

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Долгих Т. Ф., Полякова Н. М.,
Романов М. Н., Филимонова А. М., Ширяева Е. В.**

**Электронное учебное пособие¹
«Основы программирования. Python 3»**

(β-версия)

(для направлений подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»)

Ростов-на-Дону
2021

¹ Версия от 1 сентября 2021.

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
ФГАОУВО «Южный федеральный университет»



Пособие подготовлено сотрудниками кафедры вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ФГАОУВО «Южный федеральный университет»

Еленой Владимировной Ширяевой,
Максимом Николаевичем Романовым,
Татьяной Фёдоровной Долгих,
Натальей Михайловной Поляковой,
Александрой Михайловной Филимоновой

Современный и быстро развивающийся язык Python является одним из самых простых в изучении и приятным в использовании языков программирования. Может использоваться для программирования в императивном, в объектно-ориентированном и функциональном стиле.

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал, большое количество примеров и заданий. В данной части пособия рассмотрены простые алгоритмы и способы их реализации с помощью языка Python.

Рекомендуется студентам естественных факультетов университета.

© Е. В. Ширяева, М. Н. Романов, Т. Ф. Долгих,
Н. М. Полякова, А. М. Филимонова

Электронное пособие подготовлено в системе \LaTeX

Макет, компьютерная вёрстка Е. В. Ширяевой

Содержание

1	Python. Начало работы	4
1.1	Об именах файлов и каталогов	4
1.2	Об именах в программах...	4
2	Первые программы на языке Python	5
2.1	Справочная информация	5
2.2	Ввод и вывод данных	9
2.3	Реализация линейных алгоритмов	14
2.3.1	Работа с цифрами целого числа	14
2.3.2	Вычисление по формулам	16
2.4	Упражнения	18
2.5	Задачи	22
3	Оператор условного перехода	27
3.1	Примеры условий и их записи на языке Python	27
3.2	Условный оператор с одной ветвью	28
3.3	Условный оператор с двумя ветвями	30
3.4	Тернарная условная операция	33
3.5	Вложенные условные операторы	34
3.6	Каскадные условные инструкции	38
3.7	Вычисления по формулам	40
3.8	Задачи	44
4	Операторы циклов	48
4.1	Оператор цикла с условием	48
4.2	Трассировочная таблица	49
4.3	Работа с цифрами натурального числа	51
4.4	Использование сигнальной метки	53
4.5	Задачи–I	54
4.6	Вычисление бесконечных сумм с помощью циклов с условиями	59
4.7	Задачи–II	66
4.8	Оператор цикла с параметром	68
4.9	Задачи–III	77
5	Функции (часть I)	83
5.1	Описание функции	83
5.2	Вызов функции	84
5.3	Способы передачи аргументов	86

5.4	Произвольное количество аргументов	87
5.5	Значения параметров по умолчанию	88
5.6	Глобальные и локальные переменные	89
5.7	Анонимные функции	89
5.8	Примеры решения задач	91
5.9	Задачи	95
6	Приложение 1. Математический пакет Maple	101
6.1	Начало работы с пакетом Maple	101
6.2	Дифференцирование и интегрирование	110
6.3	Графика в Maple. Элементарное введение	112
7	Приложение 2.	115
7.1	Немного математики	115
7.2	Таблица ASCII-кодов некоторых символов	116
7.3	Системы счисления	118
	Список литературы	131
	Список иллюстраций	133
	Предметный указатель	134
	Об авторах	136
	Интерфейс пользователя	137

1 Python. Начало работы

1.1 Об именах файлов и каталогов

Имя файла отвечает всем требованиям, предъявляемым к идентификаторам языка Python (это последовательность латинских букв, цифр и знаков подчеркивания, начинающаяся либо с буквы, либо со знака подчеркивания).

Договоримся называть файлы с программным кодом именами:

`Name_S_T.py`,

где Name — фамилия студента (латиницей!), S — № раздела, T — № задачи, py — стандартное расширение для файлов Python.

Например, `Ivanov_2_11.py` — это имя файла студента Иванова, содержащего программный код для решения [задачи 2.11](#).

Договоримся создавать отдельные каталоги для хранения решений задач каждой лабораторной работы. Например, каталог `Ivanov_Lab2` должен хранить все программы из [лабораторной работы 2](#).

1.2 Об именах в программах...

Договоримся не использовать два подряд идущих символа нижнего подчеркивания в начале и в конце идентификатора (такие имена следует использовать только так, как написано в документации).

Чтобы случайно не использовать для именования своего идентификатора ключевое слово или стандартный идентификатор рекомендуется в сомнительных случаях посмотреть список ключевых слов и список стандартных идентификаторов используемого языка программирования.

Печать списка ключевых слов языка Python в интерактивном режиме

```
>>> import keyword
>>> keyword.kwlist          # печать списка
```

Проверка существования ключевого слова языка Python

```
>>> keyword.iskeyword('kotik')
```

Печать списка стандартных идентификаторов языка Python

```
>>> dir(__builtins__)
```

2 Первые программы на языке Python

2.1 Справочная информация

Пример 2.1. При записи арифметических выражений следует учитывать приоритеты операций (см. таблицу ниже).

Некоторые арифметические операции

```
>>> 2**10 # возведение в степень
1024
>>> -2**6
-64
>>> (-2)**6
64
```

Таблица приоритетов (в порядке уменьшения приоритета)

Арифметические операции	Описание
**	возведение в степень
~	побитовое «НЕ»
+, -	унарные плюс и минус (смена знака)
*, /, %, //	умножение, деление, остаток, целочисленное деление
+, -	сложение и вычитание
>>, <<	побитовые сдвиги (вправо и влево)
&	побитовое «И»
^	побитовое «Исключающее ИЛИ»
	побитовое «ИЛИ»

Пример 2.2. В Python числа можно записывать в системах счисления по основаниям 2, 8, 16 и 10, при этом перед числами указываются префиксы, отвечающие за разные системы счисления (см. таблицу ниже). Результат вычислений записывается в десятичной системе счисления. Десятичный результат можно представить в виде строки, изображающей число в соответствующей системе счисления. Для этого используются функции преобразования `bin()`, `oct()` и `hex()`.

Работа с двоичными числами

```
>>> 0b10 + 0b10 # сложение двоичных чисел
4
>>> bin(0b10 + 0b10) # использование функции преобразования
'0b100'
```

Целочисленный литерал	Префикс	Пример
десятичные числа	не используется	50
двоичные числа	«0b» или «0B» здесь «0b»: символы «ноль» и «b»	0b101
восьмеричные числа	«0o» или «0O»	0o10
16-ричные числа	«0x» или «0X»	0xdeadbeef

Некоторые встроенные математические функции

Имя функции	Возвращает
<code>abs(x)</code>	$ x $, $x \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
<code>min(arg1, arg2, ...)</code>	наименьший из двух или более аргументов
<code>max(arg1, arg2, ...)</code>	наибольший из двух или более аргументов
<code>pow(x, n)</code>	x^n ; эквивалент оператора степени: $x**n$

В языках программирования, в которых нет операции возведения в степень, для вычисления x^n можно использовать экспоненциально-логарифмическую запись $x^n = e^{n \ln x}$ ($n > 0$).

Пример 2.3. Для вычисления более сложных выражений используются методы, которые часто бывают определены в дополнительных библиотеках. Наиболее востребованной для нас будет библиотека `math`. Перед обращением к возможностям этой библиотеки её следует подключить с помощью команды `import`.

Подключение библиотеки

```
>>> import math
>>> a = math.sqrt(abs(-9))
>>> a
3.0
```

Здесь использованы две функции `sqrt()` и `abs()`, но только для `sqrt()` понадобилось подключение библиотеки `math`. Обратите внимание на разницу вызовов стандартной функции и библиотечной функции.

Чтобы не писать всё время `math` можно использовать следующее подключение библиотеки `from math import *`.

Чтобы не писать math

```
>>> from math import *
>>> a = sqrt(abs(-9))
```

Список методов из любой библиотеки можно напечатать командой

```
dir(имя библиотеки),
```

а вызвать документацию по отдельному методу позволяет команда

```
имя библиотеки.имя метода.__doc__
```

Например,

Вызов списка методов и констант модуля math

```
>>> import math
>>> print(dir(math))
```

Вызов документации по отдельному методу

```
>>> import math
>>> print(math.exp.__doc__)
Return e raised to the power of x.
```

Некоторые константы из модуля math

Имя	Возвращает
e	основание натуральных логарифмов, число e
pi	значение числа π
inf	$+\infty$ (значение с плавающей точкой)
nan	значение с плавающей точкой «not a number» (NaN) value
tau	значение числа $\tau (= 2\pi)$

Значения констант из модуля math (Python 3.8)

```
>>> import math
>>> help(math)
Help on built-in module math:
...
DATA
    e = 2.718281828459045
    pi = 3.141592653589793
    tau = 6.283185307179586
```


Некоторые степенные и логарифмические функции из модуля `math`

Имя функции	Возвращает
<code>sqrt(x)</code>	\sqrt{x} , где $x \geq 0$
<code>log(x)</code>	$\ln x$, где $x > 0$
<code>log10(x)</code>	$\lg x$, где $x > 0$
<code>log(x, b)</code>	$\log_b x$, где $x, b > 0, b \neq 1$
<code>exp(x)</code>	e^x . В частности, <code>exp(1)</code> позволит получить основание натурального логарифма $e \approx 2,71828$

Некоторые тригонометрические функции из модуля `math`

Имя функции	Возвращает
<code>sin(x)</code>	$\sin x$ (аргумент — радианная мера угла)
<code>cos(x)</code>	$\cos x$ (аргумент — радианная мера угла)
<code>tan(x)</code>	$\operatorname{tg} x$ (аргумент — радианная мера угла)
<code>asin(x)</code>	$\arcsin x$ (результат в радианах)
<code>acos(x)</code>	$\arccos x$ (результат в радианах)
<code>atan(x)</code>	$\operatorname{arctg} x$ — угол в радианах, удовлетворяющий условию $x = \operatorname{tg} y$, где $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
<code>degrees(x)</code>	преобразует угол, заданный в радианах, в градусы
<code>radians(x)</code>	преобразует угол, заданный в градусах, в радианы

2.2 Ввод и вывод данных

Пример 2.4 (ввод и вывод строк). Продемонстрируем ввод строки с клавиатуры и вывод на печать.

Ввод и вывод строк

```
1 print('Ваше имя?')
2 # в переменную name помещается строка, введенная с клавиатуры
3 name = input()
4 print('Здравствуйте, ' + name + '!')
```

Результат работы программы

```
Ваше имя?
Не скажу
Здравствуйте, Не скажу!
```

Комментарии в языке Python начинаются со знака «решётка» «#» (однострочные) или заключаются между тремя одинарными или двойными кавычками.

Пример 2.5 (ввод и вывод чисел). Программу из [примера 2.3](#) запишем не в виде отдельных команд, а в виде отдельного файла. А также слегка модифицируем код.

Отдельный файл с программой

```
1 import math
2
3 print('Введите целое число >>> ')
4 # ввод числа с клавиатуры и преобразование строки к целому типу
5 x = int(input())
6
7 a = math.sqrt(abs(x))
8
9 print('a =', a) # вывод результата на печать
```

Результат работы программы

```
Введите целое число >>>
-9
3.0
```

Пустые строки в программном коде поставлены намеренно, чтобы визуально отделить подключение библиотеки (строка 1), диалог с пользователем и получение входных данных (строки 3–5), обработку данных (строка 7), вывод ответа (строка 9).

Можно уменьшить число строк программного кода, объединив строки 3–5 (но не убирая пустые строки!).

Ввод и преобразование строки в одной инструкции

```
1 import math
2
3 x = int(input('Введите целое число >>> '))
4
5 a = math.sqrt(abs(x))
6
7 print('a =', a)
```

Результат работы программы

```
Введите целое число >>> -9
3.0
```

При уменьшении количества строк кода не смешивайте ввод/вывод данных с вычислениями.

Пример 2.6 (управление выводом). Продемонстрируем использование параметров `sep` и `end` оператора печати `print()`, а также управляющей последовательности для табуляции (см. также таблицу ниже).

Параметры `sep`, `end` и табуляция

```
1 a, b = 10, -4    # в Python'е можно делать и так
2
3 print(a, b)
4 print(a, b, sep = '\t')    # разделитель: гор. таб-ция
5 print('a =', a, end = '\t') # в конце строки: гор. таб-ция
6 print('b =', b)
```

Результат работы программы

```
10 -4
10      -4
a = 10  b = -4
```

Управляющие последовательности

Последовательность	Назначение
\\	символ обратного слеша (остается один символ «\»)
\'	апостроф (остается один символ ')
\"	кавычка (остается один символ ")
\n	новая строка (перевод строки)
\a	звонок
\b	забой
\f	перевод страницы
\r	возврат каретки
\t	горизонтальная табуляция
\v	вертикальная табуляция
\другое	не является экранированной последовательностью (символ обратного слеша сохраняется)

Использование форматированного вывода

Общий вид форматированного вывода

```
print('[текст] %[-][кол-во позиций]тип данных' % значение)
```

Параметры, указанные в квадратных скобках, могут отсутствовать.

тип данных — указывается один из возможных типов данных: s для строк, d для целых чисел и g (general), f (fixed), e, E (exponential) для вещественных чисел;

значение — выводимое значение. Если выводимое значение — выражение, то оно заключается в круглые скобки. Если выводимых значений несколько, то они указываются в круглых скобках через запятую.

[текст] — поясняющий текст;

[-] — число выравнивается по левому краю поля вывода, отведённого под запись числа (иначе, число выравнивается по правому краю);

[кол-во позиций] — количество позиций, выделяемых под вывод числа. Если параметр отсутствует, то поле вывода будет минимально необходимой ширины.

Тип general — по возможности 5 знаков после запятой

```
print('%g' % (pow(2, 1/2)))          # 1.41421
print('%g' % (0.0001 * pow(2, 1/2))) # 0.000141421
print('%g' % (0.00001 * pow(2, 1/2))) # 1.41421e-05
```

Вывод вещественного числа

```
k = pow(2, 1/2)
print('%d' % k)   # 1
print('%f' % k)   # 1.414214
print('%e' % k)   # 1.414214e+00
print('%E' % k)   # 1.414214E+00
```

«-» — выравнивание по левому краю

```
k = pow(2, 1/2)
print('%9.2e' % k) # _1.41e+00
print('%-9.2e' % k) # 1.41e+00_
```

Здесь и далее «_» — пробел.

Примеры форматированного вывода

Вывод вещественного числа с фиксированной точкой

```
k = pow(2, 1/2)

print('%9.7f' % k)  # 1.4142136
print('%0.2f' % k)  # 1.41
```

Вывод вещественного числа с плавающей точкой

```
k = pow(2, 1/2)

print('%14.7e' % k)      # 1.4142136e+00
print('%14.7e' % -k)     # -1.4142136e+00
# запись %14.7e означает: число вывести в экспоненциальной форме.
# На запись числа выделить 14 позиций, из них 7 после точки
print('%0.2e' % k)       # 1.41e+00
```

Вывод нескольких значений

```
k = pow(2, 1/2)

print('%9.2e; %0.4e; %d' % (k, k, k))
```

Результат

```
1.41e+00; 1.4142e+00; 1
```

2.3 Реализация линейных алгоритмов

2.3.1 Работа с цифрами целого числа

Известно, что любое десятичное n -значное целое число A можно представить в виде суммы:

$$A = \pm(a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0), \quad (2.1)$$

где a_i ($i = 0, \dots, n-1$) — коэффициенты (целые числа от 0 до 9) при соответствующих степенях числа десять. Например,

$$273 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3, \quad -27 = -(2 \cdot 10 + 7).$$

Пример 2.7 (работа с цифрами натурального числа). Записать двузначное натуральное число в обратном порядке ($34 \rightarrow 43$).

Решение. Для двузначного числа a необходимо определить каждую цифру числа a_0, a_1 и использовать **выражение (2.1)** в виде

$$\tilde{a} = a_0 \cdot 10 + a_1,$$

где a_1 — это цифра разряда десятков исходного двузначного числа (теперь она переносится в конец числа), a_0 — это цифра разряда единиц исходного числа.

Для отделения цифр числа используются операции $\%$ и $//$, см. **таблицу на стр. 5**.

Работа с цифрами числа

```

1 a = int(input('a >>> '))
2 a_ = a
3
4 a0 = a % 10
5 a1 = a // 10
6 a = a0 * 10 + a1
7
8 print('Дано число', a_)
9 print('Ответ: a =', a)
```

Результат работы программы

```

a >>> 67
Дано число 67
Ответ: a = 76
```



2.1. Здесь исходное данное было сохранено в переменной a_1 , так как по условию исходное число будет изменяться.

Пример 2.8 (работа с цифрами целого числа). Получить крайние цифры пятизначного целого числа. Например, для числа 12345 ответ 1 и 5; для числа –78562 ответ 7 и 2.

Решение. Следует учесть, что в программу могут поступать любые пятизначные целые числа, в том числе и отрицательные.

Цифры целого числа

```
'''
```

Пример 2.8.

Получить крайние цифры
пятизначного целого числа.

```
'''
```

```
a = int(input('a >>> '))
```

```
a_ = a
```

```
a = abs(a) # убираем знак
```

```
a0 = a % 10
```

```
a4 = a // 10_000
```

```
print('Дано число', a_)
```

```
print('Ответ: %d, %d' % (a4, a0))
```

Результат 1 работы программы

```
a >>> 12345
```

Дано число 12345

Ответ: 1, 5

Результат 2 работы программы

```
a >>> -78562
```

Дано число -78562

Ответ: 7, 2



2.2. Здесь в начале кода программы кратко записана постановка задачи. Это очень удобный приём для того, чтобы вспомнить через пару дней «что же должна была реализовать данная программа».

2.3.2 Вычисление по формулам

Пример 2.9 (вычисление числа π). Вычислить значение $-\pi$, используя формулу:

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} k_1 - 4 \operatorname{arctg} k_2, \quad (2.2)$$

где $k_1 = \frac{1}{5}$, $k_2 = \frac{1}{239}$. В ответе выдавать четыре знака после запятой.

Получение числа π

```
1 import math
2
3 k1 = 1/5
4 k2 = 1/239
5 pi2 = 16 * math.atan(k1) - 4 * math.atan(k2)
6 pi2 = -pi2
7
8 print('pi2 = %7.4f' % pi2)
9 print('pi  = %7.4f' % math.pi)
```

Тестирование программы: никакого ввода данных с клавиатуры в приведённой выше программе не предусмотрено. Поэтому проверим совпадение полученного числа со значением библиотечной константы языка Python `math.pi()` (для этого в код добавлена последняя строка). Значение `math.pi()` печатается вместо `-math.pi()`, чтобы продемонстрировать разницу в печати неотрицательных и отрицательных чисел при использовании одного и того же формата `%7.4f`.

Результат работы программы

```
pi2 = -3.1416
pi  =  3.1416
```



2.3. На самом деле четвертая цифра в числе π это 5 (подчеркнута):

$$\pi \approx 3,141\underline{5}9,$$

но в программе произошло округление, так как цифра, следующая за четвертой, — 9.

Пример 2.10 (вычисление по формулам). Даны $x, y \in \mathbb{R}$. Вычислить

$$u = \sqrt{e^{x+y}}, \quad v = -\frac{\ln(e^{x+y} + e - 1)}{2\sqrt{e^{x+y}}} + x. \quad (2.3)$$

Решение. Обозначим $t = e^{x+y}$ — выражение, трижды повторяющееся в (2.3).

Вычисление по формулам

```

1 import math
2
3 x = float(input('x >>> '))
4 y = float(input('y >>> '))
5 print('дано: ')
6 print('x = %5.2f' % x)
7 print('y = %5.2f' % y)
8
9 t = math.exp(x + y)
10 u = math.sqrt(t)
11 v = -math.log(t + math.e - 1) / 2 / u + x
12
13 print('ответы: ')
14 print('u = %5.2f' % u)
15 print('v = %5.2f' % v)

```

Тестовый пример. Данные для тестового примера нужно подбирать таким образом, чтобы можно было легко посчитать ответ.

Например, легко вычислить значения u и v при $x = -2$, $y = 2$. Покажем это

$$\begin{aligned}
 u &= \sqrt{e^{-2+2}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \underline{u = 1}, \\
 v &= -\frac{\ln(e^{-2+2} + e - 1)}{2\sqrt{e^{-2+2}}} - 2 = -\frac{\ln(e^0 + e - 1)}{2\sqrt{e^0}} - 2 = -\frac{\ln e}{2} - 2 = -\frac{1}{2} - 2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \underline{v = -2,5}.
 \end{aligned}$$

Результат работы программы

```

x >>> -2
y >>> 2
Дано:
x = -2.00
y = 2.00
Ответы:
u = 1.00
v = -2.50

```

2.4 Упражнения

◇ **3.1.** Запишите по правилам языка Python числа (в дробной части периодической дроби указывать 4 цифры):

1) LXVII; 2) $-1,(23)$; 3) $-0,1(6)$; 4) $-2,8 \cdot 10^{-7}$; 5) $\frac{1}{100\,000}$; 6) 10^6 .

◇ **3.2.** Запишите выражения по правилам языка Python

1) $\frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{2a}$; 2) $\cos^2(x + \pi)$; 3) $\cos(x + \pi)^2$; 4) $e^{\sqrt{x}}$.

◇ **3.3.** Перепишите выражения в традиционной математической форме:

- 1) `math.sqrt(a+2) - pow(a-2, 2) * math.pi`;
- 2) `a+b / (c+2 * a) - (a+b) / c+2 * y`;
- 3) `a * b / (c+d) - (c-d) / b * (a+b)`;
- 4) `math.pi + pow(math.cos((a+b)/2), 2)`.

◇ **3.4.** Запишите двумя способами выражение для получения числа e (основание натурального логарифма) на языке Python.

◇ **3.5.** Не используя функцию `pow()` и операцию `**`, запишите по правилам языка Python выражения ($x > 0$):

1) x^{-1} ; 2) x^{-2} ; 3) x^3 ; 4) $1/x^{-2}$.

◇ **3.6.** Запишите по правилам языка Python выражения ($x > 0$):

1) x^{100} ; 2) 2^{1+x} ; 3) $x^{\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt[3]{1+x}$.

Указание. Задания выполните в двух вариантах:

А) с использованием функции `pow()`;

В) без использования функции `pow()` и операции `**`.

◇ **3.7.** Запишите по правилам языка Python выражения ($x > 0$):

1) $\log_3 x$; 2) $\log_3 e^x$.

Указание. Задания выполните в двух вариантах:

А) с использованием библиотечной функции для $\log_a b$;

В) с использованием только функции $\ln x$.

◇ **3.8.** Запишите по правилам языка Python выражения ($x > 0$):

- 1) $\lg x^2$; 2) $\ln |x| + \log_5 x + \lg 8$.

Указание. Задания выполните с использованием библиотечных функций для $\log_a b$ и $\lg x$.

