Inhaltsverzeichnis

Teil I
Analysis 1

1 Reelle und komplexe Zahlen

1.1 Zahlbereiche

Bezeichnungen, Körperaxiome

Natürliche Zahlen	$1, 2, 3, \ldots$	$\mathbb{N}, \qquad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
Ganze Zahlen	$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$	$\mathbb{Z} = \{n - m : n, m \in \mathbb{N}\}$
Rationale Zahlen	$r = \dfrac{n}{m}, \quad n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
Reelle Zahlen (*Dezimalbruchdarstellung*)	$a = \pm n_1 n_2 \ldots n_k, n_{k+1} n_{k+2} \ldots$ $n_j \in \{0, \ldots, 9\}$	$\mathbb{R}$

Bemerkung*:

- Kronecker[1]: *"Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."*
- eineindeutige Zuordnung $\mathbb{R} \;\leftrightarrow\;$ (Zahlen-)Gerade
- bereits in Antike: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (als Länge der Diagonale des Einheitsquadrates) widerlegt von Euklid[2], *indirekter Beweis*

Folgerung : *Es gilt:* $\quad \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Auf der Menge der reellen Zahlen sind die Addition $(x, y) \mapsto x + y$ und die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ erklärt und damit dann auch Subtraktion, Division. Es existiert $0 \in \mathbb{R}$ (neutrales Element der Addition, Nullelement) und $1 \in \mathbb{R}$ (neutrales Element der Multiplikation, Einselement). Dabei gelten folgende Körperaxiome (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

(A1)	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} :\ (a + b) + c = a + (b + c)$	*Assoziativität Addition*
(A2)	$\exists\, 0 \in \mathbb{K} \quad \forall\, a \in \mathbb{K} :\ a + 0 = 0 + a = a$	*Nullelement*
(A3)	$\forall\, a \in \mathbb{K} \quad \exists\, (-a) \in \mathbb{K} :\ a + (-a) = (-a) + a = 0$	*inverses Element der Addition*
(A4)	$\forall\, a, b \in \mathbb{K} :\ a + b = b + a$	*Kommutativität Addition*
(M1)	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} :\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	*Assoziativität Multiplikation*
(M2)	$\exists\, 1 \in \mathbb{K} \quad \forall\, a \in \mathbb{K} :\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	*Einselement*
(M3)	$\forall\, a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{K} :\ a \cdot \left(a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right) \cdot a = 1$	*inverses Element der Multiplikation*
(M4)	$\forall\, a, b \in \mathbb{K} :\ a \cdot b = b \cdot a$	*Kommutativität Multiplikation*
(D)	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{K} :\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	*Distributivgesetz*

Auf $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ und $[\mathbb{Q}, +, \cdot]$ existiert eine totale (vollständige) Ordnung '$\leq$', d.h. eine binäre, reflexive, antisymmetrische, transitive und lineare Relation :

(O1) $a \leq a$

$a \leq b$ und $b \leq a \implies a = b$

$a \leq b$ und $b \leq c \implies a \leq c$

Für alle a, b gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

Zusätzlich genügt '$\leq$' noch den Monotoniegesetzen (Verträglichkeit mit $+$ und $\cdot$) :

---

[1]Leopold Kronecker (* 7.12.1823 Liegnitz/Preußen † 29.12.1891 Berlin)

[2]Euklid von Alexandria (* ca. 360 v. Chr. Athen (?) † ca. 280 v. Chr. Alexandria, Ägypten)

$$\begin{array}{llllll} \text{(O2)} & a \le b & \text{und} & c \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & a+c \le b+c \\ \text{(O3)} & a \le b & \text{und} & c \in \mathbb{R},\ c \ge 0 & \Longrightarrow & a \cdot c \le b \cdot c \\ & a \le b & \text{und} & c \in \mathbb{R},\ c \le 0 & \Longrightarrow & a \cdot c \ge b \cdot c \end{array}$$

Es gilt $a < b \iff a \le b$ und $a \ne b$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen: $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ (*Trichotomiegesetz*).

Bemerkung*: $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ und $[\mathbb{Q}, +, \cdot]$ sind vollständig geordnete Körper

- Für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definiert man induktiv Potenzen: $a^1 := a$, $a^{m+1} := a^m \cdot a$, $m \in \mathbb{N}$.
- Für $a \ne 0$ kann man dies auf Exponenten $k \in \mathbb{Z}$ ausdehnen mittels $a^0 := 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Für $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ gelten die Potenzgesetze: $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$, $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(a^k)^m = a^{km}$.

Lemma 1.1.1 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) *Es gilt* $a \cdot b > 0$ *genau dann, wenn* entweder $a > 0$ *und* $b > 0$ oder $a < 0$ *und* $b < 0$ *sind.*

(ii) *Seien* $a > 0$ *und* $b > 0$. *Dann gilt* $a < b$ *genau dann, wenn* $a^2 < b^2$ *ist.*

(iii) *Seien* $0 < a < b$, *dann gilt* $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > 0$.

Beweis : zu (i): "$\Longleftarrow$": klar, "$\Longrightarrow$": mit Kontraposition, dazu Fallunterscheidung,

$$\begin{array}{lcl} a = 0 \text{ oder } b = 0 & \Longrightarrow & ab = 0 \\ a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0 & \Longrightarrow & ab < 0 \\ a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0 & \Longrightarrow & ab > 0 \end{array}$$

zu (ii): seien $a > 0$, $b > 0$

$$\curvearrowright\ a < b \iff b - a > 0 \underset{\text{(i)},\ b+a>0}{\iff} (b-a)(b+a) > 0 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff a^2 < b^2$$

zu (iii): $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 > 0 \underset{\text{(i)},\ a>0}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} > 0$, *analog* : $\dfrac{1}{b} > 0$;

$$b - a > 0 \underset{\text{(i)},\ \frac{1}{a}>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{a}(b-a) > 0 \iff \frac{b}{a} - 1 > 0 \underset{\text{(i)},\ \frac{1}{b}>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{b}\left(\frac{b}{a} - 1\right) > 0 \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$$
$$\iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \qquad \square$$

<u>Bezeichnungen</u> :

$$\begin{array}{lcll} (a,b) & = & \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a,b) & = & \{x : x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ (a,b] & = & \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ [a,b] & = & \{x : x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \end{array}$$

Für $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, heißt $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a)$ *ε-Umgebung von* a.

ergänzen : $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$, ...

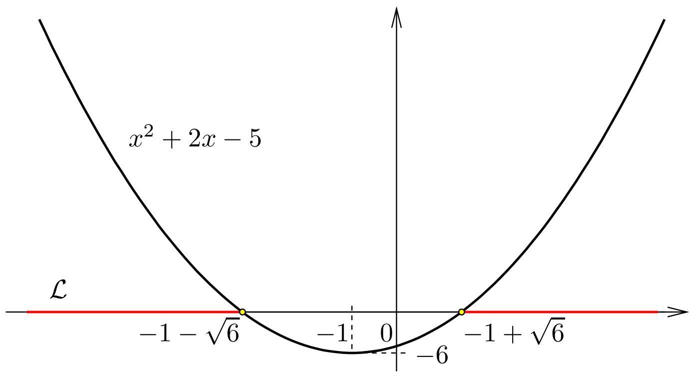
Spezialfälle :

$$\begin{array}{rcll} (-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} & \\ (0,\infty) & = & \mathbb{R}_+ & \text{Menge der positiven (reellen) Zahlen} \\ (-\infty,0) & = & \mathbb{R}_- & \text{Menge der negativen (reellen) Zahlen} \\ [0,\infty) & = & \overline{\mathbb{R}_+} & \text{Menge der nichtnegativen (reellen) Zahlen} \\ (-\infty,0] & = & \overline{\mathbb{R}_-} & \text{Menge der nichtpositiven (reellen) Zahlen} \end{array}$$

Beispiel : $x^2+2x-5>0 \iff (x+1-\sqrt{6})\,(x+1+\sqrt{6})>0$

$$\underset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \quad (x+1-\sqrt{6}>0 \ \wedge \ x+1+\sqrt{6}>0) \ \vee \ (x+1-\sqrt{6}<0 \ \wedge \ x+1+\sqrt{6}<0)$$

$$\curvearrowright \ x>-1+\sqrt{6} \ \vee \ x<-1-\sqrt{6} \iff \mathcal{L}=(-\infty,-1-\sqrt{6}) \ \cup \ (-1+\sqrt{6},\infty)$$



Absoluter Betrag

Definition 1.1.2 *Für $a\in\mathbb{R}$ setzt man* $|a| := \begin{cases} a, & a\geq 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$ $|a|$ *heißt* (absoluter) Betrag *von a.*

Lemma 1.1.3 **(i)** *Der Betrag reeller Zahlen hat folgende Grundeigenschaften :*

(N1) $|a|\geq 0, \qquad |a|=0 \iff a=0$

(N2) $|ab|=|a||b|$

(N3) $|a+b|\leq |a|+|b| \qquad$ (*Dreiecksungleichung*)

(ii) *Für $a\in\mathbb{R}$ gelten* $|a|=|-a|, \quad -|a|\leq a\leq |a|$.

(iii) *Falls $b>0$, dann ist* $|a|\leq b \iff -b\leq a\leq b \iff a\leq b$ *und* $-a\leq b$.

(iv) *Für $a,b\in\mathbb{R}$ gelten:* $\big||a|-|b|\big|\leq |a-b|$ *und* $\big||a|-|b|\big|\leq |a+b|$.

Beweis : (i)-(iii) bekannt (einfach einsetzen, Fallunterscheidung, nachrechnen), zu (iv):

$$\begin{aligned} |a| &= |a-b+b| \underset{\text{(N3)}}{\leq} |a-b|+|b| \quad \Longrightarrow \quad |a|-|b|\leq |a-b| \\ |b| &= |b-a+a| \underset{\text{(N3)}}{\leq} |b-a|+|a| \quad \Longrightarrow \quad |b|-|a|\leq |b-a| \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad |a|-|b|\leq |a-b|, \quad |b|-|a| = -(|a|-|b|)\leq |a-b| \quad \underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \quad \big||a|-|b|\big|\leq |a-b|$$

b durch $(-b)$ ersetzen $\Longrightarrow$ 2. Ungleichung $\square$

Lösung von Ungleichungen/Gleichungen mit Beträgen $\dashrightarrow$ (mehrere) Fallunterscheidung(en) nötig!

Beispiel : $|x+1|-|x-1|<1$

1. Fall: $x<-1 \quad \curvearrowright \quad |x+1|=-x-1,\ |x-1|=-x+1$

$$|x+1|-|x-1|<1 \iff -x-1-(-x+1)<1 \iff -2<1 \iff x\in\mathbb{R}$$

$\curvearrowright\ \mathcal{L}_1=(-\infty,-1)\cap\mathbb{R}=(-\infty,-1)$

2. Fall: $-1\le x<1 \quad \curvearrowright \quad |x+1|=x+1,\ |x-1|=-x+1$

$$|x+1|-|x-1|<1 \iff x+1-(-x+1)<1 \iff 2x<1 \iff x<\frac{1}{2}$$

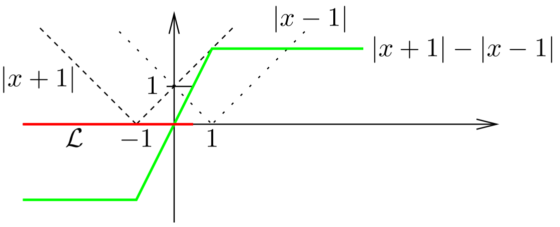
$\curvearrowright\ \mathcal{L}_2=[-1,1)\cap(-\infty,\frac{1}{2})=[-1,\frac{1}{2})$

3. Fall: $x\ge 1 \quad \curvearrowright \quad |x+1|=x+1,\ |x-1|=x-1$

$$|x+1|-|x-1|<1 \iff x+1-(x-1)<1 \iff 2<1 \ \lightning$$

$\curvearrowright\ \mathcal{L}_3=[1,\infty)\cap\emptyset=\emptyset$

$$\curvearrowright\ \mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2\cup\mathcal{L}_3$$
$$=(-\infty,-1)\cup[-1,\frac{1}{2})\cup\emptyset$$
$$=(-\infty,\frac{1}{2})$$



Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Axiom *Hat eine Menge $M\subset\mathbb{N}$ die beiden Eigenschaften $1\in M$, sowie aus $k\in M$ folgt $k+1\in M$, so ist $M=\mathbb{N}$.*

Anwendung : *Beweisprinzip der vollständigen Induktion*

Induktionsanfang : Es existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass $A(n_0)$ gilt.
Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung : Es gelte $A(k)$ für ein $k\ge n_0$.
Induktionsbehauptung : Dann gilt $A(k+1)$.
Induktionsbeweis : $A(k) \implies A(k+1)$

Lemma 1.1.4 (Ungleichung von Bernoulli[3]) *Für $n\in\mathbb{N}$ und $a\ge -1$ gilt stets $(1+a)^n \ge 1+na$.*

Beweis : Induktionsanfang : $n=1$: $1+a \ge 1+1\cdot a$

Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung : Für $n=k$ gelte $(1+a)^k \ge 1+ka$.
Induktionsbehauptung : Dann gilt für $n=k+1$: $(1+a)^{k+1} \ge 1+(k+1)a$.
Induktionsbeweis : $(1+a)^{k+1} = \underbrace{(1+a)}_{\ge 0}(1+a)^k \overset{I.V.}{\ge} (1+a)(1+ka) = 1+a+ka+\underbrace{ka^2}_{\ge 0} \ge 1+(k+1)a$ $\square$

Bezeichnungen : *Fakultät* : $0!:=1,\quad n!:=n(n-1)!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=\prod_{k=1}^{n}k,\quad n\in\mathbb{N}$

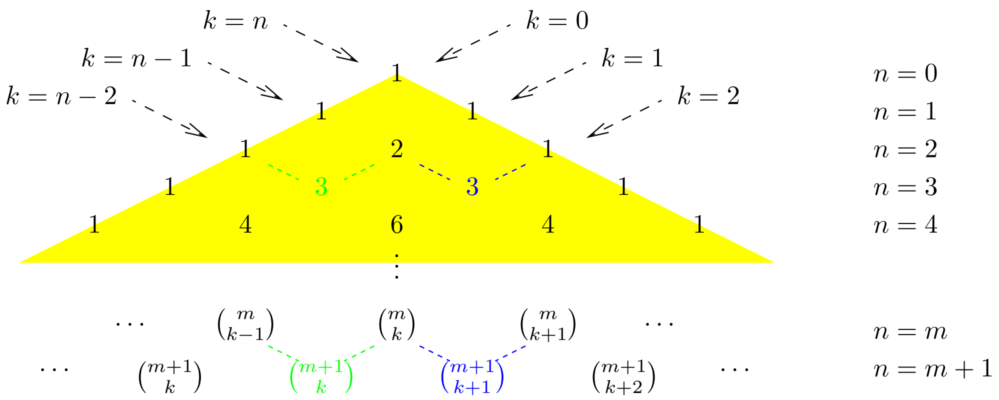
Binomialkoeffizient : $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,,\quad n,k\in\mathbb{N}_0,\ n\ge k$

[3] Jakob Bernoulli (* 27.12.1654 Basel † 16.8.1705 Basel)

Bemerkung*: Ausdehnung auf $\binom{a}{k}$ mit $a \in \mathbb{R}$ möglich, $\binom{a}{k} := \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$

Beispiel : $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10, \quad \binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3 \cdot 2} = \dfrac{\frac{3}{8}}{6} = \dfrac{1}{16}$

Bemerkung : Es gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\,,$ Pascal[4]sches Dreieck



Satz 1.1.5 (Binomischer Lehrsatz)

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}\, b^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\, b^{n-j}\,, \qquad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

B e w e i s : Symmetrie in a, b klar, daher nur erste Gleichung zu beweisen

Induktionsanfang : $n = 1$: $\quad (a+b)^1 = a + b, \qquad \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^{1-j}\, b^j = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung : Für $n = k$ gelte $(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j}\, b^j$.

Induktionsbehauptung : Dann gilt für $n = k+1$: $(a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j}\, b^j$.

Induktionsbeweis :

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k \overset{I.V.}{=} (a+b) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j}\, b^j$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + \binom{k}{k} a b^k \\
&= \underbrace{\phantom{\binom{k}{0} a^{k+1}}} + \underbrace{\binom{k}{0} a^k b} + \underbrace{\binom{k}{1} a^{k-1} b^2} + \cdots + \underbrace{\binom{k}{k-1} a b^k} + \underbrace{\binom{k}{k} b^{k+1}} \\
&= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j}\, b^j
\end{aligned}$$

$\square$

[4]Blaise Pascal (* 19.6.1623 Clermont/Frankreich † 19.8.1662 Paris)

Einige Eigenschaften von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Axiom (Archimedes[5]) : *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b < an$ gilt.*

$\curvearrowright$ $\mathbb{N}$ unendlich

bekannt: Die Mengen A und B sind *gleichmächtig*, $A \sim B$, falls es eine Bijektion[6] von A auf B gibt.

Definition 1.1.6 *Sei $\mathbb{N}_k = \{m \in \mathbb{N} : m \leq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *Eine Menge M heißt* endlich, *falls $M = \emptyset$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}_k \sim M$. Dann ist $k = \#M = \operatorname{card} M$ die* Kardinalzahl *bzw.* Mächtigkeit *von M.*

(ii) *Eine Menge M heißt* unendlich, *falls M nicht endlich ist.*

(iii) *Eine unendliche Menge M heißt* abzählbar unendlich, *falls $\mathbb{N} \sim M$ gilt.*

(iv) *Eine unendliche Menge M heißt* überabzählbar unendlich, *falls M nicht abzählbar unendlich ist.*

Bemerkung*:

- M endlich, $M \sim \mathbb{N}_k$, $\varphi : \{1, \ldots, k\} \to M$ Bijektion, setzen $\varphi(j) =: m_j \in M$, $j = 1, \ldots, k$ $\curvearrowright$ $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$
- Unendliche Mengen können zu *echten* Teilmengen gleichmächtig sein, z.B.

$$\mathbb{N} \sim \{m \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N} : m = 2k\} \quad \text{(gerade Zahlen)}$$

"Hilbert's[7] Hotel"

Satz 1.1.7 **(i)** *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich, d.h. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.*

(ii) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge, $M \neq \emptyset$. Dann besitzt M ein größtes Element m° und ein kleinstes Element $m_\circ$, d.h. für alle $m \in M$ gilt: $m_\circ \leq m \leq m^\circ$.*

(iii) (Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$)
In jeder nichtleeren Menge natürlicher Zahlen gibt es ein kleinstes Element.

(iv) *Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es genau eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$, für die gilt $m \leq x < m + 1$.*

Beweis : <u>zu (i)</u>: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = -2$, ..., d.h.

$$\varphi(k) = \begin{cases} j, & k = 2j + 1,\ j \in \mathbb{N}_0 \\ -j, & k = 2j, \quad j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

<u>zu (ii)</u>: $M \neq \emptyset$, M endlich $\curvearrowright$ $\exists\, k \in \mathbb{N} : M \sim \mathbb{N}_k$; jetzt vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}$

<u>zu (iii)</u>: indirekt, *Annahme:* $M \neq \emptyset$ habe kein kleinstes Element $\curvearrowright$ $1 \notin M$ $\curvearrowright$ $\forall\, m \in M : m > 1$
<u>setzen</u> $U := \{k \in \mathbb{N} : k < m$ für alle $m \in M\}$ $\curvearrowright$ $1 \in U$
<u>g.z.z.</u>: $U = \mathbb{N}$, denn: $M \neq \emptyset$ $\curvearrowright$ $\exists\, m_0 \in M \subseteq \mathbb{N} = U \xRightarrow[m_0 \in U]{} \exists\, m_0 \in M \quad \forall\, m \in M : m_0 < m$ ↯

zeigen: $U = \mathbb{N}$ (mit vollständiger Induktion) $\curvearrowright$ *n.z.z.:* $k \in U \implies k + 1 \in U$
Annahme: $k + 1 \notin U$ $\curvearrowright$ $\exists\, m_1 \in M : m_1 \leq k + 1 \xRightarrow[\nexists \min M]{} \exists\, m_2 \in M : m_2 < m_1$ $\curvearrowright$ $m_2 \leq m_1 - 1 \leq k$
$\curvearrowright$ $k \notin U$ ↯

[5] Archimedes von Syrakus (* 287 v. Chr. Syrakus, Sizilien † 212 v. Chr. Syrakus, Sizilien)
[6] f Bijektion von A auf B $\iff$ $f : A \to B$ mit $\forall a \in A\ \exists! b \in B : b = f(a)$ und $\forall b \in B\ \exists! a \in A : f(a) = b$
[7] David Hilbert (* 23.1.1862 Königsberg † 14.2.1943 Göttingen)

<u>zu (iv)</u>: *Eindeutigkeit*: seien $m, m' \in \mathbb{Z}$ so, dass $m \leq x < m+1$, $m' \leq x < m'+1$

$\curvearrowright \; m < m'+1 < m+2 \underset{m'+1\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} m'+1 = m+1 \iff m = m'$

Existenz: sei zunächst <u>$x \geq 1$</u>, betrachten $M = \{n \in \mathbb{N} : n > x-1\} \underset{\text{Archimedes}}{\Longrightarrow} M \neq \emptyset$

$\underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \exists\, m = m_\circ \in M:\; m > x-1,\; m-1 \leq x-1 \implies m \leq x < m+1$

für <u>$x < 0$</u>: analog mit $M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq -x\}$, <u>$0 \leq x < 1$</u>: $m := 0 \in \mathbb{Z}$ □

Bemerkung*: $m = m(x)$ heißt *ganzer Anteil* von $x \in \mathbb{R}$ und wird mit $m(x) = \lfloor x \rfloor$ bezeichnet.

Satz 1.1.8 **(i)** *In jedem nichtleeren offenen Intervall reeller Zahlen gibt es mindestens eine rationale Zahl.*

(ii) *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.*

Beweis: <u>zu (i)</u>: sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ beliebig, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *z.z.*: $\exists\, r \in \mathbb{Q}:\; a < r < b$

Archimedes-Axiom $\curvearrowright \exists\, n \in \mathbb{N} : n > \dfrac{1}{b-a} \implies \exists\, n \in \mathbb{N} : nb - na > 1 \iff \exists\, n \in \mathbb{N} : nb > na + 1$

sei $m = \lfloor na \rfloor \in \mathbb{Z} \iff m \leq na < m+1 \curvearrowright na < m+1 \leq na+1 < nb \iff a < \underbrace{\dfrac{m+1}{n}}_{=:r\in\mathbb{Q}} < b$

<u>zu (ii)</u>: verwenden *1. Cantor*[8] *sches Diagonalverfahren*, zunächst: $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \sim \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} :\; m, n \in \mathbb{N}\}$, dann analog: $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} \\
 & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & &
\end{array} \qquad \dashrightarrow \qquad \mathbb{Q}_+ \subset \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \longleftrightarrow \mathbb{N}$$

□

Bemerkung*: $\mathbb{Q}$ liegt *dicht* in $\mathbb{R}$; es gilt auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationale Zahlen) *dicht* in $\mathbb{R}$

1.2 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Definition 1.2.1 **(i)** *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt* nach oben beschränkt, *falls*

$$\exists\, S \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M:\; x \leq S.$$

Anderenfalls heißt M (nach oben) unbeschränkt.

(ii) *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt* nach unten beschränkt, *falls*

$$\exists\, s \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M:\; s \leq x.$$

Anderenfalls heißt M (nach unten) unbeschränkt.

(iii) *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt* beschränkt, *wenn M nach unten und oben beschränkt ist.*

Bemerkung*: s, S nicht eindeutig bestimmt; S ... obere Schranke, s ... untere Schranke

[8]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (* 3. 3. 1845 St. Petersburg † 6. 1. 1918 Halle)

Beispiel : $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ $\curvearrowright$ z.B. $S = 5$ obere Schranke, $s = -2$ untere Schranke für M

Definition 1.2.2 **(i)** $S^* \in \mathbb{R}$ *heißt* Supremum (kleinste obere Schranke) *von* $M \subset \mathbb{R}$, *d.h.* $S^* = \sup M = \sup\{x : x \in M\}$, *wenn gelten*

a) S^* *ist obere Schranke von* M, *d.h.* $x \leq S^*$ *für alle* $x \in M$.
b) S^* *ist kleinste obere Schranke, d.h. für jede obere Schranke* S *von* M *gilt* $S^* \leq S$.

Falls zusätzlich gilt $S^* \in M$, *so heißt* S^* Maximum *von* M, $S^* = \max M = \max\{x : x \in M\}$.

(ii) $s^* \in \mathbb{R}$ *heißt* Infimum (größte untere Schranke) *von* $M \subset \mathbb{R}$, $s^* = \inf M = \inf\{x : x \in M\}$, *falls*
a) s^* *ist untere Schranke von* M, *d.h.* $s^* \leq x$ *für alle* $x \in M$.
b) s^* *ist größte untere Schranke, d.h. für jede untere Schranke* s *von* M *gilt* $s \leq s^*$.

Falls zusätzlich gilt $s^* \in M$, *so heißt* s^* Minimum *von* M, $s^* = \min M = \min\{x : x \in M\}$.

Beispiel : $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ $\curvearrowright$ $S^* = \sup M = \max M = 1 \in M$, $s^* = \inf M = 0 \notin M$:
$\forall\, k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} \leq 1$ $\curvearrowright$ 1 obere Schranke; sei S beliebige obere Schranke $\curvearrowright$ $S \geq 1 \in M$
$\xRightarrow[S \geq S^*]{}$ $S^* = \sup M = \max M = 1$;
$\forall\, k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} > 0$ $\curvearrowright$ 0 untere Schranke; sei s weitere untere Schranke $\curvearrowright$ $s \leq \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$;
Annahme: $s > 0$ $\curvearrowright$ $\exists\, m \in \mathbb{N} : m > \frac{1}{s}$ $\iff$ $s > \frac{1}{m}$ $\implies$ s nicht untere Schranke, d.h. $s \leq 0$ $\implies$ $s^* = 0$, aber $s^* \notin M$ $(\min M$ existiert nicht!)

Lemma 1.2.3 *Sei* $M \subset \mathbb{R}$.

(i) $S^* = \sup M$ $\iff$ **a)** $\forall\, x \in M :\ x \leq S^*$
b') $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x_\varepsilon \in M :\ S^* - \varepsilon < x_\varepsilon$

(ii) $s^* = \inf M$ $\iff$ **a)** $\forall\, x \in M : s^* \leq x$
b') $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x_\varepsilon \in M :\ x_\varepsilon < s^* + \varepsilon$

Beweis : Aussage a) in (i), (ii) jeweils äquivalent zu Definition 1.2.2 (i), (ii); zeigen nur (i)

'$\Longrightarrow$' <u>z.z.</u> : b) $\Longrightarrow$ b'), d.h. entsprechendes x_ε finden

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $S^* - \varepsilon < S^*$ $\underset{\text{b)}}{\Rightarrow}$ $S^* - \varepsilon$ keine obere Schranke für M $\curvearrowright$ $\exists\, x_\varepsilon \in M : x_\varepsilon > S^* - \varepsilon$

'$\Longleftarrow$' Sei S obere Schranke von M, <u>z.z.</u> : $S^* \leq S$, d.h. b)
indirekt : <u>Annahme</u> : $S^* > S$, $\varepsilon := S^* - S > 0$ $\underset{\text{b')}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x_\varepsilon \in M : S^* - \varepsilon < x_\varepsilon$

$\curvearrowright$ $\exists\, x_\varepsilon \in M : S = S^* - \underbrace{(S^* - S)}_{\varepsilon} < x_\varepsilon$ $\curvearrowright$ S nicht obere Schranke für M $\Longrightarrow$ $\lightning$ *Widerspruch*

$\curvearrowright$ d.h. Annahme falsch $\curvearrowright$ $S^* \leq S$ $\square$

Die Menge der reellen Zahlen ist nun aus den rationalen Zahlen so konstruiert worden (Dedekindsche[9] Schnitte, Vervollständigung), dass folgendes gilt :

Axiom (Vollständigkeitsaxiom)
Jede nach oben beschränkte, nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt genau ein Supremum in den reellen Zahlen.

[9]Richard Dedekind (* 6.10.1831 Braunschweig † 12.2.1916 Braunschweig)

Bemerkung*:

- $\sup M = -\inf(-M)$, $\ -M = \{-x \in \mathbb{R} : x \in M\}$
  $\curvearrowright$ Jede nach unten beschränkte, nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt genau ein Infimum in den reellen Zahlen.
- Besonderheit von $\mathbb{R}$ $\ (\exists\ M \subset \mathbb{Q}:\ \sup M \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, z.B. $M = \{x : x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\})$
- Basis für Intervallschachtelung / Dezimalbruchdarstellung
  - Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann durch einen unendlichen Dezimalbruch dargestellt werden.
  - Jeder endliche oder periodische Dezimalbruch definiert eine rationale Zahl.

Folgerung 1.2.4 *Die Menge* $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ *ist überabzählbar unendlich;* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar unendlich,* $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Beweis : indirekt, verwenden *2. Cantorsches Diagonalverfahren*

Annahme : $(0,1)$ abzählbar, d.h. $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, verwenden Dezimalbruchentwicklung der x_i:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0, z_1^{(1)}\, z_2^{(1)}\, z_3^{(1)}\, z_4^{(1)} \ldots \\ x_2 = 0, z_1^{(2)}\, z_2^{(2)}\, z_3^{(2)}\, z_4^{(2)} \ldots \\ x_3 = 0, z_1^{(3)}\, z_2^{(3)}\, z_3^{(3)}\, z_4^{(3)} \ldots \\ x_4 = 0, z_1^{(4)}\, z_2^{(4)}\, z_3^{(4)}\, z_4^{(4)} \ldots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}\right\} \curvearrowright\ x = 0, y_1 y_2 y_3 \cdots \notin \{x_1, x_2, \ldots\} \quad \text{für } y_i \in \{0, \ldots, 8\} \setminus \{z_i^{(i)}\}$$

aber $x \in (0,1)$ $\curvearrowright$ Widerspruch $\curvearrowright$ Annahme falsch $\square$

Bemerkung*:

- In jedem nichtleeren offenen Intervall reeller Zahlen gibt es mindestens eine irrationale Zahl.
- *algebraische Zahlen*: Lösungen von Gleichungen n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten,
  $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$
  z.B. $\sqrt{5}, \ldots;$ abzählbar unendlich viele (Beweis von Cantor)
- *transzendente Zahlen* = nicht-algebraische Zahlen $\curvearrowright$ überabzählbar viele, z.B. e, π

Anwendung: Wurzeln und Potenzen reeller Zahlen $x \in \mathbb{R}$; *bisher:* x^m, $m \in \mathbb{Z}$

- $x > 0,\ n \in \mathbb{N}$: $\quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} := \sup\{r : r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ r^n \leq x\}$ nach Axiom V eindeutig
- $x > 0,\ \ell \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$: $\quad x^{\frac{\ell}{n}} = \sqrt[n]{x^\ell}$ (Wert eindeutig bestimmt, unabhängig von Darstellung $s = \frac{\ell}{n}$)
- $x > 0,\ y \in \mathbb{R}$: $\quad x^y = \begin{cases} \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq y\} & , \quad x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ \inf\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq y\} & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

(Existenz durch Axiom V gesichert, Eindeutigkeit klar)

Bemerkung*: Rechenregeln entsprechen bekannten Regeln, sind aber eigentlich aus diesen und obigen Definitionen herzuleiten!

1.3 Komplexe Zahlen

Idee : Zahlbereichserweiterung

Frage : Existiert ein Körper K, der $\mathbb{R}$ und Rechenoperationen für $\mathbb{R}$ enthält, so dass $x^2 + 1 = 0$ in K lösbar ist ?

Definition 1.3.1 *Seien* a, b, c, d *reelle Zahlen. Wir betrachten die geordneten Zahlenpaare* (a, b) *und* (c, d) *mit folgenden Rechenoperationen :*

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \odot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$z = (a, b)$ *und* $w = (c, d)$ *heißen* komplexe Zahlen. *Die Menge aller komplexen Zahlen ist* $\mathbb{C}$.

Satz 1.3.2 *Es seien* z, w *und* v *komplexe Zahlen. Dann gelten*

(i) $z \oplus w = w \oplus z$
(ii) $z \odot w = w \odot z$
(iii) $(z \oplus w) \oplus v = z \oplus (w \oplus v)$
(iv) $(z \odot w) \odot v = z \odot (w \odot v)$
(v) $(z \oplus w) \odot v = z \odot v \oplus w \odot v$

Beweis : (i)-(iii) klar; seien $z = (a, b)$, $w = (c, d)$, $v = (e, f)$

zu (iv) :
$$\begin{aligned} (z \odot w) \odot v &= \Big(ac - bd, ad + bc\Big) \odot (e, f) \\ &= \Big((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e\Big) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= \Big(a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)\Big) \\ &= (a, b) \odot \Big(ce - df, cf + de\Big) \\ &= z \odot (w \odot v) \end{aligned}$$

zu (v) :
$$\begin{aligned} (z \oplus w) \odot v &= \Big(a + c, b + d\Big) \odot (e, f) \\ &= \Big((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e\Big) \\ &= (ae - bf, af + be) \oplus (ce - df, cf + de) \\ &= z \odot v \oplus w \odot v \end{aligned}$$
□

Satz 1.3.3 *Es sei* $z = (a, b)$ *eine beliebige komplexe Zahl.*

(i) *Es gilt stets*
$$\begin{aligned} z \oplus (0, 0) &= (0, 0) \oplus z = z \\ z \odot (1, 0) &= (1, 0) \odot z = z \end{aligned}$$

(ii) *Es gibt genau eine Lösung* w *der Gleichung*

$$z \oplus w = (0, 0) \quad , \qquad w = (-a, -b) =: -z,$$

und für $z \neq (0, 0)$ *existiert genau eine Lösung* v *der Gleichung*

$$z \odot v = (1, 0) \quad , \qquad v = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) =: z^{-1} .$$

Beweis : (i) und 1. Teil von (ii) klar;

$$(a,b)\odot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{-b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=(1,0)\ .$$

□

Folgerung : $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *mit* $\oplus$ *und* $\odot$ *ist ein Körper mit Nullelement* $(0,0)$ *und Einselement* $(1,0)$.

Es sei $I:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ die Abbildung $c\mapsto I(c)=(c,0)$, d.h. wir identifizieren c und $(c,0)$; dann folgt für $c,d\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcccccl} c+d= & (c,0) & \oplus & (d,0) & = & (c+d,0) & =c+d \\ & I(c) & \oplus & I(d) & = & I(c+d) & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcccccl} c\cdot d= & (c,0) & \odot & (d,0) & = & (c\cdot d,0) & =c\cdot d \\ & I(c) & \odot & I(d) & = & I(c\cdot d) & \end{array}$$

Bemerkung*:

- betrachten reelle Zahlen als *spezielle komplexe Zahlen*, indem wir identifizieren

$$\mathbb{R}\ni x\ \longleftrightarrow\ (x,0)\in\mathbb{C}\qquad\curvearrowright\quad \textit{Zahlbereichserweiterung}$$

- Rechenoperationen $\oplus,\odot$ Erweiterungen der bekannten Operationen $+,\cdot$ $\curvearrowright$ schreiben in Zukunft $+,\cdot$ statt $\oplus,\odot$
- $[\mathbb{C},+,\cdot]$ ist ein Körper mit Nullelement $(0,0)$ und Einselement $(1,0)$
- In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation!

Definition 1.3.4 *Sei* $z=(a,b)$ *komplex. Dann heißen*

$\Re\mathrm{e}\ z:=a$ Realteil *von* z, $\Im\mathrm{m}\ z:=b$ Imaginärteil *von* z, *und* $i:=(0,1)$ imaginäre Einheit .

Lemma 1.3.5 (Normaldarstellung) *Sei* $z=(a,b)$ *. Dann ist* $z=\Re\mathrm{e}\,z+\Im\mathrm{m}\,z\cdot i=a+b\ i$.

Beweis : $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+b\ (0,1)=a+b\ i$ □

Beispiele :

- $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$
- $$\begin{array}{rcl} z\cdot w & = & (a,b)\cdot(c,d)=(a+bi)\ (c+di) \quad = \quad ac+bdi^2+adi+bci \\ & = & ac-bd+i(ad+bc) \quad = \quad (ac-bd,ad+bc) \end{array}$$

Definition 1.3.6 *Es sei* $z\in\mathbb{C}$, $z=a+bi$. *Dann heißen*

$\overline{z}:=a-bi$ konjugiert komplexe Zahl *zu* z, *und* $|z|:=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ Betrag *von* z.

