MATHÉMATIQUES PRATIQUES

Visualisation complexe

Une merveilleuse invention (ou *découverte*) des mathématiciens est l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps[1] *algébriquement clos* car dans $\mathbb{C}$, une équation du type $x^n = x_0$ a *exactement* n solutions. L'invention de $\mathbb{C}$ mit donc fin à la frustration des mathématiciens qui jusqu'alors disaient :

> *Diantre, je ne connais pas de solution réelle à l'équation $x^2 = -1$. GRRRRRRR.*
>
> *Pierre Dubois*
> *Mathématicien du dimanche*

Les nombres complexes rebutent souvent les étudiants car ils sont difficiles à interpréter. Ce n'est pas étonnant : les nombres complexes contiennent une partie *imaginaire*, qui n'a pas vocation à être interprétée. Pourtant, avec un ensemble de règles (notamment $i^2 = -1$, l'écriture exponentielle, la formule de Moivre et les formules d'Euler), une utilisation intelligente des nombres complexes permet de **simplifier** les calculs.

Les complexes avec Sage

Ce qui nous intéresse aujourd'hui, c'est la visualisation d'une fonction complexe :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour $z = a + ib$, on calcule $f(z) = u + iw$ où $(a, b, u, w) \in \mathbb{R}^4$. Pour visualiser f avec nos yeux réels, il faut tracer une surface dans un espace de dimension 4. Bref, c'est pas évident. Heuresement, il y a dans Sage une commande `complex_plot` qui donne une idée du graphe de f.

```
z = var('z')
f(z) = z^4 - 2*z^3 + 2*z^2 - 2*z + 1
complex_plot(f,(-2,2), (-2,2))
```

La visualisation obtenue est en figure 1. Dégraissons un peu le mammouth :

— En un point $z = a + ib$ du plan complexe, on voit la valeur $f(z)$ exprimée sous **forme polaire** c'est-à-dire avec un module et un argument.

— La *couleur* donne l'argument avec le code :

  — **rouge** pour $\theta = 0$

  — **vert** pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

  — **cyan** pour $\theta = \pi$

  — **bleu** pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$

— L'*intensité* donne le module avec **foncé** pour $|f(z)| = 0$ et *pâle* pour $|f(z)| \to +\infty$.

En particulier, les points **noirs** correspondent aux *zéros* de la fonction. Ici, on a deux zéros imaginaires et un zéro réel. Lesquels ? On peut déterminer la *multiplicité* d'un zéro en regardant le comportement de $f(z)$ alentours.

1. Ensemble où les opérations $+, \times, -, \div$ sont bien définies

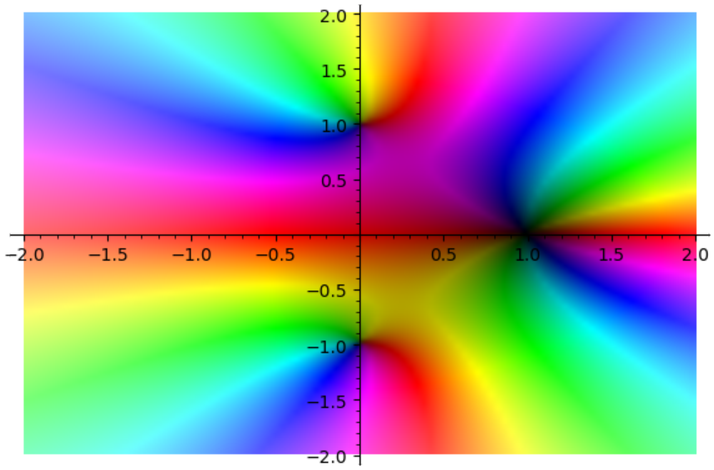

FIGURE 1 – Visualisation de la fonction complexe $z \mapsto z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$

- La racine réelle est **double** car à son voisinage, les arguments effectuent deux révolutions. Intuitivement, si on s'approche de la racine avec un argument donné, on "repart" de la racine avec le même argument. On voit donc des *lignes d'iso-argument* qui traversent le zéro et si on trace un cercle autour du zéro, on rencontre deux fois chaque argument.
- Les racines imaginaires sont **simples** car les arguments n'effectuent qu'une seule révolution. Si on s'approche du zéro avec un argument donné, on ressort avec un argument différent.