◇ **3.9.** Запишите по правилам языка Python выражения:

- 1) $1,5 + |x| + |1,5 + x|$; 2) $|x| - 1 + |x - 1|$; 3) $\sqrt{|x| + x^2}$;
 4) $\cos^2 x^2$; 5) $x^{-1} \operatorname{tg} x$; 6) $\sin^{-1} x$; 7) $\cos x^{-1}$;
 8) $\operatorname{ch} x$; 9) $\operatorname{sh} x$;
 10) $\operatorname{arctg} 10^2$; 11) $\operatorname{arctg} x^2$; 12) $\arcsin x$; 13) $\arccos x$.

◇ **3.10.** Переменной z присвойте

- 1) среднее арифметическое значений переменных a , b и c ;
 2) среднее геометрическое значений переменных a , b и c .

◇ **3.11.** Запишите операторы присваивания для нахождения площади треугольника по двум сторонам a , b и углу g между ними. Рассмотреть случаи, когда g —
 1) радианная мера угла; 2) градусная мера угла.

Указание. Операторы запишите в двух вариантах: с использованием соответствующих функций преобразования из модуля `math` и без их использования.

Напоминание. $S = \frac{1}{2}ab \sin g$; $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ рад.

◇ **3.12.** Дано a . Используя оператор присваивания, неограниченное количество дополнительных переменных и только указанную операцию, получите:

- 1) $5a$ за 3 операции "+"; 2) $7a$ за 4 операции "+";
 3) a^6 за 3 операции "*"; 4) a^7 за 4 операции "*";
 5) a^8 за 3 операции "*"; 6) a^{10} за 4 операции "*".

Например, для вычисления a^5 за три операции умножения можно использовать последовательность операторов присваивания:

$$b = a * a \quad (a^2); \quad c = a * b * b \quad (a^5).$$

◇ **3.13.** Запишите оператор присваивания для вычисления расстояния между двумя точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ по формуле

$$|A_1 A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- ◇ **3.14.** Определите тип переменных, участвующих в следующих операторах присваивания:

1) <code>m0 = 'Python';</code>	2) <code>m1 = '';</code>
3) <code>m2 = True;</code>	4) <code>m3 = 3;</code>
5) <code>m4 = 3.0;</code>	6) <code>m5 = -30;</code>
7) <code>m6 = -3.5e-2;</code>	8) <code>m7 = 'False';</code>
9) <code>m8 = 2 * '3';</code>	10) <code>m9 = '1' + '2';</code>

- ◇ **3.15.** Укажите правильные операторы вывода:

1) <code>print(x, x + 1);</code>	2) <code>print(7);</code>
3) <code>print('Cat');</code>	4) <code>print(math.exp(x));</code>
5) <code>print(x + 3.14);</code>	6) <code>print(x + 3, 14);</code>
7) <code>print(math.Pi);</code>	8) <code>print(x).</code>

- ◇ **3.16.** Какие двоичные числа будут выведены на экран в результате выполнения последовательности операторов

```
print('1101')
print('11', end='')
print('10')
```

В ответе укажите двоичные числа и результат их суммирования.

Результат запишите в системах счисления по основаниям 2, 8, 16 и 10.

- ◇ **3.17.** Запишите оператор для вывода на экран значений переменных K (K — целое, $100 \leq K < 1000$) и R (R — вещественное, $10 \leq R < 100$) в виде:

___ddd_____dd.ddd_

Здесь d — некоторая десятичная цифра.

Указание. Используйте форматированный вывод чисел.

- ◇ **3.18.** Что будет выведено в результате выполнения последовательности операторов (считать, что на порядок выделяется 2 разряда):

```
print('Pi =%6.3f' % math.pi)
print('Pi =%10f' % math.pi)
print('e =%9f' % math.exp(1))
print('e =%7.4f' % math.exp(1))
print('5+5 =%10d' % (5+5))
```

- ◇ **3.19.** Что будет напечатано в результате выполнения последовательности операторов:

```
x, y = 14, 4
print(divmod(x,y))
print(divmod(-x,-y))
print(divmod(-x,y))
print(divmod(x,-y))
```

- ◇ **3.20.** Что будет напечатано в результате выполнения последовательности операторов:

```
a = 13 // (16 % 7)
b = 32 % a * 3 - 19 % 3 * 2
print(a)
print(b)
```

Расстановкой одной пары скобок во втором операторе присваивания добейтесь, чтобы переменная `b` приняла значение 1) 2; 2) 12.

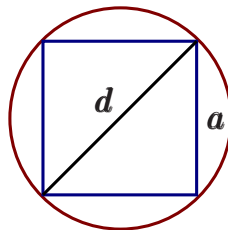
- ◇ **3.21.** Что будет выведено на экран в результате выполнения оператора:
- 1) `print(math.trunc(5.25) + round(6.75))`
 - 2) `print(round(-17.1) + math.trunc(17.1))`

2.5 Задачи

Все задачи должны быть протестированы на простых примерах.

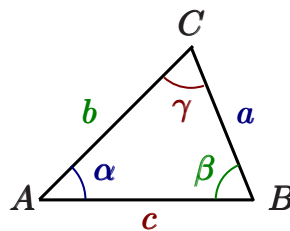
Образец оформления программного кода см. в примере 2.10. Комментарии можно не использовать.

2.1. Известна площадь квадрата S . Найти длину стороны квадрата, диаметр d и площадь S_1 круга, описанного вокруг этого квадрата.



Указание. Для вычисления значений a , d и S_1 (см. рисунок и условие) запишите три оператора присваивания, в правой части которых используйте только площадь квадрата S .

2.2. Даны величины сторон треугольника a , b , c . Найти градусную меру всех углов треугольника.



Указания. 1) Воспользуйтесь теоремой косинусов и найдите косинусы углов.
2) С помощью функции арккосинус найдите углы.
3) Используйте функции из библиотеки `math` (см. таблицу на с. 8).

2.3. Определите доход S_n клиента банка, если он разместил в банке сумму S на n лет, а процентная ставка составляет p %.

Указания. а) Для расчёта используйте формулу простых процентов

$$S_n = S \left(1 + \frac{pn}{100} \right).$$

б) Для расчёта используйте формулу сложных процентов


$$S_n = S \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

 Формат вывода ответов для заданий 2.4–2.7, связанных с вычислением выражений в разных системах счисления


<Выражение> = <Ответ в указанной системе счисления>

Пример результата работы программы


```
0b111 + 0x49 = 80
0b111 + 0x49 = 0b1010000
0b111 + 0x49 = 0o120
0b111 + 0x49 = 0x50
```

 **2.4.** Найти значение выражения $x - y + z$ в десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления. В качестве значений переменных x, y, z задать 1) $x = 10101101_2, y = 255_8, z = D_{16}$; 2) $x = 10111101_2, y = 237_8, z = E_{16}$.


Образец оформления ответа см. выше.

 **2.5.** Найти значение выражения $x + y - z$ в десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления. В качестве значений переменных x, y, z задать 1) $x = 101001_2, y = 255_8, z = 1E_{16}$; 2) $x = 1011010_2, y = 316_8, z = 2A_{16}$.

Образец оформления ответа см. выше.

 **2.6.** Найти значение выражения $x \cdot 8 + \frac{y}{8}$ в десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления. В качестве значений переменных x, y задать 1) $x = 101_8, y = 100_8$; 2) $x = 120_8, y = 50_8$; 3) $x = 35_8, y = 1100_8$.

Образец оформления ответа см. выше.

 **2.7.** Найти значение выражения $x \cdot 16 + \frac{y}{16}$ в десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления. В качестве значений переменных x и y задать 1) $x = 11_{16}, y = 10_{16}$;

2) $x = 1A_{16}, y = 50_{16};$

3) $x = 35_{16}, y = F0_{16}.$

Образец оформления ответа см. выше.

Для повторяющихся выражений ввести переменные. Подобрать входные данные так, чтобы можно было легко протестировать программу².

2.8. Даны $x, y \in \mathbb{R}$. Вычислить u, v , если:

$$u = \sqrt{e^{x+y}}, \quad v = -\frac{\ln(e^{x+y} + e - 1)}{2\sqrt{e^{x+y}}}.$$

2.9 ([14]). Даны $x, y, z \in \mathbb{R}$. Вычислить u, v , если:

$$u = \sin \left| (y - \sqrt{|x|}) \left(x - \frac{y}{z^2 + \frac{x^2}{4}} \right) \right|, \quad v = \cos \left(z^2 + \frac{x^2}{4} \right).$$

2.10 ([14]). Даны $x, y \in \mathbb{R}$. Вычислить u, v , если:

$$u = \frac{1 + \sin^2(x + y)}{2 + \left| x - \frac{2x}{1 + |\sin(x + y)|} \right|}, \quad v = x - \frac{x^2}{1 + \sin^2(x + y)}.$$

2.11. С клавиатуры вводится целое трёхзначное число x . Найти каждую цифру числа x .

Примеры результатов работы программы	
$x \gg \gg -372$	$x \gg \gg 156$
3 7 2	1 5 6


2.12. С клавиатуры вводится целое четырёхзначное число x . Найти каждую цифру числа x . Образец диалога с пользователем см. в задаче 2.11.


2.13. Найти сумму пар цифр натурального четырёхзначного числа. Например, для числа 1275 ответ 87 ($= 12 + 75$).


2.14. С клавиатуры вводится целое пятизначное число x . Найти сумму цифр числа x . Например, для числа 32750 ответ 17, для числа -12345 ответ 15.


2.15. Поменять местами первую и последнюю цифры целого трёхзначного числа (например, $345 \rightarrow 543$, $-172 \rightarrow -271$). Предполагается, что в числе отсутствуют нулевые цифры. Результат работы программы — целое число.


²Задачи, выделенные голубым цветом, рассматриваются в теоретической части курса.

 **2.16.** В трёхзначном числе поменять местами цифры, отвечающие за десятки и сотни (например, $345 \rightarrow 435$). Предполагается, что в числе отсутствуют нулевые цифры. Результат работы программы — целое число.


 **2.17.** Осуществить циклический сдвиг всех цифр трёхзначного числа влево (например, $345 \rightarrow 453$). Предполагается, что в числе отсутствуют нулевые цифры. Результат работы программы — целое число.


 **2.18.** Осуществить циклический сдвиг всех цифр трёхзначного числа вправо (например, $345 \rightarrow 534$). Предполагается, что в числе отсутствуют нулевые цифры. Результат работы программы — целое число.


 **2.19.** Дано целое четырёхзначное число. Вставить в середину числа цифру 0. Считать, что в исходном числе отсутствует цифра 0. Например, из числа 1234 сделать число 12034.


 **2.20.** С клавиатуры вводятся два двузначных положительных числа a и b . Соберите новое четырёхзначное число по правилу: сначала первые цифры чисел a и b , затем последние цифры чисел a и b . Например, из чисел 12 и 34 сделать одно число 1324. Считать, что в исходном числе отсутствует цифра 0.


 При решении следующих задач используйте только функции округления.


 **2.21.** Диагональ экрана монитора равна p дюймов. Дюйм равен 2,54 см. Чему равна диагональ экрана монитора в сантиметрах? Ответ округлите до десятых.


 **2.22.** Сергей Иванович путешествовал по Америке на автомобиле, спидометр которого показывал скорость в милях в час. Американская миля равна 1609,344 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает m миль в час? Ответ округлите до сотых.

 **2.23.** Масса бегемота x кг, а масса слона y кг. Какое наибольшее количество бегемотов необходимо взять, чтобы их общая масса не превышала массу слона?

 **2.24.** Тетрадь стоит a рублей b копеек. Какое наибольшее число тетрадей можно купить на n рублей?

 **2.25.** В турпоход отправились n человек. В каждую палатку вмещается ровно 3 человека. Какое наименьшее количество палаток должны были взять туристы, чтобы палаток хватило всем?

 **2.26.** На празднике нужно рассадить n гостей за столы. Каждый стол рассчитан на k человек. Сколько нужно столов, чтобы поместились все гости?

 **2.27.** Напишите программу для кассового аппарата, который по полученному вещественному числу печатает товарный чек с указанием количества рублей и копеек, полученных от покупателя. Примеры работы программы см. ниже.

Пример 1

Стоимость товара: 34.1

Товарный чек на сумму
34 руб. 10 коп.

Пример 2

Стоимость товара: 1092

Товарный чек на сумму
1092 руб. 0 коп.

Пример 3

Стоимость товара: 56.867

Товарный чек на сумму
56 руб. 87 коп.

3 Оператор условного перехода

Оператор условного перехода (условный оператор) предназначен для выбора одной из двух альтернативных ветвей алгоритма в зависимости от значения некоторого проверяемого условия (логического выражения). Существуют условные операторы с одной и двумя ветвями.

3.1 Примеры условий и их записи на языке Python

Выражение	Дополняющее выражение
Истина	Ложь
$x > 0$	$x \leq 0$
$x = 0$	$x \neq 0$
$x \neq 0$	$x = 0$
$x \geq 0$	$x < 0$
$x \in [a; b]$	$x \notin [a; b]$
n чётное	n нечётное
n нечётное	n чётное

Пример 3.1 (запись условий на языке Python). Приведём варианты записи некоторых логических выражений на языке Python.

Выражение	Запись на языке Python
$x > 0$	<code>x > 0</code>
$x = 0$	<code>x == 0</code>
$x \neq 0$	<code>x != 0</code>
$x \geq 0$	<code>x >= 0</code>
n чётное	<code>n % 2 == 0</code>
	<code>n % 2 != 1</code>
n нечётное	<code>n % 2 != 0</code>
	<code>n % 2 == 1</code>
n кратно k	<code>n % k == 0</code>
n не кратно k	<code>n % k != 0</code>
$x \in [a; b]$	<code>x >= a and x <= b</code>

3.2 Условный оператор с одной ветвью

Синтаксис условного оператора с одной ветвью

```
if условие:  
    блок инструкций
```

Здесь **условие** — некоторое логическое выражение.

Если **условие** истинно, то выполняется **блок инструкций**; если же **условие** ложно, то **блок инструкций** не будет выполнен и управление передается следующему оператору программы.

В языке Python для выделения блоков инструкций используются отступы. Все инструкции, которые относятся к одному блоку, должны иметь равную величину отступа слева (4 пробела; символ табуляции не рекомендуется).

Простейший пример использования условной инструкции

```
a = -9  
if a < 0:  
    print('Nice!') # результат Nice!
```

Пример 3.2 ($y = |x|$). Определить модуль введенного числа, не используя функции `abs()`.

```
1 x = int(input('Введите целое число >>> '))  
2  
3 y = x  
4 if x < 0:  
5     y = -x  
6  
7 print('|', x, '| = ', y, sep='')
```

Пример 3.3 (поиск наибольшего и наименьшего из двух чисел; if). Ввести два различных целых числа x и y . Присвоить переменной Max большее из этих чисел, а Min — меньшее.

Поиск max(x,y) и min(x,y). I

```
1 print('Введите два числа')
2 x = int(input())
3 y = int(input())
4
5 Max = x
6 Min = y
7 if x < y:
8     Max = y
9     Min = x
10
11 print('Max =', Max)
12 print('Min =', Min)
```

Поиск max(x,y) и min(x,y). II

```
1 print('Введите два числа')
2 x = int(input())
3 y = int(input())
4
5 Max, Min = x, y
6 if x < y:
7     Max, Min = y, x
8
9 print('Max =', Max)
10 print('Min =', Min)
```

Пример 3.4 (поиск наименьшего из трёх чисел; if-else). Ввести три целых числа x , y и z . Найти наименьшее из этих чисел, то есть $\min(x, y, z)$.

Решение. Два приведённых ниже варианта программы различаются способами инициализации Min.

Поиск min(x,y,z). Способ I

```
x = int(input())
y = int(input())
z = int(input())

if x < y:
    Min = x
else:
    Min = y
if z < Min:
    Min = z

print(Min)
```

Поиск min(x,y,z). Способ II

```
x = int(input())
y = int(input())
z = int(input())

Min = x
if y < Min:
    Min = y
if z < Min:
    Min = z

print(Min)
```

3.3 Условный оператор с двумя ветвями

Синтаксис условного оператора с двумя ветвями

```
if условие:
    блок инструкций 1
else:
    блок инструкций 2
```

Если **условие** истинно, то выполняется **блок инструкций 1**, иначе (т.е. истинно **дополняющее условие**) выполняется **блок инструкций 2**.

Пример 3.5 (поиск наибольшего и наименьшего из двух чисел; if-else). Постановка задачи: см. [пример 3.3](#).

Поиск max(x,y) и min(x,y). III

```
print('Введите два числа')
x = int(input())
y = int(input())

if x > y:
    Max = x
    Min = y
else:
    Max = y
    Min = x

print('Max =', Max)
print('Min =', Min)
```

Поиск max(x,y) и min(x,y). IV

```
print('Введите два числа')
x = int(input())
y = int(input())

if x > y:
    # множественное присваивание
    Max, Min = x, y
else:
    Max, Min = y, x

print('Max =', Max)
print('Min =', Min)
```

Пример 3.6 (проверка числа на чётность). Определить чётность введённого числа.

Проверка числа на чётность. I

```
k = int(input())

s = 'чётное'
if k % 2 != 0:
    s = 'нечётное'

print(s)
```

Проверка числа на чётность. II

```
k = int(input())

if k % 2 == 0:
    print('even') # чётное
else:
    print('odd')  # нечётное
```

Пример 3.7 ($x \in [a; b]$?). Даны целые a, b . Проверить принадлежность точки x отрезку $[a, b]$.

Решение. Условие $x \in [a; b]$ можно записать в виде двойного неравенства

$$a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

или в виде пересечения двух неравенств

$$(x \geq a) \cap (x \leq b). \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2) на языке Python имеет вид

$$x \geq a \text{ and } x \leq b.$$

И это самый удобный способ записи условия принадлежности отрезку, ввиду его простой переносимости на любой язык программирования. Сравните³

Pascal	Python
$(x \geq a) \text{ and } (x \leq b)$	$x \geq a \text{ and } x \leq b$

Ещё один способ, не зависящий от языка программирования

$$(x - a) * (x - b) \leq 0$$

Данный способ требует всего одной операции сравнения и три (!) арифметические операции⁴.

Представим различные способы записи условий $x \in [a, b]$ и $x \notin [a, b]$ на языке Python. Заметим, что использование специфических для используемого языка программирования приёмов не всегда приветствуется.

Выражение	Запись на языке Python
$x \in [a; b]$	$x \geq a \text{ and } x \leq b$
	$a \leq x \leq b$
	$\text{all}([x \geq a, x \leq b])$
	$x \text{ in range}(a, b+1)$
$x \notin [a; b]$	$x < a \text{ or } x > b$
	$\text{any}([x < a, x > b])$ $x \text{ not in range}(a, b+1)$

³Для ещё большего совпадения оба условия на языке Python можно взять в скобки.

⁴Что позволяет сомневаться в его целесообразности.

Принадлежность числа отрезку

```
a = int(input('a >>> '))
b = int(input('b >>> '))
x = int(input('x >>> '))

# I вариант
if x >= a and x <= b:
    print('да')
else:
    print('нет')

# II вариант
if a <= x <= b:
    print('да')
else:
    print('нет')

# III вариант
if all([x >= a, x <= b]):
    print('да')
else:
    print('нет')

# IV вариант
if not any([x < a, x > b]):
    print('да')
else:
    print('нет')

# V вариант
if any([x < a, x > b]):
    print('нет')
else:
    print('да')
```

Результат работы программы

```
a >>> 1
b >>> 4
x >>> 3
да
да
да
да
да
```

Результат работы программы

```
a >>> 2
b >>> 13
x >>> 14
нет
нет
нет
нет
нет
```

3.4 Тернарная условная операция

Простейшую условную инструкцию

```
if x:
    A = Y
else:
    A = Z
```

можно сократить до одной строки, используя следующую конструкцию:

```
A = Y if x else Z
```

В результате работы инструкции, выполнится выражение Y , если значение X истинно, иначе выполнится выражение Z .

Пример 3.8 (поиск наибольшего из двух чисел; if-else). Найти $\max(x, y)$.

Поиск $\max(x, y)$

```
if x > y:
    Max = x
else:
    Max = y
```

Поиск $\max(x, y)$; условная операция

```
Max = x if x > y else y
```

Пример 3.9 (проверка числа на чётность; условная операция). Перепишем программу для проверки чётности числа, приведенную в [примере 3.6](#), с использованием тернарной условной операции.

Проверка числа на чётность; условный оператор


```
if k % 2 == 0: print('Even') # чётное
else: print('Odd') # нечётное
```

Проверка числа на чётность; условная операция. Способ 1

```
print('Even') if k % 2 == 0 else print('Odd')
```

Проверка числа на чётность; условная операция. Способ 2

```
print('Even' if k % 2 == 0 else 'Odd')
```

 **3.1.** Тернарная условная операция может использоваться внутри других выражений. Например,

$$R = x + (100 \text{ if } (k \% 2 == 0) \text{ else } -100)$$

В этом случае условную операцию желательно заключать в скобки.

Пример 3.10 (поиск наибольшего и наименьшего из двух чисел; условная операция). Перепишем программу для поиска наибольшего и наименьшего из двух целых чисел, приведенную в [примере 3.5](#), с использованием тернарной условной операции.

Поиск $\max(x,y)$ и $\min(x,y)$; условный оператор

```
x = int(input())
y = int(input())

Max, Min = (x, y) if x > y else (y, x)

print('Min =', Min)
print('Max =', Max)
```

3.5 Вложенные условные операторы

Алгоритм, реализованный в [примерах 3.3 и 3.5](#), не обрабатывает случая равенства введенных чисел. Рассмотрим более общую задачу.

Пример 3.11 (поиск наибольшего и наименьшего из двух чисел; if-else в if). Ввести два целых числа x и y . Если числа x и y равны, то вывести сообщение об этом, иначе присвоить переменной $\max_$ большее из этих чисел, а $\min_$ — меньшее.

if-else в if

```
1 print('Введите 2 числа')
2 x = int(input())
3 y = int(input())
4
5 if x == y:
6     print('числа равны')
7 else:
8     if x > y:
9         max_ = x
10        min_ = y
11    else:
12        max_ = y
13        min_ = x
14    print('max = ', max_)
15    print('min = ', min_)
```

Стиль оформления программного кода. При оформлении кода, содержащего вложенные условные операторы, ключевое слово `else` выравнивается по тому слову `if`, к которому оно относится.

Пример 3.12 (`if-else` в `if-else`). В зависимости от введенного значения $x \in \mathbb{Z}$ присвоить переменной y следующие значения

$$y = \begin{cases} -50, & \text{если } x < 0; \\ 5, & \text{если } x = 0; \\ 100, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Для решения будем использовать вложенный условный оператор.

```
1 x = int(input())
2
3 if x < 0:
4     y = -50
5 else: # т.е. x >= 0
6     if x == 0:
7         y = 5
8     else: # т.е. x > 0
9         y = 100
10
11 print('y = ', y)
```

Опишем процесс выполнения оператора `if` (строки 2–8): сначала проверяется условие $x < 0$. Если оно истинно, переменная y принимает значение -50 (строка 3) и остальная часть оператора `if` (строки 4–8) не выполняется (следующий исполняемый оператор стоит в строке 8). Если первое условие ложно (т.е. $x \geq 0$), то управление передается вложенному условному оператору — проверяется второе условие ($x = 0$) и, если оно истинно, то y принимает значение 5 (строка 6), а если ложно, то 100 (строка 8).