Subtraktion und Division

$z_1+w=z_2$ besitzt für gegebene $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ genau eine Lösung,

$$w=z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i\ .$$

$z_1\cdot w=z_2$ besitzt für gegebene $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $z_1\neq 0$, genau eine Lösung,

$$w=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\cdot\overline{z_1}}{z_1\cdot\overline{z_1}}=\frac{1}{|z_1|^2}\ \overline{z_1}\cdot z_2\ ,$$

insbesondere gilt für $z_1 = z \neq 0$, $z_2 = 1$ also $\quad w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = z^{-1}$

<u>*Rechenregeln*</u> (selbst überprüfen)

- $z = \overline{\overline{z}}, \qquad z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R} \quad (\Im\mathrm{m}\, z = 0), \qquad |z| = |\overline{z}|, \qquad \Re\mathrm{e}\, z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \Im\mathrm{m}\, z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad w \neq 0, \qquad z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0$
- $\Re\mathrm{e}\, z \leq |\Re\mathrm{e}\, z| \leq |z|, \qquad \Im\mathrm{m}\, z \leq |\Im\mathrm{m}\, z| \leq |z|$

Lemma 1.3.7 *Der Betrag komplexer Zahlen hat folgende Grundeigenschaften :*

(N0) $\quad |z| \geq 0$

(N1) $\quad |z| = 0 \iff z = 0$

(N2) $\quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(N3) $\quad |z + w| \leq |z| + |w|$

Beweis : (N0), (N1) klar,

zu (N2) : $\quad |z \cdot w|^2 = (zw)\,(\overline{zw}) = z\overline{z}\; w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$

zu (N3) :
$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\,(\overline{z+w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\ \Re\mathrm{e}\,(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\ |z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$
$\square$

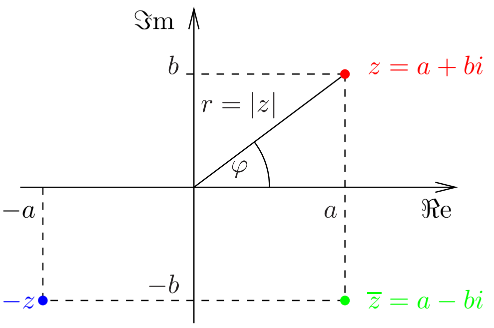
<u>*Gauß[10]sche Zahlenebene & Polarkoordinaten-Darstellung*</u>

$z = a + bi \ \curvearrowright\ \overline{z} = a - bi, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = |z|$

$\varphi = \arg z \ldots$ Winkel zwischen positiver reeller Achse und Ortsvektor vom Ursprung zu z

$a = r\ \cos\varphi, \qquad b = r\ \sin\varphi$



Definition 1.3.8 (Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen)

(i) *Für $z \in \mathbb{C}$ heißt*
$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \qquad \varphi = \arg z,$$
trigonometrische Darstellung *bzw.* Polarkoordinatendarstellung *für z.*

(ii) *Für $\varphi \in \mathbb{R}$ setzt man*
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
(Euler[11]sche Formel), *so dass $z \in \mathbb{C}$ darstellbar ist als*
$$z = |z|e^{i\varphi}, \qquad \varphi = \arg z.$$

[10] Carl Friedrich Gauß (* 30.4.1777 Brunswick † 23.2.1855 Göttingen)
[11] Leonhard Euler (* 15.4.1707 Basel † 18.9.1783 St. Petersburg)

Bemerkung*:

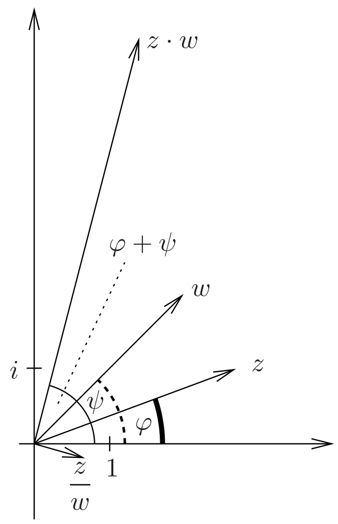
- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \arg z = \arctan \frac{b}{a} \; (+\pi)$
- $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi},\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \neq 0$, dann ist φ bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, deshalb $0 \leq \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \leq \pi$
- $z = 0$, dann ist φ unbestimmt
- $z = w \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = |w|, \quad \arg z = \arg w + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \overline{z} = |z|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$\begin{aligned} z\,w &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ \varrho(\cos\psi + i\sin\psi) = r\varrho\Big[\underbrace{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)} + i\underbrace{(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi)}_{\sin(\varphi+\psi)}\Big] \\ &= r\varrho\Big[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\Big] \\ \frac{z}{w} &= \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{\varrho^2}\, z\overline{w} = \frac{1}{\varrho^2}\, r\varrho\Big[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\Big] = \frac{r}{\varrho}\Big[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\Big], \ w \neq 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ w &= 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z \cdot w &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i\ \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right) \\ \frac{z}{w} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \end{aligned}$$

bisher :

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} + 2) \\ &= 4\sqrt{2}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}_{\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)} + i\ \underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}_{\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)}\Bigg) \end{aligned}$$

Potenzen : $\quad z^k := \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{k\text{-mal}} \quad , \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}$

Folgerung 1.3.9 (Formel von Moivre[12]) *Für* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$z^k = |z|^k\,(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) = |z|^k e^{ik\varphi}.$$

[12] Abraham de Moivre (* 26.5.1667 Vitry-le-François/Frankreich † 27.11.1754 London)

Wurzeln komplexer Zahlen

Gegeben : $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad n \in \mathbb{N}$

Gesucht : $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$ (bzw. $w = \sqrt[n]{z}$)

Lösung : $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi) \implies w^n = \varrho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$

$$w^n = z \iff \varrho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \iff \varrho = \underbrace{\sqrt[n]{r}}_{\text{reelle Wurzel}}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es treten also zunächst unendlich viele Werte w auf.

Beispiel : $z = 1$, $n = 4$, d.h. suchen w mit $w^4 = 1$ (4-te *Einheitswurzel*)

$z = 1(\cos 0 + i\,\sin 0) \implies$

$$\begin{aligned}
w_0 &= 1\,(\cos 0 + i\,\sin 0) &&= 1\\
w_1 &= 1\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) &&= i\\
w_2 &= 1\,(\cos\pi + i\,\sin\pi) &&= -1\\
w_3 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\right) &&= -i\\
w_4 &= 1\,(\cos(2\pi) + i\,\sin(2\pi)) &&= 1\\
w_5 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{5}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{2}\pi\right)\right) &&= i\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Satz 1.3.10 *Die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z \neq 0$ hat genau n verschiedene Werte, d.h. für*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

mit $w^n = z$.

Beweis :

1. Die w_k sind Lösungen (siehe Herleitung).
2. Für $k = 0, \dots, n-1$ sind die w_k paarweise verschieden, d.h. $w_k \neq w_\ell$ für alle $\ell, k \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\ell \neq k$:
   g.z.z. $\forall\, m \in \mathbb{Z} : \arg w_k \neq \arg w_\ell + 2\pi m$
   $$\iff \forall\, m \in \mathbb{Z}: \arg w_k - \arg w_\ell \neq 2\pi m \iff \forall\, m \in \mathbb{Z}: \frac{\varphi+2k\pi}{n} - \frac{\varphi+2\ell\pi}{n} \neq 2\pi m$$
   $$\iff \forall\, m \in \mathbb{Z}: \frac{k-\ell}{n} \neq m \iff \frac{k-\ell}{n} \notin \mathbb{Z}$$
   $$0 \le k \le n-1, \; 0 \le \ell \le n-1 \implies -1 < \frac{-n+1}{n} \le \frac{k-\ell}{n} \le \frac{n-1}{n} < 1, \; k-\ell \neq 0 \implies \frac{k-\ell}{n} \notin \mathbb{Z}$$
3. Es gibt keine weiteren Lösungen.
   z.z. : Für alle $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n-1\}$ existiert ein $k_\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $w_\ell = w_{k_\ell}$.
   g.z.z. : Es existieren $k_\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, $m \in \mathbb{Z}$, mit $\arg w_\ell = \arg w_{k_\ell} + 2m\pi$
   $$\iff \frac{\varphi+2\ell\pi}{n} = \frac{\varphi+2k_\ell\pi}{n} + 2m\pi \iff \ell - mn = k_\ell \quad \text{für passende } k_\ell \text{ und } m$$

$$0 \le k_\ell \le n-1 \iff 0 \le \ell - mn \le n-1 \iff \frac{\ell+1}{n} - 1 \le m \le \frac{\ell}{n} \implies \frac{\ell}{n} - 1 < m \le \frac{\ell}{n},$$

können stets m entsprechend wählen und setzen dann $k_\ell := \ell - mn$

$\square$

<u>Rechenregeln für komplexe Wurzeln</u>

$$z, w \in \mathbb{C}, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad \underset{?}{\Rightarrow} \quad \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{z \cdot w}, \quad \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{w}} = \sqrt[n]{\frac{z}{w}}, \quad w \neq 0, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{z}} = \sqrt[nm]{z}$$

<u>Achtung!</u> Wegen der Mehrdeutigkeit der Wurzeln komplexer Zahlen sind diese Regeln so zu verstehen, dass man 'geeignete Werte' zu wählen hat.

Beispiel : $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4}$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2}, \quad k = 0,1 \implies (\sqrt{-1})_0 = i, \ (\sqrt{-1})_1 = -i$$

$$\sqrt{-4} = 2\sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = 2 \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2}, \quad k = 0,1 \implies (\sqrt{-4})_0 = 2i, \ (\sqrt{-4})_1 = -2i$$

$$\sqrt{4} = 2\sqrt{\cos 0 + i \sin 0} = 2 \cos \frac{2k\pi}{2} + i \sin \frac{2k\pi}{2}, \quad k = 0,1 \implies (\sqrt{4})_0 = 2, \ (\sqrt{4})_1 = -2$$

also :
$$(\sqrt{-1})_0 \cdot (\sqrt{-4})_0 = (\sqrt{-1})_1 \cdot (\sqrt{-4})_1 = -2 = (\sqrt{4})_1$$
$$(\sqrt{-1})_0 \cdot (\sqrt{-4})_1 = (\sqrt{-1})_1 \cdot (\sqrt{-4})_0 = 2 = (\sqrt{4})_0$$

1.4 $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ als normierte Räume

Definition 1.4.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{R}^n$ die Gesamtheit aller n-Tupel reeller Zahlen $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, sowie $\mathbb{C}^n$ die Gesamtheit aller n-Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$, $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Bemerkung*: Für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$) erklärt man

$$\begin{aligned} a + b &:= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \lambda a &:= (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Operationen bildet $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ einen linearen Raum (Vektorraum).

Definition 1.4.2 *Für $a \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a \in \mathbb{C}^n$ erklären wir*

$$\begin{aligned} \|a\|_1 &:= |a_1| + \cdots + |a_n| \\ \|a\|_2 &:= \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2} \\ \|a\|_\infty &:= \max\{|a_j| : j = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Lemma 1.4.3 *Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $a, b \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\|\cdot\|$ stehe für eine der Ausdrücke $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. Dann gelten:*

(N0) $\|a\| \ge 0$

(N1) $\|a\| = 0 \iff a = 0$

(N2) $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$

(N3) $\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$

Beweis : (N0)-(N2) klar, (N3) für $\|\cdot\|_2$ etwas aufwendiger □

Bemerkung*: Für $n=1$ gilt: $\|a\|_1 = \|a\|_2 = \|a\|_\infty = |a|$, $a \in \mathbb{R}$ $\curvearrowright$ Lemma 1.4.3= Lemma 1.1.3; analog für $\mathbb{C}$ mit Lemma 1.3.7

Lemma 1.4.4 *Es gilt für alle* $a \in \mathbb{R}^n$

$$\|a\|_\infty \;\le\; \|a\|_2 \;\le\; \|a\|_1 \;\le\; n\,\|a\|_\infty \quad .$$

Beweis : klar, Einsetzen der Definitionen; $\|a\|_2 \le \|a\|_1$ mit Induktion möglich □

Definition 1.4.5 *Es sei* N *ein (reeller oder komplexer) Vektorraum und*

$$\|\cdot\| \;:\; x \in N \quad\longmapsto\quad \|x\| \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

eine Abbildung von N *nach* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *mit folgenden Eigenschaften :*

(N0) $\|x\| \;\ge\; 0$ *für alle* $x \in N$

(N1) $\|x\| \;=\; 0 \iff x = 0$ (*Nullelement aus* N)

(N2) $\|\lambda x\| \;=\; |\lambda|\,\|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$ *und alle* $x \in N$

(N3) $\|x+y\| \;\le\; \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in N$

Dann heißen $\left[N, \|\cdot\|\right]$ normierter Raum *und* $\|\cdot\|$ Norm.

Beispiel : $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind mit $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, \infty$ jeweils reelle oder komplexe normierte Räume.

Definition 1.4.6 *Sei* $[N, \|\cdot\|]$ *ein normierter Raum. Eine Menge* $A \subset N$ *heißt* beschränkt *, falls es eine positive Zahl* K *gibt mit*

$$\|a\| \;\le\; K \quad \text{für alle} \quad a \in A\ .$$

Für $\varepsilon > 0$ *und* $a \in N$ *heißt die Menge*

$$K_\varepsilon(a) = K(a, \varepsilon) := \{b : b \in N,\ \|b-a\| < \varepsilon\}$$

offene Kugel *um* a *mit Radius* ε *.*

Bemerkung*:

- für $N = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_i$, $i = 1, \infty$, sind ‘Kugeln’ Würfel
- $N = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ $\curvearrowright$ $K_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\curvearrowright$ offene Intervalle um $a \in \mathbb{R}$

2 Zahlenfolgen

2.1 Grenzwertbegriff

Definition 2.1.1 *Eine* reelle Zahlenfolge $(a_j)_{j=1}^\infty$ *ist eine Abbildung natürlicher Zahlen in die reellen Zahlen. Eine* komplexe Zahlenfolge $(z_j)_{j=1}^\infty$ *ist eine Abbildung natürlicher Zahlen in die komplexen Zahlen.*

Beispiele : **(i)** $a_n = a_0 + nd,\ n \in \mathbb{N},\ a_0, d \in \mathbb{C} \curvearrowright a_{n+1} - a_n = d,\ n \in \mathbb{N}$ $\dashrightarrow$ *arithmetische Folge*

(ii) $a_n = a_0 q^n,\ n \in \mathbb{N},\ a_0 \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \curvearrowright a_{n+1} = q a_n \underset{a_0 \neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ n \in \mathbb{N}$
$\dashrightarrow$ *geometrische Folge*

(iii) $a_n = (-1)^n b_n,\ b_n \geq 0$ (oder $b_n \leq 0$), $n \in \mathbb{N}$ $\dashrightarrow$ *alternierende Folge*

Definition 2.1.2 *Eine reelle oder komplexe Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* beschränkt, *falls es eine Konstante* $K > 0$ *gibt, so dass* $|a_n| \leq K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Bemerkung*: Für Folgen in $\mathbb{R}$ auch sinnvoll:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt nach unten* $\iff \exists\, K_1 \in \mathbb{R}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq K_1$
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt nach oben* $\iff \exists\, K_2 \in \mathbb{R}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq K_2$
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt* $\iff (a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt nach unten und oben*
  $\iff \exists\, K_1, K_2 \in \mathbb{R}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ K_1 \leq a_n \leq K_2$

Grenzwertbegriff : *Motivation*

a_n	$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\frac{1}{n}$	$1,\ 0.5,\ 0.333,\ 0.25,\ \ldots$	0
$n\left(\frac{9}{10}\right)^n$	$0.9,\ 1.62,\ 2.187,\ 2.6244, \ldots,\ a_{10} \sim 3.487, \ldots,\ a_{100} \sim 2.66 \cdot 10^{-3},\ \ldots$	0
$\sqrt[n]{n}$	$1,\ 1.414,\ 1.442,\ 1.414, \ldots, a_{50} \sim 1.081, \ldots$	1
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$1,\ 1.5,\ 1.833, \ldots, a_{10} \sim 2.929, \ldots, a_{100} \sim 5.187, \ldots, a_{1000} \sim 7.485, \ldots a_{10000} \sim 9.788, \ldots$	div.
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$	$0.5,\ 0.667,\ 0.75,\ 0.8, \ldots,\ a_{100} \sim 0.99, \ldots$	1
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$	$1,\ 0.5,\ 0.833, 0.583, \ldots, a_{10} \sim 0.646, \ldots, a_{20} \sim 0.669, \ldots$	$\ln 2$
i^n	$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ \ldots$	div.
$\frac{i^n}{n}$	$i,\ -0.5,\ -0.333i,\ 0.25,\ 0.2i, \ldots$	0

Definition 2.1.3 *Eine reelle oder komplexe Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* konvergent, *wenn es eine reelle oder komplexe Zahl* a *mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert eine natürliche Zahl* $n_0(\varepsilon)$, *so dass für all* $n \geq n_0(\varepsilon)$ *gilt:*

$$|a - a_n| < \varepsilon\ .$$

Dann heißt a Grenzwert *bzw.* Limes *von* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *geschrieben als* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

alternative Schreibweise: $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ oder $a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$

Bemerkung*:
- In jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ bzw. $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ um den Grenzwert liegen „fast alle“ – d.h. alle bis auf endlich viele – Glieder der Folge.
- in $\mathbb{C}$: $|a-a_j| = \sqrt{[\Re\mathrm{e}\,(a-a_j)]^2 + [\Im\mathrm{m}\,(a-a_j)]^2}$

Beispiele :

(a) $a_j \equiv a$ für $j \geq j^*$ (konstante Folge)

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) := j^* \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : |a_j - a| = |a-a| = 0 < \varepsilon$$

(b) $a_j = \dfrac{1}{j}$ (*Idee:* $a_j \longrightarrow 0$)

Sei $\varepsilon > 0$, setzen: $j_0(\varepsilon) = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \quad \Longrightarrow \quad j_0(\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$$\Longrightarrow \quad |a_j - 0| = |a_j| = \frac{1}{j} \leq \frac{1}{j_0(\varepsilon)} < \varepsilon\,, \quad j \geq j_0(\varepsilon)$$

$\lfloor\ \rfloor$ Gauss klammer nach unten runden

(c) $a_j = 1 + \dfrac{(-1)^j}{j}$ (*Idee:* $a_j \longrightarrow 1$)

Sei $\varepsilon > 0$, suchen $j_0(\varepsilon)$ so, dass für $j \geq j_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_j - 1| = \left| 1 + \frac{(-1)^j}{j} - 1 \right| = \frac{1}{j} < \varepsilon$$

Setzen wie in (b) $j_0(\varepsilon) = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1, \ \varepsilon > 0$

(d) $a_j = (-1)^j$ divergent

Annahme: $\exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : \ |a - (-1)^j| < \varepsilon$

$$\overset{}{\underset{\varepsilon = \frac{1}{2}}{\Longrightarrow}} \ \exists\, a \in \mathbb{R} \quad \exists\, j_0 \quad \forall\, j \geq j_0 : \underbrace{a - \tfrac{1}{2} < (-1)^j < a + \tfrac{1}{2}}_{|a-(-1)^j| < \frac{1}{2}}$$

$$\underset{j = 2k > j_0,\ j = 2k+1 > j_0}{\Longrightarrow} \ (a - \tfrac{1}{2} < -1) \wedge (a + \tfrac{1}{2} > 1) \quad \curvearrowright \ (a < -\tfrac{1}{2}) \wedge a > \tfrac{1}{2} \quad ⚡$$

Bemerkung*: Es kommt nicht darauf an, „bestes“ (d.h. kleinstes) $j_0(\varepsilon)$ anzugeben !

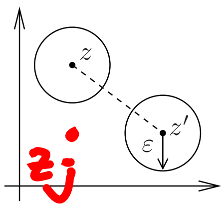
Satz 2.1.4 **(i)** *Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.*

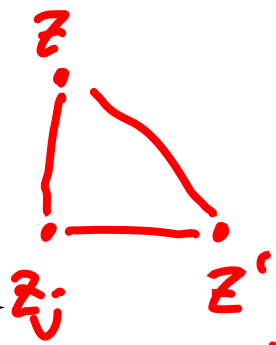
(ii) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis : zu (i): indirekt

Annahme: $\exists\, z, z' \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$, $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z$, $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z'$ mit $z \neq z'$, d.h. $|z - z'| > 0$

setzen $\varepsilon := \dfrac{|z-z'|}{3} > 0$





$$\lim_{j\to\infty} z_j = z \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : |z_j - z| < \varepsilon$$

$$\lim_{j\to\infty} z_j = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j_1(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_1(\varepsilon) : |z_j - z'| < \varepsilon$$

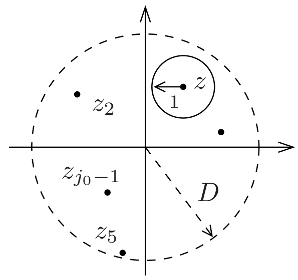
$$\Longrightarrow \quad \exists\, j_2(\varepsilon) := \max\{j_0(\varepsilon), j_1(\varepsilon)\} \quad \forall\, j \geq j_2(\varepsilon) : |z_j - z| + |z_j - z'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|z - z'|$$

$|z - z'| \leq |z - z_j| + |z_j - z'|$

Andererseits ist für alle $j \in \mathbb{N}$: $|z - z'| \leq |z - z_j| + |z_j - z'|$, d.h.

$$\Longrightarrow \quad \exists\ j_2(\varepsilon) \quad \forall\ j \geq j_2(\varepsilon) : \underbrace{\overset{a}{|z - z'|}}_{>0} \leq |z - z_j| + |z_j - z'| < \frac{2}{3}|z - z'| \quad \lightning \quad \Longrightarrow \quad \textit{Annahme falsch !}$$

$a < \frac{2}{3} a$ ↯



<u>zu (ii)</u>: Sei $\lim\limits_{j \to \infty} z_j = z$, setzen $\varepsilon = 1$

$$\Longrightarrow \quad \exists\ j_0 = j_0(1) \quad \forall\ j \geq j_0 : |z_j - z| \leq 1$$

Sei $D := \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{j_0 - 1}|, |z| + 1\}$

$$\Longrightarrow \quad |z_j| \leq \left\{ \begin{array}{ll} \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{j_0-1}|\} & , j = 1, \dots, j_0 - 1 \\ |z_j - z| + |z| \ \leq \ |z| + 1 & , j \geq j_0 \end{array} \right\} \leq D$$

□

Lemma 2.1.5 $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *konvergent* $\iff$ $(\Re\mathrm{e}\, z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *und* $(\Im\mathrm{m}\, z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *konvergent*

B e w e i s : Vorbemerkung: $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}(|a| + |b|) \underset{\underset{(|a|-|b|)^2 \geq 0}{\uparrow}}{\leq} \sqrt{a^2 + b^2} \underset{\underset{2|ab| \geq 0}{\uparrow}}{\leq} |a| + |b| \quad , \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$$a_j = \Re\mathrm{e}\,(z_j - z), \qquad b_j = \Im\mathrm{m}\,(z_j - z)$$

$$\curvearrowright \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Re\mathrm{e}\, z_j - \Re\mathrm{e}\, z| + |\Im\mathrm{m}\, z_j - \Im\mathrm{m}\, z| \Big) \leq |z_j - z| \leq |\Re\mathrm{e}\, z_j - \Re\mathrm{e}\, z| + |\Im\mathrm{m}\, z_j - \Im\mathrm{m}\, z|$$

„$\Longrightarrow$“ $\quad |z - z_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ für $j \geq j_0(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcccc} |\Re\mathrm{e}\, z_j - \Re\mathrm{e}\, z| & < & \sqrt{2}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & = & \varepsilon \\ |\Im\mathrm{m}\, z_j - \Im\mathrm{m}\, z| & < & \sqrt{2}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & = & \varepsilon \end{array} \right\}, \quad j \geq j_0(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llcl} (\Re\mathrm{e}\, z_j) & \text{konvergent,} \quad \Re\mathrm{e}\, z_j & \longrightarrow & \Re\mathrm{e}\, z \\ (\Im\mathrm{m}\, z_j) & \text{konvergent,} \quad \Im\mathrm{m}\, z_j & \longrightarrow & \Im\mathrm{m}\, z \end{array} \right.$$

„$\Longleftarrow$“ $\quad (\Re\mathrm{e}\, z_j)_j$ konv. $\Longrightarrow \ \exists\ a \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ j_1(\varepsilon) \quad \forall\ j \geq j_1(\varepsilon) : \quad |\Re\mathrm{e}\, z_j - a| \ < \ \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\qquad (\Im\mathrm{m}\, z_j)_j$ konv. $\Longrightarrow \ \exists\ b \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ j_2(\varepsilon) \quad \forall\ j \geq j_2(\varepsilon) : \quad |\Im\mathrm{m}\, z_j - b| \ < \ \dfrac{\varepsilon}{2}$

Setzen $z := a + ib$, $j_0(\varepsilon) := \max\{j_1(\varepsilon), j_2(\varepsilon)\}$

$$\Longrightarrow \quad |z - z_j| \ \leq \ |\Re\mathrm{e}\, z_j - a| + |\Im\mathrm{m}\, z_j - b| < \varepsilon\ , \quad j \geq j_0(\varepsilon)$$

□

Folgerung : *Es reicht im Prinzip aus, reelle Folgen zu betrachten.*

2.2 Häufungspunkte und Vollständigkeit

Definition 2.2.1 **(i)** $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *sei eine Folge reeller / komplexer Zahlen und* $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit* $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ *(streng monoton wachsend). Dann heißt die Folge* $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ Teilfolge *von* $(a_j)_{j=1}^{\infty}$.

(ii) $a_0 \in \mathbb{C}$ *heißt* Häufungspunkt *der Folge* $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, *wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* j *gibt mit*

$$|a_j - a_0| < \varepsilon\ .$$

Bemerkung*:
- $a_0 \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt* von $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists$unendlich viele $j : |a_j - a_0| < \varepsilon$
- In jeder $\varepsilon-$Umgebung von a_0 liegen unendlich viele Folgenglieder.

Satz 2.2.2 **(i)** *Sei $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann ist auch jede Teilfolge $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ konvergent und hat den gleichen Grenzwert.*

(ii) *Eine Zahl a_0 ist Häufungspunkt von $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ genau dann, wenn eine Teilfolge $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ von $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ existiert mit*
$$\lim_{k\to\infty} a_{j_k} = a_0 \ .$$

Beweis : zu (i): Offenbar ist $j_k \geq k,\ \ k \in \mathbb{N}$; z.z. : $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0(\varepsilon) \quad \forall\, k \geq k_0(\varepsilon) : |a_{j_k} - a| < \varepsilon$
Wir wissen : $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : |a_j - a| < \varepsilon$

setzen $k_0(\varepsilon) := j_0(\varepsilon),\ \ j_k \geq k \geq k_0(\varepsilon) = j_0(\varepsilon) \ \curvearrowright$ (i)

zu (ii): „$\Longleftarrow$“ : klar nach Definition Grenzwert / Häufungspunkt

„$\Longrightarrow$“ : Sei a_0 Häufungspunkt, wir konstruieren eine konvergente Teilfolge $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$;

sei $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$ existieren unendliche viele j mit $|a_j - a_0| < \dfrac{1}{k}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ \ &\exists\, a_{j_1} : |a_{j_1} - a_0| < 1 \\
&\exists\, a_{j_2} : |a_{j_2} - a_0| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad j_2 > j_1 \\
&\exists\, a_{j_3} : |a_{j_3} - a_0| < \tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad j_3 > j_2 \\
&\ \ \vdots \\
&\exists\, a_{j_k} : |a_{j_k} - a_0| < \tfrac{1}{k} \quad \text{und} \quad j_k > j_{k-1}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{j_k} = a_0$, denn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0(\varepsilon) := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \quad \forall\, k \geq k_0(\varepsilon) : |a_{j_k} - a_0| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon \qquad \square$$

Bemerkung*: Umkehrung von (i) gilt i.a. nicht, z.B. $a_j = (-1)^j$ nicht konvergent;
$j_k = 2k \quad \Longrightarrow \quad a_{j_k} \equiv 1 \longrightarrow 1$ für $k \to \infty$, analog für $\widetilde{j}_k = 2k+1$

Satz 2.2.3 (Bolzano[13]-Weierstraß[14])
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Beweis : Sei $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $c \leq a_j \leq d$, $j \in \mathbb{N}$;

$$F := \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a_j < x \quad \text{für höchstens endlich viele } j\}$$

$\Longrightarrow$ $F \neq \emptyset$: $c \in F$ (kein Index j mit $a_j < c$),
F nach oben beschränkt : $y > d \quad \Longrightarrow \quad y \notin F$, da $a_j \leq d < y$ für alle $j \in \mathbb{N}$

$\underset{\text{Axiom V}}{\Longrightarrow}$ $a_* = \sup F$ existiert, reell

z.z.: a_* ist Häufungspunkt

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; für F gilt: $x \in F \quad \Longrightarrow \quad y \in F$ für alle $y < x$

[13] Bernhard Bolzano (* 5.10.1781 Prag † 18.12.1848 Prag)
[14] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (* 31.10.1815 Ostenfelde/Westfalen † 19.2.1897 Berlin)

$a_* = \sup F \xRightarrow[\text{Lemma 1.2.3}]{} \exists\, x_\varepsilon \in F : a_* - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \le a_* \xRightarrow[x_\varepsilon \in F]{} a_* - \frac{\varepsilon}{2} \in F,$

andererseits ist $a_* + \varepsilon \notin F$, d.h. es existieren höchstens endlich viele ℓ mit $a_\ell < a_* - \frac{\varepsilon}{2}$,
es existieren unendlich viele k mit $a_k < a_* + \varepsilon$
$\Longrightarrow$ es existieren unendlich viele j mit $a_* - \varepsilon < a_* - \frac{\varepsilon}{2} \le a_j < a_* + \varepsilon$
$\Longrightarrow$ a_* ist Häufungspunkt □

Folgerung 2.2.4 *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen* $(a_j)_{j=1}^\infty$ *besitzt einen kleinsten Häufungspunkt,*

$$a_* = \sup\{x \in \mathbb{R} : a_j < x \text{ für höchstens endlich viele } j\},$$

sowie einen größten Häufungspunkt,

$$a^* = \inf\{x \in \mathbb{R} : a_j > x \text{ für höchstens endlich viele } j\}.$$

Beweis: sei $F = \{x \in \mathbb{R} : a_j < x$ für höchstens endlich viele $j\}$ $\xRightarrow[\text{Satz 2.2.3}]{}$ $a_* = \sup F$ ist Häufungspunkt; *n.z.z.:* a_* kleinster Häufungspunkt
indirekt, <u>*Annahme*</u>: $a_0 < a_*$ sei auch ein Häufungspunkt; setzen $\varepsilon := \dfrac{a_* - a_0}{2} > 0$
$\curvearrowright$ es existieren unendlich viele j mit $a_j \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, d.h. es existieren unendlich viele j mit

$$a_j < a_0 + \varepsilon = a_0 + \frac{a_* - a_0}{2} = \frac{a_* + a_0}{2} = a_* - \frac{a_* - a_0}{2} = a_* - \varepsilon \in F$$

$\curvearrowright$ Widerspruch (zur Definition von F) $\curvearrowright$ Annahme falsch; a^* analog □

Definition 2.2.5 **(i)** *Der größte Häufungspunkt einer beschränkten Folge* $(a_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *heißt* Limes superior,

$$\limsup_{j\to\infty} a_j = \overline{\lim_{j\to\infty}}\, a_j\,.$$

(ii) *Der kleinste Häufungspunkt einer beschränkten Folge* $(a_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *wird* Limes inferior,

$$\liminf_{j\to\infty} a_j = \underline{\lim_{j\to\infty}}\, a_j$$

genannt.

Bemerkung*: Begriff nur für reelle Folgen möglich (*Ordnungseigenschaft*)

Folgerung 2.2.6 **(i)** *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

(ii) *Jede beschränkte reelle / komplexe Zahlenfolge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: <u>zu (i)</u>: Sei $(z_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, $|z_j| \le M$ $\Longrightarrow$ $(\Re\mathrm{e}\, z_j)_j$, $(\Im\mathrm{m}\, z_j)_j$ beschränkt, reell

$\xRightarrow[\text{Satz 2.2.3}]{}$ $(\Re\mathrm{e}\, z_j)_j$ hat einen Häufungspunkt a_0

$\xRightarrow[\text{Satz 2.2.2}]{}$ $\exists\ (j_k)_{k=1}^\infty : \lim_{k\to\infty} \Re\mathrm{e}\, z_{j_k} = a_0$, $(\Im\mathrm{m}\, z_{j_k})_{k=1}^\infty$ beschränkt

$\xRightarrow[\text{Satz 2.2.3}]{}$ $(\Im\mathrm{m}\, z_{j_k})_{k=1}^\infty$ hat einen Häufungspunkt b_0 $\xRightarrow[\text{Satz 2.2.2}]{}$ $\exists\ (j_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty : \lim_{\ell\to\infty} \Im\mathrm{m}\, z_{j_{k_\ell}} = b_0$

$\xRightarrow[\text{Satz 2.2.2}]{}$ $\exists\ (j_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty : \lim_{\ell\to\infty} z_{j_{k_\ell}} = a_0 + ib_0 =: z_0$ $\xRightarrow[\text{Satz 2.2.2}]{}$ z_0 ist Häufungspunkt

<u>zu (ii)</u>: folgt aus Sätzen 2.2.2, 2.2.3, Folgerung 2.2.4 und (i) □

Bemerkung*:

- Jeder Grenzwert ist Häufungspunkt.
- Folgen können mehrere Häufungspunkte haben, z.B. $(-1)^j + \frac{1}{j}$, sind aber dann nicht konvergent
- Jede beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

  Beschränktheit notwendig, z.B. $a_j = \begin{cases} j^{-1} & , \ j \text{ gerade} \\ j & , \ j \text{ ungerade} \end{cases}$

2.3 Konvergenzkriterien und Grenzwertsätze

Definition 2.3.1 *Eine Folge* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *heißt* Cauchy[15]-Folge (Fundamentalfolge), *wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j, k \geq j_0(\varepsilon) \ : \ |z_j - z_k| < \varepsilon \ .$$

Satz 2.3.2 (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Eine reelle oder komplexe Folge $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *ist konvergent genau dann, wenn* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis :

„$\Longrightarrow$“ : Sei $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z \implies \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) \quad : \quad |z_j - z| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\implies \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j,\ k \geq j_0(\varepsilon) : \quad |z_j - z_k| \leq |z_j - z| + |z_k - z| < \varepsilon$$

„$\Longleftarrow$“ : Seien $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge und $\varepsilon = 1$

$\implies \quad \exists\, j_0 = j_0(1) \quad \forall k \geq j_0 \ : \ |z_{j_0} - z_k| < 1$

$\implies \quad (z_j)_{j=1}^{\infty}$ beschränkt mit $D = \max\{|z_1|, \ldots, |z_{j_0-1}|,\ |z_{j_0}| + 1\}$

$\xRightarrow[\text{Satz 2.2.3, Folg.}]{}$ Es existieren ein Häufungspunkt z_0 und eine konvergente Teilfolge $(z_{j_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{\ell\to\infty} z_{j_\ell} = z_0$

<u>n.z.z.</u>: $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergent mit $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z_0$

dazu : $$|z_j - z_0| \leq \underbrace{|z_j - z_{j_\ell}|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } j, j_\ell \geq j_1 \\ \text{(Cauchy-Folge)}}} + \underbrace{|z_{j_\ell} - z_0|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } j_\ell \geq j_2 \\ \text{(konv. Teilfolge)}}} < \varepsilon \quad \text{für} \quad j \geq \max\{j_1, j_2\}$$

□

Folgerung 2.3.3 *Eine Folge* $(b_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *ist nicht konvergent, falls ein* $\varepsilon_0 > 0$ *existiert, so dass für alle* $J \in \mathbb{N}$ *stets* $j, k \geq J$ *mit* $|b_j - b_k| \geq \varepsilon_0$ *gefunden werden können.*

Bemerkung*: Konvergenz $\implies$ Cauchy-Folge; hier: nicht Cauchy-Folge $\implies$ nicht konvergent

Beispiel : Sei $b_j = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{j} = \sum\limits_{k=1}^{j} \dfrac{1}{k} \curvearrowright b_{2j} - b_j = \dfrac{1}{j+1} + \cdots + \dfrac{1}{2j} \geq j \cdot \dfrac{1}{2j} = \dfrac{1}{2}$, $j \in \mathbb{N}$

$\varepsilon_0 := \dfrac{1}{2}$, $j := J$, $k := 2j \geq J \xRightarrow[\text{Folg. 2.3.3}]{} |b_k - b_j| \geq \varepsilon_0 \curvearrowright (b_j)_{j=1}^{\infty}$ nicht konvergent

[15]Augustin Louis Cauchy (* 21.8.1789 Paris † 23.5.1857 Paris)

Satz 2.3.4 *Es seien* $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *und* $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ *konvergente Folgen reeller/komplexer Zahlen mit* $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = a$, $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = b$, *sowie* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Dann gelten*

$$\lim_{j\to\infty} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda a + \mu b,$$

$$\lim_{j\to\infty} (a_j b_j) = a\ b,$$

$$\lim_{j\to\infty} |a_j| = |a|,$$

sowie, falls $b \neq 0$ *ist,*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = \frac{a}{b}.$$

Beweis : o.B.d.A. $\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0,\ (a_j)_j, (b_j)_j$ reelle Folgen

Sei $\varepsilon > 0 \curvearrowright \exists\ j_0(\varepsilon) \quad \forall\ j \geq j_0(\varepsilon) : |a_j - a| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}, \qquad \exists\ j_1(\varepsilon) \quad \forall\ j \geq j_1(\varepsilon) : |b_j - b| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$

$$\curvearrowright\ |\lambda a_j + \mu b_j - (\lambda a + \mu b)| \ \leq\ |\lambda|\underbrace{|a_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}} + |\mu|\underbrace{|b_j - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2|\mu|}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{für} \quad j \geq \max\{j_0(\varepsilon), j_1(\varepsilon)\}$$

Außerdem gilt $\Big||a_j| - |a|\Big| \ \leq\ |a_j - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad j \geq j_0(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{j\to\infty} |a_j| = |a|$

zu $\lim\limits_{j\to\infty} (a_j b_j)$: $\quad |a_j b_j - ab| \leq |a_j|\,|b_j - b| + |b|\,|a_j - a| \ \leq\ M\,|b_j - b| + |b|\,|a_j - a|$ nach Satz 2.1.4, sowie:

$$\begin{array}{lllll} b \neq 0 & : \ \forall\ \varepsilon > 0 & \exists\ j_1, j_2 & \forall\ j \geq \max\{j_1, j_2\} & : \ |b_j - b| < \frac{\varepsilon}{2M}\ , \quad |a_j - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \\ b = 0 & : \ \forall\ \varepsilon > 0 & \exists\ j_3 & \forall\ j \geq j_3 & : \ |b_j| < \frac{\varepsilon}{M} \end{array}$$

M ist die Schranke die aj beschränkt, dabei betrachtet man 2 Fälle wenn b =0 ist und wenn b ungleich 0 ist.

$$\Longrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ j_0 \quad \forall\ j \geq j_0 \ : \quad |a_j b_j - ab| < \varepsilon$$

Für die Differenz von b die gegen 0 geht besteht dann eine hohe Schränke M

Wir wollen zeigen das unser Therm |<= epsilon ist.

zu $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j}$, $b \neq 0$: $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$

$$\begin{array}{ll} \Longrightarrow \ \exists\ j_0 \quad \forall\ j \geq j_0 & : \ |b_j - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \\ \Longrightarrow \ \exists\ j_0 \quad \forall\ j \geq j_0 & : \ |b| \leq |b_j - b| + |b_j| < \frac{|b|}{2} + |b_j| \\ \Longrightarrow \ \exists\ j_0 \quad \forall\ j \geq j_0 & : \ 0 < \frac{|b|}{2} \leq |b_j| \ \curvearrowright\ \frac{a_j}{b_j} \ \text{erklärt für } j \geq j_0, \end{array}$$

$$\left|\frac{a_j}{b_j} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_j b - a b_j|}{|b_j b|} \leq \frac{2}{|b|^2}\Big(|b||a_j - a| + |a||b - b_j|\Big) \ = \ \frac{2}{|b|}\ |a_j - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}\ |b - b_j|\ , \quad j \geq j_0$$

Rest analog zum ersten Teil . . . ☐

Bemerkung*:

- insbesondere im Satz enthalten: Konvergenz der Folgen $(\lambda a_j + \mu b_j)_j$, $(|a_j|)_j$, $(a_j b_j)_j$ sowie $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)_j$
- umgekehrt impliziert Konvergenz von $(\lambda a_j + \mu b_j)_j$, $(|a_j|)_j$, $(a_j b_j)_j$ sowie $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)_j$ i.a. <u>nicht</u> Konvergenz von $(a_j)_j$ und $(b_j)_j$, z.B. $a_j = b_j = (-1)^j$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$
- Für komplexe Folgen $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z$ gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \overline{z_j} = \overline{z}$:

$$\begin{array}{rll} z_j \longrightarrow z & \Longleftrightarrow & \Re\mathrm{e}\, z_j \longrightarrow \Re\mathrm{e}\, z, \quad \Im\mathrm{m}\, z_j \longrightarrow \Im\mathrm{m}\, z \qquad \text{(nach Lemma 2.1.5)} \\ & \Longleftrightarrow & (\Re\mathrm{e}\, z_j - i\ \Im\mathrm{m}\ z_j) \longrightarrow (\Re\mathrm{e}\, z - i\ \Im\mathrm{m}\ z) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z_j} \longrightarrow \overline{z} \end{array}$$

Satz 2.3.5 (Schachtelungssatz/Sandwichtheorem)
Seien $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ *und* $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ *reelle Folgen, für die gelte* $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = \lim\limits_{j\to\infty} c_j = a$, *und*

$$a_j \le b_j \le c_j \quad , \quad j \ge j_0 .$$

Dann ist $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ *konvergent, es gilt* $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = a$.

