

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики  
Физико-механический институт

Отчёт по лабораторным работам  
по дисциплине  
«Интервальная статистика»

Выполнил студент:  
Баев Д. А.  
группа:  
5040102/30201

Преподаватель:  
Баженов А.Н.

Санкт-Петербург, 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Первый подход . . . . .	2
2.2	Второй метод . . . . .	3
2.3	Построение коридора совместности . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Рализация</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Валидация метода</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>18</b>

# 1 Постановка задачи

Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

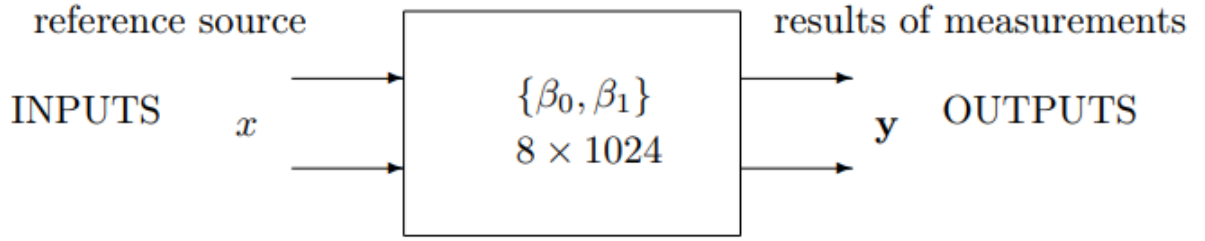


Рис. 1: Структурная схема калибровки DRS4

Для сравнения значения входных сигналов и кода АЦП необходимо откалибровать устройство. На входы платы подается набор сигналов постоянного значения от опорного источника, охватывающий рабочий диапазон напряжений микросхемы. На основе полученных данных для каждой ячейки рассчитываются линейные регрессии.

Таким образом, калибровка сводится к определению параметров линейной регрессии

$$y = \beta_0 x + \beta_1, \quad (1)$$

здесь  $x$  – входные данные,  $y$  – интервальные выходные данные,  $\beta_0, \beta_1$  – параметры линейной регрессии.

## 2 Теория

### 2.1 Первый подход

Поскольку показания датчиков обладают погрешностью, полученные данные на самом деле следует рассматривать как интервалы, центр которых совпадает с измеренными показаниями, а радиус  $\epsilon$  (в данном случае  $2^{14} = 16384$ ).

Так как показания независимы, можно рассмотреть произвольную ячейку из всех  $8 \cdot 1024$  ячеек. Тогда, для данной ячейки имеем  $100 \cdot 11$  пар значений  $(x, y)$ , где  $x$  – координата соответствующая поданному напряжению и лежит в границах  $[-0.5, 0.5]$ , а  $y$  координата представляет собой интервал с  $wid = 2/16384$ . Для того, чтобы найти точечную оценку коэффициентов калибровки, можно воспользоваться распознающим функционалом Tol.

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } b_i - \left| \text{mid } b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (2)$$

Где  $A$  – матрица:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$b$  – интервальный вектор:

$$\begin{pmatrix} [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \\ \vdots \\ [y_m - \epsilon, y_m + \epsilon] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Особенностью данного функционала является то, что допусковое множество решений системы  $Ax = b$  можно описать как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, A, b) \geq 0\} \quad (5)$$

Таким образом, если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b) \geq 0$ , то система совместная и  $\arg \max(\text{Tol})$  можно считать результатом регрессии (а значит это вектор содержащий  $\beta_0, \beta_1$ ).

Однако часто система не является совместной. В таком случае следует рассмотреть множество  $\text{Tol}_i$

$$\text{Tol}_i(x, A, b) = \text{rad}(b_i) - \left| \text{mid}(b_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|, \quad 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

Если существует  $i$  для которого  $\text{Tol}_i < 0$ , то  $\text{Tol} < 0$ . При этом, для того чтобы  $\text{Tol}_i \geq 0$  достаточно чтобы  $\text{rad}(b_i)$  был достаточно большим.

Таким образом, в случае отсутствия совместности, следует пройтись по строкам матрицы и элементам  $b$ . Если для них  $\text{Tol}_i < 0$ , то нужно "расширить" интервал в правой части, чтобы добиться  $\text{Tol}_i = 0$ . Тогда очевидно, что  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b)$  будет равен 0, а  $\arg \max(\text{Tol})$  будет вектором искомых коэффициентов калибровки.

## 2.2 Второй метод

У описанного выше метода есть два основных недостатка:

1. "Расширение" интервалов в правой части системы приводит к сильной погрешности на практике, т.к. интервалы расширяются в обе стороны: как в сторону регрессионной прямой, так и от нее.
2. Результатом данного метода является лишь точечная оценка.

В качестве альтернативы, предлагается другой метод, основанный на использовании твинной арифметики.

В первом методе брались все пары  $(x_i, [y_i - \epsilon, y_i + \epsilon])$  и работа велась со всеми интервалами. В данном методе предлагается разделить  $y_i$  в группы по 100 измерений в зависимости от соответствующего  $x_i$ . Тогда для каждого различного  $x_i$  для конкретного датчика получится набор значений по которому можно определить внутреннюю и внешнюю оценку, и для каждого  $x_i$  построить твин  $[[\underline{y}_i^{in}, \overline{y}_i^{in}], [\underline{y}_i^{ex}, \overline{y}_i^{ex}]]$ .

Затем снова построим распознающий функционал Tol

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} [y_1^{in}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{in}, \overline{y_1^{ex}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{ex}}] \\ \vdots \\ [y_n^{ex}, \overline{y_n^{ex}}] \end{pmatrix} \quad (7)$$

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) = 0$ , то так же возвращаем  $\arg \max(\text{Tol})$ .

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$ , то можно найти множество значений  $(\beta_0, \beta_1)$ , при которых  $\text{Tol} > 0$  и вернуть его.

Если  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) < 0$  снова требуется решить проблему отсутствия совместимости.