Пример 3.13 (if-else в if, if в if-else, if-else в if-else). В следующей паре условных операторов слово `else` ставится в соответствие второму `if`, т.е. оператор `if-else` вложен в оператор `if`.

if-else в if

```
if x == 1:
    if y > x:
        print('x = 1, y > x')
    else:
        print('x = 1, y <= x')
```

Для того чтобы парой слову `else` было первое `if`, необходимо их отступ слева сделать одинаковым:

if в if-else

```
if x == 1:
    if y > x:
        print('x = 1, y > x')
else:
    print('x != 1')
```

В этом фрагменте оператор `if` вложен в оператор `if-else`.

Для наглядности приведем указанные выше операторы в виде блок-схем.

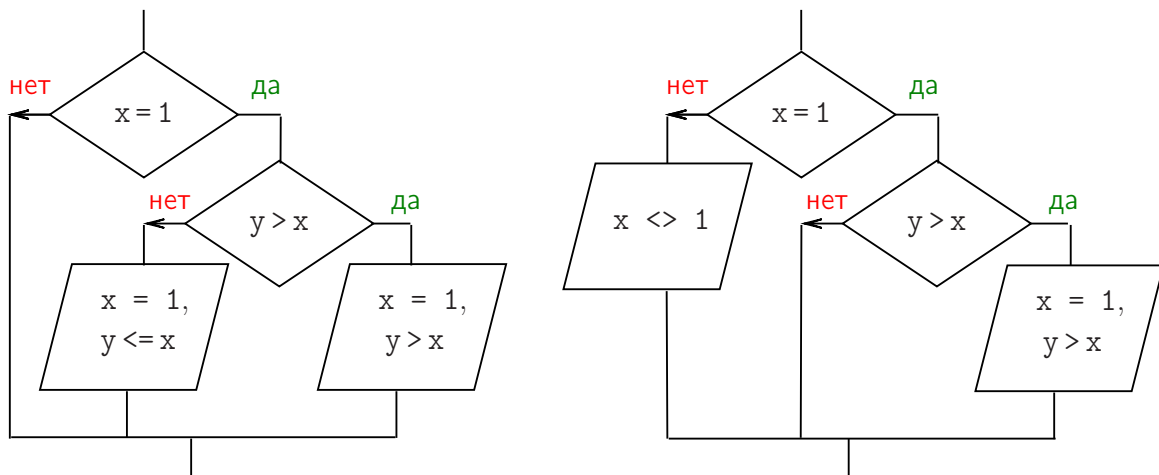


Рис. 1. Блок-схемы (слева if-else в if; справа if в if-else)

if-else в if-else

```
if x == 1:
    if y > x:
        print('x = 1, y > x')
    else:
        print('x = 1, y <= x')
else:
    print('x != 1')
```

3.6 Каскадные условные инструкции

В **каскадной условной инструкции** условия `if`, ..., `elif` проверяются по очереди. При истинности какого-то из условий выполняется соответствующий блок. Если все проверяемые условия ложны, то выполняется блок `else`, если он присутствует.

Пример 3.14. Приведем примеры использования каскадных условных инструкций.

```
_____ Какой четверти принадлежит точка (x,y)? _____  
1 x = float(input('x >>> '))  
2 y = float(input('y >>> '))  
3  
4 if x > 0 and y > 0:  
5     print('I четверть')  
6 elif x < 0 and y > 0:  
7     print('II четверть')  
8 elif x < 0 and y < 0:  
9     print('III четверть')  
10 elif x > 0 and y < 0:  
11     print('IV четверть')  
12 else:  
13     print('Точка лежит на координатной оси')  
14     print('или является началом координат.')
```

```
_____ Где лежит точка? _____  
1 a = int(input())  
2  
3 print('Точка лежит ', end='')  
4 if a < -5:  
5     print('слева от [-5;5]')  
6 elif a <= 5: # условие a >= -5 выполнилось автоматически  
7     print('в [-5;5]')  
8 else:  
9     print('справа от [-5;5]')
```

Решение задачи из примера 3.12

```
1 x = int(input())
2
3 if x < 0:
4     y = -50
5 elif x == 0:
6     y = 5
7 else:
8     y = 100
9
10 print('y = ', y)
```


3.7 Вычисления по формулам

Пример 3.15 (вычисление значения по формуле). Даны целые числа a ($a \neq 0$), b . Найти значение выражения

$$y = \frac{\max(a, b)}{a - b} + \sqrt{a + b}. \quad (3.3)$$

Указание. Функцию `max()` не использовать.

Решение. При вычислениях по формулам необходимо определить области определения всех функций и написать соответствующие условные операторы, чтобы избежать аварийной остановки программы.

В [формуле \(3.3\)](#) следует ожидать возникновения исключительных ситуаций в знаменателе дроби (если $a = b$) и при вычислении квадратного корня (если $a + b < 0$). То есть вычисление y возможно, если знаменатель дроби удовлетворяет условию $a \neq b$; подкоренное выражение неотрицательное, т. е. $a + b \geq 0$ или $a \geq -b$.

Напишем программу двумя способами.

1 способ. Будем вычислять выражение только в случае выполнения обоих условий: $(a \neq b)$ и $(a \geq -b)$. Если это невозможно, то будем сообщать об ошибке (тип ошибки не определять).

I способ (алгоритм)

Если $(a \neq b)$ и $(a \geq -b)$, то

1. Вычислить максимум.
2. Посчитать значение выражения по формуле (3.3).
3. Напечатать ответ.

иначе (т.е. если либо $a = b$, либо $a < -b$)

Выдать сообщение "Ошибка"

Недостаток I способа: пользователь не понимает, какую ошибку он сделал.

2 способ. Будем определять тип исключительной ситуации и сообщать об этом пользователю. Условия теперь проверяются по порядку, но всё равно требуемое выражение вычисляется только в случае, если оба условия выполняются.

II способ (алгоритм)

Если $a = b$, то

выдать сообщение " $x = 0$ в y / x ";

иначе (т.е. если $a \neq b$)

если $a < -b$, то выдать сообщение " $x < 0$ в $\text{sqrt}(x)$ ";

иначе (т.е. если $a \neq b$ и $a \geq -b$)

1. Вычислить максимум;
2. Вычислить значение выражения по формуле.
3. Напечатать ответ.

Программы, реализующие представленные выше алгоритмы:

I способ

```
1 import math
2
3 print('Введите целые a, b ')
4 a = int(input('a >>> '))
5 b = int(input('b >>> '))
6
7 if (a != b) and (a >= -b):
8     if a > b: # ищется максимум
9         Max = a
10    else:
11        Max = b
12    # вычисляется выражение
13    y = Max / (a - b) + math.sqrt(a + b)
14    print('y = %6.3f' % y)
15 else:
16    print('Ошибка')
```

II способ (желательный)

```

1 import math
2
3 print('Введите целые a, b ')
4 a = int(input('a >>> '))
5 b = int(input('b >>> '))
6
7 if a == b:
8     print('x = 0 в y / x')
9 else:
10     if a < -b:
11         print('x < 0 в sqrt(x)')
12     else:
13         if a > b: # ищется максимум
14             Max = a
15         else:
16             Max = b
17         # вычисляется выражение
18         y = Max / (a - b) + math.sqrt(a + b)
19         print('y = %6.3f' % y)

```



3.2. Обратим внимание, что максимум здесь вычисляется только в случае необходимости (не перед всеми проверками). Проверки условий следует начинать с простейших.

Тестирование программ проведём для одних и тех же наборов данных. Запишем ожидаемые результаты:

Набор данных	a	b	Ожидаемый результат
№ 1	3	3	Ошибка вычисления, так как знаменатель равен нулю.
№ 2	3	-4	Ошибка вычисления, так как подкоренное выражение меньше нуля.
№ 3	3	-3	Ответ: $y = 0,5$.
№ 4	4	5	Ответ: $y = -2$.

Приведём результаты работы программ, реализующих [алгоритм 1](#) и [алгоритм 2](#)

Набор данных	Результат работы	
	программа 1	программа 2
№ 1	Ошибка	$x = 0$ в y / x
№ 2	Ошибка	$x < 0$ в $\text{sqrt}(x)$
№ 3	$y = 0.500$	$y = 0.500$
№ 4	$y = -2.000$	$y = -2.000$

3.8 Задачи

Образцы оформления программного кода см. в примерах раздела «Оператор условного перехода».

3.1. Найти среди заданных чисел a, b, c, d количество чисел, равных нулю.

3.2. Переменные a, b, c содержат некоторые целые значения. Если значение переменной b неотрицательно, то поменять местами значения переменных a и c .
Ответ выдавать в виде:

$a = \dots; \quad b = \dots; \quad c = \dots$

3.3. Найти среди заданных чисел a, b, c, d количество положительных и количество отрицательных чисел.

3.4. Найти корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

заданного коэффициентами a, b и c ($a \neq 0$). Использовать следующий алгоритм:

если $D < 0$, то выдать сообщение «Уравнение имеет только мнимые корни»;

если $D = 0$, то вычислить корень и выдать результат в виде « $x = \dots$ »;

если $D > 0$, то вычислить корни и выдать результат в виде « $x_1 = \dots, x_2 = \dots$ »;

Указания. Для повторяющихся выражений ввести переменные. Подобрать коэффициенты квадратного уравнения так, чтобы можно было полностью протестировать программу.

3.5. Найти корни биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

заданного коэффициентами a, b и c ($a \neq 0$).

Указания. Для повторяющихся выражений ввести переменные. Подобрать коэффициенты биквадратного уравнения так, чтобы можно было полностью протестировать программу.

Указания. Провести тестирование с помощью программы Maple:


1) задать функцию $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$;

2) исследовать поведение функции $f(x)$ при различных значениях a, b, c .


 **3.6** (семинар). Дано $x \in \mathbb{R}$. Присвоить переменной b

- 1, если ближайшее к значению x целое число — четное и отличное от нуля;
No, в противном случае.


Указания. Задачу решить в трёх вариантах: 1) с использованием оператора if-else; 2) с использованием оператора if; 3) с использованием тернарного оператора.

 **3.7.** Определить является ли введенное целое число двузначным. Если является, то определить последнюю цифру числа, в противном случае вывести слово No.


Указания. Задачу решить в трёх вариантах: 1) с использованием оператора if-else; 2) с использованием оператора if; 3) с использованием тернарного оператора.


 **3.8.** Определить является ли введенное целое число двузначным. Если является, то определить цифры числа, в противном случае вывести слово No.

Указания. Задачу решить в трёх вариантах: 1) с использованием оператора if-else; 2) с использованием оператора if; 3) с использованием тернарного оператора.

 **3.9.** Определить является ли введенное целое число трёхзначным. Если является, то выдать две первые цифры числа, в противном случае выдать две последние цифры числа.

Указания. Задачу решить в трёх вариантах: 1) с использованием оператора if-else; 2) с использованием оператора if; 3) с использованием тернарного оператора.

 **3.10.** Дано натуральное число N . Если число N двузначное, то найти сумму цифр числа. Если число N трёхзначное, то найти произведение ненулевых цифр числа. Если число N не двузначное и не трёхзначное, то выдать сообщение «Нет».

 **3.11** (★). Дано целое трёхзначное число K . Если цифра числа K , отвечающая за десятки, принадлежит отрезку $[1; 5]$, то упорядочить все цифры числа K по убыванию. Например, $326 \rightarrow 632$, $476 \rightarrow 476$.

 **3.12.** Даны целые числа a , b , c . Найти

- 1) $\max(a + b + c, abc)$;
- 2) $\min(a^2 + b, b^2 + c)$;
- 3) $\max(\min(a + b, ab), \min(b + c, bc))$.

Указания. 1) Задания выполнить с использованием тернарного оператора. 2) Для проверки использовать функции `min()` и `max()`.

3.13. Дано x . Вычислить значение функции

$$1) y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \in [-3; 3); \\ x - 1 & \text{при } x \notin [-3; 3); \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in [0; 1); \\ x^{-2} & \text{при } x \notin [0; 1). \end{cases}$$

Указания. Программы написать в трёх вариантах: 1) с использованием оператора if-else и составного условия; 2) с использованием оператора if-else и двойного неравенства; 3) с использованием оператора if-else и функции `all()`; 4) с использованием оператора if-else и функции `any()`.

Совет. См. [пример 3.7](#).

3.14. Дано x . Вычислить значение функции

$$1) y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} \lg x & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Совет. См. [пример 3.12](#).

3.15. Даны целые числа a, b, c . Найти значение выражения

$$1) \frac{\min(a, b, c)}{\ln a}; \quad 2) \frac{\max(a, b, c)}{\min(a, 5)}; \quad 3) \frac{\max(a, b, c)}{\min(a, b, c)}; \quad 4) \frac{\max(a, b, c)}{\text{sign } a}.$$

Указания. 1) Для вычисления $\min(x, y, z)$ (или $\max(x, y, z)$) используйте алгоритм из [примера 3.4](#)

$$m_1 = \min(x, y), \quad m_2 = \min(m_1, z).$$

2) Для вычисления $\min(x, y)$ (или $\max(x, y)$) используйте алгоритм, а не стандартную функцию.


Совет. При составлении алгоритма используйте [пример 3.15](#).

При выполнении следующих заданий учтите, что


Вещественные числа a и b равны, если выполнено условие


$$|a - b| \leq \varepsilon,$$

где ε — некоторое малое число, например, $\varepsilon = 0,0001$.

 **3.16.** Дано: $x, y, r \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$. Выяснить, принадлежит ли точка с координатами (x, y) :

- 1) кругу радиуса r с центром в начале координат;
- 2) кольцу с центром в начале координат с внешним радиусом $2r$ и внутренним радиусом r .

 **3.17.** Определить, является ли треугольник, заданный координатами вершин $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$, равносторонним.


 **3.18.** Проверить, лежит ли точка $P(x_1, y_1)$ на прямой $y = ax + b$. При положительном ответе найти расстояние от точки P до начала координат; при отрицательном — найти на прямой точку, имеющую такую же ординату, как у точки P .


 **3.19.** Проверить, пересекаются ли прямые


$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

в одной точке, т. е. выполнено ли условие (определитель матрицы равен 0)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0?$$

 **3.20.** Определить, пересекаются ли парабола $y = cx^2 + dx + f$ и прямая $y = ax + b$. При положительном ответе найти точки пересечения.

 **3.21.** Определить, пересекаются ли параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $y = dx^2 + ex + f$. При положительном ответе найти точки пересечения.

 **3.22.** Получится ли забить круглый водосток диаметра d кирпичом, размеры которого a, b, c ?

4 Операторы циклов

4.1 Оператор цикла с условием

Синтаксис оператора цикла с условием (`while`; с предусловием):

`while условие: оператор`

При выполнении данного оператора проверяется **условие** (условие повторения цикла), и если оно соблюдается, то выполняется **оператор** (оператор цикла). Как только на очередном шаге окажется, что **условие** не соблюдается, то выполнение оператора цикла прекращается.

Оператор цикла с предусловием может ни разу не выполниться. Тело цикла не выполняется, если условие повторения цикла при первой проверке оказалось ложным.

Пример 4.1 ($a^i < b$, $i = 1, 2, 3, \dots$; `while-do`). Даны вещественные числа a ($a > 1$) и b . Получить и вывести на экран все члены бесконечной последовательности a^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ (т.е. a, a^2, a^3, \dots), меньшие числа b .

Вычисление a^i , $i = 1, 2, 3, \dots$

```
1 a = float(input('a (>1) >>> '))
2 b = float(input('b >>> '))
3 if a < b:
4     d = a # переменная для степеней числа a
5     while d < b:
6         print('%5.2f' %d)
7         d = d * a
8 else:
9     print('Решения нет');
```

При выполнении тела цикла `while` переменная d последовательно принимает значения a, a^2, a^3, \dots . Значение d будет изменяться до тех пор, пока оно не станет больше или равно значению b . Если $a \geq b$ с самого начала, то не будет выведено ни одного члена последовательности a^i , $i = 1, 2, \dots$.

Пусть, например, $a = 2$, $b = 11$. Пошаговую работу программы представим в виде таблицы

d	проверка условия $d < 11$	печать результата
2	+	2
$2 \cdot 2 = 4$	+	4
$4 \cdot 2 = 8$	+	8
$8 \cdot 2 = 16$	—	

Пример 4.2 (последовательность чисел). Программа получает на вход натуральные числа, количество введенных чисел неизвестно, признак окончания ввода последовательности чисел — любое ненатуральное число. Найти сумму элементов последовательности и элемент с наибольшим значением.

Работа с целыми числами

```

1 s = 0
2 mx = 0
3 x = int(input()) # инициализация x (x управляет работой цикла)
4 while x > 0:      # проверка x
5     if x > mx:
6         mx = x
7     s = s + x
8     x = int(input()) # модификация x
9
10 # обработка результатов вычисления
11 if s == 0:
12     print('В последовательности нет натуральных чисел.')
13 else:
14     print('Сумма элементов равна', s)
15     print('наибольший элемент:', mx)

```

4.2 Трассировочная таблица

Пример 4.3 ($a_i, i = 1, 2, 3, \dots$; while-do; трассировочная таблица). Дано действительное $b > 0$. Последовательность a_1, a_2, \dots образована по закону:

$$a_1 = 1, \quad a_i = \frac{a_{i-1}^2}{2} + i - 1 \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Получить первый член последовательности, больший $2b$.

Решение. При написании кода следует четко следовать заданным формулам.

В программах допишем операторы печати для построения **трассировочной таблицы**. Такие таблицы позволяют осуществлять контроль за исполнением цикла.

Важно. Оператор для вывода ответа должен присутствовать всегда.

Цикл `while`

```
1 b = float(input('b >>> '))
2
3 i = 1
4 a = 1 # инициализация a_i при i = 1
5 print('%3d %7.2f %8s' % (i, a, a <= 2*b)) # 1 строка трассы
6 while a <= 2 * b:
7     i = i + 1 # изменение счетчика
8     a = a * a / 2 + i - 1 # вычисление a_i
9     print('%3d %7.2f %8s' % (i, a, a <= 2*b)) # строка трассы
10
11 print('%6.2f' %a) # вывод ответа
```

Результат работы программ

```
b >>> 8
1    1.00    True
2    1.50    True
3    3.12    True
4    7.88    True
5   35.07   False
35.07
```

4.3 Работа с цифрами натурального числа

Пример 4.4 (цифры натурального числа; `while`). Подсчитать количество цифр в записи натурального числа.

Подсчет количества цифр в числе

```
m = int(input()) # исходное число

k = 0            # количество цифр
while m > 0:
    k = k + 1
    m = m // 10

print('Кол. цифр числа', m, '=', k)
```

Пример 4.5 (максимальная цифра натурального числа; `while`). Найти максимальную цифру в записи натурального числа.

Поиск максимальной цифры в числе

```
m = int(input()) # исходное число

maxd = 0         # максимальная цифра
while m > 0:
    d = m % 10    # цифра числа
    if d > maxd: maxd = d
    m = m // 10

print(maxd)
```

Пример 4.6 (сумма чётных цифр натурального числа; `while`). Найти сумму чётных цифр в записи натурального числа.

Сумма чётных цифр в числе. Вариант 1

```
m = int(input()) # исходное число

s = 0            # инициализация суммы
while m > 0:
    d = m % 10    # цифра числа
    if d % 2 == 0: # если цифра чётная
        s = s + d # суммирование
    m = m // 10

print(s)
```

Вариант 2

```
m = int(input())

s = 0
while m > 0:
    if m % 2 == 0:
        s += m % 10
    m = m // 10

print(s)
```

Пример 4.7 (все цифры натурального числа нечётные?; while). Дано натуральное число n . Проверить, верно ли, что в записи числа n все цифры нечётные.

Решение. Приведём два варианта реализации. В варианте I используется вспомогательная переменная логического типа, которая изменяется в цикле, в варианте II в теле цикла происходит только модификация числа.

Все цифры натурального числа нечётные? Вариант I

```
n = int(input())

# проверим последнюю цифру числа и отбросим её
b = (n % 2 != 0)
n = n // 10
while (n > 0) and b:
    b = (n % 2 != 0)
    n = n // 10

print(b)
```

Все цифры натурального числа нечётные? Вариант II

```
n = int(input())

while (n > 0) and (n % 2 != 0):
    n = n // 10

replay = (n == 0)

print(replay)
```



4.1. В предложенных программах скобки в условиях поставлены для наглядности.



4.2. Обратим внимание, что все примеры этого раздела были рассмотрены только для натуральных чисел. Но, если в условии указаны целые числа, то пользователь может вводить и отрицательные значения. Тогда программа потребует одного дополнительного действия. Какого?

4.4 Использование сигнальной метки

Пример 4.8 (сигнальная метка; `while`). Дана последовательность неотрицательных чисел (количество членов последовательности заранее неизвестно). Найти сумму чётных элементов этой последовательности.

Решение. Сигнальная метка — некоторое значение входного данного, сигнализирующее о прекращении работы цикла.

Сигнальной меткой в данной задаче может быть любое отрицательное число. Об этом факте надо сообщить пользователю в начале работы с программой.

Подсчёт суммы чётных чисел

```
print('Введите целое неотриц. число. Окончание ввода: число < 0')

s = 0
x = int(input('x >>> ')) # 1 число в последовательности
while x >= 0:
    if x % 2 == 0:
        s += x
    x = int(input('x >>> '))

print('Сумма чётных чисел =', s)
```

Подсчёт суммы чётных чисел

```
Введите целое неотриц. число. Окончание ввода: число < 0
x >>> -5
Сумма чётных чисел = 0
```

Подсчёт суммы чётных чисел

```
Введите целое неотриц. число. Окончание ввода: число < 0
x >>> 4
x >>> 13
x >>> 12
x >>> 100
x >>> -1
Сумма чётных чисел = 116
```

4.5 Задачи-I

Образцы оформления программного кода см. [в примерах 4.1–4.7.](#)

4.1. Дано действительное $b > 0$. Найти первый отрицательный член последовательности a_1, a_2, \dots , образованной по закону:

$$a_1 = b, \quad a_i = a_{i-1} - \frac{i}{\sqrt{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Указание. В программе должны присутствовать операторы для построения **трассировочной таблицы**.

4.2. Дано действительное $b < 0$. Найти первый неотрицательный член последовательности a_1, a_2, \dots , образованной по закону:

$$a_1 = b, \quad a_i = \frac{a_{i-1} + |\sin i|}{i - \sin^2 i} \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Указание. В программе должны присутствовать операторы для построения **трассировочной таблицы**.