Beweis : $a_j \le b_j \le c_j \implies 0 \le b_j - a_j \le c_j - a_j \implies |b_j - a_j| \le |c_j - a_j|$, $j \ge j_0$ 12.12.17

Sei $\varepsilon > 0$, $|b_j - a| \le |b_j - a_j| + |a_j - a| \le |c_j - a_j| + |a_j - a| \le \underbrace{|c_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\ j\ge j_1} + 2\underbrace{|a_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\ j\ge j_2} < \varepsilon$

$\curvearrowright$ $|b_j - a| < \varepsilon$ für $j \ge \max\{j_0, j_1, j_2\}$ □

Beispiele : **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$n = \left[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k\, 1^{n-k} \ge \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \ge 0 \,, \quad n \ge 2$$

$$\curvearrowright\ 0 \le \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \le n \iff 0 \le \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \le n$$
$$\iff 0 \le (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \le \frac{2}{n-1}$$
$$\implies 1 \le \sqrt[n]{n} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} + 1$$
$$\implies 1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \le 1$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$

· $a = 1$: trivial

· $a > 1$: $a = \Big[1 + \underbrace{(\sqrt[n]{a} - 1)}_{x>0}\Big]^n \underset{\substack{\text{Lemma 1.1.4} \\ \text{(Bernoulli-Ungl.)}}}{\ge} 1 + n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$

$$\implies 0 < n\,(\sqrt[n]{a} - 1) \le a - 1 \implies 0 < \sqrt[n]{a} - 1 \le \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\underset{\text{Satz 2.3.5}}{\implies} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

· $0 < a < 1$: $b := \frac{1}{a} > 1 \underset{\text{Satz 2.3.4}}{\implies} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}}_{=1}} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$:

· $q = 0$: $a_n = q^n \equiv 0$

· $0 < |q| < 1$ $\curvearrowright$ $h = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ $\curvearrowright$ $(1+h)^n = 1 + nh + \dots + h^n > nh$

$$\curvearrowright\ 0 \le |q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \underset{\text{s.o.}}{\le} \frac{1}{nh} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Folgerung 2.3.6 **(i)** *Seien* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *und* $(b_j)_j$ *beschränkt, aber nicht notwendig konvergent. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0 \,.$$

(ii) *Seien* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *und für* $j \ge J$ *gelte stets* $a_j \le b_j$. *Dann folgt* $a \le b$.

bj ist beschränkt, d.h. es existiert eine Zahl M > 0 alle j sind Element der natürlichen Zahlen es gilt Betrag von bj ist kleiner gleich M

Beweis: zu (i): $0 \le |a_j b_j| \le M|a_j| \quad , \quad |b_j| \le M \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \lim_{n\to\infty} |a_j b_j| \le M \cdot 0 = 0$

zu (ii): *Annahme*: $a > b$

$$\Longrightarrow \quad 0 < a - b \le a - b + \underbrace{b_j - a_j}_{\ge 0,\ j \ge J} \le \underbrace{|a - a_j|}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0} + \underbrace{|b - b_j|}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0} \quad \Longrightarrow \quad 0 < a - b \le 0 \quad \lightning \qquad \square$$

Definition 2.3.7 **(i)** $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *heißt* bestimmt divergent gegen $+\infty$, *d.h.* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *falls*

$$\forall\, c > 0 \quad \exists\, j_0(c) \in \mathbb{N} \quad \forall\, j \ge j_0(c) \ : \ a_j > c\,.$$

(ii) $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *heißt* bestimmt divergent gegen $-\infty$, *d.h.* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *falls*

$$\forall\, c > 0 \quad \exists\, j_0(c) \in \mathbb{N} \quad \forall\, j \ge j_0(c) \ : \ a_j < -c\,.$$

(iii) *Zahlenfolgen, die weder konvergent noch bestimmt divergent sind, heißen* unbestimmt divergent.

Bemerkung*: Unbeschränkte Folgen sind nicht notwendig bestimmt divergent, z.B. $a_n = (-1)^n n$.

Bemerkung*: 'Rechenregeln mit ∞'

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{j\to\infty} a_j & = & \pm\infty \\ \lim\limits_{j\to\infty} b_j & = & b \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{j\to\infty}(a_j \pm b_j) = \pm\infty, \qquad \lim\limits_{j\to\infty}(a_j \cdot b_j) = \begin{cases} \pm\infty & , \quad b > 0 \\ \mp\infty & , \quad b < 0 \end{cases}$

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{j\to\infty} a_j & = & \pm\infty \\ \lim\limits_{j\to\infty} b_j & = & \pm\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{j\to\infty}(a_j + b_j) = \pm\infty, \qquad \lim\limits_{j\to\infty}(a_j \cdot b_j) = +\infty$

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{j\to\infty} a_j & = & +\infty \\ \lim\limits_{j\to\infty} b_j & = & -\infty \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{j\to\infty}(a_j \cdot b_j) = -\infty, \qquad \lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{a_j} = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{b_j} = 0$

Jetzt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

e (eulersche Zahl) = 2,71828...

Alle anderen Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ **,** $\frac{\infty}{\infty}$ **,** $\infty - \infty$ **und** $0 \cdot \infty$ **sind unbestimmt !**

Definition 2.3.8 **(i)** *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* monoton wachsend (fallend) *genau dann, wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$a_{n+1} \ge a_n \qquad (a_{n+1} \le a_n)$$

(ii) *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* streng monoton wachsend (fallend) *genau dann, wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$a_{n+1} > a_n \qquad (a_{n+1} < a_n)$$

Satz 2.3.9 *Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Insbesondere gilt:*

(i) *Sei* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(ii) *Sei* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Beweis: „$\Longrightarrow$" sei $(a_n)_n$ monoton und konvergent $\xrightarrow[\text{Satz 2.1.4 (ii)}]{}$ $(a_n)_n$ beschränkt

„$\Longleftarrow$" Sei $(a_n)_n$ monoton wachsend und nach oben beschränkt (nach unten durch a_1). Dann besitzt

$$M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

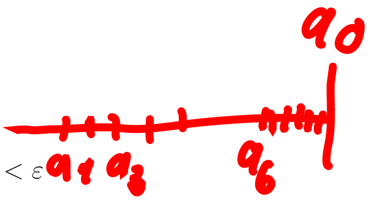
nach Axiom V genau ein reelles Supremum, $a_0 := \sup M$, da $M \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt ist.

<u>g.z.z.</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$

Sei $\varepsilon > 0$, $a_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \implies \exists\, n_\varepsilon \;:\; a_{n_\varepsilon} \in M,\quad a_{n_\varepsilon} > a_0 - \varepsilon$

$(a_n)_n$ monoton wachsend $\implies \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \;:\; a_n \geq a_{n_\varepsilon} > a_0 - \varepsilon$

$\implies \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \;:\; |a_n - a_0| = a_0 - a_n < \varepsilon$



analog: $(a_n)_n$ monoton fallend und nach unten beschränkt $\implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ □

Beispiele : **(a)** $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1 = 2$; zeigen: $(a_n)_n$ monoton fallend & nach unten beschränkt; klar: $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

– $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2}\, 2\, \sqrt{a_n}\sqrt{\frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$

– $a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n \iff \frac{2}{a_n} \leq a_n \iff \sqrt{2} \leq a_n$ ✓ s.o.

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.3.9}]{} \exists\, a = \lim_{n\to\infty} a_n \curvearrowright \underbrace{a_{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a+\frac{2}{a}} \iff a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \iff a = \sqrt{2}$$

(b) $x_1 = \sqrt{20}$, $x_{n+1} = \sqrt{20 + x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

(i) $(x_n)_n$ monoton wachsend : *Induktion* : $x_1 < x_2$ klar,

$x_n < x_{n+1} \iff \sqrt{20 + x_{n-1}} < \sqrt{20 + x_n} \iff x_{n-1} < x_n \iff$ *Ind.vor.*

(ii) $(x_n)_n$ nach oben beschränkt :

Induktion : $x_1 = \sqrt{20} < \sqrt{20} + 1$

Ind.vor. $\curvearrowright x_n < \sqrt{20} + 1 \implies x_n < 2\sqrt{20} + 1$

$$\iff 20 + x_n < \left(\sqrt{20} + 1\right)^2 \overset{\sqrt{\ }}{\iff} x_{n+1} < \sqrt{20} + 1$$

$\xRightarrow[\text{Satz 2.3.9}]{} \exists\, x_0 \;:\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \implies$ Grenzwertsätze sind anwendbar, d.h.

$$x_0^2 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = 20 + \lim_{n\to\infty} x_n = 20 + x_0 \implies x_0^2 - x_0 - 20 = 0$$

$$\implies x_{0_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2} \xRightarrow[x_0 > 0]{} x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = 5$$

Lemma 2.3.10

(i) $\left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j\right)_{j=1}^{\infty}$ *ist monoton wachsend und nach oben beschränkt*

(ii) $\left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{j+1}\right)_{j=1}^{\infty}$ *ist monoton fallend und nach unten beschränkt*

(iii) $\lim\limits_{j\to\infty}\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = \lim\limits_{j\to\infty}\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{j+1} =: e$

Beweis : zu (i), (ii) Monotonie :

$$\frac{\left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{j+1}}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1}} = \left[\frac{j(j+2)}{(j+1)^2}\right]^{j+1} = \left(1-\frac{1}{(j+1)^2}\right)^{j+1} \underset{\substack{\text{Lemma 1.1.4}\\ \text{(Bernoulli-Ungl.)}}}{\geq} 1-(j+1)\frac{1}{(j+1)^2} = \frac{j}{j+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{j}}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{j+1} \geq \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j} \quad \Longrightarrow \quad \left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}\right)_{j=1}^{\infty} \quad \text{monoton wachsend}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1}}{\left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{j+1}} = \left[\frac{(j+1)^2}{j(j+2)}\right]^{j+1} = \left(1+\frac{1}{j(j+2)}\right)^{j+1} \underset{\substack{\text{Lemma 1.1.4}\\ \text{(Bernoulli-Ungl.)}}}{\geq} 1+(j+1)\frac{1}{j(j+2)} > 1+\frac{1}{j+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} > \left(1+\frac{1}{j+1}\right)^{j+2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1}\right)_{j=1}^{\infty} \quad \text{monoton fallend}$$

zu (i), (ii) Beschränktheit :

$$2 = \underbrace{(1+1)^1 \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \leq \cdots \leq \left(1+\frac{1}{j}\right)^j}_{\text{monoton wachsend}} < \underbrace{\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} < \cdots < (1+1)^2}_{\text{monoton fallend}} = 4$$

$\Longrightarrow$ beide Folgen in (i), (ii) sind monoton und beschränkt

zu (iii) : Satz 2.3.9 $\Longrightarrow$

$$\lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j =: E_1 \quad \text{existiert}$$

$$\lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} = \inf_{j\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} =: E_2 \quad \text{existiert}$$

<u>g.z.z.</u> $E_1 = E_2$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; |E_1 - E_2| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ $\Longrightarrow$

$$\exists\, j_1 \quad \forall\, j \geq j_1 \;:\; \left|\left(1+\frac{1}{j}\right)^j - E_1\right| = E_1 - \left(1+\frac{1}{j}\right)^j < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists\, j_2 \quad \forall\, j \geq j_2 \;:\; \left|\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} - E_2\right| = \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} - E_2 < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad |E_1 - E_2| \leq \underbrace{\left|E_1 - \left(1+\frac{1}{j}\right)^j\right|}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \left|\left(1+\frac{1}{j}\right)^j - \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1}\right| + \underbrace{\left|\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+1} - E_2\right|}_{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\left(1+\frac{1}{j}\right)^j}_{<4} \underbrace{\left|1-\left(1+\frac{1}{j}\right)\right|}_{\frac{1}{j}} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{4}{j} < \varepsilon$$

für $j \geq j_0 := \max\{j_1, j_2, j_3\}$ $\Longrightarrow$ gemeinsamer Grenzwert wird e genannt □

Bemerkung*: *später* : Dieser Grenzwert e entspricht gerade der irrationalen Zahl $e = 2.71828\ldots$

Beispiele : (1) Für eine konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auch die Folge ihrer arithmetischen Mittel

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

und besitzt den gleichen Grenzwert. Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch ! (<u>*Übung*</u>)

(2) Für eine konvergente Folge positiver Zahlen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n > 0$, konvergiert auch die Folge ihrer geometrischen Mittel

$$\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

gegen denselben Grenzwert. Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch ! (<u>*Übung*</u>)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$: verwenden (2) mit $x_n = \dfrac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}} \underset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$: verwenden (2) mit $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \underbrace{\sqrt[n]{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}_{\sqrt[n]{2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\frac{n}{n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} \underbrace{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\curvearrowright \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \underset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} x_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 2.3.10 (iii)}}}{=} e$$

Bemerkung*: *alternative Möglichkeit zu* (4) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{n^n}{n!} &= \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \le e^{n-1} \\ \frac{n^n}{(n-1)!} &= \left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \ge e^{n-1} \end{aligned}\right\} \overset{\sqrt[n]{}}{\Longrightarrow} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{ne}\,e^n}}_{= \frac{e}{\sqrt[n]{ne}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e} \le \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \le \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{e}\,e^n}}_{= \frac{e}{\sqrt[n]{e}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Zusätzlich erhält man folgende Abschätzung: $\boxed{e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

3 Reihen

3.1 Konvergenz und Divergenz

Definition 3.1.1 *Gegeben sei eine reelle oder komplexe Zahlenfolge* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$.

(i) *Für* $m \in \mathbb{N}$ *heißt* $S_m = \sum_{j=1}^{m} z_j$ m-te Partialsumme *der unendlichen Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$.

(ii) *Die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *heißt* konvergent *genau dann, wenn* $\lim_{m\to\infty} S_m$ *existiert und endlich ist. Man setzt dann*

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j := \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} z_j$$

Anderenfalls heißt die Reihe divergent.

(iii) *Die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *heißt* absolut konvergent (divergent), *wenn die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ *konvergiert* (*divergiert*).

Bem: $a_n \geq 0 \rightsquigarrow |a_n| = a_n$

Absolute Konvergenz = Konvergenz
Absolute Divergenz = Divergenz

Beispiele : **(1)** $a_j = q^j, \ |q| < 1, \ j \in \mathbb{N}_0$ (mit $0^0 := 1$) :

$$S_m = \sum_{j=0}^{m} q^j = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \quad \text{(Induktion), Bsp. (c) nach Satz 2.3.5} \curvearrowright \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\curvearrowright \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1}$$

<u>*geometrische Reihe*</u>

(2) $a_k = (-1)^k, \ k \in \mathbb{N}$:

$$S_m = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ -1, & m \text{ ungerade} \end{cases} \curvearrowright |S_{m+1} - S_m| \equiv 1 \curvearrowright (S_m)_{m=1}^{\infty} \text{ nicht Cauchy-Folge}$$

$$\iff (S_m)_{m=1}^{\infty} \text{ nicht konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

(3) $a_j = \frac{1}{j(j+1)}, \ j \in \mathbb{N}$: $S_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}$

$$\curvearrowright \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1 \quad \text{(abs.) konvergent}$$

Satz 3.1.2 **(i)** *Ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *konvergent, so gilt* $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.

(ii) *Ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *absolut konvergent, so ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *auch konvergent.*

(iii) $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *ist konvergent* $\iff$ $\sum_{j=1}^{\infty} \Re\mathfrak{e}\, z_j$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} \Im\mathfrak{m}\, z_j$ *sind konvergent*

(iv) $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *ist absolut konvergent* $\iff$ $\sum_{j=1}^{\infty} \Re\mathfrak{e}\, z_j$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} \Im\mathfrak{m}\, z_j$ *sind absolut konvergent.*

Beweis : *früher* (Beweis Lemma 2.1.5) : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a| + |b|) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|, \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad (*)$

<u>zu (i)</u> : $\quad |z_k| = |S_k - S_{k-1}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad$ da $\quad (S_k)_{k=1}^\infty$ konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 2.3.2}]{} (S_k)_{k=1}^\infty$ Cauchy-Folge

<u>zu (ii)</u> : $\quad |S_k - S_m| = \left|\sum\limits_{j=m+1}^{k} z_j\right| \le \sum\limits_{j=m+1}^{k} |z_j| \le \left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right|, \qquad$ mit $\; S_m^{|\cdot|} := \sum\limits_{j=1}^{m} |z_j|\;$ und $\; k > m$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j$ absolut konvergent $\iff \left(S_k^{|\cdot|}\right)_{k=1}^\infty$ konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 2.3.2}]{} \left(S_k^{|\cdot|}\right)_{k=1}^\infty$ Cauchy-Folge, d.h.

$|S_k - S_m| \le \left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right|$ impliziert $(S_k)_{k=1}^\infty$ ist Cauchy-Folge, nach Satz 2.3.2 damit konvergent

<u>zu (iii)</u>: $\quad |S_k - S_m| = \sqrt{\left(\sum\limits_{j=m+1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\right)^2 + \left(\sum\limits_{j=m+1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\right)^2} \underset{(*)}{\le} \left|\sum\limits_{j=m+1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\right| + \left|\sum\limits_{j=m+1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\right|$

$$\underset{(*)}{\le} \sqrt{2}\sqrt{\left(\sum_{j=m+1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\right)^2 + \left(\sum_{j=m+1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\right)^2} = \sqrt{2}\;|S_k - S_m|$$

d.h. $(S_k)_{k=1}^\infty$ Cauchy-Folge $\iff \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\right)_{k=1}^\infty, \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\right)_{k=1}^\infty$ Cauchy-Folgen $\xRightarrow[\text{Satz 2.3.2}]{}$ (iii)

<u>zu (iv)</u>: $\quad \left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right| = \sum\limits_{j=m+1}^{k} |z_j| \underset{(*)}{\le} \sum\limits_{j=m+1}^{k} |\Re\mathrm{e}\, z_j| + \sum\limits_{j=m+1}^{k} |\Im\mathrm{m}\, z_j| \underset{(*)}{\le} \sqrt{2}\left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right| \xRightarrow[\text{analog zu (iii)}]{}$ (iv) □

Bemerkung*:

- ausreichend, reelle Reihen zu betrachten
- Bedingung (i), d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ *<u>notwendig</u>*, aber nicht *hinreichend* (z.B. Satz 3.1.4(i))

In (i) und (ii) sind umgekehrte Implikationen i.a. Falsch, d.h. es existieren divergente Reihen $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$
Und es existieren Konvergente, als nicht absolut Konvergente Reihen

Folgerung 3.1.3 **(i)** *Sei* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j$ *eine unendliche Reihe mit* $\lim\limits_{k\to\infty} z_k \ne 0$ *. Dann ist* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j$ *divergent.*

(ii) *Die geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ *ist genau dann konvergent, wenn* $0 \le |q| < 1$ *gilt.*

Beweis : <u>zu (i)</u>: folgt aus Satz 3.1.2(i) und Definition 3.1.1(i) Kontraposition
<u>zu (ii)</u>: folgt aus Beispiel (1) und (i) (Kontraposition) □

Satz 3.1.4 **(i)** *Die <u>harmonische Reihe</u>* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergiert (absolut).*

(ii) *Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *ist (absolut) konvergent.*

Beweis : <u>zu (i)</u> : Beispiel nach Folg. 2.3.3 $\curvearrowright$ $(S_m)_{m=1}^\infty$ keine Cauchy-Folge, d.h. nicht konvergent
$\curvearrowright$ Reihe divergiert (Absolut)

<u>zu (ii)</u> : $\quad S_{m+1} = S_m + \frac{1}{(m+1)^2} > S_m \;\curvearrowright\; (S_m)_{m=1}^\infty$ monoton wachsend, $S_m \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$S_m = 1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j^2} \le 1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j(j-1)}}_{\le \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = 1} \le 2 \;\curvearrowright\; (S_m)_m \text{ nach oben beschränkt } \xRightarrow[\text{Satz 2.3.9}]{} (S_m)_m \text{ konvergent}$$

□

Bemerkung*: in beiden Fällen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber in (i) Divergenz, in (ii) Konvergenz $\curvearrowright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist <u>*notwendig*</u>, aber nicht <u>*hinreichend*</u> für die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Lemma 3.1.5 (Verdichtungssatz von Cauchy)
Seien $a_n \geq 0, \ n \in \mathbb{N}$, *und* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton fallend. Dann gilt :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konvergent} \iff \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} \ \textit{konvergent}$$

Beweis : „$\Longrightarrow$“ : Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, d.h. es existiert ein $s \geq 0$ mit $s = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend, also gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$:

Idee für Beweis

$$\begin{aligned} s &\geq a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3+a_4)}_{} + \underbrace{(a_5+a_6+a_7+a_8)}_{} + \cdots + \underbrace{(a_{2^{m-1}+1}+\cdots+a_{2^m})}_{} \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2\,a_4 + 4\,a_8 + \cdots + 2^{m-1}\,a_{2^m} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + 2\,a_2 + 4\,a_4 + \cdots + 2^m\,a_{2^m}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n}\right)_{m=0}^{\infty} \text{ nach oben beschränkt, monoton wachsend}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.3.9(i)}]{} \left(\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n}\right)_{m=0}^{\infty} \text{ konvergent} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergent}$$

„$\Longleftarrow$“ : Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent $\Longrightarrow$ $\exists\, \sigma \ \forall\, m \in \mathbb{N}_0$: $\sum\limits_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n} \leq \sigma$

Sei $k \in \mathbb{N}$, wählen m so, dass $2^m \geq k$ gilt,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} a_n &\leq a_1 + \underbrace{(a_2+a_3)}_{} + \underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7)}_{} + \cdots + \underbrace{(a_{2^m}+\cdots+a_{2^{m+1}-1})}_{} \\ &\leq a_1 + 2\,a_2 + 4\,a_4 + \cdots + 2^m\,a_{2^m} \leq \sigma \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{k} a_n\right)_{k=1}^{\infty} \text{ nach oben beschränkt, monoton wachsend}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.3.9(i)}]{} \left(\sum_{n=1}^{k} a_n\right)_{k=1}^{\infty} \text{ konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \qquad \square$$

Folgerung 3.1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *konvergiert (absolut)* $\iff \alpha > 1$

Beweis : „$\Longrightarrow$“ : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 3.1.2(i)}]{} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0 \Longrightarrow \alpha > 0$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)_{n=1}^{\infty} \text{ monoton fallend} \xRightarrow[\text{Lemma 3.1.5}]{} \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \frac{1}{(2^m)^{\alpha}} \text{ konvergent}$$

$$\iff \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)m}}_{\text{geometrische Reihe}} \text{ konvergent} \iff q = 2^{1-\alpha} < 1 \iff \alpha > 1$$

„$\Longleftarrow$“: $\alpha > 1 \curvearrowright \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2^m)^{\alpha}}$ konvergent, $\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend $\xRightarrow[\text{Lemma 3.1.5}]{} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergent $\square$

3.2 Konvergenzkriterien

Satz 3.2.1 (Majoranten- / Minoraten-Kriterium)
Gegeben seien zwei unendliche Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *, wobei ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiere, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gelte :*

$$0 \leq a_n \leq b_n .$$

(i) *Aus der Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *folgt die Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) *Divergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *, so divergiert auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

B e w e i s : zu (i) : o.B.d.A. $m > k \geq n_0 \curvearrowright \left|S_m^{(a)} - S_k^{(a)}\right| = \sum\limits_{n=k+1}^{m} a_n \leq \sum\limits_{n=k+1}^{m} b_n = \left|S_m^{(b)} - S_k^{(b)}\right| < \varepsilon$ für $m, k \geq k_0(\varepsilon)$, da $\left(S_m^{(b)}\right)_{m=1}^{\infty}$ nach Voraussetzung konvergent ist $\Longrightarrow$ $\left(S_m^{(b)}\right)_{m=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge $\Longrightarrow$ $\left(S_m^{(a)}\right)_{m=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge $\underset{\text{Satz 2.3.2}}{\Longrightarrow}$ $\left(S_m^{(a)}\right)_{m=1}^{\infty}$ konvergent $\Longrightarrow$ (i)

zu (ii) : folgt aus (i) und *(Beweis-) Prinzip der Kontraposition* $\big((A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)\big)$ □

Man kann Konvergenz folgern wenn man etwas größeres findet was konvergiert

Beispiele : **(a)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-5}$ konvergent:

$$a_n = \frac{1}{n^2+2n-5} \leq \frac{1}{n^2} =: b_n, \; n \geq 3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergent} \quad \text{(Satz 3.1.4(ii))}$$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5n^2}$ divergent:

$$\frac{4^n}{5n^2} \to \infty$$

$$b_n = \frac{4^n}{5n^2} \geq \frac{4^n}{4^n} = 1 =: a_n, \; n \geq 3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \text{divergent} \quad \text{(Folg. 3.1.3(i))}$$

Satz 3.2.2 (Wurzelkriterium)

(i) *Falls es Zahlen* $c > 0,\ q \in [0,1)$ *und* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt*

$$|a_n| \leq c\, q^n ,$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Falls es ein* $c > 0$ *gibt, so dass für unendlich viele* n *gilt* $|a_n| \geq c$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

(iii) *Gilt* $a = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent, für* $a > 1$ *ist sie absolut divergent. Falls also* $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existiert, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *für* $a < 1$ *absolut konvergent, für* $a > 1$ *absolut divergent, und im Fall* $a = 1$ *kann keine Aussage getroffen werden.*

B e w e i s : zu (i), (ii): folgt aus Satz 3.2.1 und Beispiel 3.1 (1) (geometrische Reihe)

zu (iii): $a := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \curvearrowright \varepsilon = \frac{1-a}{2} > 0 \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon = \underbrace{\frac{1+a}{2}}_{q} < 1$ $\underset{\text{(i), } c=1}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent; analog führt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ zu (ii) □

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{C}, \; 0 < |z| < 1, \quad (z = 0$ klar)

$$a_n = nz^n \curvearrowright \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n|z|^n} = \sqrt[n]{n}|z| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| < 1 \xRightarrow[\text{(iii)}]{} \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \text{ absolut konvergent}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 3.1.2(ii)}]{} \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \text{ konvergent}, \quad |z| < 1 \xRightarrow[\text{Satz 3.1.2(i)}]{} \lim_{n\to\infty} nz^n = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \; |z| < 1$$

Bemerkung*: $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \curvearrowright$ Konvergenz/Divergenz möglich, z.B. $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & \text{divergent} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{konvergent} \end{cases}$

Satz 3.2.3 (Quotientenkriterium)

Gegeben sei eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n \neq 0$.

(i) *Existieren ein* q *mit* $0 < q < 1$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

dann ist die Reihe (absolut) konvergent.

(ii) *Gilt für alle* $n \geq n_0$ *ab einem gewissen* $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1,$$

so ist die Reihe (absolut) divergent.

(iii) *Gilt* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent, für* $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ *ist sie absolut divergent. Falls also* $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *existiert, so konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut für* $a < 1$*, und sie divergiert absolut für* $a > 1$*. Im Fall* $a = 1$ *kann keine Aussage getroffen werden.*

Beweis : <u>zu (i)</u> : $|a_{n+1}| \leq q|a_n| \leq q^2|a_{n-1}| \leq \ldots \leq q^{n+1-n_0}|a_{n_0}| = \underbrace{q^{-n_0}|a_{n_0}|}_{:=c} q^{n+1}, \quad n \geq n_0$

$$0 < q < 1 \xRightarrow[\text{geom. Reihe}]{} \sum_{n=1}^{\infty} cq^n \text{ konvergent} \xRightarrow[\text{Satz 3.2.1}]{} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent}$$

<u>zu (ii)</u> : $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \ldots \geq |a_{n_0}| > 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \xRightarrow[\text{Satz 3.1.2}]{} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

<u>zu (iii)</u> : folgt aus (i), (ii) und Definition von lim □

Bemerkung*:

- $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \curvearrowright$ Konvergenz/Divergenz möglich, z.B. $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & \text{divergent} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{konvergent} \end{cases}$

- Wurzelkriterium 'schärfer' als Quotientenkriterium, da i.a.

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n = 2k \\ 3\; 2^{-n}, & n = 2k+1 \end{cases} \curvearrowright \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{6}, \; \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} \curvearrowright \text{keine}$$

Entscheidung mit Quotientenkriterium, *aber:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \curvearrowright$ absolute Konvergenz

Beispiel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}; \qquad z = 0 \curvearrowright \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1$

$$z \neq 0: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \curvearrowright \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C}$$

Satz 3.2.4 (Leibniz[16]-Kriterium)

Es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *eine alternierende Reihe mit* $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *und* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton fallend. Dann ist diese unendliche Reihe konvergent.*

Beweis:

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} \\ &= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2m-2} - a_{2m-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2m}}_{>0} \leq a_1, \end{aligned}$$

außerdem: $S_{2m} = S_{2(m-1)} + \underbrace{a_{2m-1} - a_{2m}}_{\geq 0} \geq S_{2(m-1)}$

d.h. $(S_{2m})_{m=1}^{\infty}$ monoton wachsend, nach oben beschränkt $\xRightarrow[\text{Satz 2.3.9(i)}]{} (S_{2m})_{m=1}^{\infty}$ konvergent,

$\exists\, s : s = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}$; andererseits ist $S_{2m+1} = \underbrace{S_{2m}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} s} + \underbrace{a_{2m+1}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0} \curvearrowright \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = s$,

also ist $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ konvergent $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergent □

Folgerung 3.2.5 *Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.*

Beweis: folgt aus Sätzen 3.1.4(i) und 3.2.4 □

Bemerkung*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0.6931\ldots$

3.3 Addition, Umordnung, und Multiplikation

Satz 3.3.1 (Additionssatz)

Die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *seien konvergent und* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Dann ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergent, es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

Beweis: Seien $S_n^a := \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ und $S_n^b := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, dann folgt aus Satz 2.3.4

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lim_{n\to\infty} \left(\lambda\, S_n^a + \mu\, S_n^b\right) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n^a + \mu \lim_{n\to\infty} S_n^b = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j \qquad \square$$

Bemerkung*: Alle Sätze gelten für Reihen mit komplexen Gliedern, nach Satz 3.1.2 ist es daher i.a. ausreichend, reelle Reihen zu betrachten.

[16] Gottfried Wilhelm von Leibniz (* 1.7.1646 Leipzig † 14.11.1716 Hannover)

Permutation : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longmapsto \varphi(n),$ bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$

Satz 3.3.2 *Seien* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$, *absolut konvergent, und* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Permutation der natürlichen Zahlen. Wir setzen* $b_n := a_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent, es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \ .$$

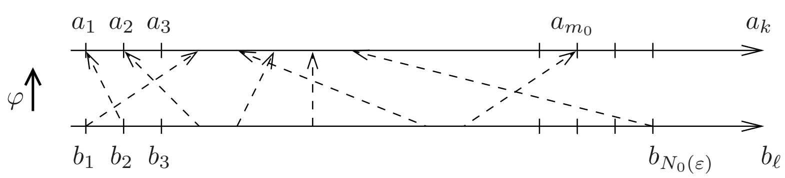
Beweis : o.B.d.A. a_n reell, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\left(S_k^{|\cdot|} = \sum\limits_{j=1}^{k} |a_j|\right)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge

sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, m_0 \quad \forall\, k > m \geq m_0 : \sum\limits_{j=m+1}^{k} |a_j| < \varepsilon \Longrightarrow \exists\, m_0 \quad \forall\, k > m_0 : \underbrace{\sum\limits_{j=m_0+1}^{k} |a_j|}_{\gamma_k} < \varepsilon$

$$\underset{\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0}{\Longrightarrow} \exists\, m_0 = m_0(\varepsilon) : \sum_{j=m_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon$$

sei $\widetilde{S}_N^{|\cdot|} := \sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|$, bestimmen $N_0(\varepsilon) := \max\left\{\varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(m_0(\varepsilon))\right\}$

$\Longrightarrow$ $\widetilde{S}_N^{|\cdot|}$ enthält für $N \geq N_0(\varepsilon)$ alle Terme $|a_1|, \ldots, |a_{m_0(\varepsilon)}|$



seien $L > N \geq N_0(\varepsilon)$,

$$\left|\widetilde{S}_L^{|\cdot|} - \widetilde{S}_N^{|\cdot|}\right| = \left|\underbrace{\left(S_{m_0}^{|\cdot|} + \cdots\right)}_{\widetilde{S}_L^{|\cdot|},\ L > N_0(\varepsilon)} - \underbrace{\left(S_{m_0}^{|\cdot|} + \cdots\right)}_{\widetilde{S}_N^{|\cdot|},\ N > N_0(\varepsilon)}\right| \leq \sum_{j=m_0+1}^{\varkappa(L,N)} |a_j| \leq \sum_{j=m_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left(\widetilde{S}_N^{|\cdot|}\right)_{N=1}^{\infty} \text{ Cauchy-Folge } \underset{\text{Satz 2.3.2}}{\Longrightarrow} \left(\widetilde{S}_N^{|\cdot|}\right)_{N=1}^{\infty} \text{ konvergent } \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ absolut konvergent}$$

<u>n.z.z.</u> : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$

sei $\sigma := \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \quad \forall\, k \geq k_0 : \left|\sum\limits_{j=1}^{k} a_j - \sigma\right| < \varepsilon,$

setzen $L_0(\varepsilon) := \max\left\{\varphi^{-1}(r),\ r = 1, \ldots, \max\{m_0(\varepsilon), k_0(\varepsilon)\}\right\}$ und $L \geq L_0(\varepsilon)$

$\Longrightarrow \sum\limits_{\ell=1}^{L} b_\ell$ enthält für $L \geq L_0(\varepsilon)$ alle Terme $a_1, \ldots, a_{\max\{m_0,k_0\}}$

$$\left|\sigma - \sum_{\ell=1}^{L} b_\ell\right| \leq \underbrace{\left|\sigma - \sum_{j=1}^{\max\{m_0,k_0\}} a_j\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=\max\{m_0,k_0\}+1}^{\infty} |a_j|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{L\to\infty}\sum_{\ell=1}^{L} b_\ell = \sigma \iff \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \qquad \square$$

Bemerkung*:

- Satz ist falsch, wenn statt *absoluter* Konvergenz nur Konvergenz gefordert wird.
- Konvergente Reihen heißen *unbedingt konvergent*, wenn jede ihrer Umordnungen wieder gegen denselben Grenzwert konvergiert; sonst heißen sie *bedingt konvergent*.

  Satz 3.3.2 bedeutet also : *absolut konvergente Reihen sind unbedingt konvergent.*
- Für nicht absolut konvergente Reihen gilt der **Umordnungssatz von Riemann**[17] :

Eine bedingt konvergente Reihe besitzt immer eine Umordnung, die gegen eine willkürlich vorgegebene Zahl konvergiert.