Для этого снова рассмотрим  $\text{Tol}_i$ , однако, вместо изменения правой части, будем убирать соответствующую строку из  $A$  и  $b$ . В силу того что для каждой пары  $(x_j, y_j)$  создается 4 уравнения, при удалении описанным способом несовместимых уравнений, уравнений останется больше, чем при первом способе. А значит решение будет точнее. При этом, в результате данной операции, возможна ситуация, когда  $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$ .

### 2.3 Построение коридора совместности

После интерполяции вторым методом мы получаем множество допустимых значений для  $(\beta_0, \beta_1)$ , при которых система совместна, в виде выпуклого многоугольника с вершинами  $\{v_0, \dots, v_k\}$ , где  $v_p = (\beta_{p0}, \beta_{p1})$ . Для визуализации образуемого коридора совместности найдем для каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$  нижнюю и верхнюю ограничивающую прямую из множества допустимых. Для этого вычислим

$$\overline{p}_i = \arg \max_{1 \leq p \leq k} \left\{ \beta_{p0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p1} \right\}; \quad \underline{p}_i = \arg \min_{1 \leq p \leq k} \left\{ \beta_{p0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p1} \right\} \quad (8)$$

индексы верхней и нижней ограничивающих прямых на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ .

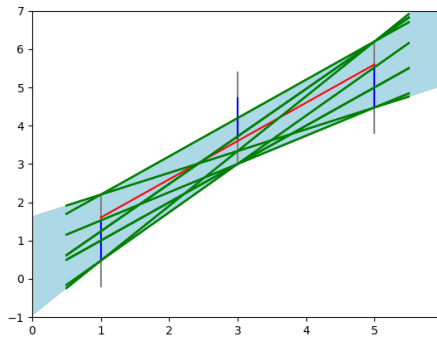


Рис. 2: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений. Калибровочная прямая обозначена красным, твины – серым и синим, прямые в вершинах – зеленым.

Рассмотрим этот пример подробнее  
Изначальные интервалы:

$index$	$x$	$y^{in}$	$\overline{y^{in}}$	$y^{ex}$	$\overline{y^{ex}}$
0	1	0.475	1.525	-0.2	2.2
1	3	3.675	4.725	3.0	5.4
2	5	4.475	5.525	3.8	6.2

Таблица 1: Начальные данные

После применения метода 2 для  $tol$  получаем:

$i$	$\beta_0$	$\beta_1$
0	1.0	0.0
1	0.7375	0.7875
2	0.56875	1.63125
3	1.0	1.2
4	1.24	0.0
5	1.43125	-0.95625
6	1.2625	-0.7875
7	1.0	0.0
8	1.24	0.0

Таблица 2: Полученные вершины информационного множества

Пусть  $value = \arg \min_{1 \leq p \leq k} \{ \beta_{p_0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p_1} \}$ . Тогда для каждой границы интервала получим следующее (для интервала до и после последнего добавим дополнительные  $x$ : 0 и 6 соответственно. Фактически эти участки бесконечно "длинные").

$i$	$\beta_0$	$\beta_1$	value
0	1.0	0.0	0.5
1	0.7375	0.7875	1.15625
2	0.56875	1.63125	1.9156250000000001
3	1.0	1.2	1.7
4	1.24	0.0	0.62
5	1.43125	-0.95625	-0.24062500000000001
6	1.2625	-0.7875	-0.15625
7	1.0	0.0	0.5
8	1.24	0.0	0.62

Таблица 3: Полученные значения для отрезка  $[0, 1]$

Выбраны следующие индексы:  $\underline{p}_i = 5$ ,  $\overline{p}_i = 2$

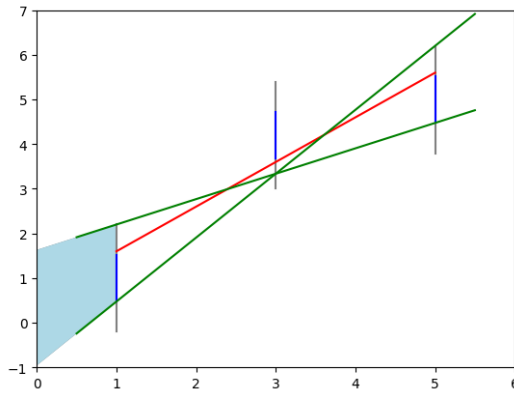


Рис. 3: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на первом участке. Голубым обозначена область, зеленым ограничивающие прямые.

$i$	$\beta_0$	$\beta_1$	value
0	1.0	0.0	2.0
1	0.7375	0.7875	2.2625
2	0.56875	1.63125	2.76875
3	1.0	1.2	3.2
4	1.24	0.0	2.48
5	1.43125	-0.95625	1.9062499999999998
6	1.2625	-0.7875	1.7374999999999998
7	1.0	0.0	2.0
8	1.24	0.0	2.48

Таблица 4: Полученные значения для отрезка  $[1, 3]$

Выбраны следующие индексы:  $\underline{p}_i = 6$  ,  $\overline{p}_i = 3$

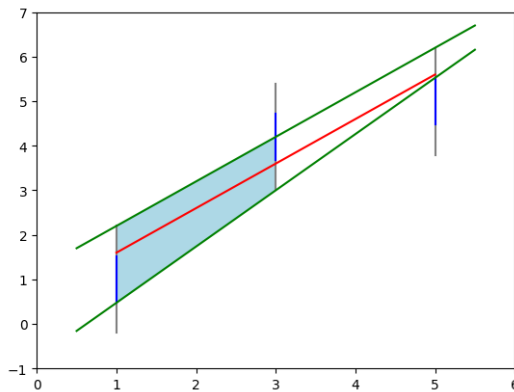


Рис. 4: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на втором участке. Голубым обозначена область, зеленым ограничивающие прямые.

