Mathématiques pratiques
Séries génératrices

Dans cette séance, on va voir comment les séries entières peuvent être utilisées en combinatoire.

Séries entières avec SageMath

On peut facilement manipuler des séries entières avec SageMath. On commence par préciser que l'on travaille avec des séries à coefficients rationnels.

```
# R = set of power series with the real variable x
# coefficients are rationals
R.<x> = PowerSeriesRing(QQ)

# we can check that exp is seen as a power series
type(exp(x))
```

Dans les faits, on ne travaille pas avec *tous* les termes de la série mais plutôt une troncature à un ordre donné (20 par défaut).

```
1/(1+x) # outputs the power series developpment of 1/(1+x)
```

On peut changer l'ordre de troncature :

```
1/(1+x) + O(x^5) # landau notations
```

Si on veut une précision jusqu'à x^{30}, il faut d'abord modifier la précision de base :

```
1/(1+x) + O(x^30) # up to x^20
R.<x> = PowerSeriesRing(QQ, 30)
1/(1+x) + O(x^30) # up to x^30
```

On peut effectuer toutes les opérations arithmétique de base sur les séries entières. On peut également définir une série entière à partir d'une liste de coefficients.

```
# f = element of R, the ring of power series
# coefficients are 1, 2, 3, 4, 5
f = R([1,2,3,4,5])
f # 1 + 2*x + 3*x^2 + 4*x^3 + 5*x^4

print(f.prec()) # precision infinity
f = f + O(x^2)
print(f.prec()) # precision 2
```

Série génératrice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. On appelle *série génératrice* associée à (a_n) la série entière de la variable réelle x :

$$\sum a_n x^n$$

Sans se soucier des problèmes de convergence, on définit la *fonction génératrice* associée (a_n) comme la *somme* de sa série génératrice :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Soit par exemple la suite de Fibonacci (F_n) définie par récurrence par :

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Si on note f la fonction génératrice associée, on remarque :

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\ &= F_0x^0 + F_1x^1 - F_0x^1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (F_{n+2} - F_{n+1} - F_n)x^n \\ &= 1\end{aligned}$$

donc f est l'inverse de $x \mapsto 1-x-x^2$. Avec le développement en série entière de cette fonction, on parvient à une expression *explicite* du terme F_n de la suite de Fibonacci.

```
R.<x> = PowerSeriesRing(QQ)
F = 1/(1 - x - x^2)
F
```

Exercice 1 : question de partages

Pierre et Vivien sont face à une boîte de 42 biscuits. Pierre, très gourmand, mange les biscuits par paquets de trois. Vivien, plus raisonnable, mange les biscuits par paquets de deux. *De combien de façons peut-on répartir les 42 biscuits entre Pierre et Vivien ?*

Si on formalise la question, il s'agit de compter le *nombre de façons* d'écrire $42 = 2a + 3b$. On connaît déjà quelques possibilités :

- → $(a, b) = (21, 0)$ si Vivien mange 21×2 biscuits et Pierre 0 (triste, non ?)
- → $(a, b) = (12, 2)$ si Vivien mange 12×2 biscuits et Pierre 2×3.

Mais quel lien avec les séries entières ?

Si on écrit $42 = 2a + 3b$ alors les règles sur les puissances donnent :

$$x^{42} = x^{2a+3b} = x^{2a}x^{3b} = \left[x^2\right]^a \left[x^3\right]^b$$

Pour développer le produit

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \times (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

on doit sommer toutes les possibilités de produits entre un terme du premier facteur et un terme du second facteur. En particulier, il y a plusieurs produits du type $\left[x^2\right]^a \left[x^3\right]^b$ qui donneront x^{42}. Si on écrit de manière bête et méchante le développement du produit, le coefficient devant x^{42} correspondra au nombre de façons d'écrire $42 = 2a + 3b$. Or le produit s'écrit :

$$\boxed{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \times (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[x^2\right]^a\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[x^3\right]^b\right) = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}}$$

Si on demande à SageMath le coefficient devant 42 dans le développement en série entière de

$$\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$$

alors le tour est joué.

```
R.<x> = PowerSeriesRing(QQ, 50)
(1/(1-x^2) * 1/(1-x^3)).padded_list()[42] # get the coefficient of x^42
```

Vérifier ainsi qu'il y a 8 façons de répartir les biscuits en tas de paquets 2 et paquets de 3. Lister toutes les possibilités de partage entre Vivien et Pierre.