Beispiel : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\cdots$

Lemma 3.2.5 sichert (bedingte) Konvergenz, $\sigma = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, und $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$

Umordnung: $\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}\pm\cdots$, d.h. $\varphi(n) = \begin{cases} 2\ell-1, & n=3\ell-2\\ 4\ell-2, & n=3\ell-1\\ 4\ell\quad, & n=3\ell\end{cases}$

$$\Longrightarrow \widetilde{S}_{3m} = \sum_{\ell=1}^{m}\Big(\underbrace{\frac{1}{2\ell-1}-\frac{1}{4\ell-2}}_{\frac{1}{4\ell-2}}-\frac{1}{4\ell}\Big) = \sum_{\ell=1}^{m}\Big(\frac{1}{4\ell-2}-\frac{1}{4\ell}\Big) = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{\ell=1}^{m}\Big(\frac{1}{2\ell-1}-\frac{1}{2\ell}\Big)}_{S_{2m}}$$

$$\Longrightarrow \widetilde{S}_{3m} = \frac{1}{2}S_{2m} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty}\widetilde{S}_{3m} = \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}S_{2m} = \frac{\sigma}{2} \text{ außerdem ist}$$

$$\widetilde{S}_{3m-1} = \underbrace{\widetilde{S}_{3m}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{}\frac{\sigma}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4m}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{}0} \quad\text{und}\quad \widetilde{S}_{3m-2} = \underbrace{\widetilde{S}_{3m}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{}\frac{\sigma}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4m}+\frac{1}{4m-2}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{}0}$$

$$\curvearrowright \lim_{m\to\infty}\widetilde{S}_m = \frac{\sigma}{2}$$

Bemerkung*: weitere Umordnungen von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\cdots$ $= \xi$ mit $\frac{1}{2}\le\xi\le 1$

(i) $\varphi(n) = \begin{cases} 4\ell-3, & n=3\ell-2\\ 4\ell-1, & n=3\ell-1\\ 2\ell\quad, & n=3\ell\end{cases}$: $\underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}}\pm\cdots$ $=\frac{3}{2}\xi$

$$\Longrightarrow \widetilde{S}_{3m} = S_{4m}+\frac{1}{2}S_{2m} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty}\widetilde{S}_m = \frac{3}{2}\sigma$$

(ii) $\varphi(n) = \begin{cases} 2\ell-1, & n=5\ell-4\\ 8\ell-6, & n=5\ell-3\\ 8\ell-4, & n=5\ell-2\\ 8\ell-2, & n=5\ell-1\\ 8\ell\quad, & n=5\ell\end{cases}$: $\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}}\pm\cdots$, $=0$

$$\Longrightarrow \widetilde{S}_{5m} = -\frac{1}{2}S_{4m}+\frac{1}{2}S_{2m} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty}\widetilde{S}_m = 0$$

$(\xi = \ln 2)$

[17] Georg Friedrich Bernhard Riemann (* 17.9.1826 Hannover † 20.7.1866 Selasca/Italien)

Satz 3.3.3 (Großer Umordnungssatz)
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent. Außerdem bestehe eine eineindeutige Zuordnung*

$$b_{k\ell} = a_{j(k,\ell)} \ ,$$

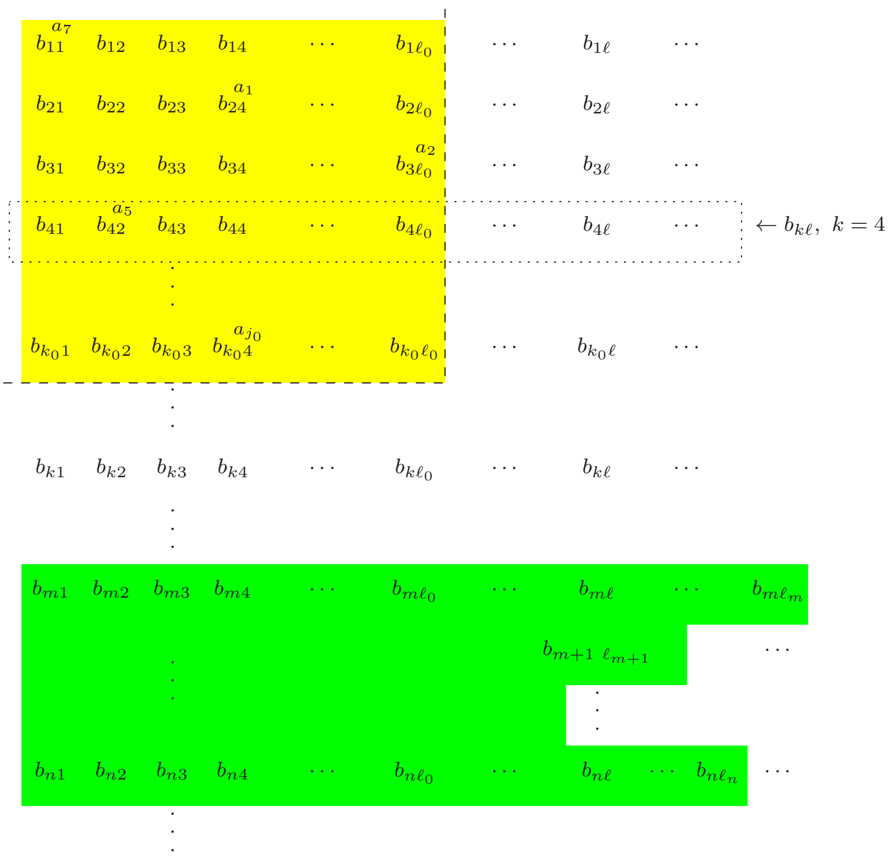
wobei k, ℓ *und* j *jeweils die natürlichen Zahlen durchlaufen.*

(i) $\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}$ *ist absolut konvergent für jedes feste* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) *Ist* $\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} = c_k$ *, so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *absolut, und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} \ .$$

B e w e i s : eineindeutige Zuordnung $b_{k\ell} = a_{j(k,\ell)}$ (*Schema*)



Sei $\varepsilon > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\exists\ j_0 = j_0(\varepsilon)$: $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon$

wählen $\ell_0 = \ell_0(j_0(\varepsilon))$ und $k_0 = k_0(j_0(\varepsilon))$ so, dass $\{a_1, \dots, a_{j_0}\} \subseteq \{b_{k\ell} : k = 1, \dots k_0,\ \ell = 1, \dots, \ell_0\}$,
(*d.h.* $a_1, \dots, a_{j_0}$ *sind im gekennzeichneten Block enthalten*)

zu (i) : sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest; in Analogie zu Satz 3.3.2 folgt für $S_n^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} |b_{k\ell}|$:

$$\left|S_n^{(k)} - S_m^{(k)}\right| = \underbrace{\sum_{\ell=m+1}^{n} |b_{k\ell}|}_{\substack{\text{enthält für } n>m\geq \ell_0 \\ \text{nicht } |a_1|,\ \dots,\ |a_{j_0}|}} \leq \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon \quad \text{für } n > m \geq \ell_0 ,$$

$$\Longrightarrow \left(S_n^{(k)}\right) \text{ Cauchy-Folge} \Longrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} \text{ (absolut) konvergent für jedes feste } k \in \mathbb{N},\ c_k := \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}$$

zu (ii) : $c_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, \ell_k = \ell_k(\varepsilon) : \left|c_k - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell}\right| < \frac{\varepsilon}{2^k},$ o.B.d.A $\ell_k \geq \ell_0$

sei $S_n^{|\cdot|} := \sum_{j=1}^{n} |c_j|$ und $n > m \geq k_0$:

$$\left|S_n^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |c_k| = \sum_{k=m+1}^{n} \left| \underbrace{c_k - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell}}_{|\cdot|<\frac{\varepsilon}{2^k}} + \sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell}\right| < \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}}_{<\varepsilon} + \sum_{k=m+1}^{n}\sum_{\ell=1}^{\ell_k} |b_{k\ell}|$$

$$< \varepsilon + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n}\sum_{\ell=1}^{\ell_k} |b_{k\ell}|}_{\substack{\text{enthält für } n>m\geq k_0 \\ \text{nur endliche viele Terme,} \\ \text{nicht } |a_1|,\ \dots,\ |a_{j_0}|}} \leq \varepsilon + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |a_j| < 2\varepsilon \quad \text{für } n > m \geq k_0 ,$$

$$\Longrightarrow \left(S_n^{|\cdot|}\right) \text{ Cauchy-Folge} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ (absolut) konvergent, } c := \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

n.z.z. : $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j =: a$

$$|c-a| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} c_k - \sum_{j=1}^{j_0} a_j\right| + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |c_k|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{für } n_0 = n_0(\varepsilon)}} + \underbrace{\sum_{j=j_0+1}^{\infty} |a_j|}_{<\varepsilon} < \left|\sum_{k=1}^{n_0} c_k - \sum_{j=1}^{j_0} a_j\right| + 2\varepsilon$$

sei o.B.d.A. $n_0 \geq k_0$,

$$|c-a| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell} - \sum_{j=1}^{j_0} a_j\right| + \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n_0}\left(c_k - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell}\right)\right|}_{< \sum_{k=1}^{n_0}\left|c_k - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell}\right| < \sum_{k=1}^{n_0}\frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon} + 2\varepsilon$$

$$< \left| \underbrace{\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{\ell_k} b_{k\ell}}_{\substack{\text{enthält } a_1+\cdots+a_{j_0} \\ \text{wegen } n_0\geq k_0,\ \ell_k\geq \ell_0}} - \sum_{j=1}^{j_0} a_j\right| + 3\varepsilon < \underbrace{\sum_{j=j_0+1}^{\infty} |a_j|}_{<\varepsilon} + 3\varepsilon < 4\varepsilon$$

$\curvearrowright$ $|c-a| < 4\varepsilon$ für beliebige $\varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad c = a$ $\square$

Bemerkung*: Satz 3.3.3 bleibt richtig, wenn (a_j) nur in endlich viele Teilfolgen $(b_{k\ell})$ zerlegt wird, d.h. $k = 1, \ldots, K$

Satz 3.3.4 (Multiplikationssatz)
Die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *seien absolut konvergent. Ferner bestehe eine eineindeutige Zuordnung*

$$a_n \cdot b_k = c_\ell \ ,$$

wobei n, k *und* ℓ *jeweils die natürlichen Zahlen durchlaufen. Dann ist* $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} c_\ell$ *absolut konvergent, es gilt*

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) .$$

Beweis :

$$\begin{array}{ccccc}
\overset{c_7}{a_1 b_1} & \overset{c_{26}}{a_1 b_2} & a_1 b_3 & a_1 b_4 & \cdots \\
\overset{c_2}{a_2 b_1} & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \overset{c_1}{a_2 b_4} & \cdots \\
\overset{c_{11}}{a_3 b_1} & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & \cdots \\
a_4 b_1 & \overset{c_5}{a_4 b_2} & a_4 b_3 & a_4 b_4 & \cdots \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Seien c_ℓ 'irgendwie' angeordnet; analog zu Satz 3.3.3 existieren nun zu jedem ℓ_0 ein $n_0(\ell_0)$ und $k_0(\ell_0)$, so dass alle $c_1, \ldots, c_{\ell_0}$ in den Produkten $\{a_n b_k \ : \ 1 \le n \le n_0, \ 1 \le k \le k_0\}$ auftauchen

$$\Longrightarrow \quad \sum_{\ell=1}^{\ell_0} |c_\ell| \ \le \ \left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right)\left(\sum_{k=1}^{k_0} |b_k|\right) \ \le \ a \cdot b \ < \ \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{S_m^{|\cdot|}\right\} \ \text{monoton wachsend, beschränkt}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.3.9(i)}]{} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \ \text{ absolut konvergent}$$

Nun folgt mit Satz 3.3.3 (*Aufteilung einer absolut konvergenten Reihe*)

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_k\right) \ = \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) .$$

□

Bemerkung*:

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & \cdots \\
 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 & \cdots \\
j+k=3 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & \cdots \\
j+k=4 & a_4 b_1 & a_4 b_2 & a_4 b_3 & a_4 b_4 & \cdots \\
j+k=5 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Oft werden Produkte diagonal aufsummiert, Vorteil : nur eine unendliche Reihe

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \ &= \ \sum_{n=1}^{\infty} \ \sum_{j+k=n+1} a_j \ b_k \\
&= \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \ b_k \\
&= \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \ b_{n+1-k}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cauchy-Produkt}}$

Beispiele : **(a)** Sei $0 < q < 1$, geometrische Reihe : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(1-q)^2} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} q^j\, q^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n$$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$, $z \in \mathbb{C}$ $\xRightarrow[\text{Bsp. nach Satz 3.2.3}]{}$ absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\Big) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\,\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}}_{\text{Cauchy-Produkt}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \overbrace{\frac{n!}{j!(n-j)!}}^{\binom{n}{j}} z^j w^{n-j}}_{(z+w)^n,\ \text{Binom. Satz}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

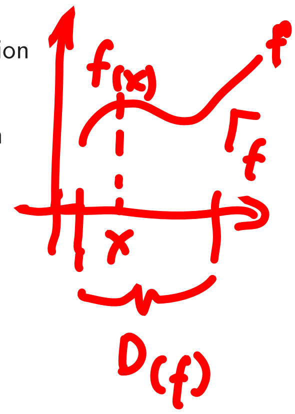
4 Reelle Funktionen

4.1 Definitionen

Definition 4.1.1 *Sei $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung f, die jedem $x \in M$ genau eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet, nennt man eine auf M definierte* reelle Funktion, *$M = D(f)$ heißt* Definitionsbereich *der Funktion f.*

Bemerkung*:

- $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reelle Funktion; $f : D(f) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktion
  $f : D(f) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex(wertig)e Funktion, $f = \Re\mathrm{e}\, f + i\, \Im\mathrm{m}\, f$
- $\Gamma_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in D(f),\ y = f(x)\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ... Graph der Funktion



Beispiele :

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $D(f) = [0,1]$ ... *Dirichlet*[18]*-Funktion*
2. $g(x) = ax + b$, $D(g) = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ fest ... *lineare Funktion*
3. $h(x) = |x|$, $D(h) = \mathbb{R}$
4. $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k\, x^k$, $D(p) = \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$, ... *Polynom*
5. $r(x) = \dfrac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell}$, $D(r) = \mathbb{R} \setminus \Big\{x : \sum\limits_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell = 0\Big\}$, $a_k,\ b_\ell \in \mathbb{R}$, ... *rationale Funktion*

Definition der Stetigkeit

Definition 4.1.2 *Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ mit $D(f)$.*

(i) *Sei $x_0 \in D(f)$. $f(x)$ heißt* stetig in x_0, *falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in D(f)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt*

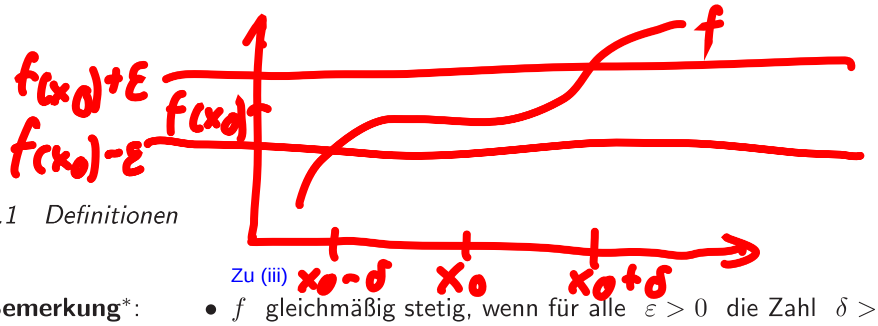
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, .$$

(ii) *f heißt* stetig auf *$D(f)$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D(f)$ stetig ist.*

(iii) *f heißt* gleichmäßig stetig auf *$D(f)$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta = \delta(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $x, y \in D(f)$ gilt*

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \, .$$

[18] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (* 13.2.1805 Düren † 5.5.1859 Göttingen)



Zu (iii)

Bemerkung*:

- f gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so gewählt werden kann, dass δ nur von ε, aber nicht von $x_0 \in D(f)$ abhängt
- f gleichmäßig stetig auf $D(f) \implies f$ stetig auf $D(f)$, Umkehrung i.a. falsch

$\boxed{\textbf{Beispiele}}$:

1. Dirichlet-Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad D(f) = [0,1] \curvearrowright$ nirgends stetig

   aber : $F(x) = 1\,, \quad D(F) = [0,1] \cap \mathbb{Q} \implies F(x)$ stetig in jedem $x_0 \in D(F) \subset \mathbb{Q}$

2. $g(x) = ax+b, \ D(g) = \mathbb{R} \curvearrowright g(x)$ gleichmäßig stetig auf $D(g) \quad (\delta = \varepsilon|a|^{-1},\ a \neq 0)$

Zu 2.)

$|g(x) - g(x')|$

$= |ax+b-(ax'+b)|$

$= |a| \cdot \underbrace{|x-x'|}_{<\delta}$

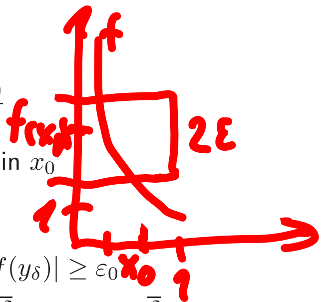
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}\,, \quad D(f) = (0,1] \curvearrowright f$ stetig auf $D(f)$, aber nicht gleichmäßig stetig:

   $x_0 \in (0,1],\ \varepsilon > 0$, wählen $0 < \delta < \min\left(\dfrac{x_0}{2}, \varepsilon\dfrac{x_0^2}{2}\right)$

   sei $x \in D(f)$ mit $|x - x_0| < \delta \curvearrowright x > x_0 - |x - x_0| > x_0 - \delta > \dfrac{x_0}{2}$

   Betrag(x-x0) < delta

   $\curvearrowright |f(x) - f(x_0)| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| = \dfrac{|x - x_0|}{x x_0} < \dfrac{2\delta}{x_0^2} < \varepsilon \iff f$ stetig in x_0



   f nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$:

   z.z.: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x_\delta, y_\delta \in (0,1], |x_\delta - y_\delta| < \delta : |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$

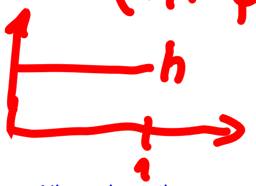
   hier $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$; für $\delta > 0$ setzen wir $\overline{\delta} = \frac{1}{2}\min(\delta, 1) < \delta,\ 0 < x_\delta < 1 - \overline{\delta},\ y_\delta = x_\delta + \overline{\delta}$

   $\curvearrowright x_\delta, y_\delta \in (0,1],\ |x_\delta - y_\delta| = \overline{\delta} < \delta$

   $\curvearrowright |f(x_\delta) - f(y_\delta)| = \dfrac{|x_\delta - y_\delta|}{x_\delta y_\delta} \underset{x_\delta < 1}{>} \dfrac{\overline{\delta}}{x_\delta + \overline{\delta}} \underset{x_\delta < \overline{\delta}}{>} \dfrac{\overline{\delta}}{2\overline{\delta}} = \varepsilon_0,\ 0 < x_\delta < \min(\overline{\delta}, 1 - \overline{\delta})$

Zu 1.)

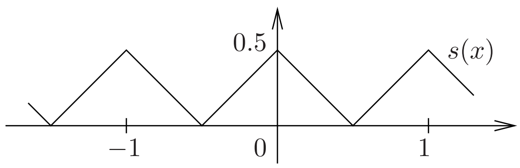
$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



Nirgends stetig

4. $s(x) = \left| x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2} \right|, \quad D(s) = \mathbb{R}$

   $\implies s$ gleichmäßig stetig auf $D(s)$



> **Definition 4.1.3** **(i)** x_0 *ist* Häufungspunkt *von* M, *falls eine Folge* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset M$ *existiert, so dass* $x_k \neq x_0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ *gelten.*
>
> **(ii)** *Gegeben seien eine Funktion* $y = f(x)$ *mit* $D(f)$, *und ein Häufungspunkt* x_0 *von* $D(f)$. *Dann gilt* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \iff$ *Für alle Folgen* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$ *mit* $x_k \neq x_0$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ *ist* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

Schreibweise : $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a, \qquad f(x) \longrightarrow a$ für $x \to x_0$

Bemerkung*:

- x_0 Häufungspunkt von M impliziert i.a. nicht $x_0 \in M$, z.B. $M = (0,1],\ x_0 = 0$
- x_0 *isolierter Punkt* von $M \iff \exists\, \delta > 0 :\ K_\delta(x_0) \cap M = \{x_0\}$
- x_0 isolierter Punkt von $D(f) \xRightarrow[\text{Def. 4.1.2}]{} f$ stetig in x_0 (für beliebige Funktionen f)
- $x_0 \in M \curvearrowright x_0$ isolierter Punkt $\vee$ x_0 Häufungspunkt

Satz 4.1.4 *Gegeben seien eine Funktion $y = f(x)$ mit $D(f)$, und ein Häufungspunkt x_0 von $D(f)$. Dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D(f)$ mit $x \neq x_0$ gilt*

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon \ .$$

Beweis : „$\Longrightarrow$" : mit Kontraposition

$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, y \in D(f),\ y \neq x_0,\ |y - x_0| < \delta,$ und $|f(y) - a| \geq \varepsilon_0,$

setzen $\delta_k := \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N} \quad \curvearrowright\ \exists\ (y_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f), \quad y_k \neq x_0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ und $|f(y_k) - a| \geq \varepsilon_0$

$\curvearrowright\ \exists\ (y_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f), \quad y_k \neq x_0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) \neq a \xRightarrow[\text{Def. 4.1.3(ii)}]{} \neg \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \right)$

„$\Longleftarrow$" : Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$ mit $x_k \neq x_0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, z.z. : $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = a$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \forall\, x \in D(f),\ 0 < |x - x_0| < \delta:\ |f(x) - a| < \varepsilon \\[1em] \exists\, k_0 = k_0(\delta(\varepsilon)) \quad \forall\, k \geq k_0:\ 0 < |x_k - x_0| < \delta \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} |f(x_k) - a| < \varepsilon \\ \text{für} \quad k \geq k_0(\varepsilon) \end{array}$$

$\square$

Folgerung 4.1.5 *Die Funktion $y = f(x)$ mit $D(f)$ ist in $x_0 \in D(f)$ stetig genau dann, wenn x_0 ein isolierter Punkt ist (kein Häufungspunkt von $D(f)$) oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.*

Definition 4.1.6 *Gegeben seien eine Funktion f mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.*

(i) *Sei $D(f) \supseteq [x_0, x_0 + \sigma)$. $f(x)$ heißt* rechtsseitig stetig in *x_0, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in D(f)$ mit $x_0 < x < x_0 + \delta$ gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ .$$

(ii) *Sei $D(f) \supseteq (x_0 - \sigma, x_0]$. $f(x)$ heißt* linksseitig stetig in *x_0, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in D(f)$ mit $x_0 - \delta < x < x_0$ gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ .$$

(iii) *Sei $D(f) \supseteq (x_0, x_0 + \sigma)$ und x_0 ein Häufungspunkt von $D(f)$. $f(x)$ besitzt einen* rechtsseitigen Grenzwert *a in x_0, d.h. $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = a$, falls für alle Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset (x_0, x_0 + \sigma) \subseteq D(f)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = a$.*

(iv) *Sei $D(f) \supseteq (x_0 - \sigma, x_0)$ und x_0 ein Häufungspunkt von $D(f)$. $f(x)$ besitzt einen* linksseitigen Grenzwert *a in x_0, d.h. $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = a$, falls für alle Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset (x_0 - \sigma, x_0) \subseteq D(f)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = a$.*

Folgerung 4.1.7 *Gegeben seien eine Funktion f, $\sigma > 0$, und $D(f) \subseteq (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$. Dann gilt:*

$$f(x) \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

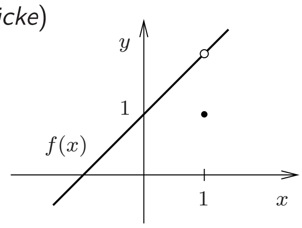
Bemerkung*: Definition 4.1.6 ist spezifisch für $\mathbb{R}$; nur dort existieren 'links' und 'rechts' (bzw. $<$ und $>$)

<u>Unstetigkeiten</u>

Sei f, $D(f) \subset \mathbb{R}$, unstetig in x_0 $\underset{\text{Folg. 4.1.5}}{\Longrightarrow}$ x_0 Häufungspunkt von $D(f)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (falls ex.)

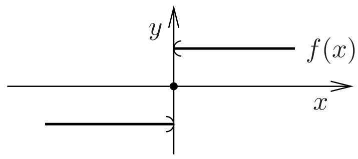
1. $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$ (*hebbare Unstetigkeit, Lücke*)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} \quad , \qquad x_0 = 1$$



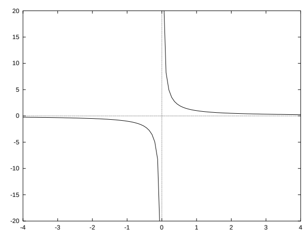
2. $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$, aber beide Grenzwerte existieren (*Sprungstelle*)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad , \qquad x_0 = 0$$



3. $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ und / oder $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ streben gegen $\pm\infty$ (*Polstelle*)

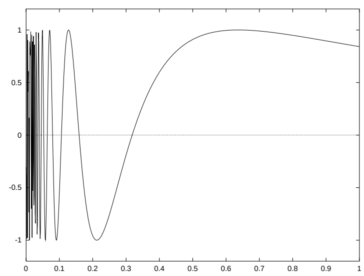
$$f(x) = \frac{1}{x} \ , \qquad x_0 = 0$$



4. $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ und / oder $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ existieren nicht (*Unstetigkeit 2. Art*)

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ , \quad D(f) = (0,1], \quad x_0 = 0$$

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\pi k} & &\Longrightarrow & f(x_k) &\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ \xi_k &= \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} & &\Longrightarrow & f(\xi_k) &\xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \\ \eta_k &= \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}} & &\Longrightarrow & f(\eta_k) &\xrightarrow[k\to\infty]{} -1 \end{aligned}$$



4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.2.1 *Es seien Funktionen f mit $D(f)$ und g mit $D(g)$ gegeben, für die $D(f) = D(g)$ gilt, und die in $x_0 \in D(f) = D(g)$ stetig sind.*

(i) *Sind $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, so ist $(\lambda f + \mu g)(x)$ in x_0 stetig.*

(ii) *Die Funktion $(f \cdot g)(x)$ ist in x_0 stetig.*

(iii) *Ist zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ in x_0 stetig.*

B e w e i s : <u>zu (i)</u> : o.B.d.A $\lambda \neq 0, \ \mu \neq 0$

Sei $\varepsilon > 0$ $\Longrightarrow$ $\exists\ \delta_f = \delta_f(\varepsilon, x_0) \quad \forall\ x \in D(f), |x - x_0| < \delta_f : \quad |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|}$

Wissen nach Vorgabe

$\exists\ \delta_g = \delta_g(\varepsilon, x_0) \quad \forall\ x \in D(g), |x - x_0| < \delta_g : \quad |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2|\mu|}$

$$\Longrightarrow \quad \Big|(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(x_0)\Big| \;\le\; |\lambda|\,\underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}}+|\mu|\,\underbrace{|g(x)-g(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2|\mu|}} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

=>f + g sind stetig in x0

für $\quad |x-x_0|<\delta:=\min(\delta_f,\delta_g)$

zu (ii) : Sei $\sigma>0$ so gewählt, dass $K_\sigma(x_0)\subset D(f)=D(g)$ gelte,

$f(x)$ stetig in x_0 $\underset{\varepsilon=1}{\Longrightarrow}$ $\exists\,\delta_0=\min\big(\delta(1,x_0),\sigma\big)>0 \quad \forall\, x\in K_\sigma(x_0):\ |f(x)-f(x_0)|<1$

Dreiecksungleichung

$\underset{\text{Lemma 1.1.3}}{\Longrightarrow}$ $|f(x)|<\underbrace{|f(x_0)|+1}_{=:M}$ für alle x mit $|x-x_0|<\delta_0$

$$\begin{aligned}\Big|(fg)(x)-(fg)(x_0)\Big| &= \Big|f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)\Big|\\ &\le \underbrace{|f(x)|}_{\substack{<\,M\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_0}}\ \underbrace{\Big|g(x)-g(x_0)\Big|}_{\substack{<\,\frac{\varepsilon}{2M}\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_g}} + |g(x_0)|\ \underbrace{\Big|f(x)-f(x_0)\Big|}_{\substack{<\,\frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_f}}\\ &< \varepsilon \qquad \text{für } \ |x-x_0|<\delta:=\min(\delta_0,\delta_f,\delta_g)\end{aligned}$$

zu (iii) : $|g(x_0)|>0$, g stetig in x_0, $\varepsilon:=\dfrac{|g(x_0)|}{2}>0$

$\underset{\text{Lemma 1.1.3}}{\Longrightarrow}$ $\exists\,\delta_0>0 \quad \forall\, x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\ :\ \dfrac{3}{2}|g(x_0)|=|g(x_0)|+\varepsilon>|g(x)|>|g(x_0)|-\varepsilon=\dfrac{|g(x_0)|}{2}>0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| &= \frac{|f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)|}{|g(x)|\ |g(x_0)|} \;\le\; \frac{2}{|g(x_0)|^2}\ |f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)|\\ &\le \frac{2}{|g(x_0)|^2}\left(\underbrace{|f(x)|}_{\substack{<\,M\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_0}}\ \underbrace{\Big|g(x)-g(x_0)\Big|}_{\substack{<\,\frac{\varepsilon}{2M}\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_g}} + \underbrace{|g(x)|}_{\substack{<\,\frac{3}{2}|g(x_0)|\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_0}}\ \underbrace{\Big|f(x)-f(x_0)\Big|}_{\substack{<\,\frac{\varepsilon}{3|g(x_0)|}\\ \text{für } |x-x_0|<\delta_f}}\right)\\ &< \varepsilon \qquad \text{für } \ |x-x_0|<\delta:=\min(\delta_0,\delta_f,\delta_g)\end{aligned}$$

□

Bemerkung*:
- alternativ: Folgerung 4.1.5 und Satz 2.3.4
- Jede rationale Funktion ist auf ihrem 'natürlichen' Definitionsgebiet stetig,

$$r(x)=\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k\,x^k}{\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\,x^\ell}\,,\qquad D(r)=\mathbb{R}\setminus\left\{x:\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\,x^\ell=0\right\},\qquad a_k,\ b_\ell\in\mathbb{R}\,.$$

m, n sind Elemente der ganzen positiven Zahlen

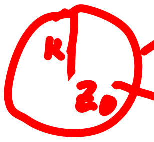
$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\dots+b_nx^n}$$

Schreibweise: $K_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ ... offene Kugel um $z_0\in\mathbb{C}$ mit Radius $r>0$

$\overline{K_r(z_0)}=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le r\}$ ... abgeschlossene Kugel um $z_0\in\mathbb{C}$ mit Radius $r>0$

in $\mathbb{R}$: $K_r(x_0)=(x_0-r,x_0+r)$ bzw. $\overline{K_r(x_0)}=[x_0-r,x_0+r]$ ... offenes/abgeschlossenes Intervall

$\curvearrowright$ jedes Intervall entspricht passender Kugel, $(a,b)=K_r(x_0)$ mit $x_0=\frac{a+b}{2}$, $r=\frac{b-a}{2}>0$



$|z-z_0|=r$

$|z-z_0|<r$

Bemerkung*:

- $K=\overline{K_r(z_0)}$ (bzw. $K=[a,b]$) beschränkt und 'abgeschlossen' $\rightsquigarrow$ 'kompakt' (später)
- Besonderheit abgeschlossener Mengen: $(x_n)_n \subset K$ konvergent $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in K$:
  für $K=\overline{K_r(z_0)}$; $(x_n)_n$ konvergent in $K\subset\mathbb{C} \underset{\text{früher}}{\Longrightarrow} \exists\, x\in\mathbb{C} : x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
  Annahme: $x\notin K \curvearrowright |x-z_0|>r \curvearrowright \varepsilon_0=|x-z_0|-r>0$
  $\curvearrowright \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \forall\, n\geq n_0 : |x-x_n|<\frac{\varepsilon_0}{2}$
  $\curvearrowright \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \forall\, n\geq n_0 : |x_n-z_0|\geq|x-z_0|-|x_n-x|>r$ ↯

Satz 4.2.2 *Sei $K=\overline{K_r(z_0)}$ für ein $r>0$ und ein $z_0\in\mathbb{C}$, oder $K=[a,b]$ für $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Die reelle Funktion f sei stetig auf $D(f)=K$. Dann existieren x_*, $x^*\in K$ mit*

$$f(x_*) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x)$$
$$f(x^*) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x)$$

Insbesondere ist $\{f(x) : x\in K\}$ beschränkt.

Beweis: Sei $\alpha=\inf\limits_{x\in K} f(x)$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$ oder $\alpha=-\infty$;

zeigen: $\exists\ (\xi_n)_{n=1}^{\infty} : \xi_k\neq\xi_j$ für $k\neq j$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=\alpha$:

$\alpha>-\infty$: $\exists\, \xi_1\in K: \quad \alpha \leq f(\xi_1) < \alpha+1,$ falls $f(\xi_1)=\alpha \curvearrowright x_*:=\xi_1 \curvearrowright$ Problem gelöst

sonst: $\exists\, \xi_2\in K: \quad \alpha \leq f(\xi_2) < \alpha + \dfrac{f(\xi_1)-\alpha}{2} < f(\xi_1) \Longrightarrow \xi_1\neq\xi_2,\ f(\xi_2)<\alpha+\frac{1}{2}$

$\vdots$

$\exists\, \xi_k\in K: \quad \alpha \leq f(\xi_k) < \alpha + \dfrac{f(\xi_{k-1})-\alpha}{2} < f(\xi_{k-1}) \Longrightarrow \xi_k\notin\{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}\},$

$$f(\xi_k)-\alpha<\frac{f(\xi_{k-1})-\alpha}{2}<\cdots<\frac{f(\xi_1)-\alpha}{2^{k-1}}<\frac{1}{2^{k-1}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \iff \lim_{k\to\infty} f(\xi_k)=\alpha$$

wobei Prozedur abbricht, falls $\exists\, m\in\mathbb{N} : f(\xi_m)=\alpha \curvearrowright x_*:=\xi_m\in K \curvearrowright$ Problem gelöst

$\alpha=-\infty$: $\exists\, \xi_1\in K: \quad f(\xi_1)<-1$

$\exists\, \xi_2\in K: \quad f(\xi_2)<2f(\xi_1) < f(\xi_1)) \Longrightarrow \xi_1\neq\xi_2$

$\vdots$

$\exists\, \xi_k\in K: \quad f(\xi_k)<2f(\xi_{k-1})< f(\xi_{k-1}) \Longrightarrow \xi_k\notin\{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}\},\ \lim\limits_{k\to\infty} f(\xi_k)=-\infty$

$(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ beschränkt $\underset{\text{Folg. 2.2.6}}{\Longrightarrow} \exists\ \xi_0\ \ \exists$ Teilfolge $(\xi_{n_k})_{k=1}^{\infty} : \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k}=\xi_0,\quad \xi_{n_k}\neq\xi_{n_j}$ für $k\neq j$

$\underset{\text{Vorbem.}}{\Longrightarrow} \xi_0\in K$, Häufungspunkt von $K \underset{\text{Folg. 4.1.5}}{\Longrightarrow} \alpha=\lim\limits_{k\to\infty} f(\xi_{n_k}) = f(\xi_0)$

$\curvearrowright \exists\, \xi_0\in D(f) : \alpha=f(\xi_0)>-\infty$ (*d.h.* $\alpha=-\infty$ *kann gar nicht eintreten*), $f(\xi_0)=\alpha=\inf\limits_{x\in K} f(x)$,

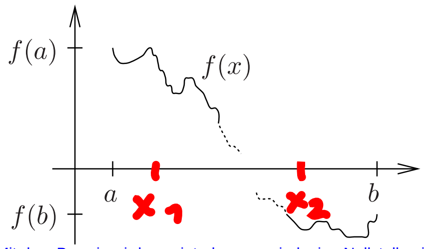
setzen $x_*:=\xi_0\in K$; Konstruktion von x^* analog, bzw. $g(x)=-f(x)$, $x\in K$, betrachten □

Bemerkung*: Alle Voraussetzungen in Satz 4.2.2 sind wesentlich, es kann höchstens K durch eine beliebige abgeschlossene und beschränkte (i.a. kompakte) Menge ersetzt werden.

- $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$, $x\in[0,2]$ *nicht stetig*
  $\Longrightarrow \sup\limits_{x\in[0,2]} (x-\lfloor x\rfloor)=1,$ aber $\nexists\, x^*\in[0,2] : x^*-\lfloor x^*\rfloor=1$
- $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1] \Longrightarrow \sup\limits_{x\in(0,1]} \dfrac{1}{x}=+\infty,$ aber $\forall\, x^*\in(0,1] : \dfrac{1}{x^*}<\infty$
- $f(x)=x$, $x\in[0,1) \Longrightarrow \sup\limits_{x\in[0,1)} x=1,$ aber $\forall\, x^*\in[0,1) : x^*<1$

Lemma 4.2.3 *Die Funktion* $y = f(x)$ *sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall* $D(f) = [a, b]$, *und es gelte* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Dann existiert ein* $\xi \in (a, b)$, *für das* $f(\xi) = 0$ *gilt.*

Beweis : Sei o.B.d.A. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$,



$M := \{y : y \in [a, b]$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, y]\}$

$\Longrightarrow$ $M \neq \emptyset$ $(a \in M)$, M beschränkt $(y \leq b)$

$\xrightarrow[\text{Axiom V}]{}$ $\exists\, \xi \in [a, b]$: $\xi := \sup M$

n.z.z. : (i) $f(\xi) = 0$

(ii) $\xi \in (a, b)$

Mit dem Beweis wird gezeigt, dass es mind. eine Nullstelle gibt, es kann aber auch mehr geben...

zu (i) : Annahme : $f(\xi) \neq 0$

$f(\xi) > 0 \xRightarrow[f \text{ stetig}]{} \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) : f(x) > 0 \curvearrowright \xi$ nicht obere Schranke von M

$f(\xi) < 0 \xRightarrow[f \text{ stetig}]{} \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, x \in (\xi - \eta, \xi + \eta) : f(x) < 0 \curvearrowright \xi$ nicht kleinste obere Schranke von M

$\Longrightarrow$ Widerspruch $\Longrightarrow$ $f(\xi) = 0$

zu (ii) : $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0 \Longrightarrow \xi \in (a, b)$ □

Satz 4.2.4 (Zwischenwertsatz) Für stetige Funktionen

Es sei I *ein Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen) und* $y = f(x)$ *eine stetige Funktion mit* $D(f) = I$. *Ist* α *eine reelle Zahl mit*

$$\inf \{f(x) : x \in I\} < \alpha < \sup \{f(x) : x \in I\} ,$$

so gibt es mindestens einen Punkt $x_0 \in I$ *mit* $f(x_0) = \alpha$.

Beweis : Eigenschaften sup, inf $\curvearrowright \exists\, x_1, x_2 \in I : \inf_{x \in I} f(x) \leq f(x_1) < \alpha < f(x_2) \leq \sup_{x \in I} f(x)$,
o.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Wir setzen X1 und X2 im Bild oben

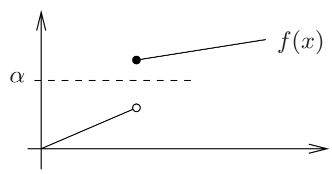
$$h(x) := f(x) - \alpha \,, \quad D(h) = [x_1, x_2] \,,$$

$\curvearrowright h(x)$ stetig, $h(x_1) < 0, h(x_2) > 0 \xRightarrow[\text{Lemma 4.2.3}]{} \exists\, x_0 \in (x_1, x_2) : h(x_0) = 0 \curvearrowright \exists\, x_0 \in D(f) : f(x_0) = \alpha$

□

Bemerkung*:

- Beim Übergang von einem Wert zu einem anderen Funktionswert nimmt eine stetige Funktion jeden dazwischen liegenden Wert mindestens einmal an.
  Falls das inf = sup = s —> f(x) = s auf I folgt daraus für ein beliebiges X0 Element I erfüllt Satz
- Ist $\{f(x) : x \in I\}$ nicht nach oben bzw. unten beschränkt, so setze man $\sup_{x \in I} f(x) = +\infty$ bzw. $\inf_{x \in I} f(x) = -\infty$.
- Ist $f(x)$ nicht stetig, dann gilt Satz 4.2.4 i.a. nicht.



Satz 4.2.5 *Seien* $K = \overline{K_r(z_0)}$ *für ein* $r > 0$ *und ein* $z_0 \in \mathbb{C}$, *oder* $K = [a, b]$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *und* f *eine stetige Funktion auf* $D(f) = K$. *Dann ist* f *gleichmäßig stetig.*

Beweis : *Annahme* : f sei nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x_\delta, y_\delta \in K,\ |x_\delta - y_\delta| < \delta \ : \ |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Setzen $\delta_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\Longrightarrow$ $\exists\ (x_k)_k\,, (y_k)_k\,, |x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ und $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_0$

$(x_k)_k \subset K \xRightarrow[\text{Folg. 2.2.6(ii)}]{} \exists$ Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{\ell\to\infty} x_{k_\ell} = x_0 \in K$,

$\curvearrowright\ |y_{k_\ell} - x_0| \leq |y_{k_\ell} - x_{k_\ell}| + |x_{k_\ell} - x_0| < \frac{1}{k_\ell} + \varepsilon < 2\varepsilon\ ,\ \ell \geq \ell_0 \iff \lim\limits_{\ell\to\infty} y_{k_\ell} = x_0$

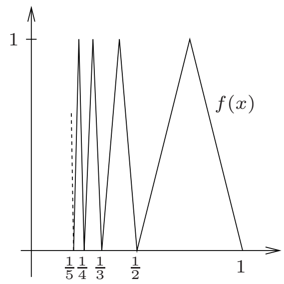
f stetig $\curvearrowright \lim\limits_{\ell\to\infty} f(x_{k_\ell}) = f(x_0) = \lim\limits_{\ell\to\infty} f(y_{k_\ell})$ $\curvearrowright$ *Widerspruch zu* $|f(x_{k_\ell}) - f(y_{k_\ell})| \geq \varepsilon_0 > 0$ $\square$

Beispiele :

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = (0,1] \xRightarrow[\text{früher}]{} f$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig

- $f(x)$ ... gleichschenklige Dreiecke der Höhe 1 über $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $D(f) = (0,1]$

  $\xRightarrow[\text{analog}]{}$ stetig auf $D(f)$, nicht gleichmäßig stetig



4.3 Umkehrfunktionen

zur Erinnerung: Eine Funktion f von $D(f)$ nach $W(f) = \{y \in \mathbb{R}\ :\ y = f(x)\ ,\ x \in D(f)\}$ heißt *bijektiv*, wenn es zu jedem $y \in W(f)$ genau ein $x \in D(f)$ mit $y = f(x)$ gibt.

f: x—> y heißt Injektiv, falls für alle x1, x2 Element von x gilt: f(x1) = f(x2) <=> x1 = x2
f: x—> y heißt surjektiv, falls für gilt: für alle y Element Y und es existiert ein x Element X: f(x) = y

<u>*allgemeiner*</u> : $F : X \longrightarrow Y$ ist *bijektiv* genau dann, wenn eine Abbildung $G : Y \longrightarrow X$ existiert, so dass $G \circ F = \mathrm{id}_X$ und $F \circ G = \mathrm{id}_Y$ gelten. G wird als F^{-1} bezeichnet und heißt *die zu* F *inverse Abbildung*.