$i$	$\beta_0$	$\beta_1$	value
0	1.0	0.0	4.0
1	0.7375	0.7875	3.7375000000000003
2	0.56875	1.63125	3.90625
3	1.0	1.2	5.2
4	1.24	0.0	4.96
5	1.43125	-0.95625	4.76875
6	1.2625	-0.7875	4.2625
7	1.0	0.0	4.0
8	1.24	0.0	4.96

Таблица 5: Полученные значения для отрезка  $[3, 5]$

Выбраны следующие индексы:  $\underline{p}_i = 1$ ,  $\overline{p}_i = 3$

$i$	$\beta_0$	$\beta_1$	value
0	1.0	0.0	5.5
1	0.7375	0.7875	4.84375
2	0.56875	1.63125	4.759375
3	1.0	1.2	6.7
4	1.24	0.0	6.82
5	1.43125	-0.95625	6.9156249999999995
6	1.2625	-0.7875	6.15625
7	1.0	0.0	5.5
8	1.24	0.0	6.82

Таблица 6: Полученные значения для отрезка  $[5, 6]$

Выбраны следующие индексы:  $\underline{p}_i = 2$ ,  $\overline{p}_i = 5$

### 3 Рализация

Данная работа реализована на языке программирования Python 3.10 с использованием пакетов matplotlib и intervalpy. Код данного отчёта подготовлен с использованием платформы overleaf.

Код опубликован в репозитории [https://github.com/BaevDaniil/Interval\\_2](https://github.com/BaevDaniil/Interval_2).

### 4 Результаты

Каждому датчику в чипе были присвоены координаты в зависимости от канала и номера ячейки. Датчик получивший данные из канала  $j$  ( $1 \leq j \leq 8$ ) и находящийся в ячейке  $i$  ( $1 \leq j \leq 1024$ ) будет иметь координаты  $i, j$ . Рассматриваются данные датчиков

1. С координатами (5, 14)
2. С координатами (3, 12)



3. С координатами (7, 52)

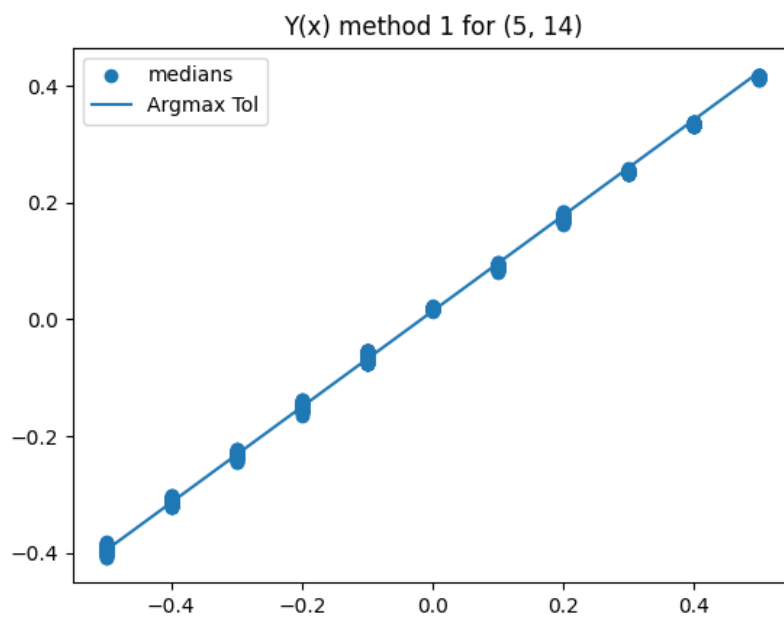


Рис. 5: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (5, 14)

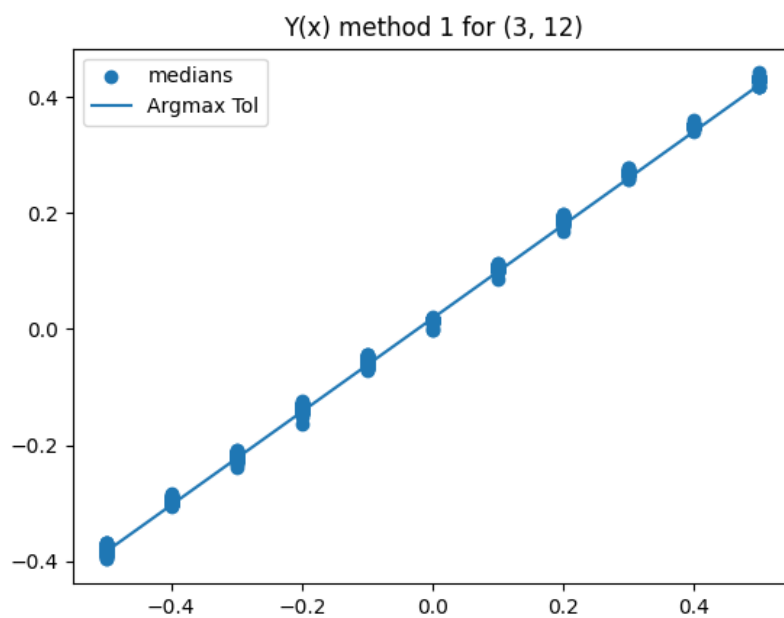


Рис. 6: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (3, 12)

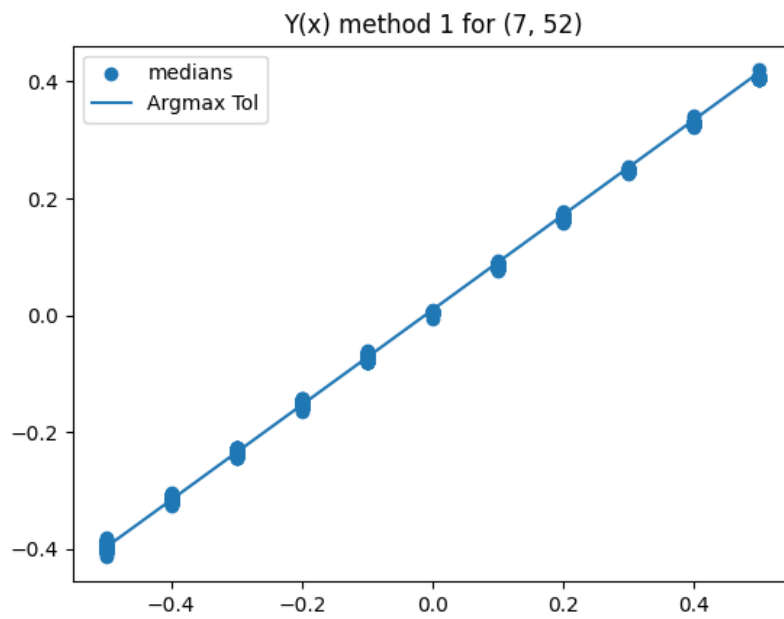


Рис. 7: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (7, 52)