Là où c'est (très) fort

La méthode se généralise facilement. Le nombre de façons de répartir n objets en k tas avec des paquets de taille m_i dans le tas $i \in [\![1, k]\!]$ est le coefficient de x^n dans la fonction génératrice

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^{m_i}}.$$

Dit autrement, le coefficient de x^n dans cette expression est le nombre de k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ pour lesquels la somme suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{k} m_i a_i = n$$

1. En utilisant cette méthode, déterminer le nombre de façons de répartir 10 biscuits entre deux personnes :
   (a) si on suppose que tous les biscuits soient distribués par paquets de 1
   (b) si une troisième personne se joint à la partie

   Est-ce que les réponses sont cohérentes avec les techniques combinatoires usuelles ?
2. De combien de façons peut-on rendre 1.47 euros en monnaie ?
3. De combien de façons peut-on écrire 20 comme la somme d'entiers positifs ? On distinguera deux cas :
   (a) L'ordre des termes **n'importe pas**. Typiquement, si on veut décomposer 3 il y a 3 possibilités :

   $$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

   On cherche ainsi le nombre de façons d'écrire $20 = a_1 \times 1 + a_2 \times 2 + \cdots + a_{20} \times 20$.

   (b) L'ordre des termes **importe**. Typiquement, si on veut décomposer 3 il y a 4 possibilités :

   $$3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$$

   On pourra réfléchir en termes de *paquets* de 1. Par exemple, $3 = (1)+(1)+(1)$ est une partition en trois tas, chaque tas contenant un seul paquet de 1. Autre exemple : $3 = (1+1)+(1)$ est une partition en deux tas, le premier tas contenant deux paquets de 1 et le deuxième tas contenant un seul paquet de 1.

Exercice 2 : empilement et dépilement

On appelle *mot de Dyck* un mot composé des lettres E et D avec :

→ autant de E que de D

→ dans tout préfixe du mot, le nombre de E est supérieur ou égal au nombre de D

Les mots E et D désignent respectivement *empilement* et *dépilement*. Utiliser la lettre E correspondrait à mettre une nouvelle assiette sur une pile d'assiettes. Utiliser la lettre D correspondrait à retirer l'assiette au sommet de la pile.

Mot de Dyck

Un mot de Dyck est une histoire d'empilement et dépilement qui commence et se termine avec une pile vide. Par exemple, EEDD est un mot de Dyck.

Il y a quelques propriétés sur les mots de Dyck :

— Si on concatène deux mots de Dyck, on a un mot de Dyck.

— Si un mot de Dyck s'écrit `mot1 + mot2` où `+` est l'opération de concaténation et `mot1` est un mot de Dyck alors *nécessairement*, `mot2` est un mot de Dyck.

— Un mot de Dyck est de longueur paire.

— Soit un mot de Dyck de longueur $2n$ noté MOT. On considère MOT1 le premier préfixe qui est un mot de Dyck non vide. Comme MOT1 est un mot de Dyck, il se décompose sous la forme :

$$\text{MOT1} = \text{E} + \text{MOT3} + \text{D}$$

où MOT3 est nécessairement un mot de Dyck (raisonnement par l'absurde). On peut donc écrire :

$$\text{MOT} = \text{E} + \text{MOT3} + \text{D} + \text{MOT2}$$

où MOT2 est le suffixe. En termes de longueur :

  — MOT3 est un mot de Dyck de longueur $2k$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

  — MOT2 est un mot de Dyck de longueur $2(n-k-1)$ qui vient compléter MOT1 pour atteindre une longueur $2n$.

— On note c_n le nombre de mots de Dyck avec n lettres E (donc n lettres D). Si on reprend la décomposition précédente, on comprend :

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}}$$

1. Écrire une fonction `deDyck(mot)` qui prend en entrée un mot et renvoie le booléen `True` si c'est un mot de Dyck et `False` sinon. Par exemple, `deDyck("EEDD")` doit renvoyer `True`.
2. Écrire une fonction récursive qui génère tous les mots de Dyck de longueur $2n$.
3. Lister le nombre de mots de Dyck pour $n = 1$ à $n = 10$.
4. Confirmer les valeurs trouvées à la question précédente avec les 10 premiers coefficients de la fonction génératrice :

$$\boxed{C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}}$$