Definition 4.3.1 *Sei* f *mit* $D(f) \subset \mathbb{R}$ *gegeben. Das offene Intervall* $(a,b) \subset D(f)$ *heißt* Monotonie-Intervall der Funktion f, *falls* f *in* (a,b) *monoton wächst (bzw. fällt), d.h.* $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\big($*bzw.* $f(x_1) \geq f(x_2)\big)$ *für alle* x_1, x_2 *mit* $a < x_1 < x_2 < b$ *gilt.*

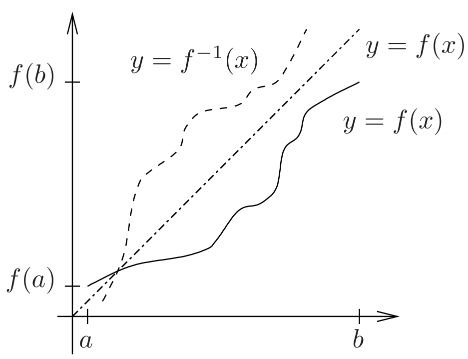
Ist $f(x_1) < f(x_2)$ $\big($*bzw.* $f(x_1) > f(x_2)\big)$ *für alle* x_1, x_2 *mit* $a < x_1 < x_2 < b$, *so heißt* f streng monoton wachsend (*bzw.* fallend).

Ist f in (a,b) streng monoton, so ist die Funktion f von $D(f) = (a,b)$ nach $W(f)$ bijektiv, es existiert also die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \longrightarrow (a,b)$.

Möchte man f^{-1} wieder als Funktion von x darstellen, so 'vertauscht man $x-$ und $y-$Achse´ (Spiegelung an $y = x$).

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \{(x,y) : y = f(x),\ x \in D(f)\} \\ &= \big\{(x,y) : x = f^{-1}(y),\ y \in W(f)\big\} \end{aligned}$$

$(x, f(x)) \leftrightarrow (f^{-1}(y), y) \xrightarrow[\substack{\text{Spiege-}\\\text{lung}}]{} (y, f^{-1}(y)) \xrightarrow[\substack{\text{Umbe-}\\\text{nennung}}]{} (x, f^{-1}(x))$



Bemerkung*: f streng monoton wachsend & stetig auf $[a,b] \xRightarrow[\text{Satz 4.2.4}]{} W(f) = [f(a),\ f(b)]$

f streng monoton wachsend & stetig auf (a,b) $\curvearrowright$ $W(f) = \Big(\lim\limits_{x\downarrow a} f(x),\ \lim\limits_{x\uparrow b} f(x)\Big)$

Satz 4.3.2 *Ist f streng monoton auf $D(f)=(a,b)$ und $W(f)=\{y:\ y=f(x),\ x\in(a,b)\}$. Dann ist $f^{-1}(y)$ auf $D\left(f^{-1}\right)=W(f)$ streng monoton und stetig.*

Beweis : Strenge Monotonie von f^{-1} ist klar; Auf (a,b)

sei o.B.d.A. f streng monoton wachsend $\Longrightarrow$ f^{-1} streng monoton wachsend

Sei $y_0\in W(f)$ $\Longrightarrow$ $\exists\, x_0\in(a,b)\ :\ f(x_0)=y_0$

<u>z.z.</u> : f^{-1} stetig in y_0, d.h. $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0\quad\forall\,y\in W(f),\ |y-y_0|<\delta\ :\ \left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|<\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$ gegeben, $\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|<\varepsilon$
$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow\ f^{-1}(y_0)-\varepsilon\ <\ f^{-1}(y)\ <\ f^{-1}(y_0)+\varepsilon\\&\Longleftrightarrow\ \underbrace{x_0-\varepsilon}_{=:f^{-1}(y_1)}\ <\ f^{-1}(y)\ <\ \underbrace{x_0+\varepsilon}_{=:f^{-1}(y_2)}\end{aligned}$$

o.B.d.A. $a<x_0-\varepsilon<x_0+\varepsilon<b$, setzen $y_1:=f(x_0-\varepsilon),\ y_2:=f(x_0+\varepsilon)$ $\underset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow}$ $y_1<y_0<y_2$,

$$\begin{aligned}\delta:=\min(y_2-y_0,y_0-y_1)\ &\Longrightarrow\ \forall\,y\in W(f),\ |y-y_0|<\delta\ :\ \underbrace{y_0-\delta}_{y_1\le}\ <\ y\ <\ \underbrace{y_0+\delta}_{\le y_2}\\&\Longrightarrow\ \forall\,y\in W(f),\ |y-y_0|<\delta\ :\ y_1\ <\ y\ <\ y_2\\&\underset{\substack{\text{Monotonie}\\\text{von } f^{-1}}}{\Longrightarrow}\ \forall\,y\in W(f),\ |y-y_0|<\delta\ :\ \underbrace{f^{-1}(y_1)}_{x_0-\varepsilon}\ <\ f^{-1}(y)\ <\ \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{x_0+\varepsilon}\\&\Longrightarrow\ \forall\,y\in W(f),\ |y-y_0|<\delta\ :\ \Big|f^{-1}(y)-\underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}\Big|<\varepsilon\end{aligned}$$

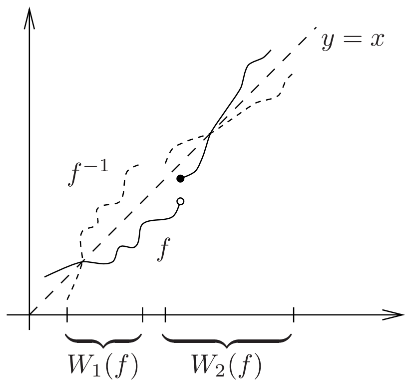
□

Bemerkung*: $f(x)$ muss auf $D(f)=(a,b)$ nicht stetig sein, kann aber aufgrund der Monotonie dort höchstens Sprünge (*als Unstetigkeiten*) besitzen. Dann ist $W(f)$ nicht mehr zusammenhängend,

$$W(f)=W_1(f)\cup W_2(f)\cup\cdots\cup W_k(f)\ ,$$

und f^{-1} auf einzelnen Intervallen definiert,

$$D\left(f^{-1}\right)=W(f)=\bigcup_{m=1}^{k}W_m(f)\ .$$



Beispiele : (1) <u>*Umkehrfunktionen zu $f(x)=x^2,\ D(f)=\mathbb{R}$*</u>

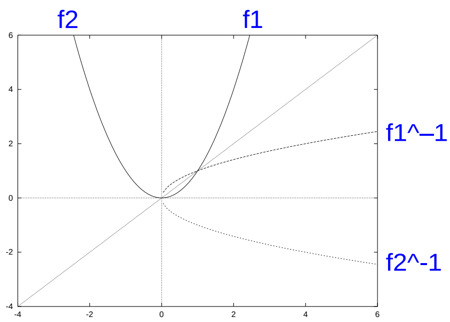
$D(f)=\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $f(x)=x^2$ nicht eineindeutig

$\Longrightarrow$ f^{-1} existiert nicht !

aber : $f_1(x)=x^2$, $D(f_1)=[0,\infty)$
streng monoton wachsend

$f_2(x)=x^2$, $D(f_2)=(-\infty,0]$
streng monoton fallend

$\Longrightarrow$ $f_1^{-1},\ f_2^{-1}$ existieren



Umkehrfunktion von $f_1(x) = x^2, \;\; D(f_1) = [0, \infty)$

$$W(f_1) = [0,\infty) \quad \Longrightarrow \quad x = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad D\left(f_1^{-1}\right) = W(f_1) = [0,\infty)\;, \qquad \text{denn}$$

$$\begin{aligned} \left(f_1^{-1} \circ f_1\right)(x) &= f_1^{-1}\left(f_1(x)\right) = \sqrt{x^2} = x \qquad \forall\, x \in [0,\infty) \\ \left(f_1 \circ f_1^{-1}\right)(y) &= f_1\left(f_1^{-1}(y)\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y \qquad \forall\, y \in [0,\infty) \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist die gegebene Funktion (z.B. f(x) = y = x^2) ist (x = y^2) welche dann nach y umgestellt wird. (y = Wurzel von x)

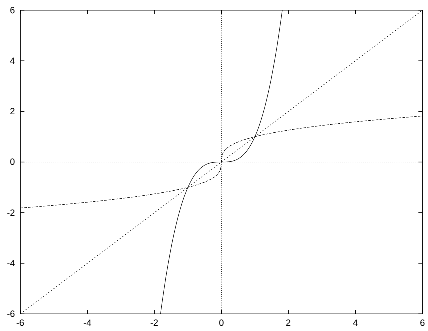
Umkehrfunktion von $f_2(x) = x^2, \;\; D(f_2) = (-\infty, 0]$

$$W(f_2) = [0,\infty) \quad \Longrightarrow \quad x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \quad D\left(f_2^{-1}\right) = W(f_2) = [0,\infty)\;, \qquad \text{denn}$$

$$\begin{aligned} \left(f_2^{-1} \circ f_2\right)(x) &= f_2^{-1}\left(f_2(x)\right) = -\sqrt{x^2} = -|x| = x \qquad \forall\, x \in (-\infty,0] \\ \left(f_2 \circ f_2^{-1}\right)(y) &= f_2\left(f_2^{-1}(y)\right) = \left(-\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y \qquad \forall\, y \in [0,\infty) \end{aligned}$$

(2) analog : *Umkehrfunktionen zu* $f(x) = x^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$f(x) = x^{2k} \;\; \begin{cases} f_1(x) = x^{2k}, \quad D(f_1) = [0,\infty) & \Longrightarrow \quad f_1^{-1}(y) = \sqrt[2k]{y}\;, \quad y \in [0,\infty) \\ f_2(x) = x^{2k}, \quad D(f_2) = (-\infty,0] & \Longrightarrow \quad f_2^{-1}(y) = -\sqrt[2k]{y}\;, \quad y \in [0,\infty) \end{cases}$$



(3) *Umkehrfunktion zu* $f(x) = x^3, \;\; D(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$ ist auf $D(f) = \mathbb{R}$ streng monoton wachsend
$\Longrightarrow$ Umkehrfunktion f^{-1} existiert auf $W(f) = \mathbb{R}$:

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(x^3\right) \\ &= \begin{cases} \sqrt[3]{x^3}, & x^3 \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x^3}, & x^3 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -|x|, & x \leq 0 \end{cases} = x\;, \quad x \in \mathbb{R} \\ \left(f \circ f^{-1}\right)(y) &= f\left(f^{-1}(y)\right) \\ &= \begin{cases} f\left(\sqrt[3]{y}\right), & y \geq 0 \\ f\left(-\sqrt[3]{-y}\right), & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y, & y \geq 0 \\ \left(-\sqrt[3]{-y}\right)^3 = -(-y), & y \leq 0 \end{cases} = y\;, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(4) analog : *Umkehrfunktionen zu* $f(x) = x^{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[2k+1]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[2k+1]{-y}, & y \leq 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(y)\, \sqrt[2k+1]{|y|}\;, \quad y \in \mathbb{R}$$

5 Der Raum der stetigen Funktionen

5.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folge (reeller) Funktionen mit Definitionsgebieten $D(f_j)$, wobei $M \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} D(f_j)$ gelte

$\curvearrowright$ $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen für alle $x \in M$ $\dashrightarrow$ Konvergenz?

Definition 5.1.1 *Es seien* $M \subset \mathbb{R}$ *und (reelle) Funktionen* $f_j(x)$ *mit* $D(f_j) = M$, $j \in \mathbb{N}$, *gegeben.*

(i) *Wenn für* $x \in M$ *die Folge* $(f_j(x))_{j=1}^{\infty}$ *konvergiert, so heißt* die Folge von Funktionen $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergent im Punkt x.

(ii) *Wenn die Folgen* $(f_j(x))_{j=1}^{\infty}$ *für jedes (feste)* $x \in M$ *konvergieren, so ist durch*

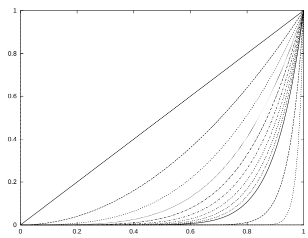
$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

eine Funktion f auf $D(f) = M$ *definiert. Man sagt dann,* die Folge von Funktionen $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion f, *und* f *heißt* punktweiser Limes *der Funktionenfolge* $(f_j)_{j=1}^{\infty}$.

Bemerkung*: f punktweiser Limes von $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

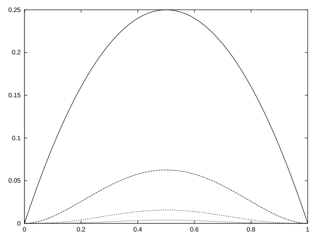
$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in M \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon, x) \quad \forall\, n \geq n_0 : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Beispiele : (1) $f_n(x) = x^n$, $D(f_n) = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$



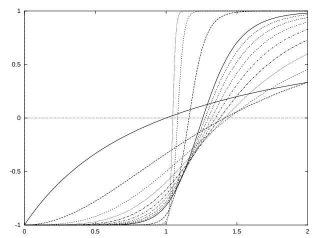
$$\curvearrowright \ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & , & 0 \leq x < 1 \\ 1 & , & x = 1 \end{array} \right\} =: f(x)$$

(2) $g_n(x) = [x(1-x)]^n$, $D(g_n) = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$



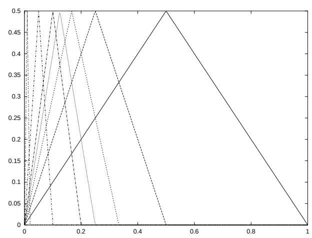
$$\curvearrowright \ 0 \ \leq \ g_n(x) \ \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \equiv \ g(x), \ x \in [0,1]$$

(3) $h_n(x) = \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$, $D(h_n) = [0,2]$, $n \in \mathbb{N}$



$$\curvearrowright \ h_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\frac{x^n}{n} - 1}{\frac{x^n}{n} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1, & x \in [0,1] \\[2ex] \dfrac{1 - \frac{n}{x^n}}{1 + \frac{n}{x^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1, & x \in (1,2] \end{array} \right\} =: h(x)$$

(4) $$\varphi_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x & , & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & , & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & , & \text{sonst} \end{array} \right. ,$$



$\varphi_n(x) := \varphi_0(nx)$, $D(\varphi_n) = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\curvearrowright \ \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \equiv \ \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Definition 5.1.2 *Es sei eine Folge von Funktionen* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $D(f_n) = M$ *gegeben. Die Funktionenfolge* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *heißt* gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion* $f(x)$ *mit* $D(f) = M$ *gibt, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \;=\; 0$$

gilt. Man schreibt dann $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$.

Bemerkung*: $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \forall\, x \in M \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Beispiele :

(1) $f_n(x) = x^n\,, \quad D(f_n) = [0,1], \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad (f_n)_{n=1}^\infty \text{ konvergiert nicht gleichmäßig gegen } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \;:$$

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, n \quad \exists\, x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in (0,1) \;:\; |f_n(x_n) - 0| = (x_n)^n = \frac{1}{2} \;>\; \varepsilon_0$$

(2) $g_n(x) = [x(1-x)]^n\,, \quad D(g_n) = [0,1], \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad (g_n)_{n=1}^\infty \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } g(x) \equiv 0 \;:$$

$$0 \;\leq\; \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - 0| \;\leq\; \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\equiv\; g(x), \quad x \in [0,1]$$

(3) $h_n(x) = \dfrac{x^n - n}{x^n + n}\,, \quad D(h_n) = [0,2], \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad (h_n)_{n=1}^\infty \text{ konvergiert nicht gleichmäßig gegen } h(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \;:$$

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, n \geq 2 \quad \exists\, x_n := \sqrt[n]{n} \in (1,2) \;:\; \big|\underbrace{h_n(x_n)}_{0} - \underbrace{h(x_n)}_{1}\big| = 1 \;>\; \varepsilon_0$$

(4) $\varphi_0(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \;, \quad \varphi_n(x) := \varphi_0(nx)\,, \quad D(\varphi_n) = \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad (\varphi_n)_{n=1}^\infty \text{ konvergiert nicht gleichmäßig gegen } \varphi(x) \;\equiv\; 0 \;:$$

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{4} \;\curvearrowright\; \forall\, n \quad \exists\, x_n := \frac{1}{2n} \;:\; |\varphi_n(x_n) - 0| = \varphi_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \varphi_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \;>\; \varepsilon_0$$

Satz 5.1.3 *Es sei eine Folge stetiger Funktionen* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $D(f_n) = M$ *gegeben, die gleichmäßig gegen eine Funktion* f *konvergieren,* $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$. *Dann ist* f *stetig auf* $D(f) = M$.

Beweis : Sei $x_0 \in M$; <u>z.z.</u>: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall\, x \in M,\ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$, $\{f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f\} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 \;:\; \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\qquad (*)$

$$\curvearrowright\; |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\ (*)} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\ f_{n_0} \text{ stetig},\ |x-x_0|<\delta} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\ (*)} < \varepsilon$$

für $|x - x_0| < \delta\,(\varepsilon, x_0, n_0)$ $\square$

Bemerkung*:

- Grenzfunktionen f und h in Beispielen (1) und (3) nicht stetig $\underset{\text{Satz 5.1.3}}{\Longrightarrow}$ keine gleichmäßige Konvergenz möglich
- in Beispiel (4) keine Aussage aus Satz 5.1.3 ableitbar für gleichmäßige Konvergenz (da Grenzfunktion $\varphi \equiv 0$ stetig)

5.2 Der Raum der stetigen Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}$, betrachten alle stetigen Funktionen über M; diese bilden nach Satz 4.2.1 einen linearen Raum (sogar eine Algebra)

Definition 5.2.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann ist*

$$\mathsf{C}(M) := \left\{ f \ : \ f \text{ stetig auf } M, \quad \|f|\mathsf{C}(M)\| = \sup_{x\in M} |f(x)| \ < \ \infty \right\}.$$

Bemerkung*:

- $M = [a,b] \implies \mathsf{C}([a,b])$ fällt mit der Menge aller auf $[a,b]$ stetigen Funktionen (*siehe Satz 4.2.2*) zusammen
- i.a. gilt nur $\mathsf{C}(M) \subset$ {Menge der auf M stetigen Funktionen}, z.B. $M = (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, aber

$$\big\|f|\mathsf{C}\big((0,1)\big)\big\| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{x} = \infty \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x} \notin \mathsf{C}\big((0,1)\big)$$

$\mathsf{C}(M)$ ist ein linearer normierter Raum (*siehe Abschnitt 1.4*) :

- $\|f|\mathsf{C}(M)\| = \sup\limits_{x\in M} |f(x)| \geq 0$
- $\|f|\mathsf{C}(M)\| = 0 \iff \sup\limits_{x\in M} |f(x)| = 0 \iff f(x) = 0$ für alle $x \in M \iff f \equiv 0$
- $\|\lambda f|\mathsf{C}(M)\| = \sup\limits_{x\in M} |(\lambda f)(x)| = \sup\limits_{x\in M} |\lambda|\, |f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x\in M} |f(x)| = |\lambda|\, \|f|\mathsf{C}(M)\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|f+g|\mathsf{C}(M)\| = \sup\limits_{x\in M} |(f+g)(x)| \leq \sup\limits_{x\in M} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup\limits_{x\in M} |f(x)| + \sup\limits_{x\in M} |g(x)|$

$$\Longrightarrow \quad \|f+g|\mathsf{C}(M)\| \ \leq \ \|f|\mathsf{C}(M)\| + \|g|\mathsf{C}(M)\|$$

Seien $f_n \in \mathsf{C}(M)$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \quad \iff \quad \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \iff \quad \|f_n - f|\mathsf{C}(M)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ ,$$

d.h. Normkonvergenz in $\mathsf{C}(M)$ stimmt mit gleichmäßiger Konvergenz auf M (*aus Abschnitt 5.1*) überein

Definition 5.2.2

(i) *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{C}(M)$ heißt* konvergent

$$\iff \quad \exists\, f \in \mathsf{C}(M) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 \ : \ \|f_n - f|\mathsf{C}(M)\| < \ \varepsilon\ .$$

(ii) *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{C}(M)$ heißt* Cauchy-Folge

$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0(\varepsilon) \quad \forall\, n,k \geq k_0 \ : \ \|f_n - f_k|\mathsf{C}(M)\| < \ \varepsilon\ .$$

Bemerkung*:
- Analogie zu Definition 2.1.2 und Definition 2.3.1
- Bemerkung nach Satz 2.3.2 (*bzw. erster Teil des Beweises*) : Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

$$\|f_n - f_k|\mathsf{C}(M)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für} \quad n,k \geq k_0(\varepsilon)$$

Ist auch die Umkehrung immer richtig ? (*siehe Satz 2.3.2*)

Satz 5.2.3 (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{C}(M)$ *konvergiert genau dann, wenn* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Cauchy-Folge ist.*

B e w e i s : „$\Longrightarrow$“ : klar (*siehe oben*)

„$\Longleftarrow$“ : Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge, sei $\xi \in M$ beliebig, aber fest

$$\Longrightarrow \quad |f_n(\xi) - f_k(\xi)| \leq \sup_{x \in M} |f_n(x) - f_k(x)| = \|f_n - f_k|\mathsf{C}(M)\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n,k \geq k_0(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \quad (f_n(\xi))_{n=1}^{\infty} \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R} \xrightarrow[\text{Satz 2.3.2}]{} \exists\, \alpha_\xi : f_n(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_\xi \quad \text{für beliebige } \xi \in M$$

$\Longrightarrow$ dadurch wird auf M eine Funktion $f(\xi) := \alpha_\xi$ definiert, $\xi \in M$

<u>n.z.z.</u> : $\|f_n - f|\mathsf{C}(M)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $f \in \mathsf{C}(M)$

Sei $\varepsilon > 0$, $\quad |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + \underbrace{\|f_k - f_n|\mathsf{C}(M)\|}_{\text{Cauchy-Folge}}$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

für beliebige $n,k \geq n_0(\varepsilon)$, insbesondere ist $k \geq n_0(\varepsilon)$ frei wählbar,

$f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x),\ x \in M \quad \Longrightarrow \quad \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon, x) \quad \forall\, k \geq k_0 : |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \forall\, x \in M : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 : \|f_n - f|\mathsf{C}(M)\| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_n - f|\mathsf{C}(M)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\xrightarrow[\text{Satz 5.1.3}]{} f \text{ stetig auf } M;\ \|f|\mathsf{C}(M)\| \leq \underbrace{\|f - f_n|\mathsf{C}(M)\|}_{\leq 1 \text{ für } n \geq n_0} + \underbrace{\|f_n|\mathsf{C}(M)\|}_{\leq c_n < \infty,\ f_n \in \mathsf{C}(M)} \leq 1 + c_n < \infty \curvearrowright f \in \mathsf{C}(M)$$

□

Bemerkung*:
- Ein normierter Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergent ist.
- $[\mathbb{R}, \|\cdot\|]$, $[\mathbb{C}, \|\cdot\|]$ sind vollständig (Satz 2.3.2)
- Satz 5.2.3 $\curvearrowright$ $\mathsf{C}(M)$ ist ein vollständiger normierter Raum.
- Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banach*[19]*raum* $\dashrightarrow$ $\mathsf{C}(M)$ ist ein Banachraum.

[19]Stefan Banach (* 30.3.1892 Kraków † 31.8.1945 Lvov)

Definition 5.2.4 *Sei* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{C}(M)$ *eine Funktionenfolge auf* M.

(i) *Für* $m \in \mathbb{N}$ *bezeichnet*

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) , \quad x \in M,$$

die m*-te* Partialsumme der Funktionenreihe *mit den Gliedern* $f_n(x)$.

(ii) *Die Funktionenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *heißt* gleichmäßig konvergent auf M, *wenn* $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ *gleichmäßig auf* M *konvergiert,*

$$S(x) = \lim_{m\to\infty} S_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) ,$$

mit $\lim_{m\to\infty} \|S - S_m|\mathsf{C}(M)\| = 0$.

Folgerung 5.2.5 *Der Grenzwert einer auf* M *gleichmäßig konvergenten unendlichen Reihe stetiger Funktionen ist wieder stetig.*

Beweis : folgt aus Satz 5.1.3 bzw. Satz 5.2.3 und Definition 5.2.4(ii) □

Satz 5.2.6 (Weierstraß'sches Majorantenkriterium)
Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge stetiger Funktionen auf* M, *es gelte*

$$|f_n(x)| \le a_n \quad \text{für alle} \quad x \in M \quad \text{und alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *(absolut und) gleichmäßig konvergent auf* M.

Beweis : Nach Satz 5.2.3 ist $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergent genau dann, wenn $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge ist.
Sei $\varepsilon > 0$ und o.B.d.A. $m > k$, dann ist

$$|S_m(x) - S_k(x)| = \left| \sum_{j=k+1}^{m} f_j(x) \right| \le \sum_{j=k+1}^{m} |f_j(x)| \le \sum_{j=k+1}^{m} a_j = S_m^a - S_k^a$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konvergent} \quad &\Longrightarrow \quad (S_m^a)_{m=1}^{\infty} \quad \text{Cauchy-Folge} \\ &\Longrightarrow \quad \exists\, k_0(\varepsilon) \quad \forall\, m > k \ge k_0 \ : \ S_m^a - S_k^a = |S_m^a - S_k^a| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad \exists\, k_0(\varepsilon) \quad \forall\, m > k \ge k_0 \ : \ |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad (S_m)_{m=1}^{\infty} \quad \text{Cauchy-Folge} \end{aligned}$$

analoger Beweis für absolute gleichmäßige Konvergenz mit $S_m^{|\cdot|} = \sum_{j=1}^{m} |f_j(x)|$. □

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $f_n(x) = (n+1)x^n$, $M = D(f_n) = (-1,1)$

$\Longrightarrow \quad |f_n(x)| \leq (n+1)q^n$ für alle $x \in [-q,q] \subset M$ mit $0 < q < 1$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)q^n$ konvergent (*Quotientenkriterium, Beispiel in Abschnitt 3.3*)

$\Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = S(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $[-q,q] \subset M,\ 0 < q < 1$

Abschnitt 3.3 $\Longrightarrow \quad S(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

6 Potenzreihen und elementare Funktionen

6.1 Polynome, Fundamentalsatz der Algebra 06.02.18

Polynom n-ten Grades auf $\mathbb{R}$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n \neq 0$$

Nullstelle von $p(x)$: $\xi \in \mathbb{R}$ mit $p(\xi) = 0$

Lemma 6.1.1 *Ist $p(x)$ ein Polynom vom Grade n und ξ ein Nullstelle von $p(x)$, so ist $p(x)$ darstellbar als*

$$p(x) = (x-\xi)\, p_1(x) \ ,$$

wobei $p_1(x)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ ist.

Beweis :
$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - \underbrace{p(\xi)}_{=0} &&= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^k - \xi^k\right) &&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^{k-1} + x^{k-2}\xi + \cdots + x\xi^{k-2} + \xi^{k-1}\right)(x-\xi) \\ &= (x-\xi) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k}_{=:p_1(x)} &&= (x-\xi)\ p_1(x) \end{aligned}$$

mit $b_{n-1} = a_n \neq 0,\ b_{n-2} = a_{n-1} + a_n\xi,\ \ldots,\ b_k = \sum\limits_{j=0}^{n-1-k} a_{j+k+1}\, \xi^j,\ \ k = 0, \ldots, n-1.$ $\square$

<u>*Ziel*</u> : Zerlegung von $p(x)$ in möglichst einfache Faktoren (*Produktdarstellung*)

<u>*'Umweg' über komplexe Polynome*</u>

$$q(z) = \alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \ , \quad \alpha_k \in \mathbb{C},\ \alpha_n \neq 0 \qquad \textit{Polynom } n\textit{-ten Grades} \text{ auf } \mathbb{C}$$

analog ist ζ Nullstelle von $q(z)$, wenn $q(\zeta) = 0$ gilt

Satz 6.1.2 (Fundamentalsatz der Algebra)

Ein Polynom n-ten Grades $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k,\ \alpha_n \neq 0$, besitzt genau n komplexe Nullstellen.

Sind $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ diese Nullstellen, so gilt

$$q(z) = \alpha_n\,(z-\zeta_1)\,(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n) \ .$$

Bemerkung*: Einige Nullstellen können übereinstimmen. Insofern kann man $q(z)$ schreiben als

$$q(z) = \alpha_n (z-\mu_1)^{\nu_1} (z-\mu_2)^{\nu_2} \cdots (z-\mu_\ell)^{\nu_\ell} \quad ,$$

wobei $\mu_k \neq \mu_j$ für $k \neq j$, und $\nu_1 + \cdots + \nu_\ell = n$ mit $\ell \leq n$ gelten. Die Zahl $\nu_j \in \mathbb{N}_0$ heißt *Vielfachheit* der Nullstelle $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, \ell$.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir folgende Aussage.

Lemma 6.1.3 *Jedes komplexe Polynom* $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$, $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis : 1. Schritt: *zeigen* $\exists\, \zeta \in \mathbb{C}: \ |q(\zeta)| = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |q(z)| = \min\limits_{z\in\mathbb{C}} |q(z)|$

wollen Satz 4.2.2 für die stetige Funktion $|q|$ auf $K_r(0)$ mit genügend großem $r > 0$ anwenden

wählen $\quad r \geq \max\left(1, 2n \max\limits_{k=0,\ldots,n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|}\right)$ $\hfill (*)$

$$\begin{aligned}
|z| \geq r > 0 \quad \curvearrowright \quad |q(z)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k\Big| &= |\alpha_n||z|^n \Big| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} z^{k-n}\Big| \\
&\geq |\alpha_n||z|^n \Big(1 - \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n}\frac{1}{z^{n-k}}\Big|\Big) \\
&\geq |\alpha_n||z|^n \Big(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|}\frac{1}{r^{n-k}}\Big) \\
&\geq |\alpha_n||z|^n \Big(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|}\frac{1}{r}}_{\leq \frac{1}{2n},(*)} \underbrace{\frac{1}{r^{n-k-1}}}_{\leq 1,(*)}\Big) \;\geq\; |\alpha_n||z|^n \Big(1 - \frac{n}{2n}\Big) \\
&= \frac{|\alpha_n|}{2} \underbrace{r^{n-1}}_{\geq 1,(*)} \underbrace{r}_{\geq 2n\frac{|\alpha_0|}{|\alpha_n|},(*)} \\
&\geq n|\alpha_0| \;\geq |\alpha_0| = |q(0)| \;\geq\; \inf_{|z|\leq r} |q(z)|
\end{aligned}$$

$\curvearrowright \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |q(z)| = \inf\limits_{|z|\leq r} |q(z)|$; Satz 4.2.2 $\curvearrowright \exists\, \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| \leq r: \ |q(\zeta)| = \inf\limits_{|z|\leq r} |q(z)| = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |q(z)|$

2. Schritt: *n.z.z.:* $q(\zeta) = 0$; *indirekt, Annahme:* $|q(\zeta)| > 0$, *zeigen:* $\exists\, \eta \in \mathbb{C} : |q(\eta)| < |q(\zeta)|$ ↯

betrachten $r(z) = q(z+\zeta) \ \curvearrowright\ r(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k z^k$ mit $\beta_k = \beta_k(\zeta, \alpha_i) \in \mathbb{C}$, und $\beta_0 = r(0) = q(\zeta) \neq 0$

g.z.z.: $\exists\, \overline{\eta} \in \mathbb{C} : |r(\overline{\eta})| < |r(0)| = |\beta_0| \ \xRightarrow[\eta = \overline{\eta} + \zeta]{}\ \exists\, \eta \in \mathbb{C} : |q(\eta)| = |q(\overline{\eta}+\zeta)| = |r(\overline{\eta})| < |r(0)| = |q(\zeta)|$

o.B.d.A. $\beta_0 = 1$ (sonst $\tilde{r} = \beta_0^{-1} r$ betrachten) $\xRightarrow[\beta_n = \alpha_n \neq 0]{}\ \exists\, m,\ 1 \leq m \leq n: \ \beta_m \neq 0,\ \beta_{m-1} = \cdots = \beta_1 = 0$

$\curvearrowright\ r(z) = \beta_0 + \beta_m z^m + \cdots + \beta_n z^n$; sei $\gamma_m \in \mathbb{C}$ so, dass $\gamma_m^m = -\frac{1}{\beta_m} \in \mathbb{C}$, $\lambda \in [0,1]$

$$r(\lambda\gamma_m) = 1 + \underbrace{\beta_m(\lambda\gamma_m)^m}_{-\lambda^m} + \underbrace{\beta_{m+1}(\lambda\gamma_m)^{m+1} + \cdots + \beta_n(\lambda\gamma_m)^n}_{\lambda^{m+1}h(\lambda)} = 1 - \lambda^m + \lambda^{m+1}h(\lambda)$$

mit $h(\lambda)$ stetig $\dashrightarrow$ beschränkt auf $[0,1]$, $|h(\lambda)| \leq M$

$$\curvearrowright\ |r(\lambda\gamma_m)| = \big|1 - \lambda^m + \lambda^{m+1}h(\lambda)\big| \leq\ 1 - \lambda^m + \lambda^{m+1}M = 1 - \lambda^m \overbrace{(1-\lambda M)}^{>0,\ \lambda\leq\lambda_0<\frac{1}{M}}\ < 1 = |r(0)|$$

$\curvearrowright$ setzen $\overline{\eta} = \lambda\gamma_m$ für passendes $\lambda \in (0, \lambda_0]$ $\hfill \square$

B e w e i s : (zu Satz 6.1.2)

Lemma 6.1.3 $\curvearrowright\ \exists\, \zeta_1 \in \mathbb{C} : q(\zeta_1) = 0 \xrightarrow[\text{Lemma 6.1.1}]{} q(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(z^k - \zeta_1^k\right) = (z-\zeta_1) \sum_{\ell=0}^{n-1} \beta_\ell z^\ell$

mit $\beta_{n-1} = \alpha_n \neq 0 \xrightarrow[\text{Iteration}]{} q(z) = \alpha_n\,(z-\zeta_1)\,(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n)$

<u>n.z.z.</u> : $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sind eindeutig bestimmt

sei $q(z) = \alpha_n\,(z-\zeta_1)\,(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n) \;=\; \alpha_n\,(z-\gamma_1)\,(z-\gamma_2)\cdots(z-\gamma_n)$ $\quad(*)$

$z = \gamma_1 \xrightarrow[\alpha_n \neq 0]{} (\gamma_1-\zeta_1)\,(\gamma_1-\zeta_2)\cdots(\gamma_1-\zeta_n) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \exists\,\ell \in \{1,\ldots,n\}\;:\;\zeta_\ell = \gamma_1,$

$$
\begin{array}{lllcl}
\text{o.B.d.A. } \zeta_1 = \gamma_1 & \underset{(*)}{\Longrightarrow} & (z-\gamma_1)\,(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n) & = & (z-\gamma_1)\,(z-\gamma_2)\cdots(z-\gamma_n) \\
 & \xrightarrow[z\neq\gamma_1]{} & (z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n) & = & (z-\gamma_2)\cdots(z-\gamma_n) \qquad (**) \\
 & \xrightarrow[z=\gamma_2]{} & (\gamma_2-\zeta_2)\cdots(\gamma_2-\zeta_n) & = & 0 \quad\Longrightarrow\quad \exists\,\ell\in\{2,\ldots,n\} : \zeta_\ell = \gamma_2 \\
\text{o.B.d.A. } \zeta_2 = \gamma_2 & \underset{(**)}{\Longrightarrow} & (z-\gamma_2)\,(z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_n) & = & (z-\gamma_2)\,(z-\gamma_3)\cdots(z-\gamma_n) \\
 & \xrightarrow[z\neq\gamma_2]{} & (z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_n) & = & (z-\gamma_3)\cdots(z-\gamma_n) \\
 & \vdots & & & \\
 & \Longrightarrow & \zeta_1 = \gamma_1,\ \zeta_2 = \gamma_2,\ \ldots,\ \zeta_n = \gamma_n & &
\end{array}
$$

□

Satz 6.1.4 (Identitätssatz für Polynome)
Stimmen die Werte zweier Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ *und* $q(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k$ *vom Grade* $m \leq n$ *auch nur an* $(n+1)$ *verschiedenen Stellen überein, so sind die Polynome identisch, d.h.* $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0,\ldots,n$.

B e w e i s : *<u>Annahme</u>* : Es existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq n$, so dass $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$ und $\alpha_k = \beta_k$ für $k > \ell$ gilt.

$$\Longrightarrow \quad r(z) := p(z) - q(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(\alpha_k - \beta_k)}_{=0,\,k>\ell} z^k \;=\; \sum_{k=0}^{\ell} (\alpha_k - \beta_k)\, z^k$$

Polynom vom Grade $\ell < n+1$ mit $n+1$ Nullstellen $\Longrightarrow$ Widerspruch zu Satz 6.1.2 □

Sei nun wieder $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten, das auch auf $\mathbb{C}$ betrachtet werden kann, $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 6.1.5 *Ist* $z_0 \in \mathbb{C}$ *eine 'echte komplexe' Nullstelle des Polynoms* $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, *d.h.* $p(z_0) = 0$ *und* $\Im\mathrm{m}\, z_0 \neq 0$, *so ist auch* $\overline{z_0}$ *eine Nullstelle des Polynoms,* $p\left(\overline{z_0}\right) = 0$.