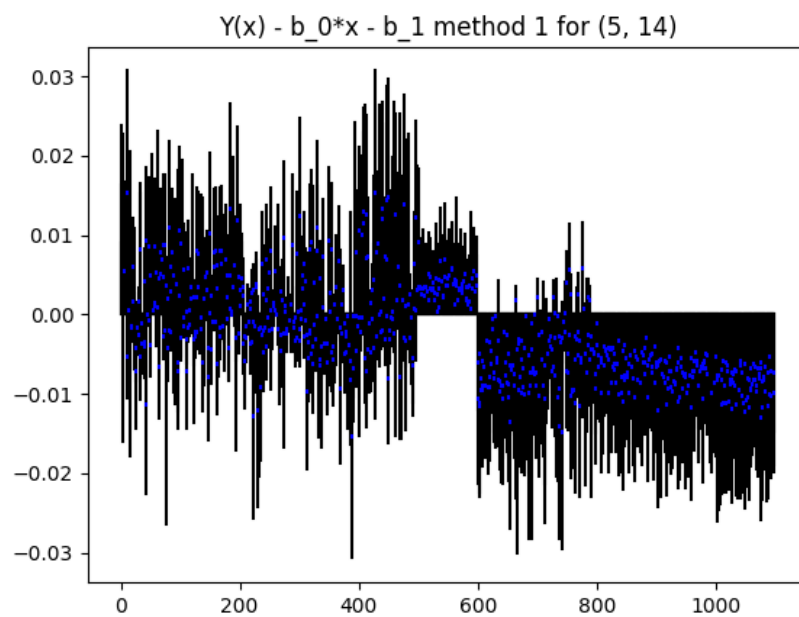


Рис. 8: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (5, 14). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

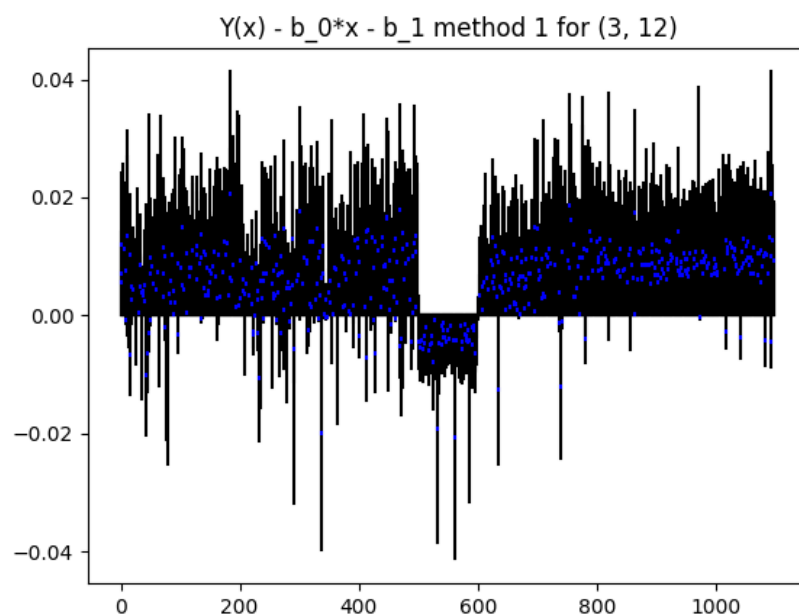


Рис. 9: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (3, 12). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

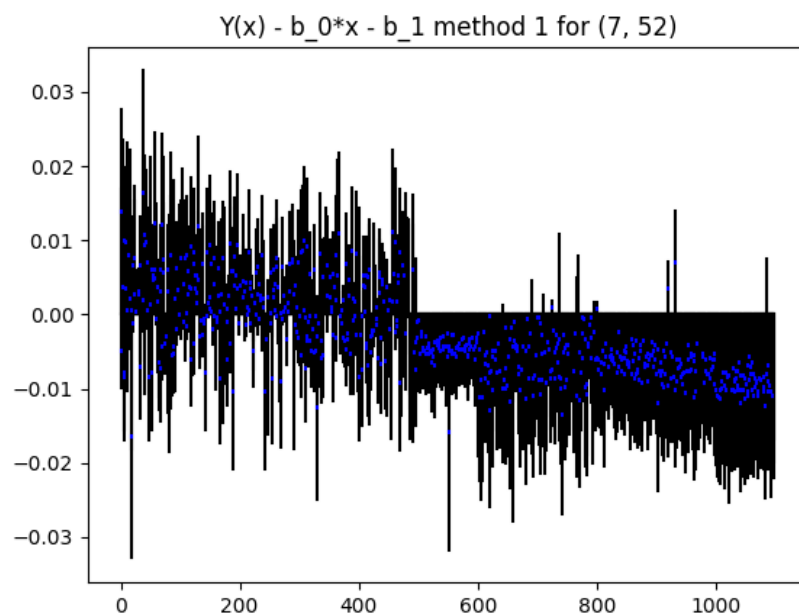


Рис. 10: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (7, 52). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

