10-201-1011.VL01 Analysis [für Informatiker] – Übungsblatt 5 Analysis

Lovis Rentsch

2024-11-13

Problem 1:

1.1

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.1.a Induktionsanfang

$$1^3 = 1$$
$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

Die Aussage gilt für 1.

1.1.b Induktionshypothese

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.1.c Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{IH}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

1.2

Ich betrachte $\sqrt{n} \leq \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ in zwei Ungleichungen für $\forall n \in \mathbb{N}$

1.2.a $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$

1.2.a.i Induktionsanfang

1.2.a.ii Induktionshypothese

$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$

1.2.a.iii Induktionsbehauptung

Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\overset{\text{IH}}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &\leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt $2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad &\leq 2\sqrt{n+1} - 1 \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad &\leq 2\sqrt{n+1} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad &\leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad &\leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) \\
\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right) \quad &\leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \quad &\leq \sqrt{n} > 0
\end{aligned}$$

1.2.b $\sqrt{n} \leq \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1.2.b.i Induktionsanfang

$$\underbrace{\sqrt{1} = 1}_{\text{RS}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} = 1}_{\text{LS}}$$

$$\text{RS} \geq \text{LS}, \text{also gilt die Aussage für } n = 1$$

1.2.b.ii Induktionshypothese

$\sqrt{n} \leq \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1.2.b.iii Induktionsbehauptung

Zu zeigen: $\sqrt{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \overset{\text{IH}}{\Leftrightarrow} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Also bleibt zu zeigen, dass $\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{n+1} - n\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \\
\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\Leftrightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} &\leq \sqrt{n+1} > 0
\end{aligned}$$

Problem 2:

2.1

$$\begin{aligned}
z + w &= 3 + 2i \\
zw &= 5 + i \\
\overline{z} \times \overline{w} &= \overline{zw} = \overline{5+i} = 5 - i \\
\frac{z}{w} &= -\frac{1}{13} + \left(-\frac{5}{13}\right)i \\
\frac{w}{z} &= (2+3i)\frac{1+i}{1^2 + (-1^2)} = \frac{2 + 2i + 3i - 3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \\
z^2 &= (1-i)^2 = 1 - i - i - 1 = 0 - 2i \\
z^{20} &= \left(z^2\right)^{10} = \left((0-2i)^2\right)^5 = -4^5 = -1024 + 0i
\end{aligned}$$

2.2

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : | \left|\frac{z+3}{z-3}\right| = 2 \right\}$$

Aus (2.70) geht hervor, dass die Beträge komplexer Zahlen multiplikativ sind. Daher gilt

$$\left|\frac{z+3}{z-3}\right| = 2 = \frac{|z+3|}{|z-3|} \Leftrightarrow |z+3| = 2|z-3|$$

Sei $z = a + bi$ mit beliebugen $a, b \in \mathbb{R}$. Es folgt $|z + 3| = |a + bi + 3| = \sqrt{(a+3)^2 + b^2}$ und $|z - 3| = |a + bi - 3| = \sqrt{(a-3)^2 + b^2}$

$$
\begin{aligned}
&|z + 3| = 2|z - 3| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(a+3)^2 + b^2} &&= 2\sqrt{(a-3)^2 + b^2} \\
&\Leftrightarrow (a+3)^2 + b^2 &&= 4\big((a-b)^2 + b^2\big) \\
&\Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 + b^2 &&= 4a^2 - 24a + 36 + 4b^2 \\
&\Leftrightarrow 0 &&= 3a^2 - 30a + 27 + 3b^2 \\
&\Leftrightarrow 0 &&= 3(a^2 - 10a + 9 + b^2) \\
&\Leftrightarrow 0 &&= a^1 - 10a + 9 + b^2 \\
&\Leftrightarrow 0 &&= (a^2 -^0 a + 25) - 25 + 9 + b^2 \\
&\Leftrightarrow 0 &&= (a-5)^2 - 16 + b^2 \\
&\Leftrightarrow 16 &&= (a-5)^2 + b^2 \\
&\Leftrightarrow 4^2 &&= (a-5)^2 + b^2
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung nennt man eine "Kreisgleichung", sie hat allgemein die Form $\left(r^2 = (x - m_2)^2 + (y - m_2)^2\right)$ und beschreibt einen Kreis mit Radius r und dem Mittelpunkt (m_1, m_2). Hier haben wir einen Kreis mit dem Radius 4 und dem Ursprung 5 $(5 + 0i)$.