langle P_R \rangle = \frac{V_0}{2R} \tag{180}$$

· **Potenza media totale**

$$\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\phi) \tag{181}$$

· **V e I efficace**

$$V_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2}V_0 \qquad I_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2}I_0 \tag{182}$$

■ CAMPO EM e OTTICA

· **Campi in un'onda EM**
(Nel vuoto $v = c$)

$$E(x,t) = E_0\cos(kx - \omega t) \tag{183}$$

$$B(x,t) = \frac{E_0}{v}\cos(kx - \omega t) \tag{184}$$

$$\omega = kv \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

· **Vettore di Poynting**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{185}$$

· **Intensità media onda**

$$I = \langle S \rangle = \langle E^2 \varepsilon v \rangle \tag{186}$$

· **Potenza**

$$P = I\Sigma \tag{187}$$

L'intensità varia in base alla scelta di Σ

· **Equazioni di continuità**
Teorema di Poynting

$$\nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{188}$$

Conservazione della carica

$$\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{189}$$

· **Densità di en. campo EM**

$$u_{EM} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{190}$$

$$U_{EM} = \int_{\mathbb{R}^3} u_{EM}\,\mathrm{d}\tau \tag{191}$$

· **Densità di quantità di moto**

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \tag{192}$$

· **Effetto Doppler**

$$\nu' = \nu\frac{v - v_{oss}}{v - v_{sorg}} \tag{193}$$

· **Oscillazione del dipolo**

$$I(r,\theta) = \frac{I_0}{r^2}\sin^2(\theta) \tag{194}$$

$$P = \int\int I(r,\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\pi I_0 \tag{195}$$

· **Velocità dell'onda**

$$v^2 = \frac{1}{k_e\varepsilon_0 k_m\mu_0} \tag{196}$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \tag{197}$$

· **Indice di rifrazione**

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{k_e k_m} \tag{198}$$

· **Legge di Snell-Cartesio**

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \tag{199}$$

· **Coefficienti di Fresnel**
Definizione

$$r = \frac{E_r}{E_i} \qquad R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{I_r}{I_i} \tag{200}$$

$$t = \frac{E_t}{E_i} \qquad T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{I_t}{I_i} \tag{201}$$

Raggio RIFLESSO polarizzato

$$r_\sigma = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \tag{202}$$

$$r_\pi = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \tag{203}$$

$$R_\sigma = r_\sigma^2 \qquad R_\pi = r_\pi^2 \tag{204}$$

Raggio TRASMESSO polarizzato

$$t_\sigma = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} \tag{205}$$

$$t_p i = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i} \tag{206}$$

$$T_\sigma = 1 - R_\sigma \qquad T_\pi = 1 - R_\pi \tag{207}$$

Luce NON polarizzata

$$R = \frac{1}{2}(R_\sigma + R_\pi) \quad T = \frac{1}{2}(T_\sigma + T_\pi) \tag{208}$$

Incidenza normale ($\cos\theta_i ? \cos\theta_t = 1$)

$$r = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \tag{209}$$

$$R = \left(\frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}\right)^2 \tag{210}$$

$$t = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \tag{211}$$

$$T = \frac{4n_i n_t}{(n_i + n_t)^2} \tag{212}$$

Angolo di Brewster (il raggio riflesso non ha polar. parallela)

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \to \theta_B = \theta_i = \arctan\frac{n_t}{n_i} \tag{213}$$

$$R = \frac{1}{2}\cos^2(2\theta_i) \tag{214}$$

$$T = 1 - R \tag{215}$$

· **Pressione di radiazione**
Superficie ASSORBENTE

$$p = \frac{I_i}{v} \tag{216}$$

Superficie RIFLETTENTE

$$p = \frac{I_i + I_t + I_r}{v} \tag{217}$$

· **Rapporto di polarizzazione**

$$\beta_R = \frac{P_R^\sigma - P_R^\pi}{P_R^\sigma + P_R^\pi} \tag{218}$$

$$\beta_T = \frac{P_T^\sigma - P_T^\pi}{P_T^\sigma + P_T^\pi} \tag{219}$$

■ INTERFERENZA e DIFFRAZIONE

· **Interferenza generica**
Onda risultante

$$f(\mathbf{r},t) = Ae^{i(kr_1 - \omega t + \alpha)} \tag{220}$$

Ampiezza

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} \tag{221}$$

Diff. cammino ottico

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = (\Phi_2 - \Phi_1 + k(r_2 - r_1)) \tag{222}$$

Intensità

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta \tag{223}$$

Fase risultante α

$$\tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} \tag{224}$$

Massimi

$$\delta = 2n\pi \tag{225}$$

Minimi

$$\delta = (2n+1)\pi \tag{226}$$

· **Condizione di Fraunhofer**

$$\theta = \frac{\Delta y}{L} \tag{227}$$

L grande tale che $\tan\theta \approx \theta$

· **Interferenza in fase**
Diff. cammino ottico

$$\delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{228}$$

Costruttiva

$$r_2 - r_1 = n\lambda \to \sin\theta = n\frac{\lambda}{d} \quad n\in\mathbb{Z} \tag{229}$$

Distruttiva

$$r_2 - r_1 = \frac{2n+1}{2}\lambda \to \sin\theta = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{d} \quad n\in\mathbb{Z} \tag{230}$$

· **Interf. riflessione su lastra sottile**
(n indice rifr., t spessore lastra)
Diff. cammino ottico

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{2nt}{\cos\theta_t} \tag{231}$$