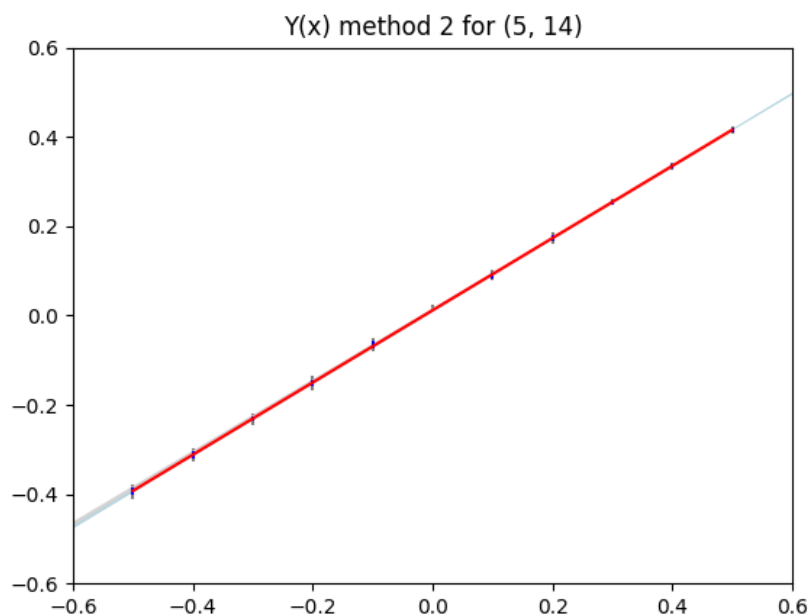


Рис. 11: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (5, 14), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности  $Tol$  и  $Uni$  обозначены голубым и светло-серым цветом.

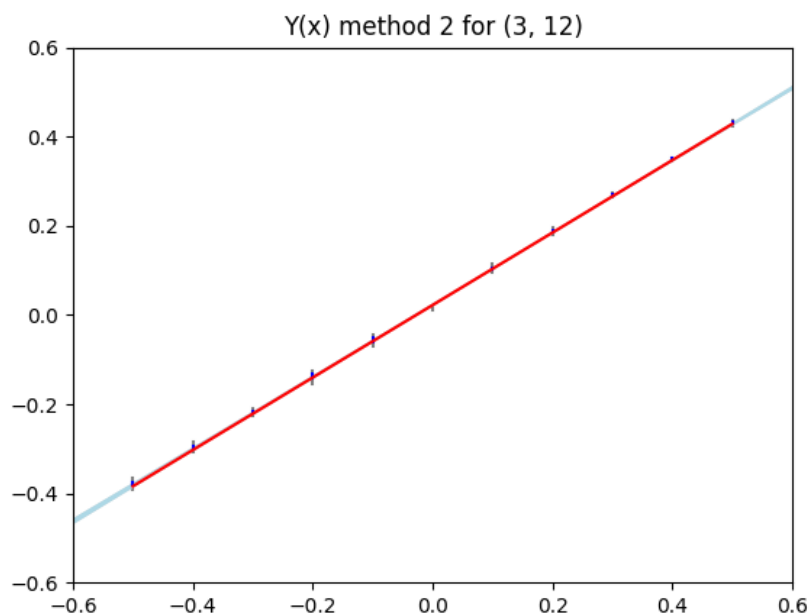


Рис. 12: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (3, 12), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности  $Tol$  и  $Uni$  обозначены голубым и светло-серым цветом.

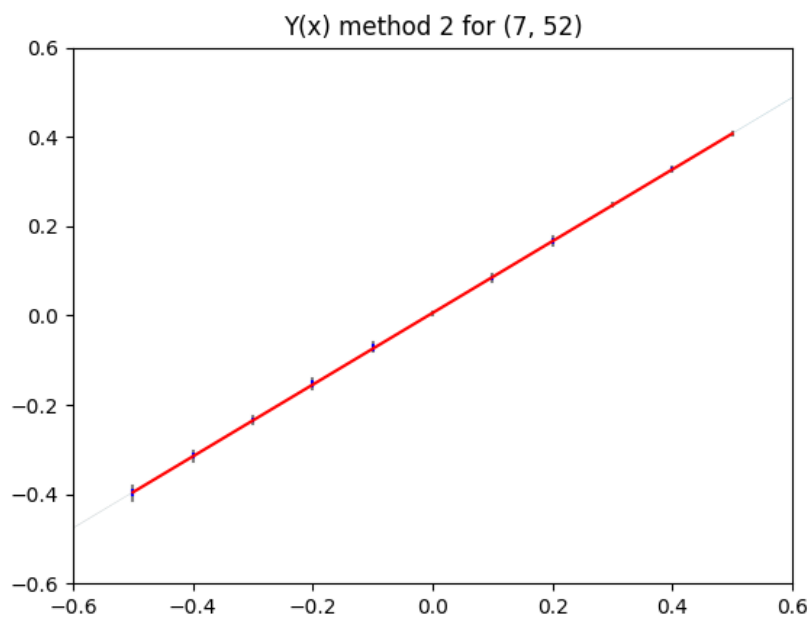


Рис. 13: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (7, 52), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом.

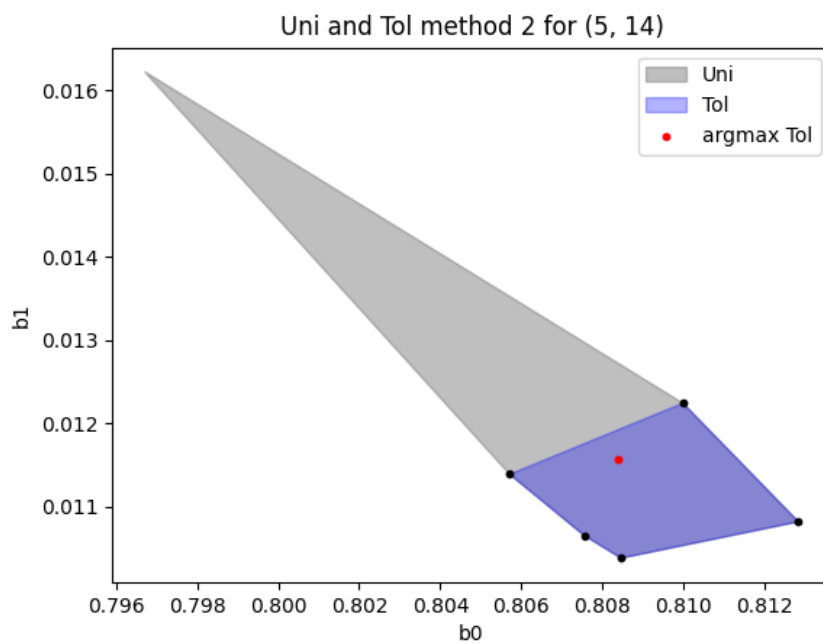


Рис. 14: Tol, Uni и argmaxTol для датчика (5, 14)