4.3. Даны действительные $a, h, x_{\text{нач}}, x_{\text{кон}}$. Вычислить значения функции

$$f(x) = \frac{\sin(x - a^3)}{a^2 + a + 7,3}$$

для всех действительных $x: x_{\text{нач}} \leq x \leq x_{\text{кон}}$; шаг изменения x равен h .

Найти количество значений $f(x)$, сумму положительных $f(x)$ и произведение отрицательных $f(x)$.

4.4. Дано действительное $x_{\text{нач}} \leq 0$. Вычислить значения функции

$$f(x) = e^{0.2x} + \sqrt[3]{e^{0.2x}} + \sqrt[5]{e^{0.2x}},$$

если $h \in (0; 1)$ — шаг изменения значения x ($x = x_{\text{нач}}; x_{\text{нач}} + h; \dots$). Вычисления проводить до тех пор, пока выполняется неравенство $e^{0.2x} < 5|x_{\text{нач}}|$.

4.5 ([14]). Дано положительное a ($a < 1$). Найти наибольшее число вида 2^{-n} , $n \geq 0$, меньшее a .

Указания. 1) Легко видеть, что $2^{-2} = 2^{-1} : 2$, $2^{-3} = 2^{-2} : 2$, ... То есть каждое число вида 2^{-i} находится из предыдущего делением на два. 2) В программе должны присутствовать операторы для построения **трассировочной таблицы**.

4.6 ([14]). Дано положительное a ($a < 1$). Найти наименьшее число вида 3^{-n} , $n \geq 0$, большее a .

Указания. 1) Легко видеть, что $3^{-2} = 3^{-1} : 3$, $3^{-3} = 3^{-2} : 3$, ... То есть каждое число вида 3^{-i} находится из предыдущего делением на три. 2) В программе должны присутствовать операторы для построения **трассировочной таблицы**.

4.7 ([14]). Дано $a \in \mathbb{R}$. Среди чисел

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \dots$$

найти первое, большее a .

Указание. В программе должны присутствовать операторы для построения **трассировочной таблицы**.

4.8. Найти наибольший общий делитель натуральных чисел m и n (обозначение: $\text{НОД}(m, n)$), используя алгоритм Евклида.

4.9. Найти наименьшее общее кратное натуральных чисел m и n , если известно равенство

$$\text{НОК}(m, n) = \frac{mn}{\text{НОД}(m, n)}.$$

Указание. Для нахождения $\text{НОД}(m, n)$ используйте алгоритм Евклида.

4.10. Найти наибольший общий делитель трех натуральных чисел m , n и k , используя алгоритм Евклида.

Указание. $\text{НОД}(m, n, k) = \text{НОД}(\text{НОД}(m, n), k)$.


4.11. Дано натуральное число n (количество цифр в числе заранее неизвестно). Проверить, совпадают ли первая и последняя цифры в записи числа n .

4.12. По заданному натуральному числу n найти число m , в записи которого цифры следуют в обратном порядке, например:

$$n = 1234, \quad m = 4321 \quad \text{или} \quad n = 14532, \quad m = 23541$$


4.13 (new). В заданном натуральном числе убрать все чётные цифры. Например,


Входное данное	Результат (число или строка)
12345	135
207	7
200	Нечётных цифр нет


 **4.14.** Проверить, является ли натуральное число n простым.


 **4.15.** Даны два целых положительных числа $n > 1$ и $m > n$. Напечатать все простые числа из диапазона $[n, m]$.


 **4.16.** Дано натуральное число n . Проверить, есть ли в записи числа n цифра 5.

 **4.17.** Дано натуральное число n . Проверить, есть ли в записи числа n цифры 1 или 3.


 **4.18.** Дано натуральное число n . Проверить, является ли это число правильной записью 8-ричного числа.


 **4.19.** Дано натуральное число n . Проверить, упорядочены ли цифры числа в порядке убывания (слева направо). Например, 873 (упорядочены по убыванию), 2713 или 379 (не упорядочены по убыванию).


 **4.20 (*)**. Дано натуральное число n (количество цифр в числе заранее неизвестно). Проверить, что в записи числа n все цифры разные.

 **4.21.** Разложить натуральное число n на простые множители. (Ответ выдавать в виде «произведения», например, $60 = 2 * 2 * 3 * 5$).

 **4.22.** Найти количество простых множителей натурального числа n .

 **4.23.** Найти и вывести на экран все простые делители натурального числа n .

 **4.24.** Вывести на экран все простые делители натурального числа n . Найти количество таких делителей.

 **4.25.** Дано натуральное число (количество цифр в числе заранее неизвестно). Возвести каждую цифру числа в степень, равную разряду цифры. Например, при входном числе 234 ответ: 1 3 4.


Результат работы программы: _____

Дано число 234

$4^0=1$


$3^1=3$


$2^2=4$


 **4.26.** Дано целое число (количество цифр в числе заранее неизвестно). Найти сумму чисел, получающихся следующим образом: каждое число равно цифре исходного числа, возведенной в степень, равную разряду цифры. Например, для числа 1374 ответ: 18, т. е.


$$\overset{3}{1}\overset{2}{3}\overset{1}{7}\overset{0}{4} = 1 (= 4^0) + 7 (= 7^1) + 9 (= 3^2) + 1 (= 1^3) = 18.$$

Указание. При решении задач из этого раздела руководствуйтесь **примером 4.8**.

 **4.27.** Дана последовательность неположительных чисел (количество членов последовательности заранее неизвестно). Найти среднее арифметическое элементов этой последовательности.

 **4.28.** Дана последовательность ненулевых чисел (количество членов последовательности заранее неизвестно). Найти элемент последовательности с наименьшим значением.

 **4.29.** Дана последовательность чисел, не превосходящих 1 000. Количество членов последовательности заранее неизвестно. Определить количество чётных элементов последовательности кратных трём.

 **4.30.** Дана последовательность целых положительных чисел (количество членов последовательности заранее неизвестно), не превосходящих 30 000. Вычислить среднее геометрическое элементов последовательности с наибольшим и наименьшим значениями.

Учимся на чужих ошибках

Ниже дана программа к заданию 4.5. Программа содержит ошибки при построении трассировочной таблицы. Исправьте программу.

ошибочная программа студента

```
1  '''
2  4.5. Дано положительное a (a < 1).
3  Найти наибольшее число вида 2^(-n), n >= 0, меньшее a.
4  '''
5
6  import math
7
8  a = float(input('a = '))
9
10 res = 1
11 while res >= a:
12     res = res / 2
13     print('%6.2f %6.2f %7s' % (res, a, res > a))
14
15 print(res)
```

Результат работы программ

```
a = 0.25
0.50  0.25  True
0.25  0.25  False
0.12  0.25  False
0.125
```

4.6 Вычисление бесконечных сумм с помощью циклов с условиями

Рассматриваем сумму вида

$$\sum_{i=i_{\text{нач}}}^{\infty} y_i = y_{i_{\text{нач}}} + y_{i_{\text{нач}}+1} + \dots$$

Общий вид **рекуррентного соотношения**:

$$y_i = C \cdot y_{i-1}, \quad (4.1)$$

где C — некоторое выражение, на которое надо домножить слагаемое y_{i-1} , чтобы получить y_i .

Рекуррентное соотношение **необходимо дополнить** информацией о начальном значении

$$y_{i_{\text{нач}}} = C_{i_{\text{нач}}} \quad (4.2)$$

и об интервале изменения индексов

$$i = i_{\text{нач}} + 1, i_{\text{нач}} + 2, \dots \quad (4.3)$$

Значение индекса « $i_{\text{нач}}$ » зависит от вида исходного выражения: как правило, это 0 или 1.

Коэффициент C в **соотношении (4.1)** для конкретной суммы можно получить с помощью простых математических вычислений (см. **рис. 2**). Другой способ использован при решении **примера 4.9**.

The screenshot shows the Maple software interface with a window titled "Untitled (1) - [Server 1]". The command window contains the following commands and results:

```

[ > restart;
  > y[i] := x^i/i!;
    y[i-1] := x^(i-1)/((i-1)!);

      y_i = x^i / i!
      y_{i-1} = x^(i-1) / (i-1)!

  > C := simplify(y[i]/y[i-1]);

      C = x / i
  
```

Рис. 2. Получение коэффициента C в **примере 4.19** с помощью программы Maple

Пример 4.9 (вычисление $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$). Вычислить приближенное значение бесконечной суммы

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = e^x. \quad (4.4)$$

Вычисления проводить до тех пор пока **очередное слагаемое не станет меньше числа $\varepsilon = 10^{-5}$** (это слагаемое не учитывать). На печать вывести ответ и количество членов суммирования, потребовавшихся для достижения заданной точности.

Условие окончания процесса суммирования

$$|y_i| < \varepsilon$$

означает, что некоторое **слагаемое y_i** будет давать вклад, несущественный по сравнению с искомой суммой, и его учитывать уже не надо.

На [рис. 3](#) приведены результаты вычисления y_i на примере суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

для $\varepsilon = 0,01$.

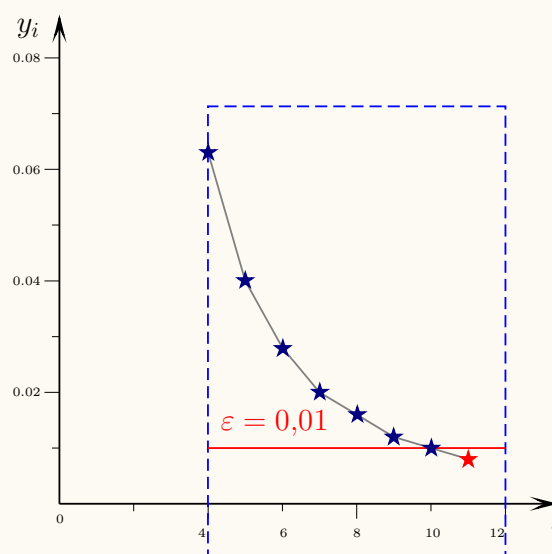


Рис. 3. Значения $y_i = 1/i^2$

Решение. При любых вычислениях надо стараться так применять оператор цикла, чтобы каждый следующий шаг максимально использовал сделанное на предыдущих шагах. Заметим, что вычисляемую сумму можно представить в виде

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = y_0 + y_1 + y_2 + \dots,$$

где

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{x}{1!}, \quad y_2 = \frac{x^2}{2!}, \quad y_3 = \frac{x^3}{3!}, \quad \dots$$

Видно, что каждый следующий член y_i получается из предыдущего y_{i-1} умножением на x/i , т. е.

$$y_i = \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \cdot \frac{x}{i} = y_{i-1} \cdot \frac{x}{i}.$$

Итак, можем записать соотношения

$$y_0 = 1, \quad y_i = \frac{x}{i} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

В таблице приведены связи общих формул (4.1)–(4.3) с (4.5)

Формула	Общий вид	Аналог в (4.5)	Примечание
(4.1)	$y_{i_{\text{нач}}} = C_{i_{\text{нач}}}$	$y_0 = 1$	$i_{\text{нач}} = 0, C_{i_{\text{нач}}} = 1;$
(4.2)	$y_i = C \cdot y_{i-1}$	$y_i = \frac{x}{i} y_{i-1}$	$C = \frac{x}{i};$
(4.3)	$i = i_{\text{нач}} + 1, i_{\text{нач}} + 2, \dots$	$i = 1, 2, \dots$	

Программа пишется (**строго**) по **соотношениям (4.5)**. Например, сначала кодируется начальное значение (см. строки 5, 6 в коде ниже)

$$y_0 = 1 \quad (i = 0 \text{ и } y = 1).$$

В теле цикла записывается рекуррентная формула (см. строку 10)

$$y_i = y_{i-1} \frac{x}{i} \quad (y = y * x / i)$$

и наращивается счетчик цикла i (строка 9). Переменная `sum_` нужна для нахождения суммы элементов y_i и она инициализируется нулевым значением (`sum_ = 0`) до начала цикла.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (\text{использование рекуррентной формулы})$$

```

1 import math
2
3 EPS = 1E-5
4 x = float(input('x = '))
5
6 sum_ = 0
7 i = 0                # номер первого члена суммирования
8 y = 1                # нач. значение y при i = 0
9 while abs(y) >= EPS:
10     sum_ = sum_ + y  # суммирование
11     i = i + 1        # i=1,2,...
12     y = y * x / i    # рек. формула
13
14 print('число членов суммы = ', i)
15 print('сумма: %9.6f' % sum_)
16 print('проверка: exp(%s) = %9.6f' % (x, math.exp(x)))

```

Последняя строка добавлена для проверки алгоритма, так как известно, что сумма $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$.

Результат работы программы

```

x = 0.1
число членов суммы = 4
Сумма: 1.105167
проверка: exp(0.1) = 1.105171

```

При выполнении программы переменные `sum_`, `i`, `y` последовательно принимают значения

$$\begin{aligned}
 \text{sum_} & 0, \quad 1, \quad 1 + \frac{x}{1!}, \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, \quad \dots; \\
 i & 0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots; \\
 y & 1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \dots
 \end{aligned}$$

Можно для контроля вычислений добавить операторы печати вида

```
print('%2d %9.6f %9.6f %7s' %(i, sum_, y, (abs(y) >= EPS)))
```

При $x = 0,1$ на экран будет выведен текст

Трассировочная таблица

0	0.000000	1.000000	True
1	1.000000	0.100000	True
2	1.100000	0.005000	True
3	1.105000	0.000167	True
4	1.105167	0.000004	False

Как видно, на четвертом шаге условие

$$\text{abs}(y) \geq \text{Eps} \quad (4 \cdot 10^{-6} \not\geq 1 \cdot 10^{-5})$$

перестало выполняться и программа вышла из цикла.

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (использование встроенных функций Python)

```

1 import math
2
3 EPS = 1E-5
4 x = float(input('x = '))
5
6 sum_ = 0
7 i = 0                # номер первого члена суммирования
8 y = 1                # нач. значение y при i = 0
9 while abs(y) >= EPS:
10     sum_ = sum_ + y
11     i = i + 1
12     y = x**i / math.factorial(i)    # не рекуррентная формула
13
14 print('число шагов цикла = ', i)
15 print('сумма: %9.6f' % sum_)
```

Пример 4.10 (вычисление $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$). Вычислить приближенное значение бесконечной суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i. \quad (4.6)$$

Вычисления проводить до тех пор пока **очередное слагаемое не станет меньше числа $\varepsilon = 10^{-5}$** (это слагаемое не учитывать).

Решение. Общий член суммирования

$$y_i = \frac{1}{i^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Формулу перепишем в виде

$$\underbrace{y_1 = 1}_{\text{инициализация}} \quad \underbrace{y_i = \frac{1}{i^2}, \quad i = 2, 3, \dots}_{\text{в теле цикла}}$$

Рекуррентной формулы здесь не требуется, т. к. её использование скорее затруднит написание программы.

Вычисление $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$

```
1 sum_ = 0 # для вычисления суммы
2 i = 1
3 y = 1 # 1 шаг
4 while y >= 1E-5:
5     sum_ = sum_ + y # вычисление суммы
6     i = i + 1 # наращивание счетчика
7     y = 1 / i / i # общая формула
8
9 print('ответ: %8.5f' % sum_)
```

Для проверки результата можно использовать или пакет Maple (см. раздел 6.1) или библиотеку `sympy`.

 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Библиотека `sympy`

```
from sympy import Symbol, Sum, oo

i = Symbol('i')
s = Sum(1/i/i, (i, 1, oo)).doit() # результат: выражение pi**2/6
print(s)

s = s.evalf() # результат: число 1.64493406684823
print(s)
```

Обозначение знака бесконечности ∞ в библиотеке `sympy`: `oo`.

Пример 4.11. Вычислить сумму с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots &= 1 + \left(-\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2} + \left(-\frac{1}{4^2}\right) + \dots = \\
 &= 1 + \frac{(-1)}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{(-1)}{4^2} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Решение. Для нахождения степени $(-1)^{i+1}$ не будем использовать ни операцию возведения в степень, ни аналогичную функцию.

Проследим за изменением знака

i	1	2	3	4	...
$(-1)^{i+1}$	1	-1	1	-1	...

Переменная для смены знака:

$z = 1$ до цикла

$z = -z$ в теле цикла

Вычисление $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

```

1 sum_ = 0 # для вычисления суммы
2 i = 1
3 y = 1    # 1 шаг
4 z = 1    # переменная для смены знака
5 while abs(y) >= 1E-5:
6     sum_ = sum_ + y
7     i = i + 1
8     z = -z
9     y = z / i / i
10 print('ответ: %8.5f' % sum_)
```

Результат: 0.82246

Вычисление $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$. Библиотека sympy

```

1 from sympy import *
2
3 i = symbol('i')
4 s = Sum((-1)**(i+1) / i / i, (i, 1, oo)).evalf()
5 print(s)
```

Результат: 0.822467033424113 (подчеркнут результат реализации нашего алгоритма)

4.7 Задачи-II

4.31 ([14]). Вычислить приближенное значение бесконечной суммы

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots; \\ 2) & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots; \\ 3) & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \end{aligned}$$

Вычисления продолжать до тех пор пока очередное слагаемое не окажется меньше числа $\varepsilon = 10^{-5}$.

Указание. Осуществите проверку результата при помощи [пакета Maple](#) или библиотеки sympy.

4.32 ([14]). Вычислить приближенное значение бесконечной суммы

$$1) \ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots; \quad 2) \ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Вычисления продолжать до тех пор пока очередное слагаемое не окажется по модулю меньше числа $\varepsilon = 10^{-5}$.

Указание. Осуществите проверку результата при помощи [пакета Maple](#) или библиотеки sympy.

4.33. Дано действительное x . Вычислить значение функции

$$y = \operatorname{ch} x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} y_i,$$

используя соотношения

$$y_0 = 1, \quad y_i = \frac{x^2}{(2i-1)2i} \cdot y_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Вычисления прекратить при $|y_i| < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Указание. На печать выдать

- 1) количество шагов цикла k , необходимых для достижения точности ε ;
- 2) значение суммы, посчитанное с помощью рекуррентного соотношения;
- 3) значение $\operatorname{ch} x$, найденное с помощью функции из библиотеки math;
- 4) значение суммы $\sum_{i=0}^k \frac{x^{2i}}{(2i)!}$, полученное с помощью библиотеки sympy.

4.34. Вычислить отрицательный корень уравнения

$$x^3 - x + 0,5 = 0,$$

используя рекуррентную формулу $x_i = \sqrt[3]{x_{i-1} - 0,5}$ ($i = 1, 2, \dots$). Вычисления прекратить при $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Определить количество итераций.

Указание. Начальное значение x_0 определите при помощи пакета Maple: постройте график функции $y = x^3 - x + 0,5$ и возьмите значение, близкое к искомому отрицательному корню.

4.35. Дано действительное x . Вычислить приближенное значение бесконечной суммы:

$$1) \quad -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (|x| < 1);$$

$$2) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (|x| < 1);$$

$$3) \quad -\ln\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots \quad (x > 0,5).$$

На печать выдавать значение суммы, посчитанное с заданной точностью, и значение функции.

Указание. Используйте рекуррентные соотношения.

4.36. Дано действительное x ($|x| \leq \pi/4$). Вычислить приближенное значение бесконечной суммы:

$$1) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

$$2) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

На печать выдавать значение суммы, посчитанное с заданной точностью, и значение функции.

Указание. Используйте рекуррентные соотношения.

4.8 Оператор цикла с параметром

Синтаксис оператора цикла с параметром (for-to)

for пц in итерируемый объект: блок инструкций

Здесь

- **пц** — параметр цикла;
- **итерируемый объект** — строка, список, словарь, файл,...
- **блок инструкций** представляет собой тело цикла (любой оператор, в том числе составной).

Синтаксис заголовка оператора for i in range(n)

for i in range(количество шагов цикла):

Синтаксис заголовка оператора for i in range(n, m, [step])

for i in range(НЗ, КЗ, [шаг]):

НЗ — начальное значение параметра цикла; **КЗ** — конечное значение — это значение, которого параметр цикла не достигнет, т.е. последняя итерация цикла произойдет при $i = \text{КЗ} - 1$. Здесь в [...] отмечена необязательная часть.

Синтаксис заголовка оператора for i in [элементы списка]:

for i in [элементы списка]:

Пример 4.12 (нахождение $\sum_{i=1}^{10} i$). С помощью цикла вычислить сумму первых десяти натуральных чисел $\sum_{i=1}^{10} i$.

for i in range(10):

```
s = 0
for i in range(10):
    s = s + (i+1)
print('s =', s)
```

for i in range(1,11):

```
s = 0
for i in range(1,11):
    s = s + i
print('s =', s)
```

for i in range(10,0,-1):

```
s = 0
for i in range(10,0,-1):
    s = s + i
print('s =', s)
```

while i <= 10:

```
s = 0
i = 1
while i <= 10:
    s = s + i
    i += 1
print('s =', s)
```

Пример 4.13 (цикл с параметром). Демонстрация разных заголовков цикла с параметром.

— **Функция range(n)** —

```
for i in range(4):  
    print(i)
```

— **Функция range(n, m)** —

```
for i in range(0, 4):  
    print(i)
```

— **Функция range(n, m, step)** —

```
for i in range(0, 4, 1):  
    print(i)
```

— **Функция range(n, m, -step)** —

```
for i in range(3, -1, -1):  
    print(3-i)
```

— **Элементы списка** —

```
for i in [0, 1, 2, 3]:  
    print(i)
```

— **Элементы кортежа** —

```
for i in (0, 1, 2, 3):  
    print(i)
```

— **Вывод букв слова** —

```
for i in 'котик':  
    print(i)
```

— **Счёт** —

```
for i in 'один', 'два', 'три':  
    print(i)
```

— **Список значений разного типа для параметра цикла** —

```
for i in 1, 2, 3, 'раз', 'два', True:  
    print(i)
```

Пример 4.14 (табулирование функций). Цикл `for` удобно использовать для получения таблиц функций. Например, пусть дано $x \in \mathbb{R}$, необходимо вывести таблицу значений функции $\sin x$ в виде

x	$\sin x$
−0.2	−0.1987
−0.1	−0.0998
0.0	0.0000
...	...

где x принимает значения $-0,2, -0,1, \dots, 0,2$.

Табулирование функции

```

1 import math
2
3 print(' x | sin(x) ') # шапка таблицы
4 print('-----')
5
6 for i in range(-2, 3):
7     x = 0.1 * i
8     y = math.sin(x);
9     print('%4.1f | %7.4f' % (x, y))

```

Результат работы программы

```

x | sin(x)
-----
-0.2 | -0.1987
-0.1 | -0.0998
 0.0 |  0.0000
 0.1 |  0.0998
 0.2 |  0.1987

```

Пример 4.15 (построение таблиц истинности; `for`). Постройте таблицу истинности для двух функций $f(x, y) = x \mid y$ и $g(x, y) = x \rightarrow \neg y$. С помощью таблицы истинности докажите утверждение: «логическое выражение $f(x, y)$ можно заменить выражением вида $g(x, y)$ ».