Exercice 1 : quelques visualisations

On considère les fonctions complexes :

$$f(z) = z^2 - z - 1 \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{z} + z \quad \text{et} \quad h(z) = \cos z$$

Visualisez ces différentes fonctions en commentant la position et la multiplicité des zéros et des pôles, les tendances asymptotiques, etc.

Exercice 2 : un peu de séries entières

On appelle fonction *analytique* une fonction qui peut s'écrire comme somme d'une série entière sur un disque ouvert de rayon **non nul**.

1. Déterminer graphiquement le domaine de définition de chacune des sommes ci-dessous :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

2. Soient les trois fonctions complexes ci-dessous :

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad z \mapsto \frac{z^2+z+1}{2-z} \quad \text{et} \quad z \mapsto \arctan(z)$$

   Associer à chacune des fonctions (analytiques sur un certain domaine) le développement en série entière. Pour le compte rendu (et montrer que vous avez travaillé votre cours), retrouver les développements.

Exercice 3 : avec une autre carte

De façon générale, on peut obtenir de jolies (et instructives) figures de la façon suivante.

1. On choisit une image $g : \mathbb{C} \to \mathcal{X}$ où $\mathcal{X}$ est un espace de couleurs, par exemple $[0, 255]^3$ si on travaille en RGB.
2. On fabrique l'image $g \circ f$ c'est-à-dire que chaque point z du plan est colorié avec la couleur $g(f(z))$. Ce qu'on obtient est une visualisation de $f(z)$.

L'image utilisée par défaut par Sage s'obtient en visualisation $z \mapsto f(z)$.

```
z = var('z')
f(z) = z # which is decomposed into r * exp(i theta)
complex_plot(f, (-2,2), (-2,2), aspect_ratio=1)
```

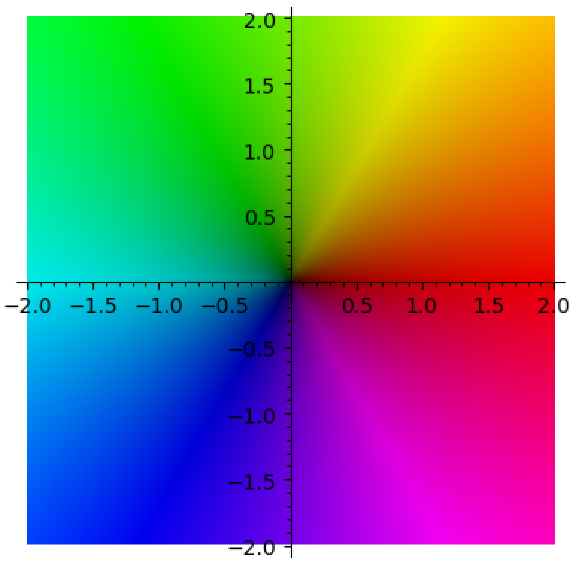

FIGURE 2 – La fonction g utilisée par Sage. Pour une fonction f, on commence par calculer $f(z)$ puis on place ce $f(z)$ dans le plan complexe *coloré*. On récupère cette couleur et on la place au niveau du point d'affixe z.

On peut bien sûr choisir ce que l'on veut pour la fonction g. Par exemple, avec le quadrillage :

$$z \mapsto g(z) = \sin\left[\pi \mathrm{Re}(z)\right] \times \sin\left[\pi \mathrm{Im}(z)\right]$$

Visualiser ce quadrillage puis utiliser le pour visualiser les fonctions précédentes. Que pouvez-vous dire sur la structure générale de la visualisation ? Le mot clé *conforme* devrait vous aider dans vos recherches internet.

Bonus : l'hyptohèse de Riemann

Si vous souhaitez gagner un million de dollars, attelez-vous à la résolution d'un des sept problèmes du millénaires : *l'hypothèse de Riemann*. Soit ζ la fonction définie par :

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) \geq 1,\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

que l'on **prolonge analytiquement** sur tout $\mathbb{C}$. L'hypothèse de Riemann dit que tous les zéros non triviaux de ζ ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$. Ce résultat, observé graphiquement mais jamais démontré, permet de mieux connaître la répartition des nombres premiers. C'est quand même un truc de *dingue* : l'analyse et l'arithmétique qui semblent bien éloignées sont en fait liés, via la *théorie analytique des nombres*. Visualiser la fonction ζ, déjà connue sous Sage en appelant `zeta`. Si le compte-rendu du TP est terminé, je vous encourage à regarder l'excellente vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=dNpdMYB8pZs`.