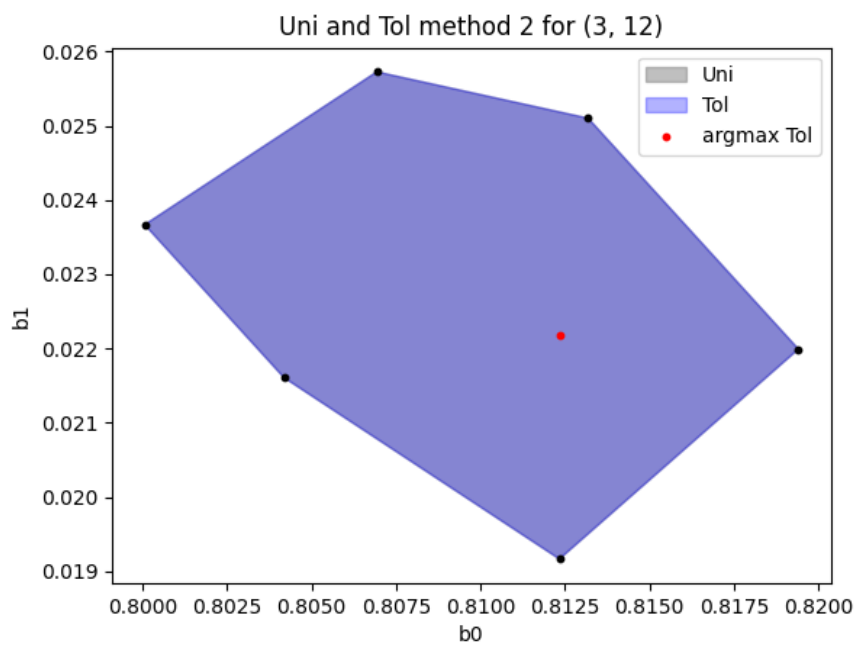


Рис. 15: Tol, Uni и  $\text{argmax Tol}$  для датчика (3, 12)

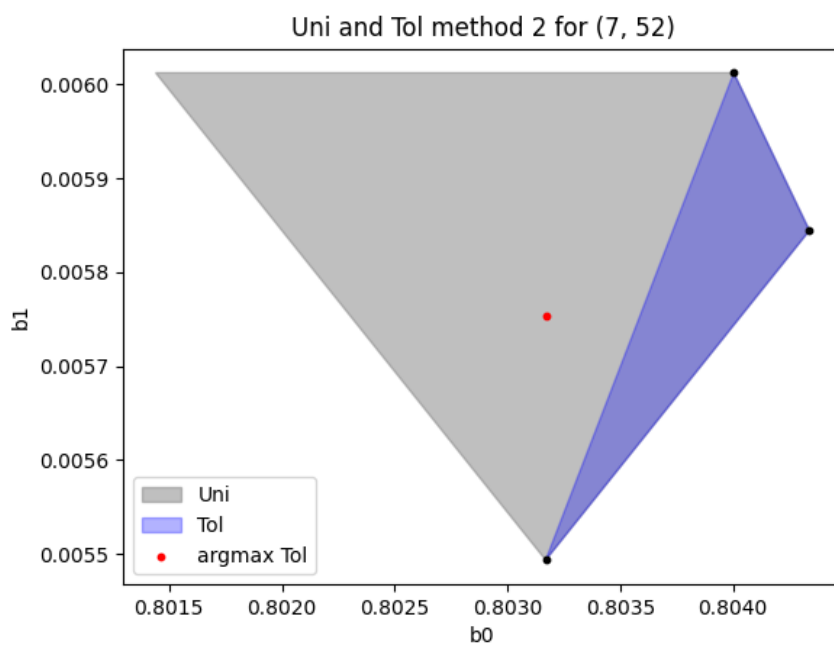


Рис. 16: Tol, Uni и  $\text{argmax Tol}$  для датчика (7, 52)

Координаты датчика	Метод	$\beta_0$	$\beta_1$	Количество модификация
(5, 14)	1	0.8201	0.0143	1094
(5, 14)	2	0.8084	0.0116	14
(3, 12)	1	0.8051	0.0183	1099
(3, 12)	2	0.8123	0.0222	26
(7, 52)	2	0.8136	0.0094	1097
(7, 52)	1	0.8031	0.0057	0

Таблица 7: Численные результаты

## 5 Валидация метода

Для валидации метода предлагается применить этот метод для синтетических данных.