Решение. I вариант. Операции «штрих Шеффера; \mid ; И-НЕ» и «импликация; \rightarrow » отсутствуют среди доступных нам логических функций. Заменяем их согласно определениям:

$$f(x, y) = x \mid y = \neg(x \wedge y), \quad g(x, y) = x \rightarrow \neg y = \neg x \vee \neg y$$

Логические операции \neg (not), \vee (or) и \wedge (and) имеются в словаре языка Python.

Для проверки утверждения в таблице истинности строим дополнительный столбец $f(x, y) \equiv g(x, y)$. Если утверждение истинно, то в столбце будут все единицы (их будет четыре, так как работаем с двумя переменными).

Построение таблиц истинности; I вариант

```

1 print(5 * '%2s |' % ('x', 'y', 'f', 'g', 'R'))
2 print(5 * '----')
3
4 k = 0 # счётчик единиц в последнем столбце
5 for x in False, True:
6     for y in False, True:
7         xi, yi = int(x), int(y)
8         fi = int(not (x and y))
9         gi = int(not x or not y)
10        fgi = int(fi == gi)
11        print(5 * '%2s |' % (xi, yi, fi, gi, fgi))
12        if fgi == 1:
13            k = k + 1
14
15 if k == 4: print('Утверждение верно')
16 else: print('Утверждение неверно')
```

Результат работы программы

x	y	f	g	R
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

Утверждение верно

Решение. II вариант. Напишем другой вариант программы, используя

- анонимные функции (lambda-функции);
- флаг (вместо целочисленной переменной k) для доказательства утверждения;
- тот факт, что при программировании импликацию $x \rightarrow y$ можно заменить условием $x \leq y$ (с учётом таблицы истинности для операции импликации и того, что $\text{False} < \text{True}$).

Таблицы истинности и доказательство утверждения; II вариант

```

1 f = lambda x, y: not (x and y)
2 g = lambda x, y: x <= (not y)    # x -> НЕ y
3
4 print(4 * '%2s |' % ('x', 'y', 'f', 'g'))
5 print(4 * '----')
6 yes = True # пусть утверждение верно
7 for x in False, True:
8     for y in False, True:
9         xi, yi = int(x), int(y)
10        fi, gi = int(f(x,y)), int(g(x,y))
11        print(4 * '%2s |' % (xi, yi, fi, gi))
12        if fi != gi:
13            yes = False
14
15 print('Утверждение верно' if yes else 'Утверждение неверно')
```

Результат работы программы

x	y	f	g
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Утверждение верно

Пример 4.16 (нахождение $\min_k y_k$). Определить наименьшее из чисел

$$y_k = k \sin \left(n + \frac{k}{n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поиск наименьшего из чисел

```

1 import math
2
3 n = int(input('n = '))
4 mn = math.sin(n + 1/n)
5 kMin = 1
6 for k in range(2, n+1):
7     y = k * math.sin(n + k/n)
8     if y < mn:
9         mn = y
10        # запоминается новый номер эл-нта с мин. знач.
11        kMin = k
12
13 print('kMin =', kMin, '  min =', '%6.3f' %mn)
```

Наименьшее из чисел y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) определяется за n шагов. Первый шаг состоит в инициализации переменной mn — ей присваивается значение первого члена последовательности $y_1 = \sin(n + 1/n)$. В цикле проводится вычисление всех остальных членов последовательности и сравнение их с минимальным.

Результаты работы программы:

I тест

```
n = 5
kMin = 3  min = -1.894
```

II тест

```
n = 6
kMin = 1  min = -0.116
```

Если добавить в программный код соответствующие операторы печати, то можно получить таблицы, позволяющие оценить правильность полученного решения:

k	y
1	-0.883
2	-1.546
3	-1.894
4	-1.858
5	-1.397

k	y
1	-0.116
2	0.100
3	0.645
4	1.497
5	2.614
6	3.942

Пример 4.17 (использование `break` и `else` в циклах). Ищем в списке слово `racoon`.

Использование `break` и `else`

```

1 s = 'racoon'
2 for i in ['cat', 'dog', 'mouse']:
3     if i == s:
4         print('Слово', s, 'в списке есть')
5         break
6 else: # значит вышли не по break
7     print('Слова', s, 'в списке нет')
```

Результат работы для списка ('cat', 'dog', 'mouse')
Слова `racoon` в списке нет

Результат работы для списка ('cat', 'dog', 'racoon')
Слово `racoon` в списке есть

Пример 4.18. Дано натуральное число n . Вычислить сумму

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}. \quad (4.8)$$

Решение. Эта задача похожа на [пример 4.11](#), в котором сумма вычислялась с заданной точностью. Здесь точно известно количество членов суммирования, поэтому изменения в программе незначительные: сумму сразу инициализируем первым членом суммирования.

Вычисление $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

```

1 n = int(input('n = '))
2
3 y = 1      # 1 шаг
4 z = 1      # переменная для смены знака (y_1 > 0)
5 sum = y    # для вычисления суммы
6 for i in range(2, n+1):
7     z = -z
8     y = z / i / i
9     sum = sum + y
10
11 print('Sum =', sum)
```

Вычисление $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$. Библиотека sympy

```

10 from sympy import Symbol, Sum
11
12 i = Symbol('i')
13 s = Sum((-1)**(i+1) / i / i, (i, 1, n)).evalf()
14 print(s) #

```

Результат работы программы для $n = 5$

```

n = 5
Sum = 0.8386111111111112
0.8386111111111111

```

Пример 4.19 (вычисление $\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$). Вычислить значение суммы при заданных $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}. \quad (4.9)$$

Решение. Эта задача похожа на **пример 4.9**, в котором сумма вычислялась с заданной точностью. Реализация алгоритма предусматривала использование рекуррентного соотношения:

$$y_0 = 1, \quad y_i = \frac{x}{i} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

В заголовке цикла for переменная i инициализируется, изменяется и проверяется автоматически.

$\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ (использование рекуррентной формулы)

```

1 from sympy import Symbol, Sum, factorial
2
3 n = int(input('n = '))
4 x = float(input('x = '))
5
6 y = 1 # нач. значение y при i = 0
7 s = y # I член сразу добавили в сумму
8 for i in range(1, n+1):
9     y = y * x / i # рек. формула
10    s = s + y      # сумма
11 print('Sum = %10f' % s)
12
13 # для проверки
14 i = Symbol('i')
15 sum_sympy = Sum(x**i / factorial(i), (i, 0, n)).evalf()
16 print('sympy:%10f' % sum_sympy)

```

Результат работы программы для $n = 3$, $x = 0,1$

```
n = 3
x = 0.1
Sum = 1.105167
sympy: 1.105167
```

Сравните полученный результат с ответом на [пример 4.4](#).



4.3. При вычислении суммы с помощью библиотеки sympy можно было не использовать функцию `factorial()`, представив факториал для $i \neq 0$ в виде

$$i! = \prod_{j=1}^i j.$$

Единственным препятствием является то, что в задании требуется вычислить факториал и при $i = 0$.

С учётом того, что $x^0 = 1$ и $0! = 1$ перепишем исходную сумму в виде

$$\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{\prod_{j=1}^i j}.$$

Реализация такой конструкции приведена ниже.

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{\prod_{j=1}^i j}$$

```
1 from sympy import Symbol, Sum, Product
2
3 n = int(input('n = '))
4 x = float(input('x = '))
5
6 i = Symbol('i')
7 j = Symbol('j')
8 sum_smp = 1 + Sum(x**i/Product(j, (j, 1, i)), (i, 1, n)).evalf()
9 print('sympy:%10f' %sum_smp) #
```

Результат работы программы для $n = 3$, $x = 0.1$

```
n = 3
x = 0.1
sympy: 1.105167
```

4.9 Задачи-III

В заданиях 4.37–4.39 запись «d.dddd», где d — это любая десятичная цифра, означает, что вещественное число должно быть записано в виде с фиксированной точкой и иметь после запятой 4 цифры.

4.37. Дано: $m, n \in \mathbb{Z}$ ($m < n$). Вывести таблицу значений функции

$$f(x) = \cos x$$

в виде

x	$y = f(x)$
d.dd	d.dddd
...	...

где $x_i = 0,1i$, $y_i = f(x_i)$ ($i = m, \dots, n$); $d = 0, \dots, 9$.

4.38. Дано: $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), $n \in \mathbb{N}$. Вывести таблицу значений функции

$$f(x) = \cos x$$

в виде

x	$y = f(x)$
d.ddd	d.dddd
...	...

где $x_i = a + hi$, $h = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$); $d = 0, \dots, 9$.

4.39. Дано: $h \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ ($m < n$). Вывести таблицу значений функции

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}$$

в виде

x	$y = f(x)$
d.dd	d.dddd
...	...

где $x_i = 1 + ih$, $y_i = f(x_i)$ ($i = m, \dots, n$); $d = 0, \dots, 9$. В случае, когда значение функции не может быть получено (например, при $x = 0,5$ знаменатель дроби равен нулю) строка таблицы должна иметь вид:

0.50		—
------	--	---

4.40. Для логических переменных x, y, z напечатать фрагмент таблицы истинности логической функции

$$F(x, y, z) = \neg y \wedge (x \vee \neg z),$$

для которой $F(x, y, z) = \text{True}$.

Указание. Ответ выдавать в виде

x	y	z	f
0	0	0	1
1	0	0	1
...			

4.41. Для логических переменных x, y, z напечатать фрагмент таблицы истинности логической функции

$$F(x, y, z) = (x \rightarrow y) \wedge z,$$

для которой $F(x, y, z) = \text{False}$.

Указание. Ответ выдавать в виде

x	y	z	f
0	0	0	0
0	1	0	0
...			

4.42 (new). Постройте таблицу истинности для двух функций

$$f(x, y) = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x); \quad g(x, y) = x \equiv y.$$

С помощью таблицы истинности докажите утверждение: «логическое выражение $f(x, y)$ можно заменить выражением вида $g(x, y)$ ».

Указание. См. [пример 4.15](#).

4.43 (new). Постройте таблицу истинности для двух функций

$$f(a, b, c) = (b \vee c \vee \neg a) \vee (\neg a \wedge \neg c \vee b)$$

и

$$g(a, b, c) = a \rightarrow b \vee c.$$

С помощью таблицы истинности докажите утверждение: «логическое выражение $f(a, b, c)$ можно заменить выражением вида $g(a, b, c)$ ».

Указание. См. [пример 4.15](#).

4.44. Вывести на экран все делители натурального числа n и подсчитать их количество.

4.45. Определить, является ли заданное число n совершенным.

Совершенным называется натуральное число, равное сумме всех своих делителей, исключая само число. Например: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

4.46. Найти первые три совершенных числа.

4.47. Дано натуральное n . Вычислить:

$$1) \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{2i+1}; \quad 2) \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i(i+1)}.$$

Указания. 1) Осуществите проверку результата при помощи пакета Maple или библиотеки sympy. 2) См. **пример 4.18**.

4.48. Дано натуральное n . Вычислить:

$$1) \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i(i+1)}{i!}; \quad 2) \sum_{i=1}^n \frac{i!}{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j}}.$$

Указания. 1) Осуществите проверку результата при помощи пакета Maple или библиотеки sympy. 2) См. **пример 4.19** и замечание к нему.

4.49. Дано: $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить:

$$1) \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\sin ix}{i!}\right); \quad 2) \prod_{i=1}^n \left(\frac{i}{i+1} - \cos^i |x|\right).$$

Указания. 1) Осуществите проверку результата при помощи пакета Maple или библиотеки sympy. 2) См. **пример 4.19** и замечание к нему.

4.50 ([14]). Дано: $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить:

$$1) \sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x; \quad 2) \cos x + \cos x^2 + \dots + \cos x^n.$$

Указание. Осуществите проверку результата при помощи пакета Maple или библиотеки sympy.

4.51. Дано: $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k;$$

где

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}$$

— биномиальный коэффициент; заметим, что

$$\frac{C_m^i}{C_m^{i-1}} = \frac{m-i+1}{i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

4.52. Вычислить:

$$1) 1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{50^3}; \quad 2) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{128^2}.$$

Результаты для сравнения: 1) 1,20186; 2) 0,33331.

4.53. Вычислить:

$$1) 1 - \frac{1}{2!} + \dots - \frac{1}{10!};$$

$$2) \left(2 + \frac{1}{1!}\right) \left(2 - \frac{1}{2!}\right) \left(2 + \frac{1}{3!}\right) \dots \left(2 - \frac{1}{8!}\right).$$

Результаты для сравнения: 1) 0,63212; 2) 306,58649.

4.54. Даны целые числа m , k , n . Для уравнения $mx + ky = n$ определить количество натуральных решений (x, y) , которые не превосходят 100 (т.е. $x \leq 100$ и $y \leq 100$).

4.55. На экскурсию отправляются n человек. Для их перевозки туроператор заказывает автобусы на m пассажиров и автомобили на k пассажиров. Сколько автобусов и автомобилей должен заказать турагент, чтобы разместить всех экскурсантов?

4.56. Дана последовательность из n целых чисел. Найти произведение и сумму положительных элементов последовательности, следующих после первого нулевого элемента.

4.57. Дана последовательность из n целых чисел. Найти значение и номер последнего из минимальных элементов последовательности (предполагается, что таких элементов может быть несколько).

4.58. Дана последовательность из n целых чисел. Найти отношение суммы положительных элементов последовательности к количеству отрицательных элементов. (Учесть случай, когда отрицательных элементов нет.)

4.59. Дана последовательность из n целых чисел. Найти наибольший элемент и его номер среди элементов, следующих после первого нулевого элемента (если таких элементов несколько, то первый из них).

4.60. Дана последовательность из n целых чисел. Найти произведение первых подряд идущих положительных элементов последовательности.

4.61. Последовательность $\{a_i\}_{i=1}^n$ образована из n целых чисел. Определить сколько раз в данной последовательности меняется знак при переходе к следующему элементу.

Указание. Перемена знака имеет место, если для некоторого значения i : $a_i \cdot a_{i+1} < 0$.

4.62. При подсчёте рейтинга на сайте с отзывами используется следующая схема: из всей совокупности выставленных баллов (от 0 до 10 включительно) удаляются наиболее низкая и наиболее высокая оценка, а для оставшихся оценок вычисляется среднее арифметическое и округляется до десятых. Если наиболее низкую или наиболее высокую оценку выставило несколько пользователей сайта, то удаляется только одна такая оценка. Например, если были выставлено шесть оценок 2, 3, 4, 2, 4 и 4, то рейтинг равен $(3 + 4 + 2 + 4)/4 = 3,3$.

Известно, что с момента регистрации на сайте фирму по продаже тренажёров оценило n пользователей. Вычислите рейтинг фирмы.

4.63 ([14]). Дано: натуральное n , действительные y_1, \dots, y_n . Найти:

$$1) \quad \max(|z_1|, \dots, |z_n|), \quad \text{где } z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| \leq 2, \\ 0,5 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$2) \quad \min(|z_1|, \dots, |z_n|), \quad \text{где } z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| > 1, \\ 2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$3) \quad z_1^2 + \dots + z_n^2, \quad \text{где } z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } 0 < y_i < 10, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4.64 (★). Дано: $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Среди чисел $y_k = k \cos x^{2k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, найти ближайшее к какому-нибудь целому числу.

Пояснение к задаче. Обозначим: z_k — ближайшее целое к y_k ($k = 1, 2, \dots, n$);

$$\varepsilon_k = |y_k - z_k|.$$

При $x = 5,5$ и $n = 8$ получим следующую последовательность значений

k	y_k	z_k	ε_k
1	0.39389908	0	0.39389908
2	-1.30633272	-1	0.30633272
3	-2.99311668	-3	0.00688332
4	-1.20738400	-1	0.20738400
5	-1.20524969	-1	0.20524969
6	0.58352289	1	0.41647711
7	3.88899163	4	0.11100837
8	-5.65685425	-6	0.34314575

Как видно из таблицы минимальное ε_k будет при $k = 3$. Значит ближайшим к некоторому целому числу будет третий элемент последовательности: $y_3 = -2.99311668$.

5 Функции (часть I)

Функция — это изолированный блок кода, который решает отдельную задачу. Использование функций делает программу более простой и легко читаемой, а также позволяет избежать ненужного повторения кода. Мы уже использовали стандартные функции Python, такие как `input()`, `len()`, `print()` и т.д. Теперь рассмотрим процесс создания собственных функций.

5.1 Описание функции

Описание функции

```
def имя_функции([список параметров]):  
    '''  
    документация функции,  
    состоящая из одной  
    или нескольких строк  
    '''  
  
    тело функции  
    [return значение_функции] # в [...] отмечена необязательная часть
```

Здесь:

- `def` — ключевое слово, с которого начинается заголовок функции (её имя и список параметров). В конце заголовка функции ставится двоеточие.
- `имя_функции` — уникальное имя функции. Также как и имена идентификаторов, оно может начинаться только с буквы или знака подчеркивания и не должно содержать пробелов и других специальных символов.
- `список параметров` — список аргументов функции, разделённых запятыми (может быть пустым, но круглые скобки надо ставить обязательно).
- `тело функции` — блок инструкций, выполняющийся при вызове функции. Тело функции начинается с новой строки с отступом в 4 пробела и может содержать любые операторы, в том числе условные и операторы циклов. Подключения библиотек внутри тела функции быть не должно!
- `return` — необязательный оператор, с помощью которого можно прекратить выполнение функции. Если инструкция `return` используется без аргументов или не используется вообще, то функция будет возвращать значение `None`. Функции

в Python могут возвращать значения любого типа. После выполнения инструкции `return` произойдет выход из функции, и программа продолжит свою работу, начиная с того места, где была вызвана эта функция. В теле функции может быть несколько инструкций `return` (например, в разных ветках условного оператора). В этом случае функция завершит свою работу, как только выполнится первый из них.

- документация функции — необязательный раздел, содержащий информацию о функции. Здесь может быть описано назначение функции, её входные и выходные параметры.

Для того чтобы функция возвращала более одного значения, после оператора `return` следует записать несколько переменных через запятую. В этом случае функция вернёт кортеж из двух переменных. Причём результат вызова такой функции можно использовать во множественном присваивании.

Все функции должны быть описаны до своего вызова, т. е. выше текста основной программы. Внутри одной функции можно вызывать любую другую функцию. Несколько пользовательских функций можно объединять в пользовательские модули. Подключить пользовательский модуль можно также, как и стандартные библиотеки Python, используя инструкцию `import`.

5.2 Вызов функции

Для **вызова функции** необходимо указать её имя и параметры вызова в круглых скобках. Список параметров может быть пустым, в этом случае при вызове функции необходимо оставить пустые круглые скобки. Если функция содержит инструкцию `return`, то результат её вызова необходимо присвоить переменной. Стоит различать понятия **формальных** и **фактических** параметров функции. Формальные параметры функции — это аргументы функции, которые объявляются в заголовке функции при её описании. Фактические параметры — это параметры, которые подставляются вместо формальных непосредственно при вызове функции.

Синтаксис вызова функции:

```
[имя_переменной] = имя_функции([список параметров])
```

Пример 5.1 (**функция без параметров и выходных значений**). Функции без параметров и выходных значений обычно используются для вывода на экран какого-либо статичного текста. Например, это может быть печать меню программы:

функция без параметров и выходного значения

```
def print_menu():  
    print('Выберите пункт выполнения программы:')
```

```
print('1: Ввод значения x')
print('2: Вывод значения x на экран')
print('3: Возведение x в квадрат')
print('4: Выход из программы')

print_menu() # вызов функции без параметров и выходных значений
```

Пример 5.2 (функции с параметрами). Функция поиска максимума из трёх чисел x, y, z :

Описание и примеры вызова функции для поиска максимума

```
def max3(x, y, z):
    if x < y:
        max_ = y
    else:
        max_ = x

    if z > max_:
        max_ = z
    return max_ # функция вернёт 1 число -- максимум из трёх чисел

# результат функции рекомендуется присвоить переменной
m = max3(5, -12, 0)
print('Максимум:', m)
```

Пример 5.3 (функция, возвращающая более одного значения). Функция одновременного поиска максимума и минимума из двух чисел x, y :

два результата у функции

```
def minMax(x, y):
    if x < y:
        return x, y
    else:
        return y, x
```

Если функция возвращает более одного значения, то результат её вызова может быть обработан несколькими способами.

Пример 5.3.1 (обработка результата функции как кортежа). Результат работы функции присваивается в одну переменную, первый элемент которой является минимумом из двух чисел, а второй — максимумом. Чтобы получить каждое из значений по отдельности необходимо обратиться к элементу с соответствующим индексом.

Обработка результата функции как кортежа

```
m = minMax(16, -4) # m - кортеж

print('min(x, y) =', m[0])
print('max(x, y) =', m[1])
```

Важно. Индексация в кортежах и списках в Python начинается с 0, поэтому минимальному значению будет соответствовать значение `m[0]`, а максимальному — `m[1]`.

Пример 5.3.2 (обработка результата функции с использованием множественного присваивания). Результат работы функции присваивается сразу в несколько переменных.

Использование множественного присваивания

```
minXY, maxXY = minMax(16, -4)

print('min(x, y) =', minXY)
print('max(x, y) =', maxXY)
```

Важно. Количество идентификаторов слева от знака присваивания должно совпадать с количеством значений, которые возвращает функция, иначе возникнет ошибка!

5.3 Способы передачи аргументов

Пример 5.4 (позиционный способ передачи аргументов). Вычислить расстояние между двумя точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Позиционный способ передачи аргументов

```
from math import sqrt

def distance(x1, y1, x2, y2):
    d = sqrt((x2 - x1) * (x2 - x1) + (y2 - y1) * (y2 - y1))
    return d

res = distance(1, 2, -1, -4)

print('d = %5.2f' % res)
```

В **примере 5.4** используется **позиционный** способ передачи аргументов. При таком вызове значения аргументам функции передаются в том порядке, в котором они описаны в заголовке, т. е. $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -1$, $y_2 = -4$.

Важно. Количество фактических параметров при вызове функции должно совпадать с количеством формальных, иначе возникнет ошибка!

Пример 5.5 (передача значений по ключу). Аргументы в функцию можно передавать по ключу. В этом случае при вызове функции указываются пары

идентификатор = значение

Передача значений по ключу

```
# аргументы в порядке описания параметров в функции
res1 = distance(x1 = 1, y1 = 2, x2 = -1, y2 = -4)
print('d = %5.2f' % res1)

# в произвольном порядке
res2 = distance(x2 = -1, y1 = 2, x1 = 1, y2 = -4)
print('d = %5.2f' % res2)
```

Аргументы функции при вызове могут идти в любом порядке.

Пример 5.5.1 (комбинированная передача значений). В одном вызове функции можно одновременно использовать оба способа передачи:

Комбинированная передача значений

```
res3 = distance(-1, 2, y2 = -4, x2 = 1)

print('d = %5.2f' % res3)
```

Важно. Позиционные параметры обязательно должны идти перед параметрами, передаваемыми по ключу!

5.4 Произвольное количество аргументов

Иногда при описании функции может быть заранее неизвестно количество и тип её аргументов. В этом случае при описании функции в качестве аргументов можно использовать `*args` для передачи разного числа аргументов.

