Mathématiques pratiques

Intégration multiple numérique

Combien de termes doit-on utiliser pour dire que la somme partielle d'une série **convergente** est une *bonne* approximation de la somme ? C'est l'objectif du TP.

Un peu de théorie

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série numérique **convergente** de somme S. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ on peut écrire :

$$\boxed{S = S_N + R_N}$$

avec :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$$

respectivement la somme partielle d'ordre N et le reste d'ordre N de la série. On a la propriété $S_N \to S$ (ou de manière équivalente $R_N \to 0$) lorsque $N \to +\infty$.

Numériquement, on ne peut pas faire *tendre* N vers l'infini. Il faut se contenter des sommes partielles (calculées avec plus ou moins de termes) pour *approximer* la somme. Pour une tolérance $\epsilon > 0$ donnée, on détermine N_ϵ tel que $|R_{N_\epsilon}| < \epsilon$ puis on écrit :

$$S \approx S_{N_\epsilon}$$

Exercice 0 : séries avec SageMath

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ convergente et de somme 1 (n'est-ce pas ?).

Pour calculer les sommes partielles d'ordre 1 à N, on utilise le bout de code :

```
S = 0.
sommes_partielles = [S]
termes = []
N = 2000

for n in [1..N]:
    S += 1/(n*(n+1))
    sommes_partielles.append(S)
    termes.append(1/(n*(n+1)))

# only plot the first 100 partial sums and terms
img = list_plot(sommes_partielles[:101])
img+= plot(1, (0,100), color='red')
img+= list_plot(termes[:101] , color='green')
img
```

Le reste d'ordre N de la série est donné (ah bon ?) par :

$$R_N = \frac{1}{N+1}$$

Si on veut une approximation de la somme au millième près, il faut donc choisir $N+1 \geq 1000$ soit $N \geq 1$. Vérifiez ce résultat.

Exercice 1 : série géométrique

On considère la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$.

1. Prouver que $R_N = \frac{1}{2^N}$. Choisissez alors une valeur de N pour commettre, en remplaçant S par S_N, une erreur d'au plus $\epsilon = 10^{-6}$.
2. Représenter graphiquement la suite des sommes partielles jusqu'au rang trouvé en a). Commentaires ?

Exercice 2 : série alternée (1)

On peut montrer [1] que la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ est convergente de somme $\cos(1)$.

En admettant que pour cette série le reste vérifie

$$|R_N| \leq \frac{1}{(2N+2)!}$$

combien de termes doit-on prendre dans la somme pour avoir une approximation de $\cos(1)$ à $\epsilon = 10^{-6}$ près ? Commentaires ?

Exercice 3 : série alternée (2)

De même, on peut montrer que le reste de série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ vérifie

$$|R_N| \leq \frac{1}{N+1}$$

Donner une approximation de la somme de cette série à une précision $\epsilon = 10^{-6}$. Reconnaissez-vous la valeur ?

Exercice 4 : zêta

La fonction *zêta de Riemann* est la fonction qui associe à chaque $\alpha > 1$ la somme $\zeta(\alpha)$ de la série convergente :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

1. En comparant le reste de la série à l'aire sous la courbe $y = x^{-\alpha}$ à partir d'une certaine abscisse, établir l'inégalité :
$$\left|\zeta(\alpha) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}$$
En déduire le nombre N de termes nécessaires pour obtenir une estimation de $\zeta(\alpha)$ à ϵ donné.
2. Donner une estimation numérique de $\zeta(2+\frac{m}{12})$ où m est le numéro de votre mois de naissance.

---

1. Il faudra attendre le cours sur les séries entières

Exercice 5 : bonus

En vous inspirant du document *théorème de réarrangement de Riemann*, proposer un réarrangement des termes de la série harmonique alternée pour avoir π comme somme.

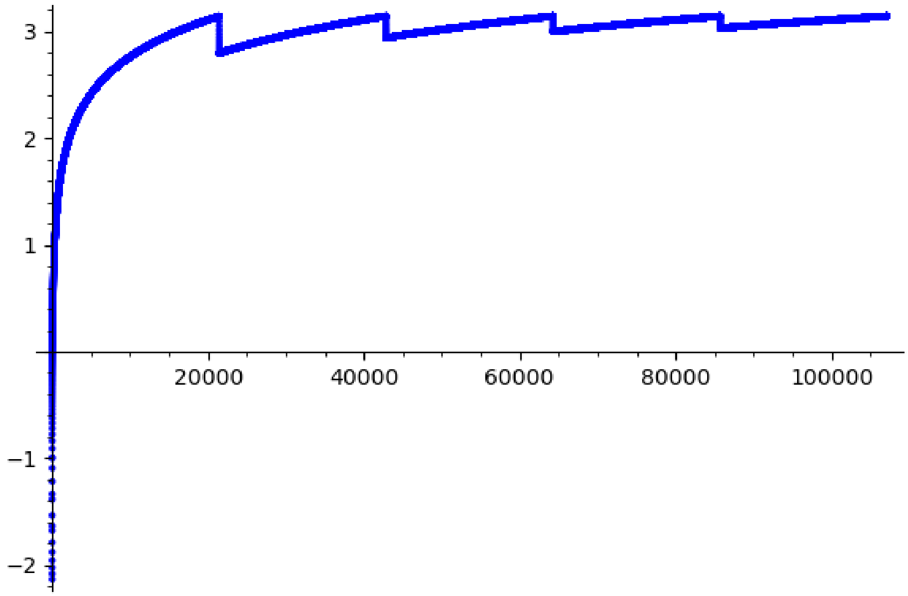

FIGURE 1 – Exemple d'un réarrangement avec une alternance 10 termes négatifs (dénominateur impairs) et (à vous de trouver) termes positifs (dénominateurs pairs)