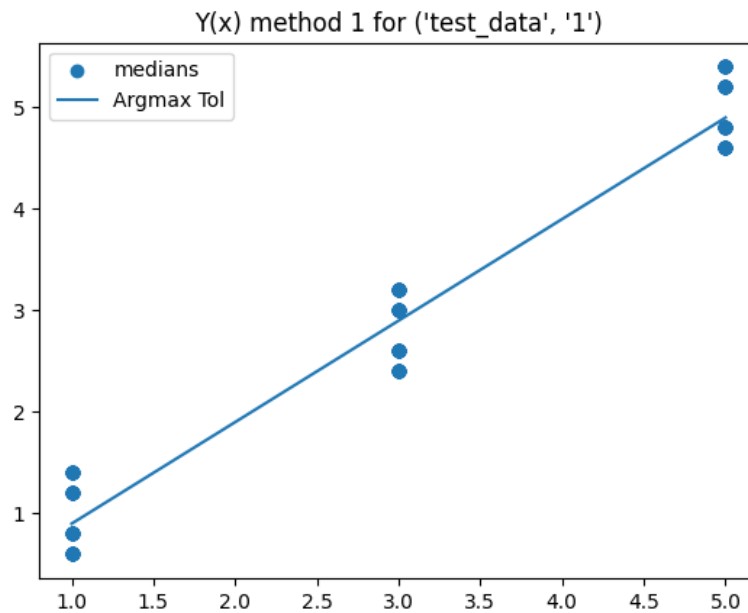


Рис. 17: Калибровочная прямая полученная первым методом для тестового набора 1

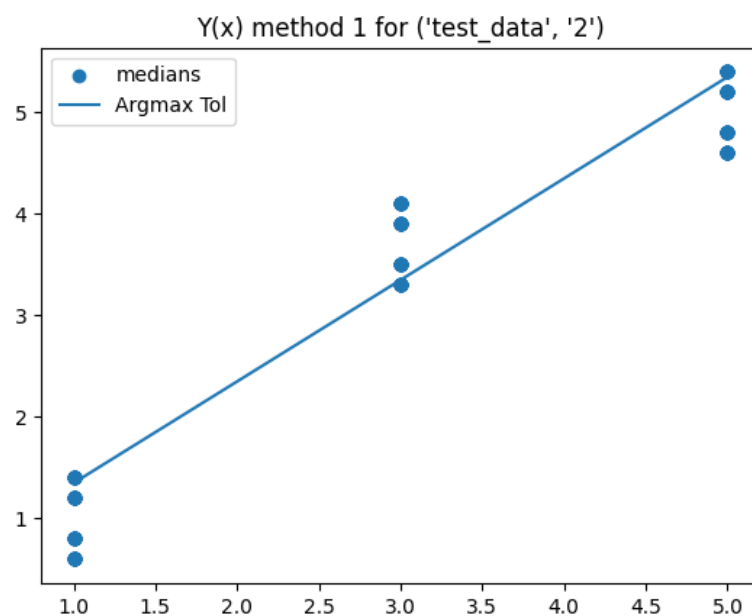


Рис. 18: Калибровочная прямая полученная первым методом для тестового набора 2

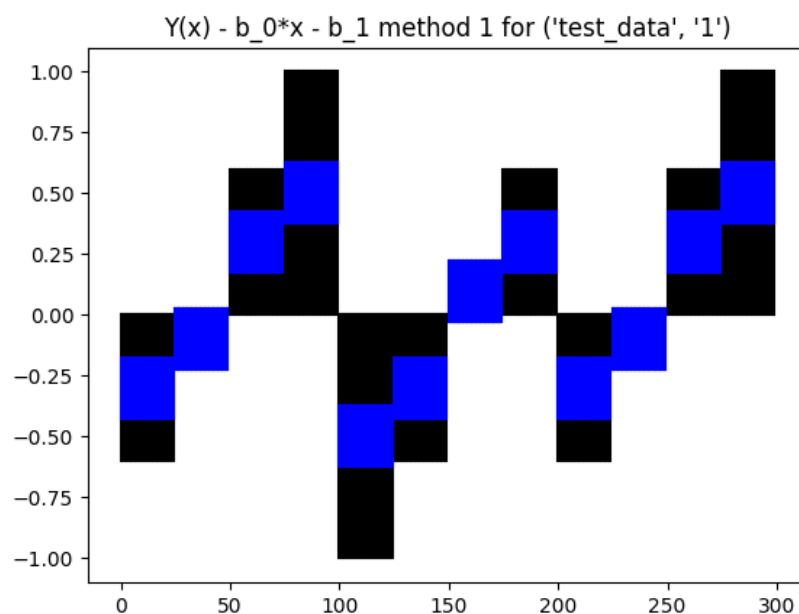


Рис. 19: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода данными тестового набора 1. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный



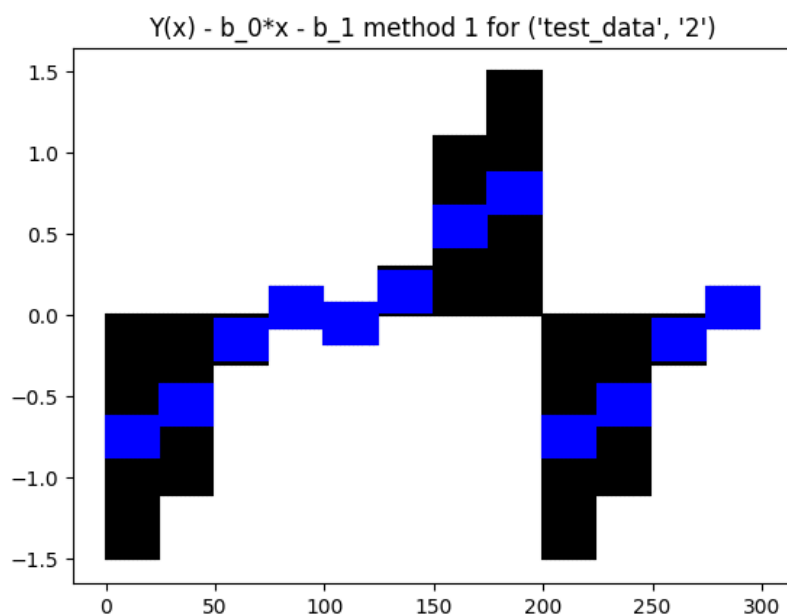


Рис. 20: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и данными тестового набора 2. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

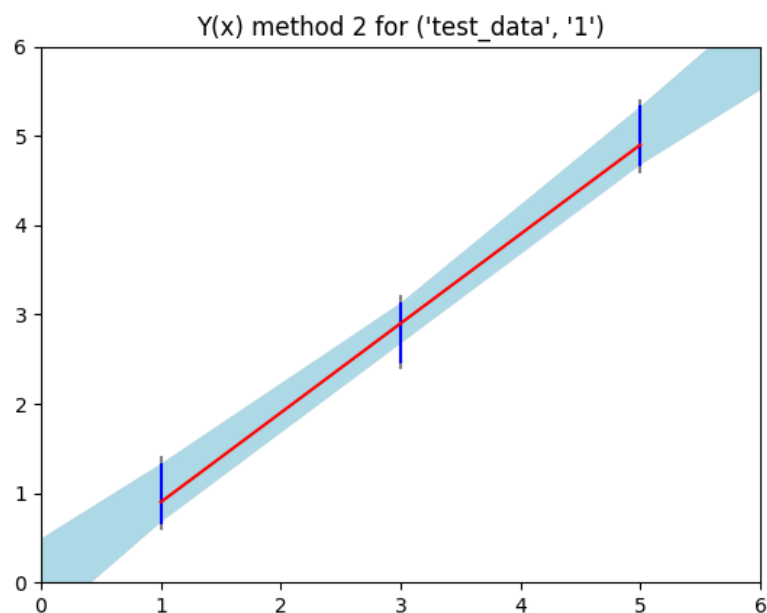


Рис. 21: Калибровочная прямая полученная вторым методом для тестового набора 1, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и  $U_{ni}$  обозначены голубым и светло-серым цветом.