Пример 5.6 (произвольное количество параметров). Функция вывода на экран всех аргументов функции:


```

def any_print(*args):
    for el in args:
        print(el, end=' ')
    print()

any_print(1, 2, 4, 51)
any_print('Dog', 'Cat', 'world')
any_print(1.5, 'Hello', True)

```

args представляет собой произвольный список параметров, * здесь означает «распаковку» списка значений.

— Результат работы программы —

```

1 2 4 51
Dog Cat world
1.5 Hello True

```

5.5 Значения параметров по умолчанию

При описании функции для её параметров можно указывать значения по умолчанию, которые будут использованы, если на их место не были переданы значения. В этом случае в **заголовке функции** указываются пары

идентификатор = значение

Пример 5.7 (значения параметров по умолчанию). Вычислить расстояние между двумя точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . В случае, если переданы координаты только одной точки — вычислить расстояние от неё до начала координат. Для этого необходимо задать координаты точки $(x_2, y_2) = (0, 0)$ как параметры по умолчанию:

```

Значения параметров по умолчанию
from math import sqrt

def distance(x1, y1, x2=0, y2=0):
    d = sqrt((x2 - x1) * (x2 - x1) + (y2 - y1) * (y2 - y1))
    return d

# разные способы вызова функции distance:
D1 = distance(1, 2, -1, -4)    # все параметры переданы по позиции

# переданы x1, y1, x2; y2 значение по умолчанию
D2 = distance(1, 2, 4)

# переданы x1, y1; x2, y2 значения по умолчанию
D3 = distance(1, 2)

D4 = distance(1, y1=-10, x2=3) # x1 передано по позиции;
                               # y1, x2 переданы по ключу;
                               # y2 значение по умолчанию

```

Если в функции используются и обычные параметры, и параметры со значением по умолчанию, то обычные параметры должны идти перед параметрами со значениями по умолчанию. Позиционные параметры обязательно должны идти перед параметрами, передаваемыми по ключу.

Важно. Значения по умолчанию задаются один раз при определении функции, а не при каждом её вызове! Поэтому не следует использовать в качестве значения по умолчанию случайно генерируемое значение.

5.6 Глобальные и локальные переменные

Все переменные, которые определяются внутри функции (в том числе и её формальные параметры) называются **локальными**. Локальные переменные доступны только внутри функции и только во время её выполнения. При попытке обратиться к локальной переменной из основной программы возникнет ошибка. Для того, чтобы использовать какую-либо переменную в любой части программы, её необходимо объявить как **глобальную**, используя инструкцию `global` внутри тела функции.

Пример 5.8 (глобальные и локальные переменные). Опишем две функции, изменяющие значение переменной `x` с использованием инструкции `global` и без.

Глобальные и локальные переменные

```
def neg100():
    x = -100 # здесь определяется локальная переменная x

def neg100g():
    global x # переменная x из основной программы
    x = -100

x = 23
neg100()    # вызов функции без инструкции global
print(x)    # Результат: 23

neg100g()   # вызов функции с инструкцией global
print(x)    # Результат: -100
```

5.7 Анонимные функции

Анонимная функция в Python — это функция, которая определяется без имени. Их также называют **lambda-функциями**. Обычно такие функции не используются

многократно и состоят из одного простого оператора. Описание анонимной функции начинается с ключевого слова `lambda`.

Синтаксис описания `lambda`-функции

```
имя_функции = lambda [параметры функции] : выражение
```

Как и обычная функция, `lambda`-функция может не иметь параметров и не возвращать значение. При вызове анонимной функции происходит выполнение выражения, записанного после двоеточия. Синтаксис вызова анонимной функции идентичен вызову обычной функции.

Пример 5.9 (сравнение синтаксиса описания обычной и `lambda`-функций). В коде ниже приведены различные описания обычных функций и их «аналоги» в виде `lambda`-функций:

Описания функций

```
def x3(x):  
    return x * x * x  
  
def sumXY(x, y):  
    return x + y  
  
def printt(t):  
    print('t =', t)  
  
def hello():  
    print('hello! ;)')
```

Описания `lambda`-функций

```
x3 = lambda x: x * x * x  
  
sumXY = lambda x, y: x + y  
  
printt = lambda t: print('t =', t)  
  
hello = lambda : print('hello! ;)')
```

5.8 Примеры решения задач

Пример 5.10 (функция поиска $\max(x, y)$). Описание и примеры вызова функции для поиска максимума.

Поиск максимума из двух выражений

```
def maxXY(x, y):  
    if x > y:  
        return x  
    else:  
        return y  
  
c = maxXY(13, 4)  
  
print(c)  
print(maxXY(abs(-5), c)) # max(13, 4, |-5|)
```

Пример 5.11 (вычисление площади треугольника). Вычислить площадь треугольника по формуле Герона (параметры a, b, c — здесь стороны треугольника).

Нахождение площади треугольника по заданным сторонам

```
import math  
  
def geron(a, b, c):  
    p = (a + b + c) / 2  
    return math.sqrt(p * (p - a) * (p - b) * (p - c))  
  
print('Площадь =', geron(3, 4, 5))
```

Пример 5.12 (сравнение двух выражений с заданной точностью). Вещественные числа по умолчанию сравниваются с машинной точностью. На практике такая точность бывает нужна редко. Напишем функцию для сравнения двух выражений с заданной точностью. Точность по умолчанию возьмём $\varepsilon = 10^{-6}$.

Сравнение значений двух выражений с заданной точностью

```
def Compare(x, y, eps = 1e-6):  
    '''  
    Сравнивает значения двух выражений с заданной точностью.  
  
    Входные параметры:  
    x    (float) - первое вещественное число  
    y    (float) - второе вещественное число  
    eps  (float) - точность сравнения (по умолчанию 1e-6)
```

Выходной параметр:

— (bool) - результат сравнения двух вещественных чисел
, , ,

```
return abs(x - y) <= eps
```

```
print(Compare(1.55, 1.6))      # False
```

```
print(Compare(1.55, 1.6, 0.1)) # True
```

```
print('-' * 30)
```

```
help(Compare) # печать документации функции Compare
```

Функция `help(f)` принимает в качестве аргумента имя некоторой функции `f` и выводит на экран её документацию.

----- Результат работы программы -----

```
False
```

```
True
```

```
-----
```

```
Help on function Compare in module __main__:
```

```
Compare(x, y, eps=1e-06)
```

Сравнивает значения двух выражений с заданной точностью.

Входные параметры:

x (float) - первое вещественное число

y (float) - второе вещественное число

eps (float) - точность сравнения (по умолчанию 1e-6)

Выходной параметр:

— (bool) - результат сравнения двух вещественных чисел

Пример 5.13 ([sympy](#); [построение графиков](#)). Продемонстрируем простейший способ построения графиков средствами библиотеки `sympy`.

Дано $x \in \mathbb{R}$. Для функций

$$f_1(x) = \sqrt{x} + 1, \quad f_2(x) = \sin 2x$$

выполнить действия

найти $f_1(x)$ и построить её график на $[0; x]$, если $x > 0$;

найти $f_2(x)$ и построить её график на $[x; -x]$, если $x < 0$;

выдать сообщение Not plot, если $x = 0$.

Графики функций

```
from sympy import sqrt, sin, plot, Symbol

f1 = lambda x: sqrt(x) + 1
f2 = lambda x: sin(2*x)

x = float(input('x >>> '))
t = Symbol('t')

if x < 0:
    print('sin(2*x) =', f2(x))
    plot(f2(t), (t, x, -x))
elif x > 0:
    print('sqrt(x) + 1 =', f1(x))
    plot(f1(t), (t, 0, x))
else:
    print('Not plot')
```

Результат работы программы

```
x >>> 0
Not plot
```

Результат работы программы

```
x >>> -10  
sin(2*x) = -0.91295  
# см. рисунок справа
```

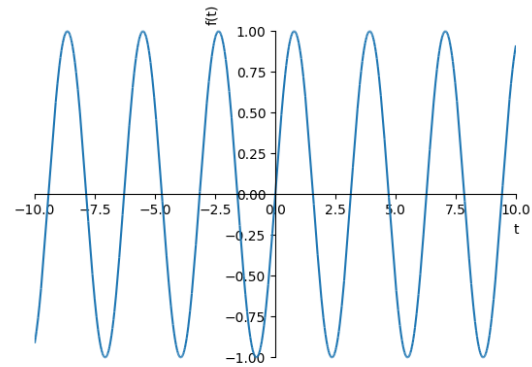


Рис. 4. График $f_2(x)$ на интервале $[-10; 10]$

Результат работы программы

```
x >>> 5  
sqrt(x) + 1 = 3.23607  
# см. рисунок справа
```

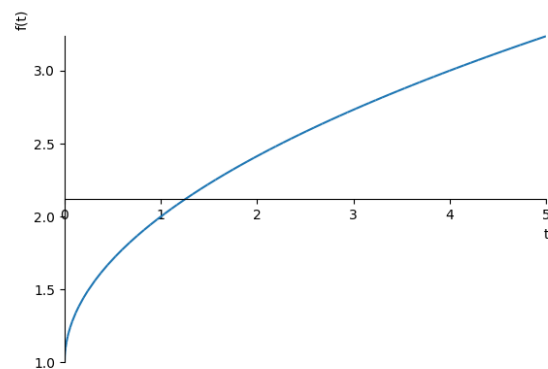


Рис. 5. График $f_1(x)$ на интервале $[0; 5]$

5.9 Задачи

5.1. Вычислить площадь выпуклого четырехугольника, заданного длинами всех сторон и диагонали (см. [рис. 6](#)).

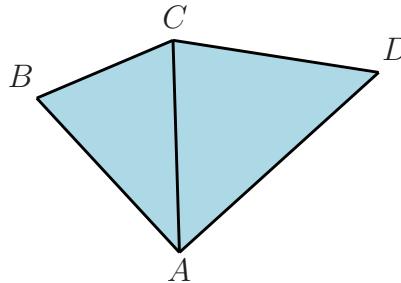


Рис. 6. Заданный четырехугольник

Указания к решению. 1) Воспользуйтесь функцией из [примера 5.11](#). 2) Напишите функцию для проверки существования треугольника с заданными сторонами.

5.2. Вычислить длины всех медиан треугольника со сторонами a, b, c , используя следующую формулу:

$$m = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

где m — медиана, проведённая к стороне a

Указание. Напишите функцию, вычисляющую длину медианы m .

5.3. Вычислить длины всех биссектрис треугольника со сторонами a, b, c , используя следующую формулу:

$$d = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c}$$

где d — биссектриса угла α , лежащего напротив стороны a .

Указание. Напишите функцию, вычисляющую длину биссектрисы d .

5.4. Даны $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, ($R_2 > R_1$). Вычислите площадь кольца, внешний радиус которого равен R_2 , а внутренний — R_1 .

Указание. Напишите функцию для поиска площади круга радиуса r по формуле: $S = \pi r^2$.

5.5. Даны целые a, b и c . Получить значение выражения

$$\frac{\max(a, a+b) + \max(a, b+c)}{1 + \max(a+bc, 4)}.$$

Указание. Для нахождения максимума используйте функцию из [примера 5.10](#).

5.6. Даны целые a, b . Получить значения выражений

$$u = \min(a, b), \quad v = \min(ab, a + b), \quad w = \min(u + v^2, 14).$$

Указание. Для нахождения минимума создайте функцию на основе функции `Max` из [примера 5.10](#).

5.7. Описать функции для вычисления а) $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{sh} x$; б) $\operatorname{ctg} x$; $\operatorname{ch} x$, используя только функции `exp()`, `sin()`, `cos()`, `atan()` из библиотеки `math`.

Сравнить результаты функций со значениями, посчитанными с помощью библиотечных функций для вычисления $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

5.8. Дано целое число N . Определить его максимальную и минимальную цифры.

Указание. Напишите функцию, которая находит максимальную и минимальную цифры заданного числа N и возвращает их в качестве результата. Вызовите ее тремя способами: с позиционным параметром; с параметром, передаваемым по имени и со значением по умолчанию.

5.9. Описать функцию, которая для любого целого аргумента возвращает количество цифр в его записи.

5.10. Описать функцию, которая для любого целого аргумента возвращает целое значение, полученное изменением порядка следования цифр на обратный.

5.11. Описать функцию для печати таблицы Пифагора.

Указания. Определите параметры со значениями по умолчанию $n = 10$ и $m = 10$ — количество строк и столбцов в таблице; используйте разные вызовы: позиционный, по имени, с использованием значений по умолчанию (см. примеры выше).

5.12. Описать функцию для печати таблицы «сумма квадратов» в виде матрицы:

0	1	2	3
1	2	5	10
2	5	8	13
3	10	13	18

Указания. Число строк и столбцов в матрице передавать как параметры со значениями по умолчанию $n = 3$ и $m = 3$; используйте разные вызовы: позиционный, по имени, с использованием значений по умолчанию (см. примеры выше).

5.13. Описать функцию для вычисления значения $\cos^n x$ с помощью формул понижения степени:

$$\cos^n x = \begin{cases} \frac{1 + \cos 2x}{2}, & \text{если } n = 2; \\ \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}, & \text{если } n = 3; \\ \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}, & \text{если } n = 4; \\ \frac{10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x}{16}, & \text{если } n = 5. \end{cases}$$

Для сравнения вычислить $\cos^n x$ с помощью цикла (оформить в виде функции).

5.14. Описать функцию для вычисления значения $\sin^n x$ с помощью формул понижения степени:

$$\sin^n x = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{2}, & \text{если } n = 2; \\ \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}, & \text{если } n = 3; \\ \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}, & \text{если } n = 4; \\ \frac{10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x}{16}, & \text{если } n = 5. \end{cases}$$

Для сравнения вычислить $\sin^n x$ с помощью цикла (оформить в виде функции).

Дано число $n \in \mathbb{N}$. Вычислить $\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2$, где

$$x_k = \begin{cases} 2k, & \text{если } k \text{ — нечётное,} \\ 2/k & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} k^2, & \text{если } k \text{ — нечётное,} \\ 3k + 5 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Указание. Вычисление значений x_k и y_k оформить в виде функций.

Даны натуральные числа n, a_1, a_2, \dots, a_n . Вычислить $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ кратно } 5, \\ 2x + 1, & \text{если } x \text{ при делении на } 5 \text{ даёт остаток } 2, \\ [x/5] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь через $[c]$ обозначена целая часть вещественного числа c .

5.15. Описать функцию нахождения суммы и определения её четности для положительных чисел, кратных k и меньших заданного числа m . k — целое положительное число, по умолчанию равное двум.

5.16. Описать функцию, моделирующую стандартную функцию `divmod()`. У функции второй параметр сделать по умолчанию, равным двум.

5.17. Описать функцию для нахождения суммы и произведения целых положительных чисел, принадлежащих отрезку $[a, b]$ и кратных числу m . m — целое положительное число, по умолчанию равное двум.

5.18. Дано действительное x . Вычислить приближенное значение бесконечной суммы:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad (|x| < 1).$$

На печать выдавать

1) значение суммы $\sum_{i=i_{\text{нач}}}^{\infty} y_i$, посчитанное с заданной точностью ε с использованием рекуррентного соотношения для нахождения общего члена ряда y_i ;

2) количество n членов суммирования, понадобившееся для достижения точности ε ;

3) результат вычисления частичной суммы ряда $\sum_{i=i_{\text{нач}}}^n y_i$ с помощью метода `Sum()` библиотеки `sumpy` (см. код в [примере 4.19](#));

4) результат вычисления функции $f(x)$ с помощью функции `ln()`.

Указание 1. Используйте [рекуррентные соотношения](#).

Указание 2. Для приближенного вычисления суммы используйте функцию с параметрами x и eps (eps — значение по умолчанию).

Пример 1 диалога с пользователем

```
x >>> 0.3
eps = 1e-5 (n - нет, enter - да) >>>
sum = 0.30952
n = 4
Проверки
sumpy = 0.30952
f(x) = 0.3095196042031118
```

Пример 2 диалога с пользователем

```
x >>> 0.7
eps = 1e-5 (n - нет, enter - да) >>> n
Задайте число цифр после запятой >>> 8
eps = 1e-8
sum = 0.86730052
n = 21
Проверки
sympy = 0.86730052
f(x) = 0.8673005276940532
```

5.19. Дано действительное x . Вычислить приближенное значение бесконечной суммы:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \quad (|x| > 1).$$

На печать выдавать

- 1) значение суммы $\sum_{i=i_{\text{нач.}}}^{\infty} y_i$, посчитанное с заданной точностью ε с использованием рекуррентного соотношения для нахождения общего члена ряда y_i ;
- 2) количество n членов суммирования, понадобившееся для достижения точности ε ;
- 3) результат вычисления частичной суммы ряда $\sum_{i=i_{\text{нач.}}}^n y_i$ с помощью метода `Sum()` библиотеки `sympy` (см. код в [примере 4.19](#));
- 4) результат вычисления функции $f(x)$ с помощью функции `ln()`.

Указание 1. Используйте [рекуррентные соотношения](#).

Указание 2. Для приближенного вычисления суммы используйте функцию с параметрами x и eps (eps — значение по умолчанию).

Указание 3. Примеры оформления диалога с пользователем см. в [задании 5.18](#).


5.20. Дано: $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i!} + \sqrt{|x|} \right).$$

Указание 1. Для вычисления факториала используйте [рекуррентные соотношения](#).

Указание 2. Для вычисления суммы используйте функцию с параметрами n и x .

Указание 3. Осуществите проверку результата при помощи [пакета Maple](#) или библиотеки `sympy`.


 **5.21.** Дано: $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^i + i}{i!}.$$

Указание 1. Для вычисления факториала и степенной функции используйте рекуррентные соотношения.


Указание 2. Для вычисления суммы используйте функцию с параметрами n и x .

Указание 3. Осуществите проверку результата при помощи [пакета Maple](#) или библиотеки `sympy`.

 **5.22.** Даны число $n \in \mathbb{N}$, первый член b_1 и знаменатель $q \neq 0$ геометрической прогрессии. Опишите функцию для определения суммы S_n первых n членов прогрессии по формуле

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Указание. Для определения степени числа q^n ($n \in \mathbb{N}$) используйте рекуррентное соотношение.

 **5.23.** Даны число $n \in \mathbb{N}$, первый член b_1 и ненулевой знаменатель $q \neq 1$ геометрической прогрессии. Опишите функцию для определения модуля произведения P_n первых n членов прогрессии по формуле

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 \cdot b_n|^n}.$$

Указание 1. Для определения n -го элемента геометрической прогрессии используйте формулу

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Указание 2. Для определения степени числа q^n ($n \in \mathbb{N}$) используйте рекуррентное соотношение.

6 Приложение 1. Математический пакет Maple



Пакет Maple — интерактивная программа, позволяющая в диалоговом режиме проводить аналитические выкладки и вычисления. Несмотря на то, что пакет имеет свой язык программирования, в данном курсе этот аспект рассматриваться не будет.

Представленный материал позволит научиться проводить простейшие вычисления и строить графики функций, используя программу Maple.

6.1 Начало работы с пакетом Maple



6.1. Используйте классический вариант программы Maple. Значок приложения Maple 11 (Classic worksheet) имеет вид:



Внешне Maple очень похож на текстовый редактор. Вся работа происходит в окне с документом, который может содержать формулы, рисунки, текст, комментарии и проч. Набор и редактирование Maple-команд происходят обычным образом с помощью клавиатуры и мыши.

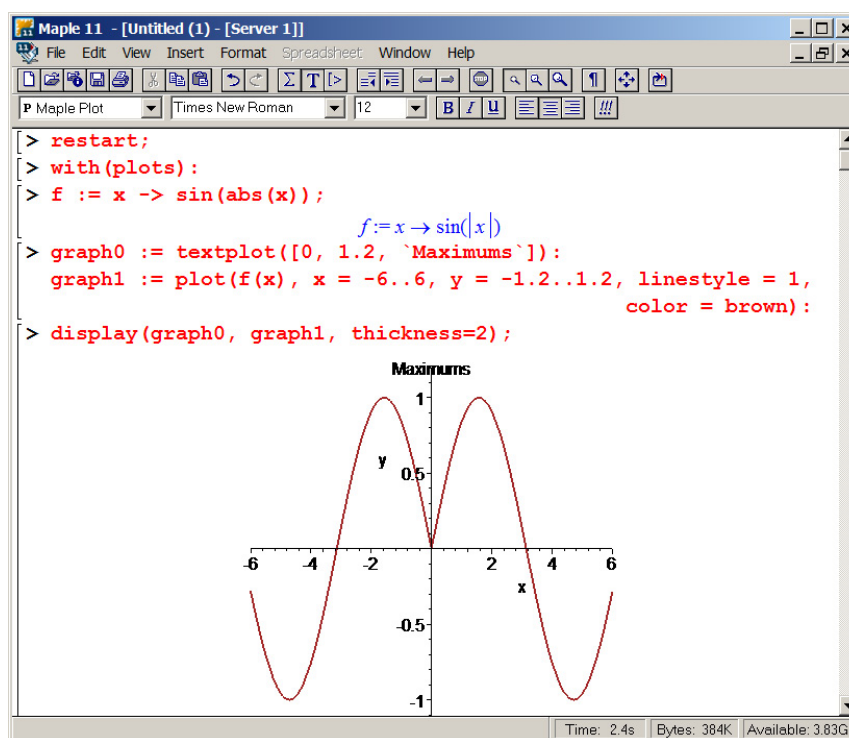


Рис. 7. Окно Maple 11 (Classic Worksheet)

Работа в Maple проходит в режиме сессии — пользователь вводит команды, которые обрабатываются Maple. Команды набираются после **приглашения** (`[>]`). Каждая команда должна завершаться разделителем: «`;`» или «`:`». В первом случае после нажатия клавиши Enter будет выведен результат исполнения команды или сообщение об ошибке, во втором случае команда выполняется, но результат не выводится.

Основные объекты

Объектами Maple могут быть числа, строки, имена переменных, команды, например,

```
345; 2.718281828; 3.8e4; 1.8e-3; 'Maple'; Pi; restart;
```

Запись числа в виде 271.8 называется **записью числа с фиксированной точкой**, а запись 2.718e2 называется **записью числа с плавающей точкой** и означает $2,718 \cdot 10^2$. Числа с плавающей точкой имеют **мантиссу** (число с фиксированной точкой) и **масштабный множитель** (порядок).

Экспоненциальную форму записи используют, как правило, при записи слишком малых или слишком больших чисел.

Оператор

Digits := n

задает **длину мантиссы для операций с плавающей запятой**.

В Maple есть все основные **математические константы**, приведем лишь некоторые из них

Имя константы	Описание
Pi	Число π
I	Мнимая единица
Infinity	Бесконечность

Имена этих констант являются зарезервированными, а их значения не могут быть переопределены в отличие от ряда управляющих констант (например, **Digits**, см. [с. 102](#)).

Строкой (string) является любой набор символов, заключенный в обратные кавычки (левая верхняя клавиша на клавиатуре): 'Maple'.



