10-201-1011.VL01 Analysis [für Informatiker] – Übungsblatt 3 Analysis

Lovis Rentsch

2024-11-06

Problem 1:

$$\frac{3x+2}{5x+4} > \frac{7x+6}{9x+8}$$

1. Fall $x > -\frac{4}{5}$

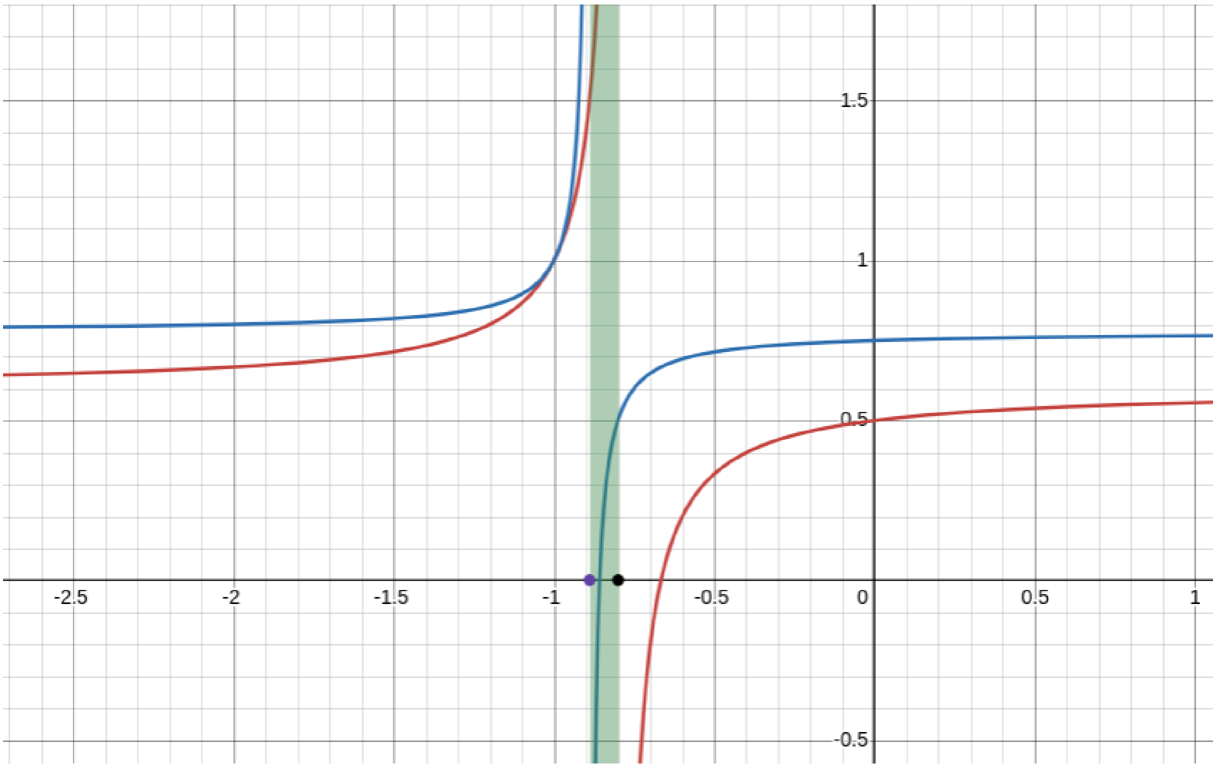
$$\begin{aligned} (3x+2)(9x+8) &> (7x+6)(5x+4) \\ 27x^2 + 42x + 16 &> 35x^2 + 58x + 24 \\ 0 &> 8x^2 + 16x + 8 \\ 0 &> x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

   Da x gegen ∞ läuft und schon beim Grezwert die rechte Seite größer als die linke Seite der Ungleichung ist, ist die Ungleichung immer falsch. Es gibt also kein $x \in \mathbb{R}, x > -\frac{4}{5}$.
2. Fall $-\frac{8}{9} < x < -\frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} (3x+2)(9x+8) &> (7x+6)(5x+4) \\ 27x^2 + 42x + 16 &> 35x^2 + 58x + 24 \\ 0 &> 8x^2 + 16x + 8 \\ 0 &> x^2 + 2x + 1 \\ x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \end{aligned}$$

   -1 ist nicht im Wertebereich. Daher schneiden sich die Graphen in diesem Intervall nicht. Dann kann man überprüfen welche Funktion die größeren Werte an einer Stelle hat und die hat dann immer die größeren Werte. Die linke Seite ist immer größer in diesem Intervall. Also gilt die Ungleichung für alle $-\frac{8}{9} < x < -\frac{4}{5}$.
3. Fall $x < -\frac{8}{9}$ Umformungen und Argumentation analog zum ersten Fall. Die Ungleichung ist für alle Werte kleiner als der Grenzwert nicht wahr und damit gibt es keine Elemente die in $\mathbb{R}$ und kleiner als $-\frac{8}{9}$ sind die die Ungleichung lösen.

Zusammen ergibt sich, dass alle x für $-\frac{8}{9} < x < -\frac{4}{5}$ die Ungleichung lösen.



Problem 2:

$$x < \frac{2xy}{x+y}$$
$$\Rightarrow x < \frac{xy+xy}{x+y}$$
$$\overset{\text{da} x+y>0}{\Rightarrow} x(x+y) < 2xy$$
$$\Rightarrow x^2 - xy < 0$$
$$\Rightarrow x^2 + xy - 2xy < 0$$
$$\Rightarrow x(x-y) < 0$$

Da $(x-y) < 0$ ist auch $x(x-y) < 0$ und die Aussage ist wahr.

$$\frac{2xy}{x+y} < \frac{x+y}{2}$$
$$\overset{\text{da } x+y>0}{\Rightarrow} 2xy < \frac{(x+y)^2}{2}$$
$$\Rightarrow 4xy < (x+y)^2$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{(x+y)^2}{4xy}$$

Da $2xy > 0$ und $x^2 + y^2 > 0$ ist die Aussage wahr.

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &< \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \\
\frac{(x+y)^2}{4} &< \frac{x^2+y^2}{2} \\
\frac{(x+y)^2}{2} &< x^2+y^2 \\
x^2+2xy+y^2 &< 2\left(x^2+y^2\right) \\
2xy &< x^2+y^2 \\
0 &< \frac{x^2+y^2}{2xy}
\end{aligned}$$

Da $x^2 + y^2 > 0$ und $2xy > 0$ ist die Aussage wahr.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &< y \\
\frac{x^2+y^2}{2} &< y^2 \\
x^2+y^2 &< 2y^2 \\
x^2 &< y^2 \\
x &< y
\end{aligned}$$

Da wir definiert haben, dass $x < y$ gilt auch diese Ungleichung.

Wegen der Transitivit¨at der Ordnung stimmt da alle Teilrelationen wahr sind auch die Verkettung der Ungleichungen.