10-201-1011.VL01 Analysis [für Informatiker] – Übungsblatt 1

Lovis Rentsch

2024-10-14

in Zusammenarbeit mit: Laslo Hauschild

Problem 1:

1.1

A	**B**	**C**	$(A \wedge B) \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

Da die Spalten für $(A \wedge B) \vee C$ und $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ identisch sind, sind die beiden Aussagen semantisch gleichbedeutend. Damit ist das Distributivgesetz für das logische "oder" gezeigt

$$\begin{aligned} & x \in (A \cap B) \cup C \\ & \qquad \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in C \\ & \qquad \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ & \qquad \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ & \qquad \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ & \qquad \Rightarrow \forall x \in ((A \cap B) \cup C) : x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \end{aligned}$$

1.2

"$\subset$": Sei $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D)$

- Fall 1: $y \in D \subset B \cup D$

$$\begin{aligned} & y \in D \subset (B \cup D) \\ & \qquad (x, y) \notin C \times D \Rightarrow x \notin C \\ & \qquad \text{Da } x \in (A \cup C) \text{ , folgt daraus } x \in A \\ & \qquad \text{Da } (x, y) \notin A \times B \Rightarrow y \notin B \\ & \text{Also } (x, y) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B) \end{aligned}$$

- Fall 2: $y \notin D$

$$\begin{aligned} & y \notin D \Rightarrow y \in B \\ & (x,y) \notin A \times B \Rightarrow x \notin A \\ & x \in A \cup C \Rightarrow x \in C \\ \text{Also } & (x,y) \in (C \setminus A) \times (B \setminus D) \end{aligned}$$

Also ist die linke Seite eine Teilmenge der rechten Site.

"$\supset$" Sei $(x,y) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (B \setminus D)$

- Fall 1: $(x,y) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B)$

$$\begin{aligned} & y \in D \setminus B \Rightarrow (y \in D) \land (y \notin B) \land (y \in D \cup B) \\ & (x,y) \in (A \cup C) \times (D \cup B) \\ & x \notin C \Rightarrow (x,y) \notin C \times D \\ & y \notin B \Rightarrow (x,y) \notin A \times B \\ \text{Also } & (x,y) \in (A \cup C) \times (D \cup B) \setminus (C \times D \cup A \times B) \end{aligned}$$

- Fall 2: $(x,y) \subset (C \setminus A) \times (B \setminus D)$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } & (x \in C \setminus A) \land (x \in C) \land (x \notin A) \land (x \in A \cup C) \\ \text{Und } & (y \in B \setminus D) \land (y \in B) \land (y \notin D) \land (y \in B \cup D) \\ & (x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \\ & x \notin A \Rightarrow (x,y) \notin C \times D \\ & y \notin D \Rightarrow (x,y) \notin C \times D \\ \text{Also } & (x,y) \notin A \times B \cup C \times D \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt $(x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \setminus (A \times B \cup C \times D)$

Problem 2:

2.1

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

2.2

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & x^2 = y^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-y) = 0 \lor (x+y) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = \pm y \end{aligned}$$