B e w e i s : $p(z_0) \;=\; 0 \;=\; \overline{p(z_0)} \;=\; \overline{a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0} \;=\; \overline{a_n}\;\overline{z_0}^n + \cdots + \overline{a_1}\;\overline{z_0} + \overline{a_0}$

$$\underset{\overline{a_k} = a_k \in \mathbb{R}}{=} \; a_n \overline{z_0}^n + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \;=\; p\left(\overline{z_0}\right)$$

□

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $(z - z_0)\,(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})\,z + z_0\overline{z_0} = z^2 - \underbrace{2\,\Re\mathrm{e}\; z_0}_{\in\mathbb{R}}\; z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in\mathbb{R}}$

Satz 6.1.6 *Sei* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $D(p) = \mathbb{R}$, *ein reelles Polynom vom Grade* $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. *Dann lässt sich* $p(x)$ *darstellen als*

$$p(x) = a_n (x - \xi_1)^{\nu_1} \cdots (x - \xi_k)^{\nu_k} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\alpha_1} \cdots \left(x^2 + p_m x + q_m\right)^{\alpha_m} ,$$

wobei $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *reelle Nullstellen von* $p(x)$ *und* $z_1, \ldots, z_m$ *(echte) komplexe Nullstellen von* $p(x)$ *mit* $p_j = -2 \,\Re\mathrm{e}\, z_j$ *und* $q_j = |z_j|^2$ *sind,* $j = 1, \ldots, m$. *Dabei gilt*

$$\nu_1 + \cdots + \nu_k + 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) = n$$

für $\nu_i,\ \alpha_j \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m.$

Beweis : Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 6.1.2), Lemma 6.1.5 und Beispiel □

Beispiel :

$$\begin{aligned}
p(x) &= 2x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 4x + 2 \\
&= 2(x-1)\underbrace{\left(x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1\right)}_{=:q_1(x)} && \xi_1 = 1 \quad \text{mit} \quad p(\xi_1) = 0 \quad \text{‘erraten’}, \\
& && q_1(x) \quad \text{durch Polynomdivision} \\
&= 2(x-1)^2 \underbrace{\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)}_{=:q_2(x)} && \xi_2 = 1 \quad \text{mit} \quad q_1(\xi_2) = 0 \quad \text{‘erraten’}, \\
& && q_2(x) \quad \text{durch Polynomdivision} \\
&\ \vdots \\
&= 2(x-1)^2 (x+i)^2 (x-i)^2 \\
&= 2(x-1)^2 \underbrace{[(x+i)(x-i)]^2} \\
&= 2\ (x-1)^2\ \left(x^2+1\right)^2
\end{aligned}$$

entspricht Darstellung aus Satz 6.1.6 mit

$$\left.\begin{array}{l} k = 1,\ \xi_1 = 1,\ \nu_1 = 2 \\ m = 1,\ z_1 = -i,\ z_2 = i,\ p_1 = 0,\ q_1 = 1,\ \alpha_1 = 2 \end{array}\right\} \curvearrowright \ \nu_1 + 2\alpha_1 = 6 \ \ldots \ \text{Grad von} \ \ p(x)$$

6.2 Potenzreihen

Definition 6.2.1 *Für* $z,\ z_0 \in \mathbb{C}$ *heißt*

$$p(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad a_n \in \mathbb{C} \ ,$$

Potenzreihe *mit dem Entwicklungspunkt* z_0.

Frage : Für welche $z \in \mathbb{C}$ *(in Abhängigkeit von* $z_0 \in \mathbb{C}$*) konvergiert die Reihe (absolut) ?*

Lemma 6.2.2 *Sei* $z_0 \in \mathbb{C}$.

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *sei konvergent für* $z = z_1,\ z_1 \neq z_0$.

Dann konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *sei divergent für* $z = z_2,\ z_2 \neq z_0$.

Dann divergiert die Reihe auch für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Beweis : <u>zu (i)</u> : $p(z_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z_1 - z_0)^n$ konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 3.1.2(i)}]{} \lim\limits_{k\to\infty} a_k\,(z_1 - z_0)^k = 0$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, M > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \ : \ \left| a_k\,(z_1 - z_0)^k \right| \ \le \ M$$

sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$

$$S_m^{|\cdot|}(z) = \sum_{k=0}^{m} |a_k|\,|z - z_0|^k \ = \ \sum_{k=0}^{m} \underbrace{|a_k| \ |z_1 - z_0|^k}_{\le M} \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^k}_{=:q<1 \text{ nach Vor.}} \ \le \ M \sum_{k=0}^{m} q^k \ < \ \frac{M}{1-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(S_m^{|\cdot|}\right)_{m=0}^{\infty} \quad \text{beschränkt und monoton wachsend}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(S_m^{|\cdot|}\right)_{m=0}^{\infty} \quad \text{konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \quad \text{absolut konvergent}$$

<u>zu (ii)</u> : sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$

Annahme : $p(z)$ konvergent $\xRightarrow[z_1 := z]{\text{(i)}}$ $p(\zeta)$ konvergiert für alle ζ mit $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$

$\xRightarrow[\zeta := z_2]{}$ $p(\zeta) \ = \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(\zeta - z_0)^n$ konvergiert für $\zeta = z_2$

$\Longrightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung in (ii) □

Offenbar gibt es also drei Möglichkeiten der (absoluten) Konvergenz von $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$:

(i) $p(z)$ konvergiert nur für $z = z_0$

(ii) $p(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

(iii) es existiert ein $R > 0$, so dass
- $p(z)$ konvergiert absolut für alle z mit $|z - z_0| < R$
- $p(z)$ divergiert für alle z mit $|z - z_0| > R$

Diese Zahl $R > 0$ heißt <u>*Konvergenzradius*</u> der Potenzreihe $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$. Zusätzlich wird $R := 0$ in (i) und $R := \infty$ in (ii) gesetzt. Man nennt die (offene) Menge

$$K_R(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < R \, \}$$

Konvergenzkreis der Potenzreihe $p(z)$. In diesem Sinne ist also $R > 0$ der größtmögliche Radius eines Kreises um $z_0 \in \mathbb{C}$, innerhalb dessen die Reihe absolut konvergiert.

Satz 6.2.3 (Satz von Cauchy-Hadamard[20])

Für die Potenzreihe $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ *ist der Konvergenzradius bestimmt durch*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \ , \qquad \textit{wobei} \quad R := \begin{cases} 0, & \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty, & \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

gesetzt wird.

[20] Jacques Salomon Hadamard (* 8.12.1865 Versailles † 17.10.1963 Paris)

B e w e i s : Wurzelkriterium $\xRightarrow[\text{Satz 3.2.2 (iii)}]{}$ absolute Konvergenz der Reihe $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ für

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\,(z-z_0)^n|} < 1 \iff |z-z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |z-z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

analog: Divergenz der Reihe $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ für $|z-z_0| > \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ □

Bemerkung*: • falls $a_n \neq 0,\ n \geq n_0$ $\curvearrowright$ mit Quotientenkriterium $\xRightarrow[\text{Satz 3.2.3 (iii)}]{}$:

$$\text{absolute Konvergenz für} \quad |z-z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R_1$$

$$\text{Divergenz für} \quad |z-z_0| > \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R_2$$

d.h. i.a. $R_1 \leq R \leq R_2$

• für $R_1 = R_2$, d.h. $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, gilt $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, falls dieser Grenzwert existiert (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne)

Beispiele : (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n : \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \curvearrowright R = 0 \curvearrowright$ Konvergenz $\iff z = z_0 = 0$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n} z^n : \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \curvearrowright R = \infty \curvearrowright$ Konvergenz für $z \in \mathbb{C}$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} : \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty \curvearrowright R = \infty \curvearrowright$ Konvergenz für $z \in \mathbb{C}$

Aussagen über den <u>Rand des Konvergenzkreises</u>, d.h. für $|z-z_0| = R$, sind i.a. nicht möglich :

• $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \implies R = 1$

$|z| = 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} |z^n| = 1 \neq 0 \implies$ keine Konvergenz für $|z| = 1$

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2} \implies R = 1$

$|z| = 1 \implies$ absolute Konvergenz, da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ nach Lemma 3.1.4 (ii) konvergent

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} z^n \implies R = 1$

$|z| = 1$ ↗ $z = 1$ Konvergenz (Lemma 3.2.5)

↘ $z = -1$ Divergenz (Lemma 3.1.4(i))

Beispiel : $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n}$

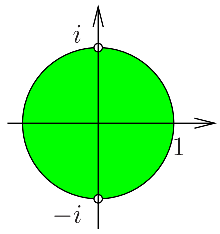
bisher (als geometrische Reihe): absolute Konvergenz $\iff \left|-x^2\right| < 1 \iff |x| < 1$

jetzt: absolute Konvergenz für $\left|x^2\right| < R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|}} = 1 \iff |x| < 1$

Grund (geometrisch) : keine Konvergenz (in $\mathbb{C}$) von

$$p(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{in} \quad z = \pm i$$

$\Longrightarrow$ größter Kreis um $z_0 = 0$, innerhalb dessen $p(z)$ absolut konvergiert (in jedem Punkt) hat Radius $R = 1$



Folgerung 6.2.4 *Sei* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* R. *Dann ist die Reihe für alle* x *mit* $|x-x_0| < R$ *absolut konvergent und divergiert für alle* x *mit* $|x-x_0| > R$. *Ist* s *eine beliebige positive Zahl mit* $0 < s < R$, *so konvergiert die Reihe gleichmäßig auf dem Intervall* $[x_0 - s, x_0 + s]$. *Damit ist die durch die Potenzreihe beschriebene Funktion* $p(x)$ *stetig in* $[x_0 - s, x_0 + s]$.

Beweis :

- Satz 6.2.3 $\Longrightarrow$ Konvergenzradius, absolute Konvergenz / Divergenz
- $|a_k| \, |x-x_0|^k \le |a_k| \, s^k$, $\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \, s^k$ konvergent für $s < R$

  $\xRightarrow[\text{Satz 5.2.6}]{}$ gleichmäßige Konvergenz auf $[x_0 - s, x_0 + s]$
- Satz 5.1.3 bzw. Folgerung 5.2.5 $\Longrightarrow$ $p(x)$ stetig

$\square$

Identitätssatz für Polynome (Satz 6.1.4) $\Longrightarrow$ Gilt analoge Aussage auch für Potenzreihen, d.h. sind zwei Potenzreihen notwendigerweise identisch, wenn sie (nur) an abzählbar unendlich vielen Stellen übereinstimmen ?

später : $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ hat unendlich viele Nullstellen (in $k\pi$), ist aber nicht identisch 0

$\Longrightarrow$ Satz kann in der obigen Allgemeinheit nicht gelten

Satz 6.2.5 (Identitätssatz für Potenzreihen)
Gegeben seien zwei Potenzreihen $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-x_0)^k$ *und* $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-x_0)^k$ *mit gleichem Entwicklungspunkt* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und positiven Konvergenzradien* $R_\alpha > 0$, $R_\beta > 0$. *Gilt*

$$p(x) = q(x) \qquad \text{für} \quad |x - x_0| < r < R := \min(R_\alpha, R_\beta)$$

oder auch nur

$$p(x_n) = q(x_n) \qquad \text{für eine Folge} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{und} \quad x_n \ne x_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

so sind die beiden Potenzreihen identisch, d.h. $\alpha_k = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

B e w e i s : $p(x)$ und $q(x)$ stetig in x_0 (Folg. 6.2.4)

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = p(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) \\ \beta_0 = q(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} q(x_n) \underset{\text{Vor.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) \end{array} \right\} \Longrightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

$$\left. \begin{array}{llllll} p_1(x) & := \dfrac{p(x)-\alpha_0}{x-x_0} & = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\ (x-x_0)^{k-1} & = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell+1}\ (x-x_0)^{\ell} \\ q_1(x) & := \dfrac{q(x)-\overbrace{\alpha_0}^{=\beta_0}}{x-x_0} & = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\ (x-x_0)^{k-1} & = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell+1}\ (x-x_0)^{\ell} \end{array} \right\} \Longrightarrow p_1(x_n) = q_1(x_n)$$

(wegen $x_n \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, wohldefiniert)

$p_1(x)$, $q_1(x)$ stetig $\Longrightarrow$ $\alpha_1 = p_1(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} p_1(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} q_1(x_n) = q_1(x_0) = \beta_1$, d.h. $\alpha_1 = \beta_1$

Iteration ... $\Longrightarrow$ $\alpha_k = \beta_k,\ k \in \mathbb{N}_0$ $\square$

Bemerkung*:

- Satz 6.2.5 $\Longrightarrow$ $R_\alpha = R_\beta = R$
- Potenzreihen können (als absolut konvergente Reihen in ihrem Konvergenzbereich) addiert, skalar multipliziert und untereinander multipliziert werden
- Potenzreihen können verkettet werden, $(p \circ q)(x) = p\,(q(x))$
- $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\ (x-x_0)^k$ mit $\alpha_0 \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{p(x)}$ als Potenzreihe entwickelbar

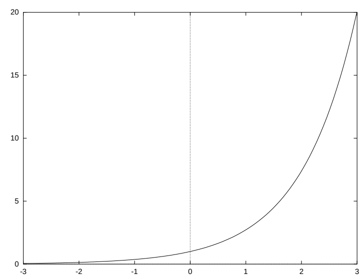
6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialreihe $\exp(x)$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{Exponentialfunktion}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \underset{\substack{\text{Bem. nach}\\ \text{Satz 6.2.3}}}{\Longrightarrow} R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$\Longrightarrow$ $\exp(x)$ ist wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$



$\exp(x), \quad x \in [-3,3]$

Eigenschaften der Exponentialfunktion

(1_e) $\underline{\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)}$:

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\,\frac{y^{n-j}}{(n-j)!}}_{\text{Cauchy-Produkt}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

(2_e) $\underline{\exp(0) = 1}$: *klar*

(3_e) $\underline{\exp(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}}$:

Annahme: $-\ \exists\ \xi \in \mathbb{R} : \exp(\xi) = 0 \underset{(1_e)}{\Longrightarrow} \exp(x+\xi) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \curvearrowright \exp(x) \equiv 0,$ aber $\exp(0) = 1$

$-\ \exists\ \eta \in \mathbb{R} : \exp(\eta) < 0 \underset{(1_e)}{\Longrightarrow} \exp(2\eta) = (\exp(\eta))^2 > 0 \underset{\text{Satz 4.2.4}}{\Longrightarrow} \exists\ \gamma : \exp(\gamma) = 0 \underset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} ⚡$

$\Longrightarrow$ Widerspruch

(4$_e$) $\underline{\exp(x)\ \text{streng monoton wachsend auf } \mathbb{R}}$:

Sei $h > 0 \implies \exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}}_{>0 \text{ für } h>0} > 1 + h > 1$

Sei nun $x < y \curvearrowright h := y - x > 0 \curvearrowright \exp(y) = \exp(x+h) = \underbrace{\exp(x)}_{>0}\ \underbrace{\exp(h)}_{>1} > \exp(x)$

(5$_e$) $\underline{\exp(1) = e}$: *Grenzwert aus Lemma 2.3.10* $e = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{:=\, a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{1}_{k=1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<\ 1}$$

$$\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n$$

$\curvearrowright a_n \leq S_n, \quad n \in \mathbb{N}$

Sei $m > n \curvearrowright a_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)$

$$\geq 1 + 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)}_{\text{Anzahl der Summanden und Faktoren unabhängig von } m}$$

$$\curvearrowright e = \lim_{m\to\infty} a_m \geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = S_n \implies e \geq S_n \geq a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\curvearrowright e \geq \lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n = e \iff e = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1)$$

d.h. $\exp(n) \underset{(1_e)}{=} (\exp(1))^n = e^n, \quad n \in \mathbb{N} \implies$ *Schreibweise* : $\exp(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Weitere Eigenschaften :

(6$_e$) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$: o.B.d.A. $x > 0 \underset{(4_e)}{\implies} e^x > 1 + x \implies \lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty} (1 + x) = \infty$

(7$_e$) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty, \quad k \in \mathbb{N}$ fest: $\frac{e^x}{x^k} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{x^k} = \frac{x}{(k+1)!} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

(8$_e$) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$: $1 \underset{(2_e)}{=} \exp(0) \underset{(1_e)}{=} \exp(x)\ \exp(-x) = e^x\ e^{-x}$

(9$_e$) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$: folgt aus (6$_e$), (8$_e$)

(10$_e$) $\lim_{x\to-\infty} x^k\ e^x = 0, \ k \in \mathbb{N}$ fest: $\lim_{x\to-\infty} \left|x^k\ e^x\right| \underset{(3_e)}{=} \lim_{x\to-\infty} |x|^k\ e^x = \lim_{y\to\infty} y^k\ e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^k}{e^y} \underset{(7_e)}{=} 0$

(11$_e$) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$: $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}}_{\text{stetige Funktion, } p(0) = 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Bemerkung*: e ist irrational :

$$e - S_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=m+1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(m+1)\cdots k}}_{< \left(\frac{1}{m+1}\right)^{k-m}} < \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1}\right)^{\ell}}_{\frac{\frac{1}{m+1}}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m}} = \frac{1}{m!}\,\frac{1}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{(m+1)!} = \frac{1}{m!}\,\frac{1}{m+1} < e - S_m < \frac{1}{m!}\,\frac{1}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \exists\, \theta = \theta(m),\ 0 < \theta < 1 \ : \quad e - S_m = \frac{1}{m!}\,\frac{\theta}{m}$$

Annahme : e ist rational, d.h. $e = \dfrac{\ell}{m} \in \mathbb{Q}, \quad \ell,\ m \in \mathbb{N}$

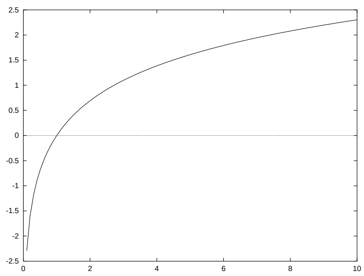
$$\Longrightarrow \quad e = \frac{\ell}{m} = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}}_{S_m} + \underbrace{\frac{1}{m!}\,\frac{\theta}{m}}_{e-S_m}$$

$$\underset{\cdot m!}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\ell(m-1)!}_{\in\,\mathbb{N}} = \underbrace{m! + m! + \frac{m!}{2!} + \cdots + \frac{m!}{(m-1)!} + 1}_{\in\,\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{m!}{m!}}_{=1}\,\frac{\theta}{m} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\theta}{m} \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Widerspruch zu } \ 0 < \theta < 1$$

Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$

$$\log x = \ln x\ , \quad x \in (0, \infty)$$



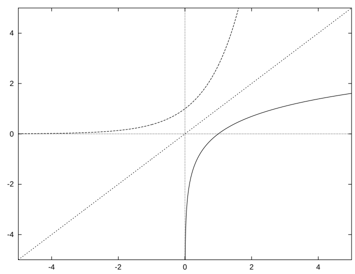
$\ln x, \quad x \in (0, 10]$

Umkehrfunktion von $e^x,\ x \in \mathbb{R}$

nach Eigenschaft (4_e) wohldefiniert gemäß Abschnitt 4.3

$$\Longrightarrow \quad D(\ln x) = W\left(e^x\right) \underset{(3_e),(6_e),\,(9_e)}{=} (0, \infty)$$

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



e^x & $\ln x$

(1_ℓ) $\ln x$ ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend und stetig (*folgt aus Satz 4.3.2 und* (4_e))

(2_ℓ) $\ln(xy) = \ln x + \ln y\ , \quad x, y > 0$:

$$\ln(xy) = \ln\Big(\underbrace{e^{\ln x}\, e^{\ln y}}_{=e^{\ln x + \ln y}}\Big) = \ln x + \ln y$$

(3_ℓ) $\ln 1 = 0$: $\quad \ln 1 = \ln\Big(\underbrace{e^0}_{=1}\Big) = 0$

(4_ℓ) $\ln\left(x^k\right) = k\ \ln x\ , \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{Z}$: *folgt aus* (2_ℓ), (3_ℓ)

(5_ℓ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$: $\quad x \in D(\ln x) = W\left(e^x\right) \Longrightarrow \exists\, y \in \mathbb{R} \ : \ x = e^y,$

$$\underset{(4_e),\,(6_e),\,(9_e)}{\Longrightarrow} \quad \left(e^y = x \to \infty\right) \iff (y \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \underbrace{\ln x}_{=y} = \lim_{e^y\to\infty} y = \lim_{y\to\infty} y = \infty$$

$$(6_\ell)\ \lim_{x\downarrow 0} \ln x = -\infty : \quad x \in D(\ln x) = W(e^x) \implies \exists\, y \in \mathbb{R} : x = e^y,$$

$$\underset{(4_e),\,(6_e),\,(9_e)}{\implies} \quad (e^y = x \downarrow 0) \iff (y \to -\infty)$$

$$\implies \lim_{x\downarrow 0} \underbrace{\ln x}_{=y} = \lim_{e^y \downarrow 0} y = \lim_{y\to -\infty} y = -\infty$$

$$(7_\ell)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 : \ x \in D(\ln x) = W(e^x) \implies \exists\, y \in \mathbb{R} : x = e^y,$$

$$\underset{(2_e),\,(4_e)}{\implies} (e^y = x \to 1) \iff (y \to 0)$$

$$\implies \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{e^y \to 1} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y-1} \underset{(11_e)}{=} 1$$

Bemerkung*: Es gilt $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x , \quad x \in \mathbb{R} :$

Sei $x \in \mathbb{R}$, setzen $\nu_n := 1 + \dfrac{x}{n} \implies \displaystyle\lim_{n\to\infty} \nu_n = 1$

$$\implies 1 \underset{(7_\ell)}{=} \lim_{\nu_n \to 1} \frac{\ln \nu_n}{\nu_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \underset{(3_\ell)}{=} \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x, \quad \exp-\text{Funktion stetig}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] \underset{\substack{\exp\\ \text{stetig}}}{=} \exp\underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]}_{=x} = e^x$$

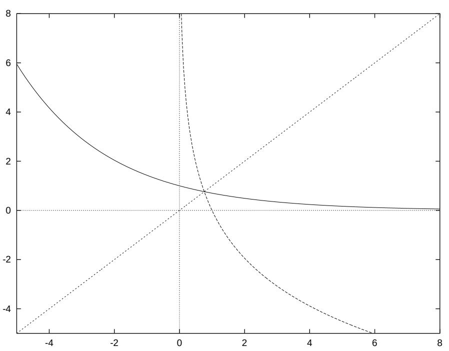
Die Funktionen a^x, $\log_a x$ *und* x^α

- $a^x := e^{x\cdot \ln a}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\curvearrowright\ a^x \begin{cases} \text{streng monoton fallend,} & a < 1 \\ \equiv 1, & a = 1 \\ \text{streng monoton wachsend,} & a > 1 \end{cases} \curvearrowright \ \text{Umkehrfunktion existiert für} \quad a > 0,\ a \neq 1$$

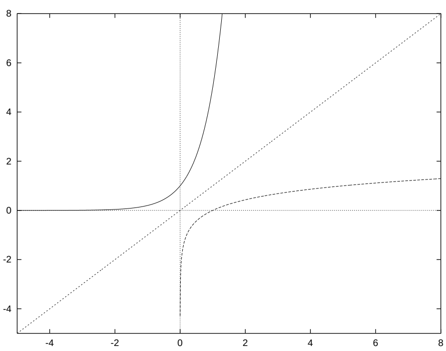
Rechtfertigung der Schreibweise : $\quad e^{n\cdot\ln a} \underset{(3_\ell)}{=} e^{\ln(a^n)} = a^n, \quad n \in \mathbb{N}$

- Bezeichnung der Umkehrfunktion zu a^x : $\quad \log_a x , \quad a > 0 , \quad a \neq 1 , \quad x > 0$
- Weiterhin definiert man $\quad x^\alpha := e^{\alpha\cdot \ln x} , \quad \alpha \in \mathbb{R} , \quad x > 0.$



$(a = 0.7)$

a^x & $\log_a x$, $0 < a < 1$



$(a = 5)$

a^x & $\log_a x$, $a > 1$

Bemerkung*: Es kann gezeigt werden, dass diese Definition sinnvoll ist und mit der Definition (für x^α) am Ende von Abschnitt 1.1 übereinstimmt.

Die Winkelfunktionen $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$

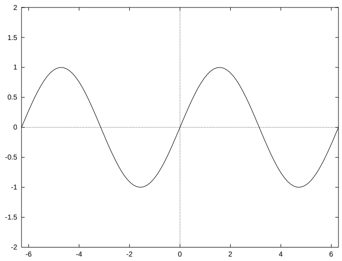
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\ , \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\ , \quad x \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \quad R_{\sin} = R_{\cos} = \infty$$

$\xRightarrow[\text{Folg. 6.2.4}]{}$ $\sin x,\ \cos x$ absolut und gleichmäßig konvergent auf jedem Intervall $[-s, s]$, $s \in \mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}$

Eigenschaften von $\sin x,\ \cos x$:

(1) $\sin 0 = 0, \quad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos 0 = 1, \quad \cos(-x) = \cos x$

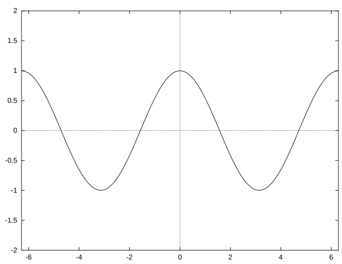


$\sin x, \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

(2)
$$\begin{aligned} 2\ \sin x \cos x &= 2 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k\ x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=:a_k} \Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^\ell\ x^{2\ell}}{(2\ell)!}}_{=:b_\ell} \Big) \\ &\underset{\substack{\text{Cauchy-}\\ \text{Prod.}}}{=} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\frac{(-1)^m\ x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{=:a_m} \underbrace{\frac{(-1)^{n-m}\ x^{2n-2m}}{(2n-2m)!}}_{=:b_{n-m}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\frac{(2n+1)!}{(2m+1)!(2n-2m)!}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[2 \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m+1} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Bigg[\underbrace{\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}}_{(1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}} \Bigg] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(2x) \end{aligned}$$

(3) *Additionstheoreme* :

$$\left. \begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned} \right\} \ \text{Multiplikation der Potenzreihen}$$



$\cos x, \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

(4) $1 \underset{(1)}{=} \cos 0 = \cos(x - x) \underset{(3)}{=} \cos^2 x + \sin^2 x$

Beide Reihen $\sin x,\ \cos x$ sind alternierend, es gilt $\dfrac{x^k}{k!} > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ für $k \geq 2$ und $0 < x \leq 3$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad S_3^{\sin} &= x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = S_5^{\sin} \\ S_2^{\cos} &= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{>0 \text{ für } 0<x<\sqrt{2}} < \cos x < \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{<0 \text{ für } \sqrt{6-2\sqrt{3}}<x\leq 3} = S_4^{\cos} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\cos x > 0$ für $x < \sqrt{2}$, z.B. $x = 1.4$, $\cos x < 0$ für $x > \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$, z.B. $x = 1.6$

$\xRightarrow[\text{Lemma 4.2.3}]{}$ $\exists\ \xi\ ,\quad 1.4 < \xi < 1.6\ :\ \cos\xi = 0,$ man setzt $\boxed{\pi := 2\ \xi}$

(5) $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0 \quad \underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \left| \sin \dfrac{\pi}{2} \right| = 1$

andererseits ist $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6} > 0$ für $0 < x < \sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$

(6) aus (3) & (5) folgt dann sukzessive:

$$\begin{aligned} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x\ , & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x\ , & \cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x\ , & \cos(x+2\pi) &= \cos x \end{aligned}$$

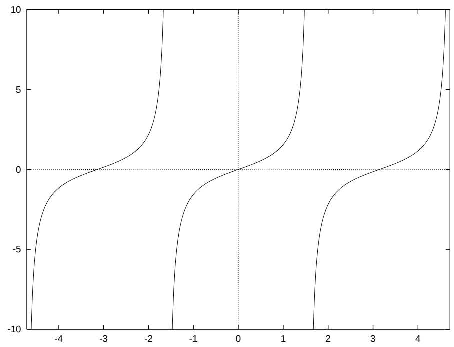
$$\underset{(5)}{\Longrightarrow} \quad \cos x = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \sin x = 0 \quad \text{für} \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$:

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}_{\text{stetige Funktion, } f(0)=0}$$

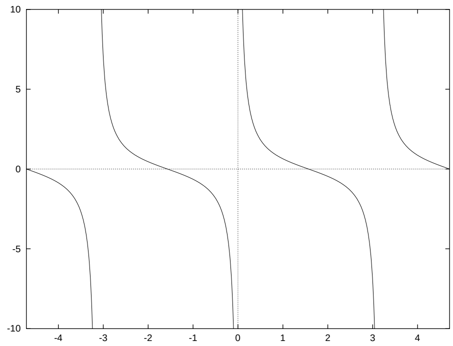
(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell+2)!} = -\left[\frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell+2)!}}_{\text{stetige Funktion}, f(0)=0}\right]$$



$$f(x) = \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ , \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$



$$g(x) = \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi\ , \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Komplexe Potenzreihen

- $\exp(z) := e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ wohldefiniert für alle $z \in \mathbb{C} \xRightarrow{\text{wie vorher}} e^{z+w} = e^z \cdot e^w\ , \quad z, w \in \mathbb{C}$

- $\sin(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad \cos(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad , \qquad z \in \mathbb{C}$

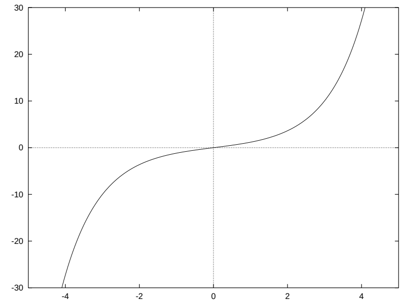
speziell : $z = iy, \quad y \in \mathbb{R}$ (d.h. $\Re\mathrm{e}\,(z) = 0$)

$$\curvearrowright \quad e^{iy} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^{2n}}_{(-1)^n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^{2n+1}}_{i(-1)^n} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}}_{\cos y} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}}_{\sin y}$$

$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\ \sin y\ , \quad y \in \mathbb{R}}$ *Eulersche Formel* $\curvearrowright \ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \ y \in \mathbb{R}$

Die Hyperbelfunktionen $\sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x,\ \coth x$

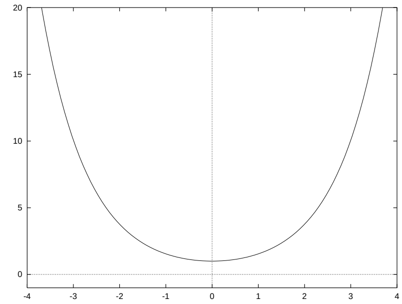


$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \quad D(\sinh) = \mathbb{R}$$

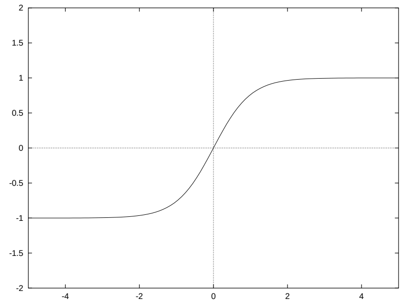
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x = \cosh(-x)$$
$$\sinh x = -\sinh(-x)$$

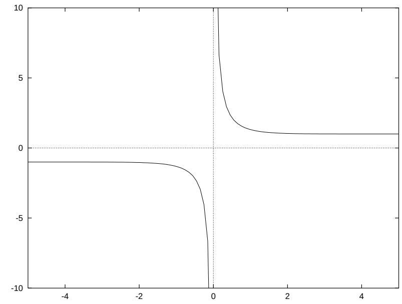
$$\vdots$$



$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ , \quad D(\cosh) = \mathbb{R}$$



$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ ,\ D(\tanh) = \mathbb{R}$$



$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\ ,\ D(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$

7.1 Grundbegriffe

Definition 7.1.1 *Sei* $f(x)$ *eine reelle Funktion mit* $D(f) = U(x_0)$, *wobei* $U(x_0)$ *ein offenes Intervall ist, das* x_0 *enthält.*

(i) $f(x)$ *ist in* x_0 differenzierbar *genau dann, wenn der Limes*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ *bzw.* $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ *bezeichnet.*

(ii) $f(x)$ *ist in* x_0 linksseitig differenzierbar *genau dann, wenn der Limes*

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'_-(x_0)$ *bezeichnet.*

(iii) $f(x)$ *ist in* x_0 rechtsseitig differenzierbar *genau dann, wenn der Limes*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'_+(x_0)$ *bezeichnet.*

Bemerkung*:

- $x_0 \in \mathbb{R},\ U(x_0) = (x_0 - \eta, x_0 + \delta),\ \ \eta, \delta > 0$

  äquivalente Schreibweise : $\quad f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Sei $f(x)$ stetig in x_0, $D(f) = U(x_0)$. Dann ist f differenzierbar in x_0 genau dann, wenn f in x_0 links- und rechtsseitig differenzierbar ist mit $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Das folgt unmittelbar aus der Grenzwertdefinition Def. 4.1.6 sowie Folgerung 4.1.7.

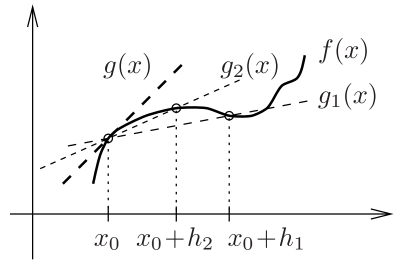
Geometrische Interpretation

Sekantengleichung : $\quad s(x) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,(x - x_0) + f(x_0)$

$h_1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad g_1(x)\ , \qquad h_2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad g_2(x) \ldots$

'Grenzlage' der Sekante für $h \to 0$,

$$\begin{aligned} g(x) \ &= \ \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} (x - x_0) + f(x_0) \\ &=: \qquad f'(x_0) \qquad (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$



Sei $f(x)$ differenzierbar in x_0 : $\quad f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)} - f'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

Satz 7.1.2 *Sei* $f(x)$ *mit* $D(f) = U(x_0)$ *gegeben.*

(i) f *ist in* x_0 *differenzierbar genau dann, wenn ein* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existiert, so dass gilt*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x) \qquad \textit{mit} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

(ii) *Sei* f *differenzierbar in* x_0. *Damm ist* $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *die einzige Gerade mit der Approximationseigenschaft*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

B e w e i s : zu (i): „$\Longrightarrow$“ : Sei f differenzierbar in x_0, d.h. $f'(x_0)$ existiere, setzen $\alpha := f'(x_0)$

$$\curvearrowright \ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \quad \text{mit} \quad \frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

„$\Longleftarrow$“ : Sei $f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + \underbrace{\dfrac{r(x)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$

$$\curvearrowright \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \ \text{ existiert, d.h. } f \text{ differenzierbar in } x_0,\ f'(x_0) = \alpha$$

zu (ii): α ist eindeutig bestimmt (wenn es existiert), $\alpha = f'(x_0)$:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r_\alpha(x) \\ f(x) &= f(x_0) + \beta(x - x_0) + r_\beta(x) \end{aligned}\right\} \curvearrowright \ \alpha - \beta = \lim_{x \to x_0} (\alpha - \beta) = \lim_{x \to x_0} \frac{r_\alpha(x) - r_\beta(x)}{x - x_0} = 0 \iff \alpha = \beta$$

□

Schreibweise : $\quad r(x) = \mathbf{o}(x - x_0)$

Lemma 7.1.3 *Sei* $f(x)$ *in* x_0 *differenzierbar,* $D(f) = U(x_0)$. *Dann ist* $f(x)$ *in* x_0 *stetig.*

Beweis : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \underbrace{\lim_{x\to x_0}(x - x_0)}_{=0} + \lim_{x\to x_0} r(x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{x\to x_0}(x - x_0)}_{=0} \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0}}_{=0} = f(x_0)$$

□

Definition 7.1.4 *Sei* f *eine reelle Funktion mit* $D(f) = (a, b)$.

