Raumregionen
Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Raumregion**, wenn

1. $\varnothing \neq A \in \mathcal{OC}$ und
2. A beschränkt[1] ist

Die Menge der Raumregionen bezeichnen wir mit $\mathcal{U}^3$

Repräsentanten

1. (A, B) ist ein **Flächenrepräsentant**, wenn
   (a) A eine Raumregion und
   (b) $\varnothing \neq B \in \mathcal{OC}_{\partial_A}$ ist.

   Die **Menge der Flächenrepräsentanten** bezeichnen wir mit $\mathcal{R}^2$
2. (A, B, C) ist ein **Linienrepräsentant**, wenn
   (a) (A, B) ein Flächenrepräsentant und
   (b) $\varnothing \neq C \in \mathcal{OC}_{\delta B}$ ist.

   Die **Menge der Linienrepräsentanten** bezeichnen wir mit $\mathcal{R}^1$
3. (A, B, C, D) ist ein **Punktrepräsentant**, wenn
   (a) (A, B, C) ein Linienrepräsentant und
   (b) $D \subseteq \delta^2 C$ ist.

   Die **Menge der Punktrepräsentanten** bezeichnen wir mit $\mathcal{R}^0$

Objektäquivalenz

1. Zwei **Flächenrepräsentanten** (A_1, B_1) und (A_2, B_2) sind **objektäquivalent**, wenn
   (a) $B_1 = B_2$ und
   (b) $A_1 =_{B_1} A_2$

   gelten
2. Zwei **Linienrepräsentanten** (A_1, B_1, C_1) und (A_2, B_2, C_2) sind **objektäquivalent**, wenn
   (a) $C_1 = C_2$,
   (b) $A_1 =_{C_1} A_2$ und $B_1 =_{C_1} B_2$

   gelten.
3. Zwei **Punktrepräsentanten** (A_1, B_1, C_1, D_1) und (A_2, B_2, C_2, D_2) sind **objektäquivalent**, wenn
   (a) $D_1 = D_2$,
   (b) $A_1 =_{D_1} A_2$, $B_1 =_{D_1} B_2$ und $C_1 =_{D_1} C_2$

   gelten.

Wenn zwei Repräsentanten x und y objektäquivalent sind, so schreiben wir $x \sim y$.

[1] Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt falls $\exists\, M \in \mathbb{R} : A \subseteq B_M(0)$.

Niederdimensionale Raumentitäten

1. Für $(A,B) \in \mathcal{R}^2$ bezeichnet
$$[A,B] := \{(A',B') \in \mathcal{R}^2 \mid (A',B') \sim (A,B)\}$$
die Äquivalenzklasse von (A,B) bezüglich der Objektäquivalenz.
Diese Äquivalenzklassen heißen **Flächenregionen**.

2. Für $(A,B,C) \in \mathcal{R}^1$ bezeichnet
$$[A,B,C] := \{(A',B',C') \in \mathcal{R}^1 \mid (A',B',C') \sim (A,B,C)\}$$
die Äquivalenzklasse von (A,B,C) bezüglich der Objektäquivalenz.
Diese Äquivalenzklassen heißen **Linieregionen**.

3. Für $(A,B,C,D) \in \mathcal{R}^0$ bezeichnet
$$[A,B,C,D] := \{(A',B',C',D') \in \mathcal{R}^0 \mid (A',B',C',D') \sim (A,B,C,D)\}$$
die Äquivalenzklasse von (A,B,C,D) bezüglich der Objektäquivalenz.
Diese Äquivalenzklassen heißen **Punktregionen**.

Für $i \in \{0,1,2\}$ ist $\mathcal{U}^i := \mathcal{R}^i/_\sim$ die **Menge der Äquivalenzklassen** von $\mathcal{R}^i$.

Universum
Das Universum der $\mathcal{R}$-Struktur ist definiert als
$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^3 \cup \mathcal{U}^2 \cup \mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^0$$

Dimensionsfunktion
$\dim : \mathcal{U} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $\dim(x) = i \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{U}^i$

***SReg*:** Für $x \in \mathcal{U}$ gilt $SReg(x)$ gdw. $x \in \mathcal{U}^3$.

sb

1. Für $(A_1,B_1) \in \mathcal{R}^2$, $A_2 \in \mathcal{U}^3$ gilt
$$sb([A_1,B_1],A_2) \quad \Leftrightarrow \quad (A_1,B_1) \sim (A_2,B_1)$$

2. Für $(A_1,B_1,C_1) \in \mathcal{R}^1$, $(A_2,B_2) \in \mathcal{R}^2$ gilt
$$sb([A_1,B_1,C_1],[A_2,B_2]) \quad \Leftrightarrow \quad (A_1,B_1,C_1) \sim (A_2,B_2,C_1)$$

3. Für $(A_1,B_1,C_1,D_1) \in \mathcal{R}^0$, $(A_2,B_2,C_2) \in \mathcal{R}^1$ gilt
$$sb([A_1,B_1,C_1,D_1],[A_2,B_2,C_2]) \quad \Leftrightarrow \quad (A_1,B_1,C_1,D_1) \sim (A_2,B_2,C_2,D_1)$$

4. Für $\dim(x) + 1 \neq \dim(y)$ gilt $\neg sb(x,y)$

scoinc

1. Für $A_1, A_2 \in \mathcal{U}^3$ gilt: $\neg scoinc(A_1, A_2)$
2. Für $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathcal{R}^2$ gilt
$$scoinc([A_1, B_1], [A_2, B_2]) \quad \Leftrightarrow \quad B_1 = B_2$$
3. Für $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) \in \mathcal{R}^1$ gilt
$$scoinc([A_1, B_1, C_1], [A_2, B_2, C_2]) \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = C_2$$
4. Für $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2) \in \mathcal{R}^0$ gilt
$$\begin{aligned} &scoinc([A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2]) \\ &\Leftrightarrow \quad D_1 = D_2 \end{aligned}$$
5. Für $\dim(x) \neq \dim(y)$ gilt $\neg scoinc(x, y)$.

spart

1. Für $A_1, A_2 \in \mathcal{U}^3$ gilt $spart(A_1, A_2)$ gdw. $A_1 \subseteq A_2$
2. Für $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathcal{R}^2$ gilt $spart([A_1, B_1], [A_2, B_2])$ gdw.
   (a) $B_1 \subseteq B_2$
   (b) $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_1)$
3. Für $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) \in \mathcal{R}^1$ gilt $spart([A_1, B_1, C_1], [A_2, B_2, C_2])$ gdw.
   (a) $C_1 \subseteq C_2$
   (b) $(A_1, B_1, C_1) \sim (A_2, B_2, C_1)$
4. Für $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2) \in \mathcal{R}^0$ gilt $spart([A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2])$ gdw.
   (a) $D_1 = D_2$
   (b) $(A_1, B_1, C_1, D_1) \sim (A_2, B_2, C_2, D_1)$
5. Für $\dim(x) \neq \dim(y)$ gilt $\neg spart(x, y)$.