6.2. В некоторых версиях Maple для отображения строк используются двойные кавычки.

В Maple различаются малые и заглавные буквы

`sin(Pi);` `sin(pi);` (результат 0, $\sin(\pi)$).

Каждая переменная Maple имеет имя — набор символов (букв, цифр, знака подчеркивания), начинающийся с буквы, например,

`a;` `A;` `n1;` `newvalue;` `new_value;` `new_value;`

В качестве имен переменных запрещено использовать слова Maple-языка, например, `and`, `do`, `then`, `to` ...

Проверка совпадения с существующим зарезервированным словом:

`?name`

(здесь `name` — проверяемое имя переменной).

Если имя переменной совпадает с каким-либо зарезервированным словом, то Maple выдаст соответствующую страницу справочной системы (см. [рис. 8](#)).

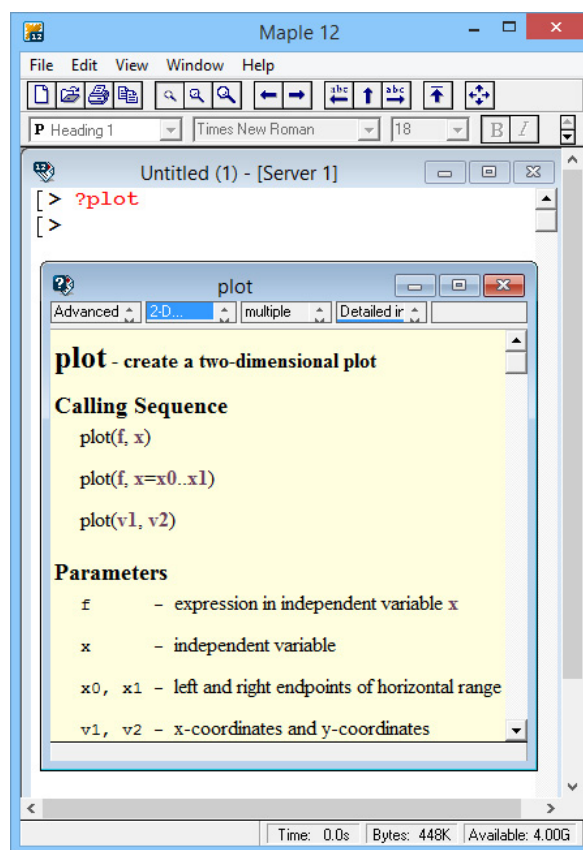


Рис. 8. Maple; страница справки

Скобки, применяемые в Maple

	Область применения	Пример использования
()	задают порядок выполнения операций в выражениях; обрамляют аргументы функций и параметры в записи команд;	$(a+b)*c+d$; $\cos(0)$; $\text{with}(\text{plots})$;
[]	для работы с индексными величинами;	$a[i]+b[i]$; $A[i,j]$;
{ }	для формирования множеств, систем уравнений;	$\text{solve}(\{x+y=2, 3*x=y\}, \{x,y\})$;

Знаки операций

+	сложение	$134+765$	/	деление	$13.4/7$
-	вычитание	$134-765$	^	возведение в степень	3^7
*	умножение	$13.4*7$!	факториал	$4!$

Порядок выполнения арифметических операций соответствует стандартным математическим правилам.

Знаки операций отношения

>	больше	<=	меньше либо равно	=	равно
<	меньше	>=	больше либо равно	<>	не равно

Некоторые стандартные функции

e^x	$\exp(x)$
$\log_a x$	$\log[a](x)$
$\ln x$	$\ln(x)$ или $\log(x)$
$\lg x$	$\log_{10}(x)$
\sqrt{x}	$\text{sqrt}(x)$
$ x $	$\text{abs}(x)$
$\text{sgn } x$	$\text{signum}(x)$
$\sin(x)$; $\cos(x)$; $\text{tg}(x)$; $\text{ctg}(x)$	$\sin(x)$; $\cos(x)$; $\tan(x)$; $\cot(x)$
$\arcsin(x)$; $\arccos(x)$	$\arcsin(x)$; $\arccos(x)$
$\arctg(x)$; $\text{arcctg}(x)$	$\arctan(x)$; $\text{arccot}(x)$

Каждая функция имеет **аргумент**, который заключается в круглые скобки. В качестве аргументов функции могут указываться числа, константы, имена переменных, арифметические выражения и проч.

Из констант, переменных, знаков арифметических операций, имен функций и скобок составляются **выражения**.

Пример 6.1 (запись выражений). Выражение

$$\frac{(1.4 + 7.65)(13.4 - 5.45)}{1.4} 3!$$

в Maple запишется в виде

Строка в окне Maple

```
[> (1.4 + 7.65) * (13.4 - 5.45) / 1.4 * 3!;
```

Знак # служит для вставки комментария. Текст строки после этого символа игнорируется.

Например, дробь $\frac{a+b}{ab}$ может быть представлена в виде

Строка в окне Maple

```
[> (a + b) / a / b; # лучше делить последовательно
```

Пример 6.2 (непривычное представление выражений). Выражения

$\sin^2(x + 10)$ — квадрат функции; $\sin(x + 10)^2$ — квадрат аргумента функции

в Maple можно записать в виде

Строка в окне Maple

```
[> (sin(x+10))^2;
[> sin((x+10)^2);
```

На печати результат выглядит непривычно

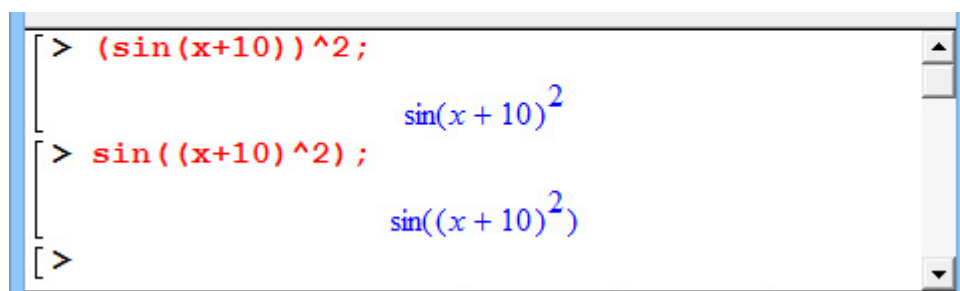


Рис. 9. Maple; непривычное представление выражений

Оператор присваивания

В результате выполнения оператора присваивания ($:=$) переменной, стоящей слева от этого знака, присваивается значение некоторого выражения (стоящего справа от знака $:=$). Например,

Операторы присваивания

```
a := 0;    b := c;
x1 := b * b - 4 * a * c;    x := x1;
```



6.3. Обратите внимание на способ расстановки пробелов в приведенном примере. Желательно каждый оператор (выражение, команду) изображать в редакторе Maple в отдельной строке. Если в одной строке стоит более одного оператора, то между ними следует вставлять не менее двух пробелов.

Пример 6.3 (использование знаков $=$ и $:=$). Присвоим переменной d сумму чисел 3 и 8. Приравняем Sum0 значение переменной d :

Знаки $:=$ и $=$

```
[> d := 3 + 8;    Sum0 = d;
```

Выдадим на печать значения d и Sum0 :

Получение значений переменных

```
[> d;
[> Sum0;
```

Результат

11
Sum0

Переменная Sum0 оказалась без значения, так как вместо знака присваивания был использован знак равенства.

Для отмены всех сделанных присваиваний и начала нового сеанса без выхода из программы Maple используется команда **restart**.

Как видно из [примера 6.3](#), для выдачи значения любой скалярной переменной достаточно в строке ввода указать имя самой переменной.

Для просмотра содержимого индексных переменных (например, вектора с именем `Expr`) используется команда `eval(Expr)`.

Команда `evalm(Expr)` вычисляет матричное выражение. В выражении используются матрицы в качестве операндов и некоторые операции (см. [пример 6.4](#)).

Пример 6.4 (использование команд `eval` и `evalm`). Для вывода на экран матрицы или вектора используется команда `eval`. Команда `evalm` здесь вычисляет произведение вектора-строки и матрицы (количество элементов вектора должно совпадать с числом строк матрицы) и сумму двух матриц.

```

[> a := array(1..3, 1..2, [[1,5], [0,6], [4,7]]):
[> b := array(1..3, [1,2,3]):
[> c := array(1..3, 1..2, [[1,1], [2,2], [3,4]]):
[> eval(a);

      [ 1  5 ]
      [ 0  6 ]
      [ 4  7 ]

[> eval(b);

      [1,2,3]

[> eval(c);

      [ 1  1 ]
      [ 2  2 ]
      [ 3  4 ]

[> evalm(b &* a); # умножение вектора на матрицу
      [13,38]

[> evalm(a + c); # сумма двух матриц
      [ 2  6 ]
      [ 2  8 ]
      [ 7 11 ]

```

Рис. 10. Maple; вывод векторов и матриц

Две идущие подряд точки (..) в опциях команд применяются для **определения интервала изменения переменных**.

Вычисление пределов

Команды для вычисления пределов

`Limit(Expr, x = Val, Dir);` и `limit(Expr, x = Val, Dir);`

Здесь `Expr` — выражение, для которого вычисляется предел (функция или n -й член последовательности); `x = Val` — значение точки, в которой вычисляется предел; `Dir` — необязательный параметр, который может принимать значения: `left` (предел слева), `right` — предел справа, `real` (действительный) или `complex` (комплексный).

Сравните результат работы операторов

```
[> Limit(exp(x), x = infinity);
[> limit(exp(x), x = infinity);
[> Limit((x-1)/x, x = infinity);    value(%);
[> Limit((x-1)/x, x = infinity):    % = value(%);
```

Команда `value(Expr)` вычисляет алгебраическое выражение с именем `Expr`. В упражнении в качестве выражения команды `value` используется знак `%`, который означает, что требуется найти значение предыдущего выражения (предела в данном случае).

Служебное слово `infinity` служит для обозначения бесконечности (символ ∞).

Пример 6.5 (вычисление предела). Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ равен числу e . Соответствующая команда для его вычисления:

Вычисление предела

```
[> Limit((1 + 1 / x)^x, x = infinity): % = evalf(%);
```

Для получения значения величины e здесь использована команда

`evalf(Expr),`

которая приводит выражение `Expr` к форме записи с фиксированной запятой или с плавающей запятой в зависимости от величины результата.

Результат будет иметь вид

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.718281828 \quad (6.1)$$

Суммирование

Сумму некоторых элементов можно получить с помощью команды

$$\text{sum}(s, k = m..n);$$

здесь s — суммируемое выражение (число или имя переменной в простейшем случае); k — диапазон изменения индекса суммирования (от m до n , где m и n , вообще говоря, целые).

Например, $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, можно получить командой

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

```
[> sum(x^k, k = 1..5);
```

Для вывода суммы в виде $\sum_{k=1}^5 x^k$ используется команда `Sum`.

Пример 6.6 (вычисление суммы). Равенство

Информативный вывод

```
[> Sum(x^k, k = 1..5) = sum(x^k, k = 1..5);
```

позволит получить на экране сумму в виде

$$\sum_{k=1}^5 x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5. \quad (6.2)$$



6.4. Подобно суммированию можно записывать и произведение некоторых выражений, например,

$$\prod_{k=1}^3 (x + k) = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

Соответствующие Maple-команды: `Product()` (`product()`).

6.2 Дифференцирование и интегрирование

Дифференцирование

Команды для нахождения производных

`Diff(Expr, x);` и `diff(Expr, x);`

Здесь `Expr` — выражение, от которого вычисляется производная; `x` — переменная, по которой происходит дифференцирование.

Сравните результаты команд `Diff` и `diff`

```
[> Diff(x^3/3, x); value(%);  
[> diff(x^3/3, x);  
[> diff(x^3/3, x$2);
```

В последнем выражении после знака `$` указан порядок дифференцирования. В данном случае будет вычислена производная второго порядка.

Производную второго порядка $f''(x)$ можно найти и просто продифференцировав $f'(x)$. Например,

```
[> df := diff(x^3/3, x); diff(df, x);
```

Здесь сначала нашли первую производную и присвоили ее значение переменной `df`, а затем продифференцировали `df` один раз по `x`.

Много операторов в одной командной строке

```
[> f := x -> x^(3/5);  
    Diff(f(x), x);  
    value(%);  
    subs(x = 0.5, %);
```

Переход на новую строку без выполнения команды:

`<Shift> + <Enter>`.

Команда `subs` позволяет получить результат алгебраического выражения при конкретном значении x .

Интегрирование

Команды для нахождения неопределенных интегралов

`Int(Expr, x)` и `int(Expr, x)`

Здесь `Expr` — интегрируемое выражение; `x` — переменная интегрирования.

Команды для нахождения определенных интегралов

`Int(Expr, x = a..b)` и `int(Expr, x = a..b)`

Здесь `a, b` — отрезок интегрирования.

Пример 6.7 (нахождение определенного интеграла). Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$$

Подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{1}{3 + 2 \cos x}$$

зададим следующим образом:

_____ **Задание функции** _____
`[> f := x -> 1/(3 + 2*cos(x));`

Проинтегрировав функцию $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$

_____ **Интегрирование функции на отрезке** _____
`[> Int(f(x), x = 0..Pi): % = evalf(%);`

получим

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x} = 1.404962946 \quad (6.3)$$

Численное интегрирование

Численный метод	Maple-оператор
средних прямоугольников	<code>middlesum()</code> , <code>middlebox()</code>
левых прямоугольников	<code>leftsum()</code> , <code>leftbox()</code>
правых прямоугольников	<code>rightsum()</code> , <code>rightbox()</code>
трапеций	<code>trapezoid()</code>

Maple: интегрирование (численный метод)

```
[> with(student);
[> f := x -> ...;           # подынтегральная функция f(x)
[> a := ...;   b := ...;    # пределы интегрирования
[> n := 2;           # число прямоугольников
[> evalf(middlesum(f(x), x=a..b, n)); # результат: число
[> middlebox(f(x), x=a..b, n);      # результат: рисунок
```

6.3 Графика в Maple. Элементарное введение

Команда plot

Простейшая команда для построения графика функции одной переменной:

```
plot(func1, func2, ..., x = a..b, y = c..d, options)
```

здесь `func1`, `func2`,... — выражения, зависящие от переменной x (если строится график одной функции, то фигурные скобки можно не указывать); `a..b` — интервал изменения переменной x ; `c..d` — выводимый интервал по оси ординат; `options` — опции, меняющие свойства графика (необязательный параметр, см. [таблицу на с. 112](#)).

Некоторые опции двумерной графики

<code>title = 'Name'</code>	заголовок рисунка
<code>coords = polar</code>	полярные координаты (по умолчанию — декартовы)
<code>style = line/point</code>	стиль вывода графика — линиями или точками
<code>color = colorvalue</code>	цвет выводимых линий (<code>black</code> , <code>blue</code> , <code>red</code> , ...)
<code>thickness = n</code>	толщина линии ($n = 1, 2, \dots$)
<code>linestyle = n</code>	($n = 1, 2, \dots$) тип выводимой линии (непрерывная $n = 1$; пунктирная).

Пример 6.8 (построение графика функции). Команда

График функции $\cos x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$

```
[> plot(cos(x), x = -2*Pi..2*Pi);
```

позволяет построить график функции $\cos x$ на интервале $[-2\pi, 2\pi]$. Область вывода графика по оси ординат выбирается автоматически, также как и цвет линии.

Удобно до вызова команды `plot` определить функцию и пределы для вывода графика по оси абсцисс (команда `plot` в этом случае будет иметь универсальную запись):

```
[> f := x -> cos(x):    t := 2 * Pi:
[> plot(f(x), x = -t..t);
```

Пример 6.9 (построение двух графиков в одной области вывода). Команда для построения графиков функций $x/2$ и $\sin|x|$ на интервале $[-6, 6]$ (область вывода по оси ординат $[-2, 2]$) имеет вид

Графики функций $x/2$, $\sin|x|$, $x \in [-6, 6]$, $y \in [-2, 2]$

```
[> f := x -> x / 2:
    g := x -> sin(abs(x)):
[> plot({f(x), g(x)}, x = -6..6, y = -2..2, color = [blue, red]);
```

Здесь дополнительно установлен цвет графиков (синий и красный).

Команда `display`

Более удобной для вывода графических образов является команда

```
display([pic1, pic2, ...], options)
```

Здесь образы `pic1`, `pic2`, ... выводятся на одном рисунке в общих осях координат.

Перед использованием команды вывода `display` необходимо подключить пакет `plots` (см. [пример 6.10](#)) и определить переменные с именами `pic1`, `pic2`,... через соответствующие команды для построения графиков.

Команда для подключения пакета имеет вид

```
with(package):
```

где `package` — имя подключаемого пакета. Например, пакет `plots` содержит команды для расширенной работы с графикой.

Пример 6.10 (использование команды `display`). Построение графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с использованием команды `display`.

Использование команды `display`

```
[> f := x -> sin(x):  
[> g := x -> cos(x):  
[> graph01 := textplot([3.1, 0.8, 'y = sin(x)', color = brown]):  
[> graph02 := textplot([-1.5, 0.8, 'y = cos(x)', color = blue]):  
[> graph1 := plot(f(x), x = -2*Pi..2*Pi, y = -1.2..1.2,  
                 linestyle = 3, color = brown):  
[> graph2 := plot(g(x), x = -2*Pi..2*Pi, y = -1.2..1.2,  
                 linestyle = 1, color = blue):  
[> display(graph01, graph02, graph1, graph2, thickness=2);
```

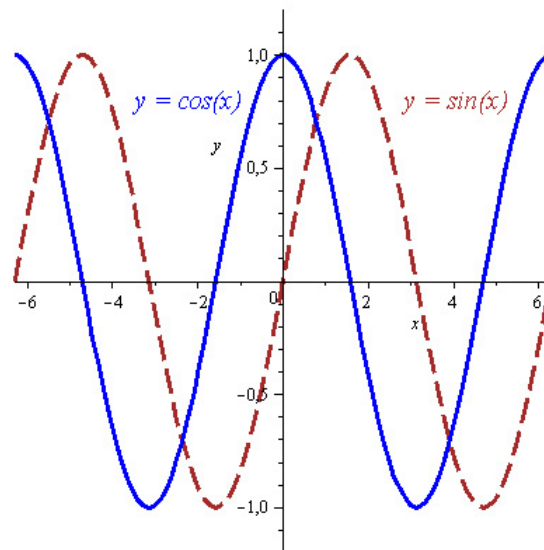


Рис. 11. Maple; использование команды `display`

Команда `textplot([X, Y, 'Текст'])` позволяет поместить в точке с координатами X, Y любую текстовую строку.

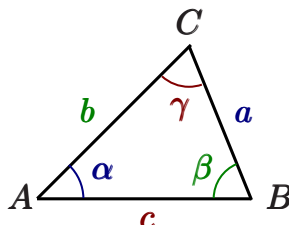
7 Приложение 2. Справочные материалы

7.1 Немного математики

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

α — угол, противолежащий стороне a (см. рис.).



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Гиперболические функции (синус и косинус):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Замена основания логарифма

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Обратные тригонометрические функции

$$\arcsin(\sin y) = y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \quad \arccos(\cos y) = y, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

$$\operatorname{arccotg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

$$\arccos x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Единичная матрица третьего порядка:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы второго порядка:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Определитель матрицы третьего порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

7.2 Таблица ASCII-кодов некоторых символов

Разные значки—I

32 —	36 — \$	40 — (44 — ,
33 — !	37 — %	41 —)	45 — -
34 — ”	38 — &	42 — *	46 — .
35 — #	39 — ’	43 — +	47 — /

Цифры

48 — 0	50 — 2	52 — 4	54 — 6	56 — 8
49 — 1	51 — 3	53 — 5	55 — 7	57 — 9

Разные значки—II

58 — :	59 — ;	60 — <	61 — =	62 — >	63 — ?	64 — @
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Прописные буквы латинского алфавита

65 — A	69 — E	73 — I	77 — M	81 — Q	85 — U	89 — Y
66 — B	70 — F	74 — J	78 — N	82 — R	86 — V	90 — Z
67 — C	71 — G	75 — K	79 — O	83 — S	87 — W	
68 — D	72 — H	76 — L	80 — P	84 — T	88 — X	

Разные значки—III

91 — [92 — \	93 —]	94 — ^	95 — _	96 — ‘
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Разные значки—IV

123 — {	124 —	125 — }	126 — ~
---------	-------	---------	---------

Строчные буквы латинского алфавита

97 — a	101 — e	105 — i	109 — m	113 — q	117 — u	121 — y
98 — b	102 — f	106 — j	110 — n	114 — r	118 — v	122 — z
99 — c	103 — g	107 — k	111 — o	115 — s	119 — w	
100 — d	104 — h	108 — l	112 — p	116 — t	120 — x	

Прописные буквы русского алфавита

128 — А	132 — Д	136 — И	140 — М	144 — Р	148 — Ф	152 — Ш	156 — Ъ
129 — Б	133 — Е	137 — Ё	141 — Н	145 — С	149 — Х	153 — Щ	157 — Э
130 — В	134 — Ж	138 — К	142 — О	146 — Т	150 — Ц	154 — Ы	158 — Ю
131 — Г	135 — З	139 — Л	143 — П	147 — У	151 — Ч	155 — Ь	159 — Я

Строчные буквы русского алфавита—I

160 — а	162 — в	164 — д	166 — ж	168 — и	170 — к	172 — м	174 — о
161 — б	163 — г	165 — е	167 — з	169 — й	171 — л	173 — н	175 — п

Строчные буквы русского алфавита—II

224 — р	226 — т	228 — ф	230 — ц	232 — ш	234 — ъ	236 — ь	238 — ю
225 — с	227 — у	229 — х	231 — ч	233 — щ	235 — ы	237 — э	239 — я

7.3 Системы счисления

Перевод чисел в десятичную систему счисления

Развернутая запись числа. В произвольной позиционной системе счисления любое число представляется суммой

$$N_p = \pm(a_{i-1}p^{i-1} + \dots + a_1p^1 + a_0p^0 + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \dots + a_{-m}p^{-m}),$$

где p — **основание системы счисления** ($p > 1$), т. е. количество цифр, доступных для записи чисел; i — количество целых разрядов числа; a_k — цифры данной системы счисления.

Правило перевода. Число, представленное в любой системе счисления, необходимо записать в развернутой форме и вычислить его значение.

Пример 7.1. Подробный процесс перевода p -ичных чисел:

$$142_5 = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 5^2 + 4 \cdot 5 + 2 = 25 + 20 + 2 = 47_{10};$$

$$142_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 8^2 + 4 \cdot 8 + 2 = 64 + 32 + 2 = 98_{10};$$

$$12C_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 16^2 + 2 \cdot 16 + C = 256 + 32 + 12 = 300_{10}.$$

Для сокращения записи сумму, выделенную красным цветом, рекомендуется пропускать. Особенно это касается перевода чисел из двоичной системы счисления

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2^2 + 1 = 5_{10}.$$

Пример 7.2. Примеры перевода нецелых чисел:

$$54,5_8 = 5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^{-1} = 5 \cdot 8 + 4 + \frac{5}{8} = 44,625_{10},$$

$$1001,01_2 = 2^3 + 2^0 + 2^{-2} = 8 + 1 + \frac{1}{4} = 9,25_{10}.$$

Перевод чисел из десятичной системы счисления

Правило перевода целой части числа. Целая часть числа делится на основание p новой системы счисления, остаток от деления запоминается. Полученное частное вновь делится на p , остаток запоминается. Процесс продолжается до тех пор, пока частное не станет меньше делителя. Остатки от деления на p выписываются в порядке, обратном их получению.

