CIR2 - CNB2
Théorème de réarrangement de Riemann

Énoncé du théorème

Soit (u_n) une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ soit **semi-convergente**. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$$

En pratique

On considère la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Celle-ci est convergente d'après le critère des séries alternées. On peut montrer[1] que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

La série n'est pas absolument convergente car la série harmonique diverge. **Notre objectif** : trouver *un* réarrangement des termes de la série harmonique alternée pour avoir une somme α.

Pour cela, on part du développement asymptotique de la série harmonique :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} \gamma + \ln n + o(1)$$

où $\gamma \approx 0.577$ est la constante d'Euler-Mascheroni et la notation $o(1)$ cache le terme d'erreur qui tend vers 0 pour $n \to +\infty$. On déduit la somme des inverses des q premiers termes pairs :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\ln q + o(1)$$

En considérant H_{2p} on détermine également la somme des inverses des p premiers termes impairs :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p-1} = H_{2p} - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2p}\right] \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\ln p + \ln 2 + o(1)$$

Formons maintenant des paquets de taille $(a+b)$ avec $b \in \mathbb{N}$ inverses de nombres impairs (pondérés -1) suivis de $a \in \mathbb{N}$ inverses de nombres pairs (pondérés $+1$). La somme partielle d'ordre $(a+b)n$ contient alors $q = an$ termes positifs et $p = bn$ termes négatifs :

$$S_{(a+b)n} = \sum_{k=1}^{n} \left[-\left(\frac{1}{2b \times (k-1) + 1} + \cdots + \frac{1}{2b \times k - 1} \right) + \left(\frac{1}{2a \times (k-1)} + \cdots + \frac{1}{2a \times k} \right) \right]$$

Comme la somme est finie, aucun soucis pour réarranger :

$$S_{(a+b)n} = -\left[1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2bn-1}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2an}\right]$$

Avec les développements asymptotiques :

$$S_{(a+b)n} \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2}\ln(bn) - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(an) + o(1) \underset{+\infty}{=} \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right] + o(1)$$

1. À renfort du développement en série entière de ln sur $]-1, 1[$ et du théorème d'Abel

On déduit que le réarrangement de la série harmonique alternée avec l'alternance b impairs et a pairs donne la somme :

$$S = \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right]$$

Du coup, pour avoir un réarrangement donnant la valeur cible S **fixée par l'utilisateur** :

1. On choisit le nombre de termes impairs b à utiliser avant de passer aux termes pairs
2. On calcule le nombre de termes pairs a via :

$$S = \ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right] \iff a = 4be^{2S}$$

3. On fait l'alternance.

À noter que pour $S = -\ln(2)$ et $b = 1$ on calcule $a = 1$ donc on retombe bien sur le résultat attendu !