(i) $f(x)$ *ist* in (a, b) differenzierbar, *wenn* $f(x)$ *in jedem* $x_0 \in (a, b)$ *differenzierbar ist.*

(ii) $f(x)$ *ist* in $[a, b]$ differenzierbar, *wenn* $f(x)$ *in* (a, b) *differenzierbar ist und die beiden (einseitigen) Grenzwerte* $f'_+(a)$ *und* $f'_-(b)$ *existieren.*

Beispiele : (1) $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R},\ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) \equiv 0$$

(2) $f(x) = x,\ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} \equiv 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) \equiv 1$$

(3) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k\, h^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k \underbrace{\lim_{h\to 0} h^{n-1-k}}_{=0\ ,\ k<n-1} = \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} = n\, x_0^{n-1}$$

(4) $f(x) = e^x,\ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1,\ (6.3/11_e)} = \frac{\mathrm{d}(e^x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

(5) $f(x) = \sin x,\ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \sin(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1}$$

$$\underset{(6.3/7,8)}{=} \cos(x_0) = \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

(6) $f(x) = \cos x,\ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} = \cos(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} - \sin(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1}$$

$$\underset{(6.3/7,8)}{=} -\sin(x_0) = \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

(7) $f(x) = |x|,\ D(f) = \mathbb{R},\ x_0 = 0$:

$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0) \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ (aber stetig)

Beispiele : (8) $f(x) = |x|^\alpha, \ \ \alpha > 1, \ \ D(f) = \mathbb{R}, \ \ x_0 = 0$:

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = |h|^{\alpha-1} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \implies \frac{\mathrm{d}\,(|x|^\alpha)}{\mathrm{d}x}(0) = 0, \quad \alpha > 1$$

7.2 Differentiationsregeln

Satz 7.2.1 *Die Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ *seien im Punkt* x_0 *differenzierbar. Dann gilt :*

(i) $(f+g)(x)$ *ist in* x_0 *differenzierbar,*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) $(fg)(x)$ *ist in* x_0 *differenzierbar,*

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda\ f'(x_0)$$

(iii) *Falls* $g(x_0) \neq 0$ *gilt, so ist* $\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ *in* x_0 *differenzierbar,*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Insbesondere gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

(iv) $f^k(x)$ *ist differenzierbar in* x_0, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *und* $f(x_0) \neq 0$ *für* $k < 0$,

$$\left(f^k\right)'(x_0) = k\ f'(x_0)\ \left(f^{k-1}\right)(x_0)$$

Beweis :

zu (i) : $$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}$$

zu (ii) : $$\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \underbrace{f(x_0+h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)}$$

$$\implies \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

zu (iii) : $$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0)\ g(x_0+h)\ h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h}}_{-g'(x_0)} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)\ g(x_0+h)}}_{\frac{1}{[g(x_0)]^2}}$$

□

Beispiele :

- $f(x) = x^k,\ \ k \in \mathbb{Z}: \quad \begin{cases} k \geq 1 & : \ D(f) = \mathbb{R}, \qquad f'(x) = k\ x^{k-1} \\ k \leq 0 & : \ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = k\ x^{k-1} \end{cases}$

- $f(x) = \tan x,\ x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \ D(f) = \mathbb{R}\ :\ f'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

Folgerung 7.2.2 *Die rationalen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen* $(\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x)$ *und die hyperbolischen Winkelfunktionen* $(\sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x,\ \coth x)$ *sind auf ihrem Definitionsgebiet differenzierbar.*

Satz 7.2.3 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)
Sei $f(x)$ *auf* $D(f) = (a, b)$ *streng monoton, differenzierbar in* (a, b) *, und es gelte* $f'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Dann ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1}(y),\ \ D\left(f^{-1}\right) = W(f)$, *differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)} \Bigg|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \textit{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)} \Bigg|_{y=f(x)}.$$

Beweis : sei $y_0 \in W(f) = D\left(f^{-1}\right) \implies \exists\ x_0 \in (a, b)\ :\ y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0)$

f streng monoton $\xRightarrow[\text{Satz 4.3.2}]{} \exists\ f^{-1}$, stetig, d.h. $\lim\limits_{y \to y_0} \underbrace{f^{-1}(y)}_{x} = \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0} \iff \lim\limits_{y \to y_0} x = x_0$

f differenzierbar $\xRightarrow[\text{Lemma 7.1.3}]{} f$ stetig $\implies \lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} \iff \lim\limits_{x \to x_0} y = y_0$

$$\implies \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) \Bigg|_{y=y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{\overbrace{f^{-1}(y)}^{x} - \overbrace{f^{-1}(y_0)}^{x_0}}{\underbrace{y}_{f(x)} - \underbrace{y_0}_{f(x_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)} \Bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)} \Bigg|_{x=f^{-1}(y_0)}$$

□

Beispiel :

- $f(x) = e^x,\ \ D(f) = \mathbb{R}\ \curvearrowright\ f'(x) = e^x > 0,\ W(f) = (0, \infty)$:

  $f^{-1}(y) = \ln y, \quad y > 0\ \curvearrowright\ (\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} \Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{e^x} \Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{y}, \quad y > 0$

Beispiele :

- $f(x) = \tan x$, $D(\tan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \curvearrowright (\tan x)' = 1 + \tan^2 x \neq 0$:
  $f^{-1}(y) = \arctan y, \quad y \in D(\arctan) = (-\infty, \infty)$
  $$\Longrightarrow \quad (\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'}\Big|_{x=\arctan y} = \frac{1}{1+\tan^2 x}\Big|_{y=\tan x} = \frac{1}{1+y^2}\,, \quad y \in \mathbb{R}$$
- $f(x) = \sin x$, $D(\sin) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \curvearrowright (\sin x)' = \cos x \neq 0$:
  $$f^{-1}(y) = \arcsin y, \quad y \in (-1,1) \curvearrowright \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (*)$$
  $$\Longrightarrow \quad (\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'}\Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=\arcsin y} \underset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Big|_{y=\sin x}$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad y \in (-1,1)$$

Satz 7.2.4 (Kettenregel)
Seien die Funktionen f auf dem Intervall I_f differenzierbar, sowie φ auf dem Intervall I_φ. Es gelte $W(\varphi) \subset I_f$. Dann ist auch die mittelbare Funktion $(f \circ \varphi)(t)$ auf I_φ differenzierbar, wobei gilt

$$(f\circ\varphi)'(t) = \frac{\mathrm{d}(f\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t)\,, \qquad t \in I_\varphi\,.$$

Beweis : Sei $t_0 \in I_\varphi \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \varphi(t_0) \in I_f$, f differenzierbar in x_0

$$\xrightarrow[\text{Satz 7.1.2}]{} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{h(x)}_{\frac{r(x)}{x-x_0}}(x-x_0), \qquad \text{wobei } \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{x-x_0} = 0 \text{ gilt,}$$

$$\underset{\substack{\varphi(t)=x\\ \varphi(t_0)=x_0}}{\Longleftrightarrow} (f\circ\varphi)(t) = (f\circ\varphi)(t_0) + f'(x_0)\,(\varphi(t)-\varphi(t_0)) + h\,(\varphi(t))\,(\varphi(t)-\varphi(t_0))$$

$$\Longrightarrow \quad (f\circ\varphi)'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{(f\circ\varphi)(t)-(f\circ\varphi)(t_0)}{t-t_0}$$
$$= f'(x_0)\underbrace{\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}}_{\varphi'(t_0)} + \lim_{t\to t_0} h\,(\varphi(t))\,\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} \qquad (*)$$

$$\varphi \text{ differenzierbar} \xrightarrow[\text{Lemma 7.1.3}]{} \text{stetig in } t_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to t_0} h\,(\varphi(t)) = \lim_{\varphi(t)\to\varphi(t_0)} h\,(\varphi(t)) = \lim_{x\to x_0} h(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\to t_0}\underbrace{h\,(\varphi(t))}_{\xrightarrow[t\to t_0]{}0}\underbrace{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}}_{\xrightarrow[t\to t_0]{}\varphi'(t_0)} = 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} (f\circ\varphi)'(t_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0)$$

□

Beispiele :

- $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x\ln a}\right) = \underbrace{e^{x\ln a}}_{a^x}\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln a)}_{\ln a} = \ln a\; a^x$
- $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\alpha\ln x}\right) = \underbrace{e^{\alpha\ln x}}_{x^\alpha}\underbrace{(\alpha\ln x)'}_{\alpha\frac{1}{x}} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

Folgerung 7.2.5 (Regel der logarithmischen Differentiation)
Seien $f(x)$ *und* $g(x)$ *auf einem Intervall* I *differenzierbar, wobei zusätzlich* $f(x)>0$ *für alle* $x\in I$ *gelte. Dann ist* $\varphi(x)=f(x)^{g(x)}$ *auf* I *differenzierbar, es gilt*

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)^{g(x)}\right)=f(x)^{g(x)}\left(\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right),\quad x\in I\,.$$

Beweis:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\underbrace{f(x)}_{e^{\ln f(x)}}{}^{g(x)}\Big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)=\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,e^u\Big|_{u=g(x)\ln f(x)}}_{e^u=e^{g(x)\ln f(x)}}\ \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(g(x)\ln f(x))}_{g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}}$$
$$=f(x)^{g(x)}\left(\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right)$$
□

Beispiel: $\varphi(x)=x^x,\ x\in(0,\infty)$:
$$f(x)=g(x)=x,\ f'(x)=g'(x)=1\ \curvearrowright\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)=x^x\left(\frac{x\cdot 1}{x}+1\cdot\ln x\right)=x^x(1+\ln x)$$

Bemerkung*: Sei f, $D(f)=I\subset\mathbb{R}$, differenzierbar, $I\ldots$Intervall $\curvearrowright$ $f'(x)$ existiert für alle $x\in I$,

$$g_1(x):=f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x),\quad D(g_1)=D(f')=I\ ;$$

untersuchen Differenzierbarkeit von $g_1(x)$, $x\in I$,

$$\rightsquigarrow\quad g_1'(x)=(f')'(x)=:f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x),\quad x\in I,$$

Begriff der *zweimaligen Differenzierbarkeit* und *zweiten Ableitung*, ...Iteration

$$\rightsquigarrow\quad g_n(x)=f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}(x),\quad n\in\mathbb{N},\quad x\in I,$$

Begriff der *n-maligen Differenzierbarkeit* und *n-ten Ableitung* von f

7.3 Mittelwertsätze

Definition 7.3.1 *Eine Funktion* $f(x)$, $D(f)=(a,b)$, *hat in* $x_0\in(a,b)$ *ein* lokales Maximum bzw. Minimum *genau dann, wenn eine Zahl* $\sigma>0$ *existiert, so dass*

$$f(x)\le f(x_0)\qquad \text{bzw.}\qquad f(x)\ge f(x_0)\qquad \text{für alle}\quad x\in(x_0-\sigma,x_0+\sigma)\subset(a,b)$$

gilt.

Lemma 7.3.2 *Sei* $f(x)$ *differenzierbar in* $x_0\in D(f)=(a,b)$, *und* $f(x)$ *besitze in* x_0 *ein lokales Maximum bzw. Minimum. Dann gilt* $f'(x_0)=0$.

Beweis: o.B.d.A. habe $f(x)$ in x_0 ein lokales Maximum, d.h. $f(x)\le f(x_0)$, $x\in(x_0-\sigma,x_0+\sigma)$

f differenzierbar in x_0 $\underset{\text{Bem. vor Satz 7.1.2}}{\Longrightarrow}$ $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

$$\left.\begin{array}{l} x_0-\sigma<x<x_0 \implies \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0 \implies \underbrace{\lim_{x\uparrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'_-(x_0)} \geq 0 \\ x_0<x<x_0+\sigma \implies \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq 0 \implies \underbrace{\lim_{x\downarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'_+(x_0)} \leq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(x_0)=f'_+(x_0)\leq 0 \\ \qquad =f'_-(x_0)\geq 0 \\ \implies f'(x_0)=0 \end{array}$$

□

Bemerkung*:
- Eine Funktion kann in x_0 ein lokales Extremum haben, ohne (dort) differenzierbar zu sein, z.B. hat $f(x)=|x|$ ein lokales Minimum in $x_0=0$.
- Aus $f'(x_0)=0$ folgt noch nicht die Existenz eines lokalen Extremums, z.B. hat $f(x)=x^3$ in $x_0=0$ kein lokales Extremum, aber $f'(0)=0$.

Satz 7.3.3 (Satz von Rolle[21])
Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b), wobei zusätzlich $f(a)=f(b)=0$ gelte. Dann existiert mindestens ein $\xi\in(a,b)$, für das $f'(\xi)=0$ gilt.

Beweis: $f\equiv 0$ trivial, also o.B.d.A. $f\not\equiv 0$,

$$f \text{ stetig auf } [a,b] \xRightarrow[\text{Satz 4.2.2}]{} \begin{cases} \exists\, x_*\in[a,b] \;:\; f(x_*) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \\ \exists\, x^*\in[a,b] \;:\; f(x^*) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \end{cases}$$

$f(a)=f(b)=0,\ f\not\equiv 0 \implies$ es können nicht beide Punkte $x_*,\ x^*$ Randpunkte sein, o.B.d.A. $x^*\in(a,b) \implies x^*$ ist lokales Maximum $\xRightarrow[\text{Lemma 7.3.2}]{} f(x^*)=0,\ \xi:=x^*$. □

Satz 7.3.4 (Mittelwertsätze)

(i) *Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Dann existiert ein $\xi\in(a,b)$, für das gilt*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

(ii) *Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Zusätzlich gelte $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Dann existiert ein $\xi\in(a,b)$, für das gilt*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Beweis: <u>zu (ii)</u>: $g(b)-g(a)\neq 0$: <u>*Annahme*</u> : $g(b)=g(a)$
$\curvearrowright$ $h(x)=g(x)-g(a)$ erfüllt Voraussetzungen von Satz 7.3.3
$\curvearrowright$ $\exists\,\xi\in(a,b) \;:\; h'(\xi)=g'(\xi)=0$ $\curvearrowright$ Widerspruch

$$h(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) \implies h(x) \text{ stetig auf } [a,b]\text{, differenzierbar in } (a,b),$$

$$h(a)=h(b)=0 \xRightarrow[\text{Satz 7.3.3}]{} \exists\,\xi\in(a,b) \;:\; h'(\xi)=0 \iff \exists\,\xi\in(a,b) \;:\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

<u>zu (i)</u>: folgt aus (ii) mit $g(x)=x$ □

[21] Michel Rolle (* 21.4.1652 Ambert/Frankreich † 8.11.1719 Paris)

Bemerkung*: (ii) 'stärker' als (i), denn zweimalige Anwendung von (i) liefert nur

$$\exists\, \xi_1,\ \xi_2 \in (a,b)\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}\,, \quad \text{aber i.a. } \xi_1 \neq \xi_2$$

Folgerung 7.3.5 **(i)** *Seien $f(x)$ differenzierbar auf I und $f'(x) = 0$, $x \in I$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) \equiv c$ für alle $x \in I$ gilt.*

(ii) *Seien $f(x)$ in (a,b) differenzierbar, $f'(x)$ stetig in $x_0 \in (a,b)$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\sigma > 0$, so dass $f(x)$ auf $(x_0-\sigma, x_0+\sigma)$ streng monoton ist.*

Beweis : zu (i) : Seien $x_1, x_2 \in I \implies f(x)$ erfüllt auf $[x_1,x_2]$ die Voraussetzungen von Satz 7.3.4

$$\implies \exists\, \xi \in (x_1,x_2)\ :\ \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \implies f(x_2) = f(x_1) \text{ für beliebige } x_1,x_2 \in I \implies \text{(i)}$$

zu (ii) : o.B.d.A. $f'(x_0) > 0$, $f'(x)$ stetig in x_0

$$\implies \exists\, \sigma > 0\ :\ (x_0-\sigma, x_0+\sigma) \subset (a,b), \quad f'(x) \geq \frac{f'(x_0)}{2} > 0$$

seien nun $x_1,\ x_2 \in (x_0-\sigma, x_0+\sigma)$, $x_1 < x_2$, wenden Satz 7.3.4 auf $f(x)$ und $[x_1,x_2]$ an

$$\implies \exists\, \xi \in (x_1,x_2)\ :\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq \frac{f'(x_0)}{2} > 0 \implies f(x_2) > f(x_1) \implies \text{(ii)} \qquad \square$$

Satz 7.3.6 (Satz von L'Hospital[22])
Seien f und g stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in (a,b), wobei zusätzlich $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$ auf (a,b) und $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) gelten.
Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Beweis : $x \in (a,b)$, $\displaystyle \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-\overbrace{f(a)}^{0}}{g(x)-\underbrace{g(a)}_{0}} \underset{\text{Satz 7.3.4}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, $a < \xi < x \curvearrowright \displaystyle \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ $\square$

Bemerkung*: $f(a) = g(a) = 0$ wesentlich, z.B. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+3} = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x+3)'}$

Satz 7.3.7 *Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in (a,b), wobei zusätzlich $\lim\limits_{x\downarrow a} g(x) = \infty$, $g(x) \neq 0$ auf (a,b) und $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) gelten.*
Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Beweis : Sei $\varepsilon > 0$, $\displaystyle \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \alpha$ existiert $\implies \exists\, x_0(\varepsilon) < b \ \ \forall\, x \in (a,x_0) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

sei $x \in (0,x_0)$ $\underset{\substack{\text{Satz 7.3.4}\\ \text{auf } [x,x_0]}}{\implies}$ $\displaystyle \exists\, \xi \in (x,x_0)\ :\ \left| \frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)} - \alpha \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

[22] Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital (* 1661 Paris † 2.2.1704 Paris)

verwenden Zerlegung : $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \alpha = \dfrac{f(x_0) - \alpha g(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right)\left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \alpha\right)$

weiterhin gilt $g(x) > 0$ in (a,b), da $g(x) \neq 0$ in $[a,b]$, $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) und $\lim\limits_{x\downarrow a} g(x) = \infty$, d.h. $g(x)$ streng monoton fallend, positiv

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| \leq \overbrace{\frac{|f(x_0) - \alpha g(x_0)|}{g(x)}}^{\leq c(x_0)} + \left|1 - \underbrace{\frac{g(x_0)}{g(x)}}_{0< \,\cdot\, <1}\right| \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \alpha\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{c(x_0)}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\downarrow a} g(x) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{c(x_0)}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ für }\; x < x_1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \square$$

Bemerkung*:

- analoge Resultate für $\lim\limits_{x\uparrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $a = -\infty$, $b = \infty$ zulässig
- Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$ sind so berechenbar, mit $x = e^{\ln x}$ auch 1^∞, 0^0, ∞^0

Beispiele :

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} \underset{\text{Satz 7.3.6}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{nx^{n-1}}{1} = n, \quad n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \underset{\text{Satz 7.3.6}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\downarrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Satz 7.3.7}}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\downarrow 0} x = 0$
- $\lim\limits_{x\downarrow 0} \underbrace{x^x}_{e^{x\ln x}} \underset{\text{exp stetig}}{=} \exp\left(\lim\limits_{x\downarrow 0} x \ln x\right) \underset{\text{s.o.}}{=} \exp(0) = 1$

Satz 7.3.8 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)
Sei $f(x)$ differenzierbar in $[a,b]$ mit $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. Dann nimmt $f'(x)$ in (a,b) jeden Wert zwischen $f'_+(a)$ und $f'_-(b)$ an.

Beweis : Sei o.B.d.A. $f'_+(a) < f'_-(b)$ und γ so gewählt, dass $f'_+(a) < \gamma < f'_-(b)$,
setzen $g(x) := \gamma x - f(x) \quad \Longrightarrow \quad g'_+(a) > 0,\; g'_-(b) < 0$, z.z. : $\exists\, \xi \in (a,b) \;:\; g'(\xi) = 0$

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'_+(a) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \delta_a \quad \forall\, x \in (a, a + \delta_a) \;:\; g(x) > g(a)$$

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = g'_+(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \delta_b \quad \forall\, x \in (b - \delta_b, b) \;:\; g(x) > g(b)$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b) \;:\; g(\xi) = \sup_{x\in[a,b]} g(x) = \max_{x\in(a,b)} g(x) \text{ lokales Maximum } \xRightarrow[\text{Lemma 7.3.2}]{} g'(\xi) = 0 \qquad \square$$

Bemerkung*:

- Vergleich von Satz 4.2.4 und Satz 7.3.8 : dort Stetigkeit als Voraussetzung, hier Existenz von $f'(x)$ als Ableitung gefordert
- Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein.

  Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \curvearrowright f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

  d.h. $f'(x)$ existiert überall, unstetig in $x_0 = 0$

7.4 Satz von Taylor

Problem : Sei $f(x)$ n-mal differenzierbar. Kann man $f(x)$ durch ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$ an einer Stelle x_0 so approximieren, dass gilt

$$p_n^{(k)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^k p_n}{\mathrm{d}x^k}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\ , \quad k = 0, \ldots, n \qquad ?$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} p_n(x_0) & = & a_0 = f(x_0) \\ p_n'(x_0) & = & a_1 = f'(x_0) \\ & \vdots & \\ p_n^{(k)}(x_0) & = & k!\, a_k = f^{(k)}(x_0) \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} a_k := \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ , \\ k = 0, \ldots, n \end{array}$$

Definition 7.4.1 *Sei $f(x)$ in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 n-mal differenzierbar. Dann heißt*

$$t_n(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ (x - x_0)^k$$

Taylor[23]-Polynom n-ten Grades *der Funktion f an der Stelle x_0.*

Problem : Wie groß ist der „Fehler“ $r_n(x) = f(x) - t_n(x), \ x \in U(x_0)$?

f n-mal differenzierbar $\underset{\text{Satz 7.1.2}}{\Longrightarrow}$ $r_n(x) = \mathbf{o}\left((x - x_0)^n\right)$ (*vollständige Induktion*), quantitative Aussage ?

Satz 7.4.2 (Satz von Taylor)
Sei $f(x)$ $(n+1)$-mal differenzierbar in $U(x_0) \subset D(f)$. Dann existiert für jedes $x \in U(x_0)$ ein $\theta \in (0, 1)$, so dass gilt

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ (x - x_0)^k \ + \ \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!} \ (x - x_0)^{n+1} \ .$$

Beweis : Sei $q(x) := (n+1)! \, \dfrac{f(x) - t_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$, $x \neq x_0$ $\curvearrowright$ z.z.: $q(x) = f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)$

Sei $x \in U(x_0)$ fest, o.B.d.A. $x < x_0$. Setzen

$$h(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \ (x - t)^k \ - \ \frac{q(x)}{(n+1)!} \ (x - t)^{n+1}\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad h(t) \ \text{differenzierbar in} \ [x, x_0], \ h(x) = h(x_0) = 0 \ \underset{\text{Satz 7.3.3}}{\Longrightarrow} \ \exists\, \tau \in (x, x_0) \ : \ h'(\tau) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \ = \ h'(\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \ (x - t)^k \right) \Bigg|_{t=\tau} - \ \frac{q(x)}{(n+1)!} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(x - t)^{n+1} \right] \Big|_{t=\tau}$$

$$= \ \underbrace{- \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\tau)}{k!} \ (x - \tau)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!} \ k(x - \tau)^{k-1}}_{-\frac{f^{(n+1)}(\tau)}{n!} \ (x-\tau)^n} \ + \ \underbrace{\frac{q(x)}{(n+1)!} (n+1)(x - \tau)^n}_{\frac{q(x)}{n!} \ (x-\tau)^n}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = h'(\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(n+1)}(\tau) = q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad q(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \qquad \square$$

[23]Brook Taylor (* 18.8.1685 Edmonton/England † 29.12.1731 London)

Bemerkung*:

- Restglied in der Form von Satz 7.4.2 heißt <u>Restglied von Lagrange</u>[24]
  weitere Restglied-Darstellungen, u.a. von *Cauchy, Schlömilch*[25]*-Roche*[26], Integral-$\sim$ ...

- $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \quad\Longrightarrow\quad r_n(x) = \mathbf{o}\left((x-x_0)^n\right)\ :$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}\,(x-x_0) = 0$$

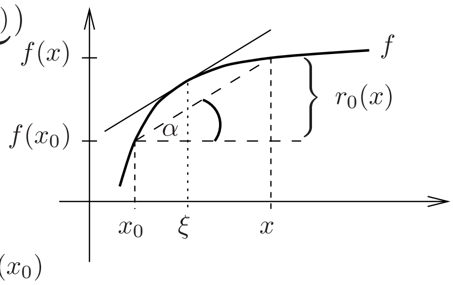
- Sei $n=0$, f differenzierbar in $U(x_0) \quad\Longrightarrow\quad t_0(x) \equiv f(x_0)$

$$\xRightarrow[\text{Satz 7.4.2}]{} \ f(x) = f(x_0) + f'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)\,(x-x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'\big(\underbrace{x_0+\theta(x-x_0)}_{\xi}\big)$$

$\sim$ Satz 7.3.4 (*Mittelwertsatz*)

$$\begin{aligned} r_0(x) &= f(x) - f(x_0) \\ &= \tan\alpha\ (x-x_0) \end{aligned}$$



- Sei $n=1$, f zweimal differenzierbar in $U(x_0)$

$$\Longrightarrow \quad t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)}_{t_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2}\,(x-x_0)^2}_{\text{explizite Form von } r(x) \text{ aus Satz 7.1.2, stärkere Vor.}}$$

Beispiele : **(1)** $f(x) = e^x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$:

$$f^{(k)}(x) = e^x,\ k\in\mathbb{N}_0 \ \curvearrowright\ f^{(k)}(0) = 1,\ k\in\mathbb{N}_0 \ \curvearrowright\ t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 7.4.2}]{} \ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N},\quad 0<\theta=\theta(x)<1$$

(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell\, x^\ell$, $\alpha_m \neq 0$, $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$: $f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=k}^{m} \frac{\alpha_\ell\ \ell!}{(\ell-k)!}\,x_0^{\ell-k}, & k\le m \\ 0, & k>m \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Sei } n\ge m \ \curvearrowright\ t_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{=0,\ k>m}\,(x-x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=k}^{m} \alpha_\ell\,\frac{\ell!}{(\ell-k)!}\,x_0^{\ell-k}\,(x-x_0)^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\,x_0^{\ell-k}\,(x-x_0)^k}_{(x_0+x-x_0)^\ell = x^\ell} = \sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell\, x^\ell = f(x) \end{aligned}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 7.4.2}]{} \ f(x) = \overbrace{t_n(x)}^{f(x)} + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}}^{\equiv 0,\ n\ge m}\,(x-x_0)^{n+1},\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ n\ge m$$

[24] Joseph-Louis Lagrange (* 25.1.1736 Turin † 10.4.1813 Paris)
[25] Oscar Xavier Schlömilch (* 13.4.1823 Weimar † 7.2.1901 Dresden)
[26] Édouard-Albert Roche (* 17.10.1820 Montpellier † 18.4.1883)

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: **(3)** $f(x) = \ln x,\ \ D(f) = (0,\infty),\ \ x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
f(1) = 0, \quad f'(x) &= \frac{1}{x} &\Longrightarrow f'(1) &= 1,\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} &\Longrightarrow f''(1) &= -1,\\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} &\Longrightarrow f^{(3)}(1) &= 2,\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}\,\frac{(k-1)!}{x^k} &\Longrightarrow f^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}\,(k-1)!\,, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(x-1)^k$$

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\,\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ existiert bei $x_0 = 1,\ n \in \mathbb{N}$

$$\xRightarrow[\text{Satz 7.4.2}]{} \ln x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(x-1)^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)\ [1+\theta(x-1)]^{n+1}}\,(x-1)^{n+1}\,,$$

für $x \in (0,\infty),\ n \in \mathbb{N},\ 0 < \theta = \theta(x) < 1$

<u>*Problem*</u> : Kann $f(x)$ durch $t_n(x)$ beliebig gut approximiert werden, d.h. gilt stets

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x) \qquad \text{für ein fixiertes} \quad x \in U(x_0) \quad ?$$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) \iff \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ x \in U(x_0),$ *hinreichend* : $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in U(x_0)} |r_n(x)| = 0$

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $f(x) = e^x,\ \ D(f) = \mathbb{R},\ \ x_0 = 0$

$$\Longrightarrow \quad e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{t_n(x)} + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}}_{r_n(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \theta < 1$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert $\Longrightarrow \quad 0 \le |r_n(x)| \le \dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0,\ \alpha \ge 0\right)$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \iff e^x = \lim_{n\to\infty} t_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

qualitative Abschätzung : sei $x \in [-5,5] \Longrightarrow e^{|x|} \le e^5 \Longrightarrow |r_n(x)| \le \dfrac{e^5}{(n+1)!}\,5^{n+1}$

z.B. $|r_{20}(x)| \le \dfrac{e^5}{21!}\,5^{21} \approx 0.00138$

Satz 7.4.3 *Sei* $f(x)$ *eine in* (a,b) *beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann gilt für ein beliebiges* $x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \quad , \qquad x \in (a,b),$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \right| = 0$$

unabhängig von $\theta,\ 0 < \theta < 1$, *ist.*

B e w e i s : folgt aus Satz 7.4.2 und Vorüberlegungen $\square$

Bemerkung*: Satz 7.4.3 $\curvearrowright$ f für alle $x \in (a,b)$ darstellbar als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0

Beispiel : $$\ln x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)\ [1+\theta(x-1)]^{n+1}} (x-1)^{n+1}, \qquad x>0,\ n \in \mathbb{N}$$

Sei $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $0 < \theta = \theta(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 + \theta(x-1) > \frac{1}{2} > 0$

$$\frac{1}{2} \le x \le 1 \quad : \quad \frac{|x-1|}{1+\theta(x-1)} < 2|x-1| = 2(1-x) \le 1$$

$$1 \le x \le 2 \quad : \quad \frac{|x-1|}{1+\theta(x-1)} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 < 1 + \theta(x-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(1-\theta)}_{0<\cdot<1}\underbrace{(x-1)}_{0\le\cdot\le 1} < 1$$

$$\curvearrowright\ |r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \underbrace{\left[\frac{|x-1|}{1+\theta(x-1)}\right]}_{<1 \text{ für } \frac{1}{2}\le x \le 2}^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\curvearrowright\ \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k, \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Bemerkung*: Man kann sogar zeigen: $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, z.B. gilt also

$$\ln \frac{1}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}, \qquad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Lemma 7.4.4 (Gegenbeispiel)
Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

ist in $\mathbb{R}$ *beliebig oft differenzierbar, aber in* $x_0 = 0$ *nicht in eine Taylor-Reihe mit positivem Konvergenzradius entwickelbar.*

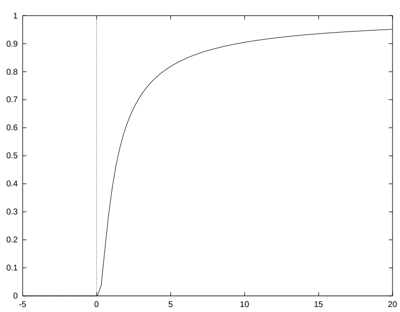
B e w e i s : $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{y\to\infty} y^2 e^{-y} \underset{(6.3/10_e)}{=} 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{y\to\infty} y e^{-y} \underset{(6.3/10_e)}{=} 0$$

$$\xRightarrow[f \text{ stetig in } 0]{} \quad f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0 = \lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \uparrow 0} f'(x)$$

d.h. $f(x)$ (einmal) stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

Iteration $\curvearrowright$ $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \dfrac{p_{k-1}(x)}{x^{2k}}$, $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $p_k(x)$ ... Polynom vom Grad $\le k$ (*Induktion*)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\downarrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x\downarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}\, \frac{p_{k-1}(x)}{x^{2k}} \underset{(6.3/10_e)}{=} 0,$$

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} e^{-\frac{1}{h}}\, \frac{p_{k-2}(h)}{h^{2k-1}} \underset{(6.3/10_e)}{=} 0 = f_-^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)$$

d.h. $f(x)$ ist k-mal stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$\curvearrowright$ $f(x)$ beliebig oft differenzierbar, $f^{(k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ $\curvearrowright$ $t_n(x) \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$

$\curvearrowright$ $r_n(x) = f(x) - \underbrace{t_n(x)}_{\equiv 0} = e^{-\frac{1}{x}} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, $x > 0$ $\curvearrowright$ $f(x)$ nicht als Taylor-Reihe bei $x_0 = 0$ darstellbar $\square$

Bemerkung*: weitere 'Gegenbeispiele' : $-\quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases} \quad , \quad x_0 = 0$

$-\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cos\left(k^2 x\right) \quad , \quad x_0 = 0$

7.5 Kurvendiskussion

- Definitionsbereich $\underline{D(f)}$, Wertebereich $\underline{W(f)}$ ermitteln
- Untersuchung auf <u>Stetigkeit</u>, (Typ der) <u>Unstetigkeitsstellen</u>, <u>Differenzierbarkeit</u>
- <u>Monotonie</u>-Verhalten ermitteln, gegebenenfalls mittels $f'(x)$ und Folg. 7.3.5(ii)
- <u>asymptotisches Verhalten</u> „an den Rändern“ von $D(f)$ bzw. bei $\pm\infty$ (und gegebenenfalls in der Nähe der Polstellen) untersuchen
- <u>lokale Extrema</u>
  bisher: notwendige Bedingung in Lemma 7.3.2: f differenzierbar habe in x_0 lokales Extremum $\curvearrowright$ $f'(x_0) = 0 \rightsquigarrow$ hinreichende Bedingung ?

Satz 7.5.1 *Sei f n-mal differenzierbar auf (a, b), $n \ge 2$, und für $x_0 \in (a, b)$ gelte*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \ne 0.$$

(i) *Ist n gerade, so besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, und zwar*

- *ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ bzw.*
- *ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ gilt.*

(ii) *Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.*

Beweis : o.B.d.A. $f^{(n)}(x_0) > 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$; verwenden Definition von $f^{(n)}(x_0)$ und Taylor-Entwicklung von f gemäß Satz 7.4.2

$$0 < f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \overbrace{f^{(n-1)}(x_0)}^{0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} \quad \curvearrowright \quad \begin{cases} f^{(n-1)}(x) > 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ f^{(n-1)}(x) < 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}$$

$$\text{Taylor} \curvearrowright \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-2} \overbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}^{0} (x - x_0)^k}_{0} + \frac{f^{(n-1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$$

- $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\curvearrowright$ $x_0 + \theta(x - x_0) \in (x_0, x) \subset (x_0, x_0 + \delta)$

  $\curvearrowright f^{(n-1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right) > 0, \quad (x - x_0)^{n-1} > 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \curvearrowright f(x) - f(x_0) > 0, \quad n \in \mathbb{N}$

- $x \in (x_0 - \delta, x_0) \curvearrowright x_0 + \theta(x - x_0) \in (x, x_0) \subset (x_0 - \delta, x_0)$

$\curvearrowright f^{(n-1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) < 0,\ (x - x_0)^{n-1} \begin{cases} < 0, & n \text{ gerade} \\ > 0, & n \text{ ungerade} \end{cases} \curvearrowright f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0, & n \text{ gerade} \\ < 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\curvearrowright f(x) - f(x_0) \geq 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, n gerade, d.h. f hat *lokales Minimum* in x_0 für gerades n; $f(x)$ hat kein Extremum in x_0 für n ungerade □

Bemerkung*:

- *früher*: f kann lokales Extremum in x_0 haben, ohne dort differenzierbar zu sein, z.B. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$
- Satz 7.5.1 gibt (nur) *hinreichendes Kriterium* für lokale Extrema an, z.B.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{Bem. nach Lemma 7.4.4}]{} f^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

  $\curvearrowright$ Satz 7.5.1 nicht anwendbar, aber f hat lokales Minimum in $x_0 = 0$

- Sei $f'(x_0) = 0$,
  - $f''(x_0) > 0 \curvearrowright f$ hat in x_0 ein lokales Minimum
  - $f''(x_0) < 0 \curvearrowright f$ hat in x_0 ein lokales Maximum
  - $f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0 \curvearrowright f$ hat in x_0 kein lokales Extremum
  - $f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = 0 \ \ldots$

- Krümmungsverhalten: konvexe/konkave Funktionen, Wendepunkte

Definition 7.5.2 *Sei f mit $D(f)$ gegeben.*

(i) *f heißt auf $(a, b) \subset D(f)$* konvex, *falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

f heißt streng konvex, *falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

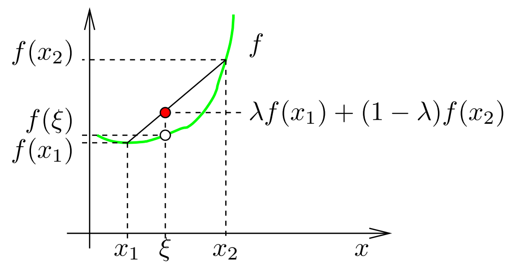
(ii) *f heißt auf $(a, b) \subset D(f)$* konkav, *falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

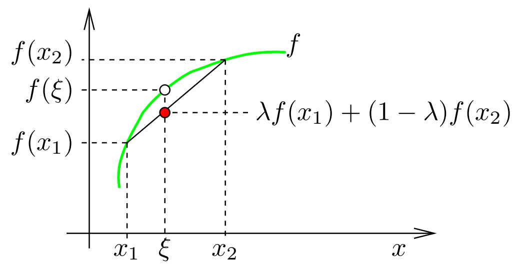
f heißt streng konkav, *falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Bemerkung*: seien $\lambda \in (0, 1)$, $a < x_1 < x_2 < b \curvearrowright \xi = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in (a, b)$



f konvex $\iff f(\xi) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$



f konkav $\iff f(\xi) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

Beispiele : **(a)** $f(x) = \alpha x + \beta \curvearrowright f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ für alle $\lambda \in (0,1)$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \curvearrowright f$ konvex und konkav auf $\mathbb{R}$ (aber nirgends *streng* konvex/konkav)

(b) $f(x) = x^2$ streng konvex auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \lambda(x_1^2 - x_2^2) + x_2^2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2\\ &= \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 > 0\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ streng konkav auf $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}&\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\\ &\qquad = \lambda\sqrt{x} + (1-\lambda)\sqrt{x_2} - \sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}\\ &\qquad = \frac{-\lambda(1-\lambda)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{\lambda\sqrt{x} + (1-\lambda)\sqrt{x_2} + \sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}} < 0\end{aligned}$$

Satz 7.5.3 (Konvexitätskriterium)
Sei f in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann ist f in (a,b) genau dann konvex bzw. konkav, wenn f' monoton wächst bzw. fällt in (a,b).

Beweis : „$\Longrightarrow$“ : sei f konvex, $a < x_1 < x_2 < b$, sei $x \in (x_1, x_2) \curvearrowright \exists\, \lambda \in (0,1):\ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$
$\curvearrowright x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1), \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$

$$\curvearrowright f(x) - f(x_1) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x_1)) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \iff \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\curvearrowright f'(x_1) = \lim_{x \downarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\curvearrowright f(x_2) - f(x) \geq \lambda(f(x_2) - f(x_1)) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x) \iff \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\curvearrowright \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lim_{x \uparrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2)$$

$$\curvearrowright f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \quad \text{für } x_1 < x_2 \quad \curvearrowright \quad f' \text{ monoton wachsend}$$

„$\Longleftarrow$“ : seien $x_1 < x_2$ beliebig, f' differenzierbar, $\lambda \in (0,1) \curvearrowright$ setzen $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in (x_1, x_2)$

$$\xRightarrow[\text{MWS, Satz 7.3.4}]{} \exists\, \xi_1 \in (x_1, x),\ \xi_2 \in (x, x_2):\ f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$f' \text{ monoton wachsend} \xRightarrow[\xi_1 < \xi_2]{} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

wegen $\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \curvearrowright 1 - \lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$\curvearrowright \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \iff f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \qquad \square$$

Folgerung 7.5.4 *Sei f in $[a,b]$ stetig und in (a,b) zweimal differenzierbar.*

(i) *f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für $x \in (a,b)$ gilt; f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ für $x \in (a,b)$ gilt.*

(ii) *f ist konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ für $x \in (a,b)$ gilt; f ist streng konkav, wenn $f''(x) < 0$ für $x \in (a,b)$ gilt.*

Beispiel : **(a)** $f(x) = \alpha x + \beta \curvearrowright f''x) \equiv 0 \curvearrowright f(x) = \alpha x + \beta$ konvex & konkav auf $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = x^2 \curvearrowright f''(x) \equiv 2 > 0 \curvearrowright f(x) = x^2$ streng konvex auf $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \sqrt{x} \curvearrowright f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}} < 0 \curvearrowright f(x) = \sqrt{x}$ streng konkav auf $\mathbb{R}_+$

(d) $f(x) = e^x \curvearrowright f''(x) = e^x > 0 \curvearrowright f(x) = e^x$ streng konvex auf $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = \ln x \curvearrowright f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \curvearrowright f(x) = \ln x$ streng konkav auf $\mathbb{R}_+$

Definition 7.5.5 *Sei f eine stetige Funktion mit $D(f)$. Wenn ein Punkt $x_0 \in D(f)$ und Intervalle $(\alpha, x_0) \subset D(f)$ und $(x_0, \beta) \subset D(f)$ existieren, so dass eine der beiden Bedingungen*

- *f ist in (α, x_0) konvex und in (x_0, β) konkav,*
- *f ist in (α, x_0) konkav und in (x_0, β) konvex,*

erfüllt ist, so heißt x_0 Wendepunkt *von f.*

Bemerkung*:

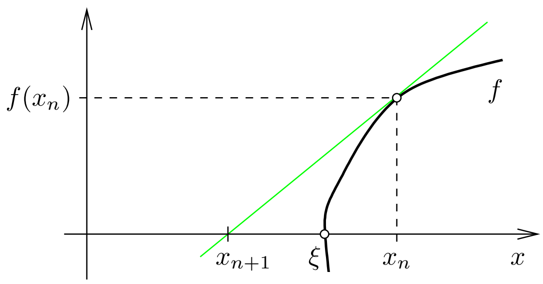
- f muss in x_0 nicht differenzierbar sein, z.B. ist $f(x) = \begin{Bmatrix} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{Bmatrix}$ nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, hat aber dort Wendepunkt
- sei f in (a, b) zweimal stetig differenzierbar, x_0 Wendepunkt $\xRightarrow[\text{Folg. 7.5.4}]{} f''(x_0) = 0$
- f differenzierbar $\xRightarrow[\text{Satz 7.5.3}]{} f'$ hat im Wendepunkt x_0 ein lokales Extremum
- f bei x_0 n-mal stetig differenzierbar, $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $\xRightarrow[\text{Satz 7.5.1}]{} f$ hat in x_0 einen Wendepunkt, falls n ungerade ist, sonst nicht

- Nullstellen bestimmen, z.B. mittels *Newton*[27] -Verfahren: seien f stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ in $[a, b]$,

$$x_1 \in [a, b], \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

falls $\alpha = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| \dfrac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$ gilt $\curvearrowright$

$\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ist einzige Nullstelle von f in $[a, b]$



- Symmetrieeigenschaften
  - Der Graph einer Funktion f heißt *achsensymmetrisch* zur Gerade $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$f(2a - x) = f(x), \quad x \in D(f).$$

Für $a = 0$, d.h. $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt f *gerade* Funktion.

