Diskrete Strukturen – Halbserie 3

Lovis Rentsch

2024-11-10

Problem 1:

1.1

$$\left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)\right) \subset \left(\bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i)\right)$$
$$\equiv \forall i \in I(x \in A_i \vee x \in B_i) \Rightarrow (\forall i \in I x \in A_i) \vee (\forall i \in I x \in B_i)$$

1. Fall $\forall i \in I x \in A_i$

   $\forall i \in I x \in A_i \Rightarrow \forall i \in I(x \in A_i \vee x \in B_i)$
2. Fall $\forall i \in I x \in B_i$

   $\forall i \in I x \in B_i \Rightarrow \forall i \in I(x \in A_i \vee x \in B_i)$

In beiden Fällen gilt die Mengeninklusion und daher gilt die Aussage.

1.2

Ein Gegenbeispiel wären die Mengen

$$\begin{aligned} I &= \{1, 2\} \\ A_1 &= \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\} \\ B_1 &= \{3, 4\}, B_2 = \{1, 2\} \end{aligned}$$

Denn hier ist $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \emptyset$ aber $\bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Problem 2:

2.1 Induktionsanfang

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

2.2 Induktionshypothese

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

2.3 Induktionsbehauptung

$$\sum^{n+1} (i = 1) \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

$$\sum^{n}(i=1)\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2(n+1)+1)(2(n+1)-1)}$$
$$\overset{\text{IH}}{\Rightarrow}\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2(n+1)+1)(2(n+1)-1)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}$$
$$\Rightarrow\frac{(2n+3)n+1}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{2n(n+1)+(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$\Rightarrow\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

Problem 3:

3.1 Induktionsanfang

$$A_1=A_1\cup(A_1\setminus A_1)=A_1\cup\emptyset=A_1$$

3.2 Induktionshypothese

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$
$$=(A_1\cap\ldots\cap A_n)\cup(A_1\setminus A_2)\cup\ldots\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup(A_n\setminus A_1)$$
$$=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\setminus A_{i+1}$$

3.3 Induktionsbehauptung

Beweis durch doppelte Inkludsion:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\subset\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n+1}A_i\cup\bigcup_{i=1}^{n}(A_{i+1}\setminus A_i)\cup(A_{n+1}\setminus A_1)}_{\text{RS}}$$

Sei $x\in A_{n+1}$

$$\text{RS}=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\cap A_{n+1}\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_{i+1}\setminus A_i)\cup(A_n\setminus A_{n+1})\cup(A_{n+1}\setminus A_1)\mid\text{(Abschwächung)}$$
$$=\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_{n+1}\setminus A_i)\cup(A_n\setminus A_1)\right)\cap A_{n+1}\cup(A_n\setminus A_{n+1})\cup(A_{n+1}\setminus A_1)$$
$$\overset{\text{IH}}{=}\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap A_{n+1}\cup(A_n\setminus A_{n+1})\cup(A_{n+1}\setminus A_1)$$

Anmerkung: Abschwächung mit der Vereinfachung $A_n\setminus A_1$ ist valide, da gilt:

$$\Rightarrow x\in(A_n\setminus A_1)$$
$$\Rightarrow x\in A_n\vee x\notin A_1$$
$$\Rightarrow x\in(A_{n+1}\setminus A_1)$$
$$\Rightarrow x\in\text{RS}$$

1. Fall $x\notin A_1$

$$\Rightarrow x\in A_{n+1}\setminus A_1\Rightarrow x\in\text{RS}$$

2. Fall $x \in A_1$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i+1} \setminus A_i \right) \cup (A_{n+1} \setminus A_1)$$

Sei $x \in A_{n+1}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$$

Da beide Inklusionen gelten, folgt die Behauptung.