Massimi $m\in\mathbb{N}$

$$t = \frac{2m+1}{4n}\lambda\cos\theta_t \tag{232}$$

Minimi $m\in\mathbb{N}$

$$t = \frac{m}{2n}\lambda\cos\theta_t \tag{233}$$

· **Interferenza N fenditure**
Diff. cammino ottico

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{234}$$

Intensità

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin(N\frac{\delta}{2})}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \tag{235}$$

Massimi principali $m\in\mathbb{Z}$

$$\delta = 2m\pi \to \sin\theta = \frac{m\lambda}{d} \tag{236}$$

$$I_{MAX} = N^2 I_0 \tag{237}$$

Massimi secondari
$m\in\mathbb{Z} - \{kN, kN-1 \text{ con } k\in\mathbb{Z}\}$

$$\delta = \frac{2m+1}{2N}\pi \to \sin\theta = \frac{2m+1}{2N}\frac{\lambda}{d} \tag{238}$$

$$I_{SEC} = \frac{I_0}{\left(\sin\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)^2} \tag{239}$$

Minimi $m\in\mathbb{Z} - \{kN\}$

$$\delta = \frac{2m}{N}\pi \to \sin\theta = \frac{m\lambda}{Nd} \tag{240}$$

$$I_{MIN} = 0 \tag{241}$$

Separazione angolare (distanza angolare tra min. e max. adiacente)

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{N}\frac{\lambda}{d\cos\theta} \tag{242}$$

Potere risolutore

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nn} \tag{243}$$

· **Diffrazione**
Intensità

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\right)^2 \tag{244}$$

Massimo pincipale in $\theta = 0$

$$I_{MAX} = I_0 \tag{245}$$

Massimi secondari $m\in\mathbb{Z} - \{-1, 0\}$

$$\sin\theta = \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda}{a} \tag{246}$$

$$I_{SEC} = \frac{I_0}{\left(\frac{\pi(2m+1)}{2}\right)^2} \tag{247}$$

Minimi $m\in\mathbb{Z} - \{0\}$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{a} \tag{248}$$

$$I_{MIN} = 0 \tag{249}$$

· **Reticolo di diffrazione**
Sovrapposizione di diffrazione e interferenza, l'intensità è il prodotto dei due effetti

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\frac{\sin(\frac{N\pi d\sin\theta}{\lambda})}{\sin(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda})}\right)^2 \tag{250}$$

Dispersione

$$D = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta_m} \tag{251}$$

· **Fattore molt. di inclinazione**

$$f(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2} \tag{252}$$

· **Filtro polarizzatore**
Luce NON polarizzata

$$I = \frac{I_0}{2} \tag{253}$$

Luce polarizzata (Legge di Malus)

$$I = I_0\cos^2(\theta) \tag{254}$$

■ UNITÀ DI MISURA

$$H = \frac{Wb}{A} = Tm^2 = \frac{m^2kg}{A^2s^2} \tag{255}$$

$$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{V^2}{W} = \frac{m^2kg}{A^2s^3} \tag{256}$$

$$T = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2} \tag{257}$$

$$V = \frac{J}{C} = \frac{W}{A} = \frac{m^2kg}{s^3A} \tag{258}$$

$$F = \frac{C}{V} = \frac{C^2}{J} = \frac{A^2s^4}{m^2kg} \tag{259}$$

■ FISICA 1

· **Momento torcente**

$$M = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = I\alpha \tag{260}$$

· **Lavoro**

$$F = \nabla W = -\nabla U \tag{261}$$

· **Moto circolare unif. accelerato**

$$v = \omega r \tag{262}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{263}$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{264}$$

· **Moto armonico**
Equazione differenziale

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{265}$$

Soluzione

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{266}$$

· **Attrito viscoso**
Equazione differenziale

$$v' + \frac{v}{\tau} = K \tag{267}$$

Soluzione

$$v(t) = k\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{268}$$

■ ANALISI MATEMATICA

· **Integrali ricorrenti**

$$\int\frac{1}{x^2+r^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\arctan\frac{x}{r} \tag{269}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\mathrm{d}x = \ln\sqrt{x^2+r^2} + x \tag{270}$$

$$\int\frac{1}{(x^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{r^2\sqrt{r^2+x^2}} \tag{271}$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{r^2+x^2} \tag{272}$$

$$\int\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}} \tag{273}$$

$$\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) \tag{274}$$

$$\int\sin^3 ax\mathrm{d}x = -\frac{3a\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12} \tag{275}$$

· **Differenziale di primo ordine**

Forma generale

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{276}$$

Soluzione

$$y(t) = e^{-A(t)(c+\int b(t)e^{A(t)}\mathrm{d}t)} \tag{277}$$

· **Differenziale di secondo ordine omogeneo**

Forma generale

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{278}$$

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ sono le soluzioni dell'equazione associata

Soluzioni

Se $\Delta > 0$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{279}$$

Se $\Delta = 0$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + t c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{280}$$

Se $\Delta < 0$

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) \tag{281}$$

con $\alpha = Re(\lambda)$ e $\beta = Im(\lambda)$

· **Identità vettoriali**

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{282}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{283}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A} = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \tag{284}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{285}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{286}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{287}$$

· **Identità geometriche**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{288}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{289}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{290}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{291}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{292}$$

	Cartesiane	Sferiche	Cilindriche
Gradiente ($\nabla f =$)	$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\phi$	$\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z}$
Divergenza ($\nabla \cdot \mathbf{F} =$)	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Rotore ($\nabla \times \mathbf{F} =$)	$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial F_\phi \sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial (rF_z)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right) \end{pmatrix}$
Il laplaciano di un campo scalare Φ, in qualunque coordinata, è $\nabla \cdot \nabla \Phi$			