Пример 7.3. Переведем десятичное число 35 в систему счисления с основанием p ($p = 2, 8, 16$). В таблицах, демонстрирующих процесс перевода, в левом столбце записаны частные, в правом — остатки от деления на p . Стрелки обозначают направление записи остатков.

35		1
17		1
8		0
4		0
2		0
1		1

$$35_{10} = 100011_2.$$

35		3
4		4

$$35_{10} = 43_8.$$

35		3
2		2

$$35_{10} = 23_{16}.$$

Компактный способ записи процесса перевода целого десятичного числа $X_{10} \rightarrow Y_p$ на примере $35 = X_2$:

$$35_1 \ 17_1 \ 8_0 \ 4_0 \ 2_0 \ 1_1 = 100011_2.$$

Здесь **индексы** — остатки от деления указанного числа на $p = 2$, которые в ответе выписываются в обратном порядке (справа налево).

Пример 7.4. Перевод числа 72 в системы счисления с основаниями $p = 2, 3, 4, 5$:

$$p = 2: \ 72_0 \ 36_0 \ 18_0 \ 9_1 \ 4_0 \ 2_0 \ 1_1 = 1001000_2,$$

$$p = 3: \ 72_0 \ 24_0 \ 8_2 \ 2_2 = 2200_3,$$

$$p = 4: \ 72_0 \ 18_2 \ 4_0 \ 1_1 = 1020_4,$$

$$p = 5: \ 72_2 \ 14_4 \ 2_2 = 242_5.$$

Правило перевода дробной части числа. Дробная часть числа последовательно умножается на основание новой системы счисления, после чего целая часть запоминается и отбрасывается. Процесс продолжается до тех пор, пока дробная часть не станет равной нулю. Целые части выписываются после запятой в порядке их получения.

Пример 7.5. Перевод числа $0,1875_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

В левом столбце таблицы записаны целые части, в правом — дробные. Стрелка обозначает направление записи остатков.

0		1875	
↓ 1		5	
4		0	$0,1875_{10} = 0,14_8.$

Компактный способ записи процесса перевода дробного десятичного числа $0, X_{10} \rightarrow Y_p$ продемонстрируем на примере перевода числа $0,1875$ в 8-ричную систему счисления:

$$0|1875 \quad 1|5 \quad 4|0 = 0,14$$

Здесь **индексы** — целые части, которые запоминаются и отбрасываются. В ответе целые части выписываются в порядке их получения.

Пример 7.6. Перевод числа $137,8755$ в 8-ричную систему счисления.

Целая и дробная части переводятся отдельно, а затем складываются. Результат перевода дробной части получим с четырьмя знаками после запятой.

$$137 = X_8: \quad 137_1 \quad 17_1 \quad 2_2 = 211_8.$$

$$0,8755 = Y_8: \quad 0|8755 \quad 7|004 \quad 0|032 \quad 0|256 \quad 2|048 = 0,7002.$$

Ответ: $211,7002.$

Быстрый перевод чисел: $X_{10} \leftrightarrow Y_2$

Пример 7.7. Быстрый перевод продемонстрируем на примере перевода числа 53 в двоичную систему счисления.

Решение. Представляем заданное число в виде сумм степеней двойки, начиная с самой большой степени:

$$53 = 32 + 16 + 4 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 =$$

Наличие некоторой степени двойки в сумме означает, что при переводе числа в двоичную систему счисления на позициях, совпадающих с показателем степени двойки находится цифра 1, в остальных случаях 0:

$$= 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = \overset{5}{1} \overset{4}{1} \overset{3}{0} \overset{2}{1} \overset{1}{0} \overset{0}{1}_2 .$$

Двоичные триады

Восьмеричная система счисления ($8 = 2^3$)

Каждая 8-ричная цифра может быть представлена **тройкой** двоичных цифр — **триадой**.

Цифра ₁₀	Цифра ₈	Триада ₂
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Двоичные тетрады

Шестнадцатичная система счисления ($16 = 2^4$)

Каждая 16-ричная цифра может быть представлена **четверкой** двоичных цифр — **тетрадой**.

Число ₁₀	Цифра ₁₆	Тетрада ₂
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод чисел: $X_2 \rightarrow Y_{2^k}$ и $X_{2^k} \rightarrow Y_2$

Системы счисления, основания которых являются степенями одного числа, называют **родственными**.

Системы счисления, родственные двоичной: 4, 8, 16.

Запись $p = 2^k$ означает, что число p представляет собой степень числа 2 с показателем k :

- $p = 16 = 2^4$, здесь $k = 4$.

Запись $X_2 \rightarrow Y_{2^k}$ означает, что число переводится из двоичной системы счисления в родственную систему счисления.

Правило перевода числа из двоичной системы счисления в родственную систему счисления ($X_2 \rightarrow Y_{2^k}$)

- 1) Разбить цифры двоичного числа на группы по k цифр (где k — значение показателя степени двойки у основания новой системы счисления).
- 2) Каждую группу заменить соответствующей цифрой новой системы.

Для целого числа разбиение по группам производится **справа налево**, при необходимости дополняя нулями крайнюю **левую** группу.

Например, при переводе целого двоичного числа в 8-ричную систему ($k = 3$) число разбиваем на триады справа налево

$$1111010101_2 = \text{001 111 010 101}$$

←-- ←-- ←-- ←--

Для дробного числа разбиение на группы производится

- ← **справа налево** для цифр, стоящих слева от запятой, при необходимости дополняя нулями крайнюю **левую** группу;
- **слева направо** для цифр, стоящих справа от запятой, при необходимости дополняя нулями крайнюю **правую** группу

При переводе в 8-ричную систему счисления ($k = 3$) число разбиваем на двоичные триады; при переводе в 16-ричную систему счисления ($k = 4$) — двоичные тетрады

$$1111010101,11_2 = \underbrace{001}_{\leftarrow} \underbrace{111}_{\leftarrow} \underbrace{010}_{\leftarrow} \underbrace{101}_{\leftarrow}, \underbrace{110}_{\rightarrow} = \underbrace{0011}_{\leftarrow} \underbrace{1101}_{\leftarrow} \underbrace{0101}_{\leftarrow}, \underbrace{1100}_{\rightarrow}_2.$$

Пример 7.8. Перевести в 8- и 16-ричную системы счисления число $110,001_2$.

Решение. Разбиваем число $110,001_2$ на триады и тетрады, которые затем заменяем соответствующими 8- и 16-ричными цифрами.

Двоичные триады	110	,	001
8-ричные цифры	6	,	1

Двоичные тетрады	0110	,	0010
16-ричные цифры	6	,	2

Ответ: $110,001_2 = 6,1_8 = 6,2_{16}$.

Правило перевода числа из системы счисления с основанием, равным степени двойки, в двоичную систему счисления ($X_{2^k} \rightarrow Y_2$)

каждую цифру числа преобразовать в группу двоичных цифр; количество двоичных цифр в группах равно показателю степени двойки в старой системе счисления.

Пример 7.9. Выполнить перевод числа $10,47_8$ в двоичную систему счисления.

Решение. Каждую цифру числа $10,47_8$ заменяем двоичной триадой:

8-ричные цифры	1	0	,	4	7
Двоичные триады	001	000	,	100	111

Ответ: $10,47_8 = 1000,100111_2$.

Перевод чисел: $X_p \rightarrow Y_s$

Правило перевода числа из произвольной системы счисления в произвольную систему счисления ($X_p \rightarrow Y_s$):

- 1) перевести число из исходной системы счисления в **десятичную**;
- 2) перевести десятичное число в требуемую систему счисления.

Кратко правило запишется в виде: $X_p \rightarrow Z_{10} \rightarrow Y_s$.

Правило перевода $X_{2^k} \rightarrow Y_{2^m}$:

- 1) перевести число из исходной системы счисления в **двоичную**;
- 2) перевести двоичное число в требуемую систему счисления.

Кратко правило запишется в виде: $X_{2^k} \rightarrow Z_2 \rightarrow Y_{2^m}$.

Арифметические операции

Арифметические действия в любой позиционной системе выполняются подобно аналогичным операциям с десятичными числами. Выполнение арифметических операций в системе счисления с основанием p удобно проводить по таблицам сложения и умножения.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Пример 7.10. Сложение «больших» чисел:

а) $100000100_{(2)} + 111000010_{(2)} = 1011000110_{(2)}$.

$$\begin{array}{r}
 100000100 \\
 + 111000010 \\
 \hline
 1011000110
 \end{array}$$

б) $147,14_{(8)} + 350,34_{(8)} = 517,5_{(8)}$.

$$\begin{array}{r}
 147,14 \\
 + 350,34 \\
 \hline
 517,50
 \end{array}$$

в) $12C,3_{(16)} + 3B3,5_{(16)} = 4DF,8_{(16)}$.

$$\begin{array}{r}
 12C,3 \\
 + 3B3,5 \\
 \hline
 4DF,8
 \end{array}$$

Пример 7.11. Вычитание чисел:

а) $1001,01_{(2)} - 110,1_{(2)} = 10,11_{(2)}.$

$$\begin{array}{r} 1001,01 \\ - 110,1 \\ \hline 10,11 \end{array}$$

б) $411,2_{(8)} - 231,54_{(8)} = 157,44_{(8)}.$

$$\begin{array}{r} 411,2 \\ - 231,54 \\ \hline 157,44 \end{array}$$

в) $4D2,8_{(16)} - 3B3,5_{(16)} = 11F,3_{(16)}.$

$$\begin{array}{r} 4D2,8 \\ - 3B3,5 \\ \hline 11F,3 \end{array}$$

Пример 7.12. Умножение «больших» чисел:

а) $117_8 \cdot 53_8 = 6505_8.$

$$\begin{array}{r} \times 117 \\ 53 \\ \hline 355 \\ + 613 \\ \hline 6505 \end{array}$$

б) $117_{16} \cdot 53_{16} = 5A75_{16}.$

$$\begin{array}{r} \times 117 \\ 53 \\ \hline 345 \\ + 573 \\ \hline 5A75 \end{array}$$

Некоторые факты, которые следует запомнить

Умножение числа на величину основания приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной, на один разряд **вправо**:

$$777,77_{10} \cdot 10 = 7777,7_{10}; \quad 101,01_2 \cdot 2 = 1010,1_2;$$

Деление числа на величину основания приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной, на один разряд **влево**:

$$777,77_{10} : 10 = 77,777_{10}; \quad 101,01_2 : 2 = 10,101_2.$$

Представление целых чисел

В k -разрядной ячейке может храниться 2^k различных значений целых чисел.

Диапазон значений целых неотрицательных чисел: от 0 до $2^k - 1$.

Алгоритм получения внутреннего представления положительного числа N , хранящегося в k разрядном машинном слове:

- 1) перевести число N в двоичную систему счисления;
- 2) результат перевода дополнить слева незначащими нулями до k разрядов.

Например, внутреннее представление числа 37 в двухбайтовой ячейке:

0000 0000 0010 0101₂.

Для представления отрицательных чисел используется дополнительный код, который позволяет заменить арифметическую операцию вычитания операцией сложения $A - B = A + (-B)$. Это существенно упрощает работу процессора и увеличивает его быстродействие.

Классический алгоритм получения внутреннего представления отрицательного числа N , хранящегося в k разрядном машинном слове:

- 1) получить внутреннее представление положительного числа N ;
- 2) получить **обратный код** этого числа заменой 0 на 1 и 1 на 0 (инвертировать значения всех бит);
- 3) к полученному числу прибавить 1.

Данная форма называется **дополнительным кодом**.

Пример 7.13 (классика). Получение внутреннего представления числа -17 в однобайтной ячейке.

Решение.

- 1) Получение внутреннего представления числа 17:

$$17 = 10001_2 = (\text{добавляем незначащие нули до 8 разрядов}) = 0001\,0001_2.$$

- 2) Получение обратного кода (инвертирование бит): $1110\,1110_2$

- 3) Получение дополнительного кода (добавление 1): $11101110_2 + 1 = 11101111_2$.

Внутреннее представление числа -17 : 11101111 .

Альтернативный алгоритм получения внутреннего представления отрицательного числа N , хранящегося в k разрядном машинном слове:

- 1) вычесть из положительного числа N единицу;
- 2) полученное число перевести в двоичную систему счисления;
- 3) результат дополнить слева незначащими нулями до k разрядов;
- 4) инвертировать значения всех бит.

Пример 7.14 (альтернатива). Получение внутреннего представления числа -17 в однобайтной ячейке с использованием альтернативного алгоритма.

Решение.

- 1) $17 - 1 = 16$;
- 2) $16 = 2^4 = 10000_2$;
- 3) $0001\,0000_2$;
- 4) $1110\,1111_2$.

Внутреннее представление числа -17 : 11101111 .

Достоинство альтернативного способа заключается в том, что не надо в двоичной системе счисления проводить операцию добавления единицы.

Классический алгоритм перевода дополнительного кода в десятичное число:

- 1) инвертировать дополнительный код;
- 2) к полученному коду прибавить единицу (результат: модуль отрицательного числа);
- 3) перевести результат в десятичное число;
- 4) приписать знак отрицательного числа.

Пример 7.15 (классика). По дополнительному коду 11101111_2 восстановить десятичное отрицательное число.

Решение.

- 1) Инвертирование дополнительного кода: $0001\,0000_2$.
- 2) Добавление единицы: $1\,0000_2 + 1 = 1\,0001_2$.
- 3) Перевод в десятичное число: $10001_2 = 17$.
- 4) Приписывание знака «минус»: -17 .

Альтернативный алгоритм перевода дополнительного кода в десятичное число:

- 1) инвертировать дополнительный код;
- 2) перевести результат в десятичное число;
- 3) к полученному коду прибавить единицу (результат: модуль отрицательного числа);
- 4) приписать знак отрицательного числа.

Пример 7.16 (альтернатива). По дополнительному коду 11101111_2 восстановить десятичное отрицательное число.

Решение.

- 1) Инвертирование дополнительного кода: $0001\,0000_2$.
- 2) Перевод в десятичное число: $10000_2 = 16$
- 3) Добавление единицы: $16 + 1 = 17$.
- 4) Приписывание знака «минус»: -17 .

Список литературы

- [1] Лутц М. Изучаем Python. 4-е изд. Пер.с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2011.
- [2] Саммерфелд М. Программирование на Python 3. Подробное руководство. Пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2009.
- [3] Бизли Д. Python. Подробный справочник. Символ-Плюс, 2010.
- [4] Васильев А. Н. Python на примерах. Практический курс по программированию. СПб.: Наука и Техника, 2016.
- [5] Россум Г., Дрейк Ф. Л. Дж., Откидач Д. С. и др. Язык программирования Python. 2001. (версии от 1.5.2 до 2.0)
- [6] Документация по языку Python. URL: <https://www.python.org/doc/> (дата обращения: 1.09.2017).
- [7] Python 3.6.2 documentation. URL: <https://docs.python.org/3/> (дата обращения: 1.09.2016).
- [8] Ссылки на русскоязычные ресурсы.
URL: <https://wiki.python.org/moin/RussianLanguage> (дата обращения: 1.09.2017).
- [9] Онлайн изучение языка Python для начинающих. URL: <http://pythontutor.ru/> (дата обращения: 1.09.2017).
- [10] Онлайн изучение языка Python. URL: <http://learnpython.org/> (дата обращения: 1.09.2017).
- [11] Редактор Pyzo. URL: <http://www.pyzo.org/start.html>
- [12] Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы. М.: Мир, 1985.
- [13] Ахо А. В., Хопкрофт Дж. Э., Ульман Д. Д. Структуры данных и алгоритмы. М.: Изд. Дом «Вильямс», 2000.
- [14] Абрамов С. А., Зима Е. В. Начала информатики. М.: Наука, 1989.
- [15] Амелина Н. И., Демяненко Я. М., Лебединская Е. Н. и др. Задачи по программированию. М.: Вуз. книга, 2000.

- [16] Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. СПб.: Питер, 2001.
- [17] Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Maple — система аналитических вычислений для математического моделирования. [Электронный ресурс]. URL: http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/mme/courses/maple_c/ (дата обращения: 2.12.2015).
- [18] Могилев А. В., Пак Н. И., Хеннер Е. К. Практикум по информатике. М.: Издательский центр «Академия», 2001.
- [19] Ширяева Е. В., Романов М. Н., Долгих Т. Ф. Практикум по курсу «Основы информатики» (электронное учебное пособие). Ростов-на-Дону, ЮФУ. Компьютерная разработка фонда компьютерных изданий ЮФУ, регистр. № 844 от 7.12.2015. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.open-edu.sfedu.ru/node/2853> (дата обращения: 1.09.2016).
- [20] Ширяева Е. В., Романов М. Н., Долгих Т. Ф., Мелехов А. П., Полякова Н. М. Основы программирования. Python 3 (электронное учебное пособие). Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 23208 от 24.10.2017. ОФЭРНИО.

При создании электронного пособия использовались системы \LaTeX 2_ε, \XeTeX и материалы книги:

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. \LaTeX 2_ε: искусство набора и вёрстки текстов с формулами. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. 192 с.

Список иллюстраций

1	Блок-схемы (слева if-else в if; справа if в if-else)	36
2	Получение коэффициента C в примере 4.19 с помощью программы Maple	59
3	Значения $y_i = 1/i^2$	60
4	График $f_2(x)$ на интервале $[-10; 10]$	94
5	График $f_1(x)$ на интервале $[0; 5]$	94
6	Заданный четырехугольник	95
7	Окно Maple 11 (Classic Worksheet)	101
8	Maple; страница справки	103
9	Maple; непривычное представление выражений	105
10	Maple; вывод векторов и матриц	107
11	Maple; использование команды display	114

Предметный указатель

Maple

..., 108
[>, 103
#, 106
%, 109
Diff(), 111
diff(), 111
Digits, 103
display(), 114
eval(), 108
evalf(), 109
evalm(), 108
I, 103
Infinity, 103
infinity, 109
Int(), 112
int(), 112
leftbox(), 113
leftsum(), 113
limit(), 109
middlebox(), 113
middlesum(), 113
Pi, 103
plot(), 113
Product(), 110
product(), 110
restart, 107
rightbox(), 113
rightsum(), 113
subs(), 111
Sum(), 110
sum(), 110
textplot(), 115
trapezoid(), 113
value(), 109

with(), 114
возведение в степень, 105
комментарий, 106
пакет plots, 114
строка, 103
факториал, 105

Python

abs(), 7
def, 84
for-to-do, 69
from ... import *, 7
from ... import ..., 76
help(), 93
if-then, 29
import, 5, 7
keyword
 iskeyword, 5
 kwlist, 5
lambda, 91
lambda-функция, 91
math
 acos(), 9
 asin(), 9
 atan(), 9
 cos(), 9
 degrees(), 9
 e, 8
 exp(), 9
 inf, 8
 log(), 9
 log10(), 9
 nan, 8
 pi, 8
 radians(), 9
 sin(), 9

- sqrt, 7
- sqrt(), 9
- tan(), 9
- tau, 8
- max(), 7
- min(), 7
- pow(), 7
- return, 84
- sympy
 - evalf(), 76
 - factorial(), 76
 - oo, 65
 - plot(), 94
 - Product(), 77
 - sin(), 94
 - sqrt(), 94
 - Sum(), 76
 - Symbol(), 76, 94
- while, 49
- библиотека
 - keyword, 5
 - math, 7
 - sympy, 65
- комментарий, 10
 - #, 10
 - ”, 10
- печать списка ключевых слов, 5
- печать списка стандартных идентификаторов, 5
- Запись числа
 - с плавающей точкой, 103
 - с фиксированной точкой, 103
- Идентификатор, 5
- Мантисса, 103
- Масштабный множитель, 103
- Определитель матрицы, 116
- Программа
 - Maple, 102
 - Python, 5
 - Трассировочная таблица, 51, 63

Об авторах

Ширяева Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «**Вычислительная математика и математическая физика**» института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ФГАОУВО «Южный федеральный университет».

Область научных интересов — массоперенос в многокомпонентных смесях, конечно-разностные методы, метод конечных элементов, течения вязкой жидкости, вычислительная математика, программирование.

Романов Максим Николаевич — кандидат физико-математических наук.

Область научных интересов — изотермические и неізотермические течения жидкости между вращающимися цилиндрами с проницаемыми и непроницаемыми стенками (проблема Куэтта–Тейлора), численный анализ нелинейных задач теории гидродинамической устойчивости, изучение пересечения бифуркаций и возникновения хаотических режимов, программирование, проектирование баз данных.

Долгих Татьяна Федоровна — старший преподаватель кафедры «**Вычислительная математика и математическая физика**» института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ФГАОУВО «Южный федеральный университет».


Область научных интересов — течения вязкой жидкости, массоперенос в многокомпонентных смесях, метод конечных элементов, вычислительная математика, программирование.





Полякова Наталья Михайловна — ассистент кафедры «**Вычислительная математика и математическая физика**» института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ФГАОУВО «Южный федеральный университет».

Филимонова Александра Михайловна — ассистент кафедры «**Вычислительная математика и математическая физика**» института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ФГАОУВО «Южный федеральный университет».

Интерфейс пользователя

Навигация по электронному документу

Навигация по электронному документу может осуществляться с помощью клавиш и колесика мыши, клавиатуры — используются стандартные горячие клавиши программы Adobe Acrobat; элементов управления программы Adobe Acrobat (панель навигации и список закладок в окне Bookmarks), а также панели навигации учебного пособия  (см. правый верхний угол страницы):

Пиктограмма	Действие
	предыдущая страница
	следующая страница
	предыдущий просмотр
	следующий просмотр
	переход на страницу N
	поиск слов в документе

Список горячих клавиш для работы с электронным документом в программе Adobe Acrobat

Действие	Комбинация клавиш
Полноэкранный режим	Ctrl + L
Выход из полноэкранного режима	Esc
Растянуть по ширине экрана	Ctrl + 2
Переход к началу документа	Home или Shift + Ctrl + Page Up или Shift + Ctrl + Up Arrow
Переход к концу документа	End или Shift+Ctrl+Page Down или Shift+Ctrl+Down Arrow
Переход на страницу N	Shift + Ctrl + N
Предыдущий экран	Page Up или Return
Следующий экран	Page Down или Shift + Return
Предыдущая страница	Left Arrow или Ctrl + Page Up
Следующая страница	Right Arrow или Ctrl + Page Down
Предыдущий просмотр	Alt + Left Arrow
Следующий просмотр	Alt + Right Arrow