

10-201-1011.VL01 Analysis [für Informatiker] – Übungsblatt 1

Lovis Rentsch

2024-10-14 <<<<<< HEAD

Collaborators: Laslo Hauschild

0.1.a.i.i.i.i

in Zusammenarbeit mit: Laslo Hauschild >>>>>> 1-analysis-1

Problem 1:

1.1

A	B	C	$(A \wedge B) \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

Da die Spalten für $(A \wedge B) \vee C$ und $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ identisch sind, sind die beiden Aussagen semantisch gleichbedeutend. Damit ist das Distributivgesetz für das logische “oder” gezeigt

$$x \in (A \cap B) \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\Rightarrow \forall x \in ((A \cap B) \cup C) : x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C))$$

1.2

“ \subset ”: Sei $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D)$

- Fall 1: $y \in D \subset B \cup D$

$$y \in D \subset (B \cup D)$$

$$(x, y) \notin C \times D \Rightarrow x \notin C$$

Da $x \in (A \cup C)$, folgt daraus $x \in A$

$$\text{Da } (x, y) \notin A \times B \Rightarrow y \notin B$$

$$\text{Also } (x, y) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B)$$

- Fall 2: $y \notin D$

$$y \notin D \Rightarrow y \in B$$

$$(x, y) \notin A \times B \Rightarrow x \notin A$$

$$x \in A \cup C \Rightarrow x \in C$$

$$\text{Also } (x, y) \in (C \setminus A) \times (B \setminus D)$$

Also ist die linke Seite eine Teilmenge der rechten Seite.

“ \supset ” Sei $(x, y) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D)$

- Fall 1: $(x, y) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B)$

$$y \in D \setminus B \Rightarrow (y \in D) \wedge (y \notin B) \wedge (y \in D \cup B)$$

$$(x, y) \in (A \cup C) \times (D \cup B)$$

$$x \notin C \Rightarrow (x, y) \notin C \times D$$

$$y \notin B \Rightarrow (x, y) \notin A \times B$$

$$\text{Also } (x, y) \in (A \cup C) \times (D \cup B) \setminus (C \times D \cup A \times B)$$

- Fall 2: $(x, y) \in (C \setminus A) \times (B \setminus D)$

$$\text{Dann ist } (x \in C \setminus A) \wedge (x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \in A \cup C)$$

$$\text{Und } (y \in B \setminus D) \wedge (y \in B) \wedge (y \notin D) \wedge (y \in B \cup D)$$

$$(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

$$x \notin A \Rightarrow (x, y) \notin C \times D$$

$$y \notin D \Rightarrow (x, y) \notin C \times D$$

$$\text{Also } (x, y) \notin A \times B \cup C \times D$$

In beiden Fällen gilt $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D)$

Problem 2:

2.1

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

2.2

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$x^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y) = 0 \vee (x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm y$$