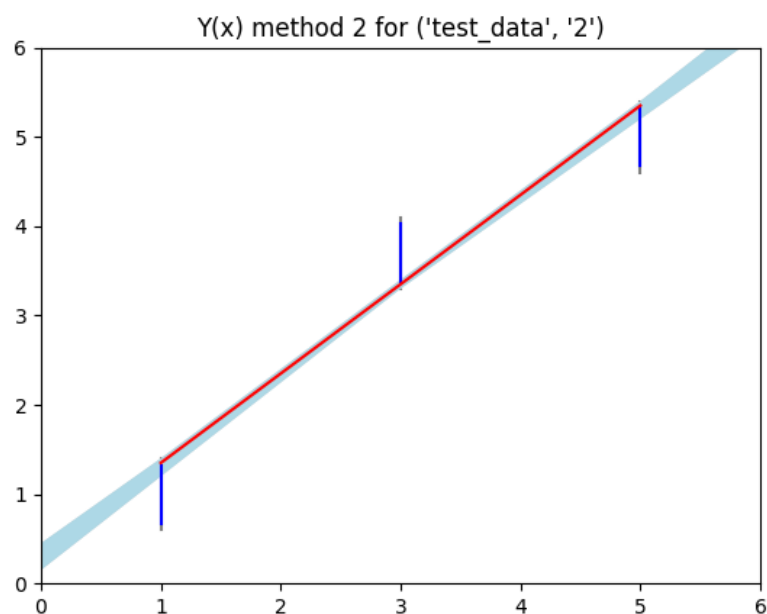


Рис. 22: Калибровочная прямая полученная вторым методом для тестового набора 2, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом.

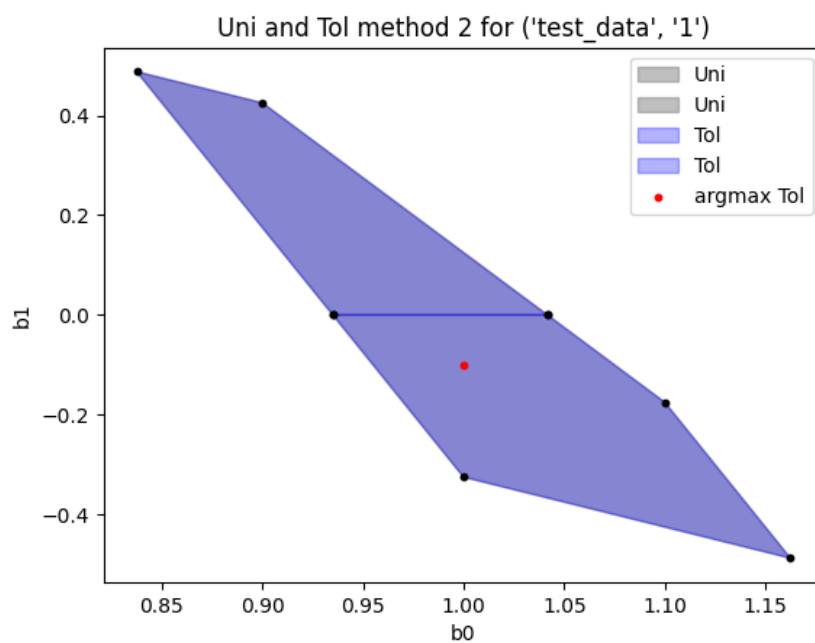


Рис. 23: Tol, Uni и argmaxTol для тестового набора 1

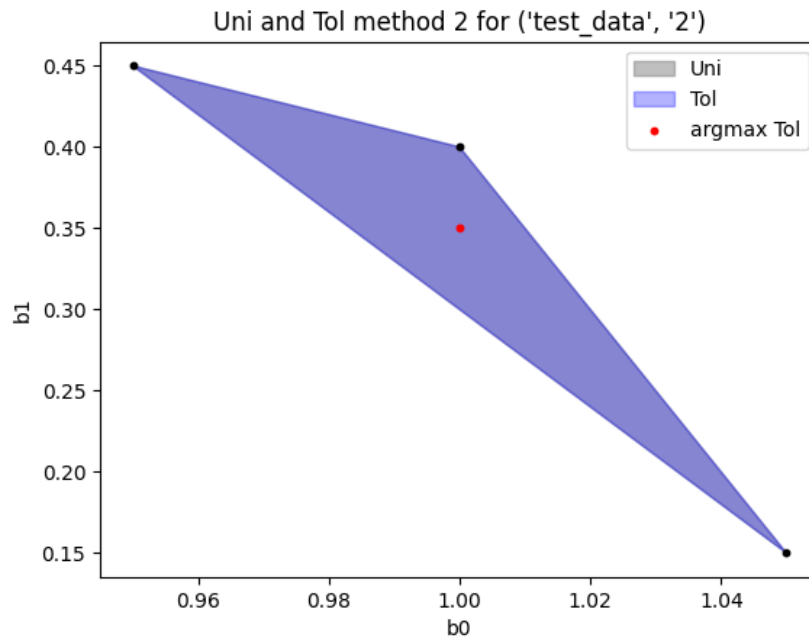


Рис. 24: Tol, Uni и argmaxTol для тестового набора 1

## 6 Обсуждение

Исходя из представленных графиков, можно судить о том, что все описанные в теории этапы выполнены правильно. Также можно заметить что результаты полученные методами 1 и 2 являются близкими, но не совпадают. По количеству модифицированных значений в таблице 1 можно заметить, что датчик с координатами (7, 52) имеет наименьшее число выбросов из рассматриваемых, а датчик с координатами (3, 12) имеет наибольшее число выбросов из рассматриваемых.