  - Der Graph einer Funktion f heißt *punktsymmetrisch* zum Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, wenn gilt

$$f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x), \quad x \in D(f).$$

Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$, d.h. $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$, heißt f *ungerade* Funktion.

[27] Sir Isaac Newton (* 4.1.1643 Woolsthorpe/England † 31.3.1727 London)

7.6 Die Stammfunktion

Definition 7.6.1 *Eine Funktion* $F(x)$, $D(F) = I$, *heißt* Stammfunktion *zu einer auf* $D(f)$ *gegebenen Funktion* $f(x)$, *falls* $F(x)$ *differenzierbar ist und* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in D(f) = I$ *gilt.*

Satz 7.6.2 *Die Stammfunktionen zu einer auf* $D(f)$ *gegebenen Funktion* $f(x)$ *unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.*

Beweis : Seien $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen zu $f(x)$, $D(F_1) = D(F_2) = D(f)$,

$$\Longrightarrow \quad (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0,\ x \in D(F_1) = D(F_2) \xRightarrow[\text{Folg. 7.3.5(i)}]{} (F_1 - F_2)(x) \equiv c \qquad \square$$

<u>*Schreibweise*</u> : $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ oder $F(x) = c + \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Bemerkung*: 'Integrationstechnik' : Liste von *Grundintegralen*, diverse (mehr oder weniger trickreiche) Methoden (*partielle Integration, Substitutionsregeln incl. Standardsubstitutionen, Partialbruchzerlegung, . . .*) $\Longrightarrow$ <u>Ziel</u> : Stammfunktionen zu möglichst vielen Funktionenklassen finden

<u>*Grundintegrale*</u> :

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad , \quad \begin{cases} x > 0 & , \ \alpha \neq -1 \\ x \neq 0 & , \ \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq -1 \\ x \text{ beliebig}, & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \quad , \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad , \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| \quad , \quad |x| > 1$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\,a^x \quad , \quad a > 0, \qquad \textit{speziell}: \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x \quad , \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x \quad , \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung*: Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden können, z.B.

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \dots$$

Satz 7.6.3 (Partielle Integration)
Seien $f(x)$ *und* $g(x)$ *auf* I *differenzierbar. Dann gilt auf* I*:*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis : $f(x)g(x)+c \;=\; \int \underbrace{(fg)'(x)}_{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}\mathrm{d}x \;=\; \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ □

Beispiele :

(1) $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{e^x}_{v}\,\mathrm{d}x \;=\; xe^x - e^x + c \;=\; (x-1)e^x + c$

(2) $\int \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{1}_{v'}\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{x}_{v}\,\mathrm{d}x \;=\; x\ln x - x + c$

(3) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'}\underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\mathrm{d}x$

$\;=\; -\sin x\;\cos x + \int \underbrace{(1-\sin^2 x)}_{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\sin x\;\cos x + x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

$\curvearrowright\; 2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; x - \sin x\;\cos x + c \iff \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\;\cos x + c'$

Bemerkung*: Anwendung: Integrale der Form $\int p(x)e^{bx}\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)\ln x\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(ax)\,e^{bx}\,\mathrm{d}x$, $\int \cos(ax)\,e^{bx}\,\mathrm{d}x$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, p Polynom

Satz 7.6.4 (Variablensubstitution)
Seien $\varphi(t)$ *stetig auf* I_φ *mit der Stammfunktion* $\Phi(t) = \int \varphi(t)\,\mathrm{d}t + c$*, und* $t = \psi(x)$ *stetig differenzierbar auf* I_ψ *, wobei zusätzlich* $W(\psi) \subset I_\varphi$ *gelte. Dann ist*

$$\int \varphi(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \Phi(\psi(x)) + c\,.$$

Beweis : $\frac{\mathrm{d}\Phi(\psi(x))}{\mathrm{d}x} \underset{\text{Satz 7.2.4}}{=} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t)\Big|_{t=\psi(x)} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; \varphi(\psi(x))\,\psi'(x)$ □

<u>*Spezialfälle*</u> :

$\int \varphi(ax+b)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}\,\Phi(ax+b) \qquad t = \psi(x) = ax+b,\; a \neq 0$

$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln|\psi(x)| + c \qquad \varphi(t) = \frac{1}{t},\quad \Phi(t) = \ln|t|$

$\int \psi(x)\psi'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}[\psi(x)]^2 + c \qquad \varphi(t) = t,\quad \Phi(t) = \frac{1}{2}t^2$

Beispiele :

- $\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x \underset{t\,=\,\psi(x)\,=\,x^3}{=} \frac{1}{3}\int e^t\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{3}\,e^t + c \underset{t\,=\,x^3}{=} \frac{1}{3}\,e^{x^3} + c$
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \qquad (\psi(x) = \cos x)$

Integration rationaler Funktionen

Grundintegrale und Sätze 7.6.3, 7.6.4 $\Longrightarrow$ bisher bekannt :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a|\,, & k=1 \\ -\dfrac{1}{k-1}\,\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}, & k\geq 2 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R},\quad k\in\mathbb{N}$$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln\left|x^2+px+q\right|\,, & k=1 \\ -\dfrac{1}{k-1}\,\dfrac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}, & k\geq 2 \end{cases} \qquad p,\ q\in\mathbb{R}$$

da $\boxed{4q>p^2} \curvearrowright x^2+px+q>0$ (komplexe Nullstelle)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{q-\frac{p^2}{4}}+1} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^k} = I_k \quad \curvearrowright \quad I_{k+1} = \frac{1}{2k}\,\frac{x}{\left(x^2+1\right)^k} + \frac{2k-1}{2k}\,I_k \quad , \quad k\geq 2$$

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^k} \underset{\text{part. Int.}}{=} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^k} + 2k\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^k} + 2k\underbrace{\int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}x}_{I_k} - 2k\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}}_{I_{k+1}}$$

analog:

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \frac{1}{(k-1)(4q-p^2)}\,\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}\,I_{k-1}, \quad k\geq 2$$

Ziel: Zerlegung von $r(x)$ in Ausdrücke der Form $\dfrac{A}{(x-a)^k}, \dfrac{B(2x+p)}{(x+px+q)^k}, \dfrac{C}{(x^2+px+q)^k}$ $\dashrightarrow$ Integration

Satz 7.6.5 (Partialbruchzerlegung)
Seien $r_1(x)$ *ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad* $n\in\mathbb{N}$, *und*

$$r_2(x) = a_m\,(x-\xi_1)^{\nu_1}\cdots(x-\xi_k)^{\nu_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\alpha_1}\cdots\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\alpha_r}$$

ein reelles Polynom vom Grad $m>n$, *wobei* $\nu_1+\cdots+\nu_k+2\,(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)=m$ *gilt. Dann existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen* $A_{1,1},\ \ldots,\ A_{1,\nu_1},\ \ldots,\ A_{k,1},\ \ldots,\ A_{k,\nu_k},\ B_{1,1},\ C_{1,1},\ \ldots,\ B_{1,\alpha_1},\ C_{1,\alpha_1},\ \ldots,$ $B_{r,1},\ C_{r,1},\ \ldots,\ B_{r,\alpha_r},\ C_{r,\alpha_r}$, *so dass gilt*

$$\begin{aligned} r(x) := \frac{r_1(x)}{r_2(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-\xi_1}+\cdots+\frac{A_{1,\nu_1}}{(x-\xi_1)^{\nu_1}}+\cdots+\frac{A_{k,1}}{x-\xi_k}+\cdots+\frac{A_{k,\nu_k}}{(x-\xi_k)^{\nu_k}} \\ &+ \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{B_{1,\alpha_1}x+C_{1,\alpha_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\alpha_1}} \\ &\ \vdots \\ &+ \frac{B_{r,1}x+C_{r,1}}{x^2+p_rx+q_r}+\cdots+\frac{B_{r,\alpha_r}x+C_{r,\alpha_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{\alpha_r}}\ . \end{aligned}$$

Beweis : Linearfaktorenzerlegung aus Satz 6.1.6, konstruktiver Beweis möglich □

$\boxed{\textbf{Beispiele}}$: (1) $\dfrac{x+1}{x^4-x^3+x^2-x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\Longrightarrow \int \frac{x+1}{x^4-x^3+x^2-x}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| + \ln|x-1| - \arctan x + c, \; x \neq 0, \; x \neq 1$$

(2) $\dfrac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} \\
&\underset{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{=} \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$$

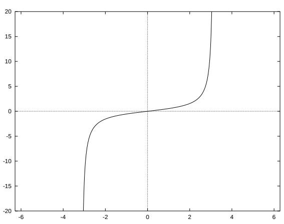
$$= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Integration von $R(\cos x, \sin x)$

$$R(\cos x,\sin x) = \frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{n} a_{k\ell}\,\cos^k x\,\sin^\ell x}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{m=0}^{n} b_{jm}\,\cos^j x\,\sin^m x}, \quad a_{k\ell},\; b_{jm} \in \mathbb{R}$$

$\cos x$, $\sin x$ sind $2\pi-$ periodisch $\Longrightarrow$ ausreichend, $R(\cos x, \sin x)$ für $-\pi < x < \pi$ und $Q(\cos x, \sin x) \neq 0$ zu betrachten

Variablensubstitution : $\boxed{t = \tan\dfrac{x}{2}}$



$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned}
\sin 2y &= 2\sin y\cos y = 2\tan y\cdot\cos^2 y = \frac{2\tan y}{1+\tan^2 y} \\
\cos 2y &= \cos^2 y - \sin^2 y = \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}
\end{aligned}$$

$$\underset{x=2y}{\Longrightarrow} \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$\curvearrowright$ weiter wie bei der Integration rationaler Funktionen, Rücksubstitution

Integration von $R(\cos nx, \cos(n-1)x, \ldots, \cos x, \sin nx, \sin(n-1)x, \ldots, \sin x), \quad n \in \mathbb{N}$

Zurückführung auf die Form $\widetilde{R}(\cos x, \sin x)$ (*Moivresche Formel* ...), dann weiter wie oben

Beispiel : $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1+t)^2}{2t}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} + 2 + t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2 + c$$

Integration von $R(e^x)$, $R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$, $R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$

- $R(e^x)$, Variablensubstitution : $\boxed{t=e^x} \implies \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^x = t \implies \displaystyle\int R(e^x)\,\mathrm{d}x = \int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$

- $R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$, $|x|\ge 1$, o.B.d.A. $x \ge 1$, Variablensubstitution: $\boxed{x = \cosh t = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}}$ $t \ge 0$

  $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sinh t,\quad t = (\cosh)^{-1}(x) =: \mathrm{Arcosh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \ge 1$:

  $$x = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \iff e^t + e^{-t} - 2x = 0 \iff e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$$

  $$\implies e^t = x \pm \sqrt{x^2-1} \underset{\substack{e^t>1\\x>1}}{\implies} e^t = x + \sqrt{x^2-1} \implies t = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x \ge 1$$

  $$x^2 - 1 = \sinh^2 t \underset{t\ge 0}{\implies} \sqrt{x^2-1} = \sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

  $$\implies \int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t$$

- $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) \implies |x| \ge a,\ a > 0$, Variablensubstitution : $\boxed{x = a\cosh t}$

- $R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, Variablensubstitution : $\boxed{x = \sinh t = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}}$

  $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cosh t,\quad t = (\sinh)^{-1}(x) =: \mathrm{Arsinh}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$:

  $$x = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \iff e^t - e^{-t} - 2x = 0 \iff e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$$

  $$\implies e^t = x \pm \sqrt{x^2+1} \underset{e^t>0}{\implies} e^t = x + \sqrt{x^2+1} \implies t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

  $$x^2 + 1 = \cosh^2 t \underset{\cosh t>0}{\implies} \sqrt{x^2+1} = \cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

  $$\implies \int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}, \frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t$$

- $R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, Variablensubstitution : $\boxed{x = a\sinh t}$

Beispiel : $$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x\,=\,2\cosh t}{=} \int \frac{2\sinh t}{4\cosh^2 t}\,\overbrace{2\sinh t\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}x} \underset{t\,=\,\ln\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\right)}{=} \int \frac{\overbrace{\cosh^2 t-1}^{\sinh^2 t}}{\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= t - \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t}}_{\tanh t} = \underbrace{\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}_{t} - \underbrace{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}_{\frac{\sinh t}{\cosh t}} + c$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right) - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C$$

Integration von $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$

$R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $|x|\le a,\ a>0$ Variablensubstitution: $\boxed{x=a\sin t\ ,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a\cos t$

$$\Longrightarrow \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(a\sin t, a\cos t\right) a\cos t\,\mathrm{d}t$$

Beispiel : $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ |x|\le\sqrt{2}$: $\quad x=\sqrt{2}\sin t \curvearrowright \sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t,\ |t|<\frac{\pi}{2},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}\cos t$

$$\curvearrowright \int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{2}\sin t+1}{\sqrt{2}\cos t}\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t = \int (\sqrt{2}\sin t+1)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\sqrt{2}\cos t + t + c = -\sqrt{2-x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Integration von $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

$n\in\mathbb{N},\ \frac{ax+b}{cx+d}\ge 0,\quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)} \Longrightarrow ad-bc\ne 0$

Variablensubstitution : $\boxed{t^n=\frac{ax+b}{cx+d}} \Longrightarrow x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\ ,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=n(ad-bc)\frac{t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$

$$\Longrightarrow \int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x = n(ad-bc)\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,\mathrm{d}t$$

Beispiele :

- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}} \underset{\substack{t\,=\,\sqrt{1+x}\\ \mathrm{d}x\,=\,2t\,\mathrm{d}t}}{=} \int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{1+t-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
  $$= 2t-2\ln(1+t)+c = 2\sqrt{1+x}-2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)+c$$
- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} \underset{\substack{t\,=\,\sqrt{x}\\ \mathrm{d}x\,=\,2t\,\mathrm{d}t}}{=} 2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan\sqrt{x} + c$$

8 Integration im $\mathbb{R}^1$

8.1 Das Riemannsche Integral

Bezeichnungen

Sei $y = f(x)$, $D(f) = [a,b]$, eine beschränkte Funktion.

$\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}\ ,\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$	**Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$
$\mathfrak{I}_j = [x_{j-1}, x_j]\ ,\quad j = 1,\dots,n$	j-tes **Teilintervall**
$\lvert\mathfrak{I}_j\rvert = x_j - x_{j-1}\ ,\quad j = 1,\dots,n$	**Länge** des j-ten Teilintervalls
$\lvert\mathfrak{Z}\rvert = \max\{\lvert\mathfrak{I}_j\rvert\,,\ j = 1,\dots,n\}$	**Feinheit** der Zerlegung $\mathfrak{Z}$
$m_j = \inf\{f(x)\ :\ x \in \mathfrak{I}_j\}\ ,\quad j = 1,\dots,n$	
$M_j = \sup\{f(x)\ :\ x \in \mathfrak{I}_j\}\ ,\quad j = 1,\dots,n$	
$\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} = \sum_{j=1}^{n} m_j\ \lvert\mathfrak{I}_j\rvert$	**Untersumme** der Funktion $f(x)$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}$
$\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} = \sum_{j=1}^{n} M_j\ \lvert\mathfrak{I}_j\rvert$	**Obersumme** der Funktion $f(x)$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}$
$\mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}} = \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\ \lvert\mathfrak{I}_j\rvert\ ,\quad x_j^* \in \mathfrak{I}_j\ ,\quad j = 1,\dots,n$	**Zwischensumme** der Funktion $f(x)$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}$

Bemerkung*: $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ heißen gelegentlich auch Darboux[28]sche Unter- / Obersummen

Folgerungen :

1. $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$
2. Ist $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2$ ($\mathfrak{Z}_2$ ist 'feiner' als $\mathfrak{Z}_1$), so gilt $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_1} \le \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_2}$ und $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_2} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_1}$
3. Für beliebige Zerlegungen $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ von $[a,b]$ gilt stets $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'}$: $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}\cup\mathfrak{Z}'} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}\cup\mathfrak{Z}'} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'}$
4. Es existieren

$$\mathcal{U} := \sup\Big\{\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}\ :\ \mathfrak{Z}\ \text{Zerlegung von}\ [a,b]\Big\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O} := \inf\Big\{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}\ :\ \mathfrak{Z}\ \text{Zerlegung von}\ [a,b]\Big\},$$

es gilt $\mathcal{U} \le \mathcal{O}$.

denn: $|f(x)| \le M \curvearrowright -M(b-a) \le \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'} \le M(b-a) \curvearrowright \{\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}\}_{\mathfrak{Z}}$ nach oben beschränkt, $\{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}\}_{\mathfrak{Z}}$ nach unten beschränkt, nicht-leer $\xRightarrow[\text{Axiom V}]{} \mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ existieren

Ann.: $\mathcal{U} > \mathcal{O} \iff \mathcal{U} - \mathcal{O} =: \varepsilon > 0 \implies \exists\, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'\ :\ \mathcal{O} + \frac{\varepsilon}{3} > \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'}\ ,\quad \mathcal{U} - \frac{\varepsilon}{3} < \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}$

$$\implies \mathcal{U} - \frac{\varepsilon}{3} < \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'} < \mathcal{O} + \frac{\varepsilon}{3} \iff \mathcal{U} - \frac{2}{3}\varepsilon < \mathcal{O} = \mathcal{U} - \varepsilon \implies \text{Widerspruch}$$

Definition 8.1.1 *Sei $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, beschränkt. f heißt* (Riemann-)integrierbar auf (über) $[a,b]$, *falls $\mathcal{U} = \mathcal{O}$ gilt. Dann heißt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{U} = \mathcal{O}$$

bestimmtes Integral.

[28] Jean Gaston Darboux (* 14.8.1842 Nîmes † 23.2.1917 Paris)

Bemerkung*:

- $\mathcal{U} = \underline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Darbouxsches) Unterintegral, $\mathcal{O} = \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Darbouxsches) Oberintegral

  andere Schreibweise : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x$

- Es existieren beschränkte Funktionen, die nicht integrierbar sind; z.B. die *Dirichlet-Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad , \quad D(f) = [0,1]$$

$\curvearrowright$ $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \equiv -1$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \equiv 1$ für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ $\curvearrowright$ $\mathcal{U} = -1 \neq 1 = \mathcal{O}$.

<u>*Ziel*</u> : Beschreibung des Integrals mit Grenzwerten anstelle von $\sup$, $\inf$

Satz 8.1.2 *Sei* $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von Zerlegungen des Intervalls* $[a,b]$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$. *Dann gilt für eine beschränkte Funktion* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *stets* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{U}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{O}$.

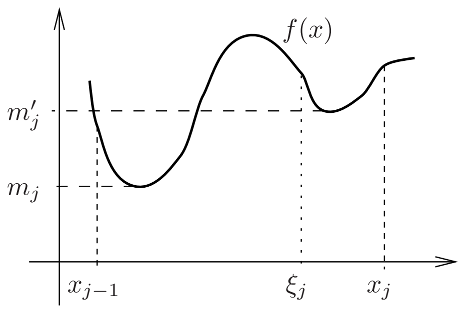
Beweis : <u>z.z.</u> : $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 \;:\; \underbrace{|\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}|}_{\mathcal{U} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}} < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \mathfrak{Z}_\varepsilon \;:\; \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (da $\mathcal{U} = \sup\, \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}$)

$\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ geg., $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0 \quad \Longrightarrow$ neue Zerlegung $\{\mathfrak{Z}_\varepsilon \cup \mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon} \leq \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon \cup \mathfrak{Z}_n} \leq \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon \cup \mathfrak{Z}_n} \leq \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

<u>n.z.z.</u> : $\exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon \cup \mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$



Sei $\mathfrak{I}_j$ beliebiges Intervall einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$, in das ein weiterer Teilpunkt ξ_j eingefügt wird.

Beitrag des Intervalls $\mathfrak{I}_j = [x_{j-1}, x_j]$ in $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}$:

$$m_j\, |\mathfrak{I}_j| \;=\; m_j\, (x_j - x_{j-1})$$

Beitrag des Intervalls $\mathfrak{I}_j = [x_{j-1}, \xi_j] \cup [\xi_j, x_j]$ in $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z} \cup \{\xi_j\}}$:

$$m_j'\, (x_j - \xi_j) + m_j\, (\xi_j - x_{j-1})$$

Sei $|f(x)| \leq M$ auf $[a,b] \quad \Longrightarrow$ maximal mögliche Differenz (des Beitrages von $\mathfrak{I}_j$):

$$0 \leq m_j'\, (x_j - \xi_j) + m_j\, (\xi_j - x_{j-1}) - m_j\, (x_j - x_{j-1}) \;=\; \underbrace{-m_j}_{\leq M}\, \underbrace{(x_j - \xi_j)}_{\leq |\mathfrak{I}_j|} + \underbrace{m_j'}_{\leq M}\, \underbrace{(x_j - \xi_j)}_{\leq |\mathfrak{I}_j|} \;\leq\; 2M\, |\mathfrak{I}_j|$$

$\mathfrak{Z}_\varepsilon$ besitze L Teilpunkte $\{\xi_1, \ldots, \xi_L\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon \cup \mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} \leq 2ML \max\limits_{\mathfrak{I}_j^{(n)} \in \mathfrak{Z}_n} \left| \mathfrak{I}_j^{(n)} \right| \leq 2ML\, |\mathfrak{Z}_n|$, $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_\varepsilon \cup \mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0 \;:\; \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{U} \qquad \square$$

Folgerung 8.1.3 *Falls eine Folge von Zerlegungen* $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *existiert mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) = 0$, *so ist* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *integrierbar.*

Beispiel : $f(x) = x,\ \ D(f) = [a,b],$ wählen äquidistante Zerlegungen

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{ x_k = a + k\frac{b-a}{n}\ ,\ k = 0,\dots,n \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| = |\mathfrak{Z}_n| = \frac{b-a}{n},\ k = 1,\dots,n$$

$$\curvearrowright \lim_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0,\ m_k^{(n)} = a + (k-1)\frac{b-a}{n},\ M_k^{(n)} = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 1,\dots,n$$

$$\curvearrowright \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(a + (k-1)\frac{b-a}{n} \right) \frac{b-a}{n} = a(b-a) + \left[\frac{b-a}{n}\right]^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right)$$

$$= a(b-a) + (b-a)^2 \frac{n(n-1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{b^2-a^2}{2} = \mathcal{U}$$

analog: $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)} \left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| = \cdots = a(b-a) + (b-a)^2 \dfrac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{b^2-a^2}{2} = \mathcal{O}$

$$\text{(bzw. } \lim_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^2}{n} = 0)$$

$\Longrightarrow \quad f(x) = x$ integrierbar auf $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \mathcal{U} = \mathcal{O} = \frac{b^2-a^2}{2}$

Ist genaue Kenntnis von $m_k = \inf\limits_{x\in\mathfrak{I}_k} f(x)$ *und* $M_k = \sup\limits_{x\in\mathfrak{I}_k} f(x)$ *nötig ?*

Satz 8.1.4 *Sei* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *beschränkt.*

(i) *Ist* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *integrierbar, so gilt für alle Folgen von Zerlegungen* $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

unabhängig von der Auswahl der Zwischenpunkte x_j^*.

(ii) *Für alle Folgen von Zerlegungen* $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ *gelte* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n} = I$ *unabhängig von der Auswahl der Zwischenpunkte* x_j^*. *Dann ist* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *integrierbar, es gilt*

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweis : zu (i) : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} \le \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{O}$,

$f(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar $\Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{U} = \mathcal{O} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

zu (ii) : betrachten $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$, wählen spezielle $x_j^* : \xi_j^{(n)}, \eta_j^{(n)} \in \mathfrak{I}_j^{(n)}$ 'nahe' den Infima und Suprema, d.h.

$$f\left(\xi_j^{(n)}\right) - m_j^{(n)} < \frac{1}{n(b-a)}\ , \qquad M_j^{(n)} - f\left(\eta_j^{(n)}\right) < \frac{1}{n(b-a)}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(\xi)} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{j=1}^{L_n} \underbrace{\left[f\left(\xi_j^{(n)}\right) - m_j^{(n)} \right]}_{<\frac{1}{n(b-a)}} \left|\mathfrak{I}_j^{(n)}\right| < \frac{1}{n(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{L_n} \left|\mathfrak{I}_j^{(n)}\right|}_{=b-a} = \frac{1}{n},$$

analog $\quad \ldots \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{Z}^{(\eta)}_{\mathfrak{Z}_n} < \dfrac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} + \underbrace{\mathcal{Z}^{(\xi)}_{\mathfrak{Z}_n}}_{\to I} - \underbrace{\mathcal{Z}^{(\eta)}_{\mathfrak{Z}_n}}_{\to I} < \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \lim_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) + I - I \le 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) = 0 \xRightarrow[\text{Folg. 8.1.3}]{} f(x) \text{ auf } [a,b] \text{ integrierbar} \qquad \Box$$

Bemerkung*: Ändert man die Werte einer auf $[a,b]$ integrierbaren Funktion in endlich vielen Punkten ab, so bleiben Integrierbarkeit und Wert des Integrals erhalten.

8.2 Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 8.2.1 **(i)** *Ist* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *beschränkt und monoton, so ist* $f(x)$ *integrierbar auf* $[a,b]$.

(ii) *Ist* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *stetig, so ist* $f(x)$ *integrierbar auf* $[a,b]$.

B e w e i s : zu (i) : nach Satz 8.1.2 ausreichend, (spezielle) Zerlegungsfolge $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ zu betrachten, wählen äquidistante Zerlegungen (*siehe Beispiel*)

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{ x_k = a + k\frac{b-a}{n} \ , \ k = 0, \ldots, n \right\} \ , \quad \left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| = |\mathfrak{Z}_n| = \frac{b-a}{n}, \ k = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$$

o.B.d.A. $f(x)$ monoton wachsend $\quad \Longrightarrow \quad m_k = f(x_{k-1}),\ M_k = f(x_k),\ k = 1, \ldots, n$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}, \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k \left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) = 0$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 8.1.2}]{} f(x) \text{ integrierbar auf } [a,b]$$

zu (ii) : wesentlich : *gleichmäßige Stetigkeit* !

$$\Big[\ f(x) \text{ stetig auf } [a,b] \xRightarrow[\text{Satz 4.2.5}]{} f(x) \text{ gleichmäßig stetig auf } [a,b]\ \Big]$$

Sei $\mathfrak{Z}_n$ wieder eine äquidistante Zerlegung,

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{ x_k = a + k\frac{b-a}{n} \ , \ k = 0, \ldots, n \right\} \ , \quad \left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| = |\mathfrak{Z}_n| = \frac{b-a}{n}, \ k = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} \left(M^{(n)}_k - m^{(n)}_k\right) \frac{b-a}{n} \le (b-a) \max_{k=1,\ldots,n} \left(M^{(n)}_k - m^{(n)}_k\right)$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\xRightarrow[f \text{ glm. stetig}]{} \exists\, \delta > 0 \ : \ \left(M^{(n)}_k - m^{(n)}_k\right) < \varepsilon \quad$ für $\left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| < \delta$

andererseits ist $\left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| = |\mathfrak{Z}_n|,\ n \in \mathbb{N},\ k = 1, \ldots, n \xRightarrow[\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0]{} \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \ge n_0 : \left|\mathfrak{I}^{(n)}_k\right| < \delta$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \ge n_0 \ : \ \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} < \varepsilon(b-a) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) = 0$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 8.1.2}]{} f(x) \text{ integrierbar auf } [a,b] \qquad \Box$$

Abschwächung der Voraussetzung möglich: *stückweise* monoton bzw. *stückweise* stetig ausreichend, d.h. es existiert eine endliche Zerlegung $\mathfrak{Z}^* = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ von $[a, b]$, so dass $f(x)$ auf (ξ_{k-1}, ξ_k) monoton bzw. stetig ist, und $\lim\limits_{x \downarrow \xi_{k-1}} f(x) = \alpha_{k-1}$, $\lim\limits_{x \uparrow \xi_k} f(x) = \beta_k$, $k = 1, \ldots, n$, existieren und endlich sind.

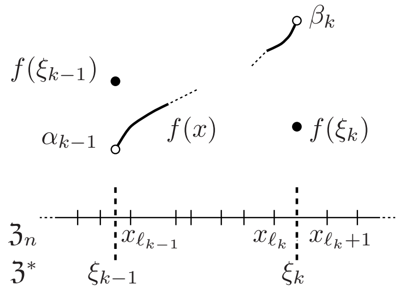
Folgerung 8.2.2 *Sei $f(x)$ auf $D(f) = [a, b]$ beschränkt und stückweise stetig oder monoton. Dann ist $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar.*

B e w e i s : Sei $f(x)$ wie oben gegeben, d.h. es gebe eine endliche Zerlegung $\mathfrak{Z}^* = \{\xi_0,\ \xi_1, \ldots, \xi_m\}$, so dass $f(x)$ auf (ξ_{k-1}, ξ_k) monoton / stetig ist. Wir setzen

$$h_k(x) := \begin{cases} \alpha_{k-1} & , \quad x = \xi_{k-1} \\ f(x) & , \quad \xi_{k-1} < x < \xi_k \\ \beta_k & , \quad x = \xi_k \end{cases} \quad , \quad k = 1, \ldots, m, \quad \Longrightarrow \quad h_k(x) \quad \text{stetig auf } [\xi_{k-1}, \xi_k] \ .$$

Sei $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Zerlegungsfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$. Dann gilt für ihre Verfeinerung

$$\mathfrak{Z}'_n = \mathfrak{Z}_n \ \cup \ \{\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\} \ , \quad n \in \mathbb{N},$$



analog zum Beweis von Satz 8.1.2

$$0 \ \le \ \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n} - \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}_n} \ \le \ 2Mm\,|\mathfrak{Z}_n|$$

und

$$0 \ \le \ \mathcal{O}^{(f)}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{O}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n} \ \le \ 2Mm\,|\mathfrak{Z}_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $|f(x)| \ \le \ M$ auf $[a, b]$ gelte.

Sei $\mathfrak{J}_k := [\xi_{k-1}, \xi_k]$; wir betrachten zunächst $\mathcal{U}^{(h_k)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}}$, $\mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}}$.

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}^{(h_k)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \quad = \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} \underbrace{\inf_{x_{j-1}\le x\le x_j} h_k(x)}_{=\inf f(x)} (x_j - x_{j-1})$$

$$+ \underbrace{\inf_{\xi_{k-1}\le x\le x_{\ell_{k-1}}} h_k(x)}_{\le \inf f(x) + |h_k(\xi_{k-1}) - f(\xi_{k-1})|} \underbrace{(x_{\ell_{k-1}} - \xi_{k-1})}_{\le |\mathfrak{Z}'_n|} + \underbrace{\inf_{x_{\ell_k}\le x\le \xi_k} h_k(x)}_{\le \inf f(x) + |h_k(\xi_k) - f(\xi_k)|} \underbrace{(\xi_k - x_{\ell_k})}_{\le |\mathfrak{Z}'_n|}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}^{(h_k)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \ \le \ \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \ + \underbrace{|h_k(\xi_{k-1}) - f(\xi_{k-1})|}_{\le 2M} |\mathfrak{Z}'_n| + \underbrace{|h_k(\xi_k) - f(\xi_k)|}_{\le 2M} |\mathfrak{Z}'_n| \ \le \ \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \ + \ 4M\,|\mathfrak{Z}_n|$$

analog : $\mathcal{O}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \ \le \ \mathcal{O}^{(h_k)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \ + \ 4M\,|\mathfrak{Z}_n|$

$$\curvearrowright \ \mathcal{O}^{(f)}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}_n} \ \le \ \mathcal{O}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n} - \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n} \ + \ 4Mm\,|\mathfrak{Z}_n| \ \le \ \sum_{k=1}^{m} \left(\mathcal{O}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} - \mathcal{U}^{(f)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \right) \ + \ 4Mm\,|\mathfrak{Z}_n|$$

$$\le \ \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \left(\mathcal{O}^{(h_k)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} - \mathcal{U}^{(h_k)}_{\mathfrak{Z}'_n|_{\mathfrak{J}_k}} \right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \ 12Mm\ \underbrace{|\mathfrak{Z}_n|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

nach Satz 8.2.1(ii), da h_k stetig auf $\mathfrak{J}_k$, $k = 1, \ldots, m$, und $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$. $\square$

8.3 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 8.3.1 *Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien auf $D(f) = D(g) = [a, b]$ integrierbar.*

(i) *Für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist auch $(\lambda f + \mu g)(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, es gilt*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) *Es gelte $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis: zu (i): Nach Satz 8.1.4 genügt es, beliebige Zwischensummen für Folgen von Zerlegungen $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ zu betrachten,

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(\lambda f+\mu g)} = \sum_{k=1}^{L_n} (\lambda f + \mu g)(x_k^*)\,\left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| = \lambda \sum_{k=1}^{L_n} f(x_k^*)\,\left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| + \mu \sum_{k=1}^{L_n} g(x_k^*)\,\left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| = \lambda\,\mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(f)} + \mu\,\mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(g)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(\lambda f+\mu g)} = \lambda \lim_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(f)} + \mu \lim_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n}^{(g)} \underset{\text{Satz 8.1.4(i)}}{=} \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ beliebig wählbar mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0 \xRightarrow[\text{Satz 8.1.4(ii)}]{} \displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

<u>zu (ii)</u>: $g(x) - f(x) \ge 0 \xRightarrow[\text{Konstruktion}]{} \displaystyle\int_a^b (g - f)(x)\,\mathrm{d}x \ge 0 \underset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ □

Satz 8.3.2 *Sei $f(x)$ auf $D(f) = [a, b]$ integrierbar.*

(i) *Für jedes $c \in (a, b)$ ist $f(x)$ auf $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) *Dann ist auch $|f(x)|$ auf $D(f) = [a, b]$ integrierbar, wobei gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis: <u>zu (i)</u>: Sei $\varepsilon > 0$, $f(x)$ auf $D(f) = [a, b]$ integrierbar

$$\Longrightarrow \exists\, \mathfrak{Z}^{[a,b]} : \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}^{[a,c]}} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}^{[a,c]}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}^{[a,c]} \cup \mathfrak{Z}^{[c,b]}} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}^{[a,c]} \cup \mathfrak{Z}^{[c,b]}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}^{[a,b]}} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}^{[a,b]}} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, analog für $\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

außerdem gilt für alle Zwischensummen und Zerlegungen $\mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}^{[a,b]}} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}^{[a,c]}} + \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}^{[c,b]}} \xRightarrow[\text{Satz 8.1.4}]{}$ (i) zu (ii): Sei $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$, für alle $\xi,\ \eta \in \mathfrak{I}_k^{(n)}$ gilt

$$|f(\xi)| - |f(\eta)| \ \leq\ |f(\xi) - f(\eta)| \ \leq\ M_k^{(n)} - m_k^{(n)}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow\ \exists\ \xi,\ \eta \in \mathfrak{I}_k^{(n)} \ :\ \sup\limits_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| < |f(\xi)| + \varepsilon\ ,\quad \inf\limits_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| > |f(\eta)| - \varepsilon$

$$\Longrightarrow\ \sup_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| - \inf_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| < |f(\xi)| - |f(\eta)| + 2\varepsilon \leq M_k^{(n)} - m_k^{(n)} + 2\varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

$$\Longrightarrow\ \sup_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| - \inf_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| \ \leq\ M_k^{(n)} - m_k^{(n)}$$

$$\Longrightarrow\ \sum_{k=1}^{L_n} \Big(\sup_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| - \inf_{x\in\mathfrak{I}_k^{(n)}} |f(x)| \Big) \left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right| \ \leq\ \sum_{k=1}^{L_n} \Big(M_k^{(n)} - m_k^{(n)}\Big) \left|\mathfrak{I}_k^{(n)}\right|$$

$$\Longleftrightarrow\ \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n}^{|f|} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}^{|f|} \ \leq\ \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n}^{f} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}^{f} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{da } f(x) \text{ integrierbar} \ \Longrightarrow\ |f(x)| \text{ integrierbar}$$

andererseits ist $-|f(x)| \ \leq\ f(x) \ \leq\ |f(x)|$ für alle $x \in [a,b]$

$$\underset{\text{Satz 8.3.1(ii)}}{\Longrightarrow}\ -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ \leq\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \leq\ \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow\quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \ \leq\ \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Bemerkung*: Die Umkehrung von (ii) ist i.a. nicht richtig: Dirichlet-Funktion nicht integrierbar, aber $f \equiv 1$ integrierbar.

8.4 Hauptsatz der Integralrechnung

Definition 8.4.1 *Eine Funktion* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *heißt* Lipschitz[29]-stetig, *falls ein* $M \geq 0$ *existiert mit*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ \leq\ M\ |x_1 - x_2|$$

für alle $x_1,\ x_2 \in [a,b]$.

Lemma 8.4.2 **(i)** *Jede in* $[a,b]$ *Lipschitz-stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.*

(ii) *Ist* $f(x)$ *in* $[a,b]$ *stetig und in* (a,b) *differenzierbar mit* $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$, *so ist* $f(x)$ *in* $[a,b]$ *Lipschitz-stetig.*

Beweis : zu (i) : klar, $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ für $\varepsilon > 0$

zu (ii) : Mittelwertsatz (Satz 7.3.4) $\Longrightarrow\ \left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| = |f'(\xi)| \ \leq\ \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| =: M \ < \infty$ $\square$

Beispiele :

1. $f(x) = |x|$, $D(f) = [-1,1]$ Lipschitz-stetig, $M = 1$, aber nicht differenzierbar in 0
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = [0,1]$, stetig, differenzierbar in $(0,1)$, aber nicht Lipschitz-stetig

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = |x_1 - x_2|\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}}_{\to\,\infty \text{ für } x_1,x_2\,\downarrow\,0}$$

Bemerkung*: Verallgemeinerung möglich : 'Lip$^{\alpha}$− Bedingung', $0 < \alpha \leq 1$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ \leq\ M\ |x_1 - x_2|^{\alpha}\ , \quad x_1, x_2 \in D(f)$$

So erfüllt z.B. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, die Lip$^{\frac{1}{2}}$− Bedingung

[29] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (* 14.5.1832 Königsberg † 7.10.1903 Bonn)

Satz 8.4.3 **(i)** *Ist* $f(x)$ *integrierbar über* $[a,b]$, *so ist* $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *in* $[a,b]$ *Lipschitz-stetig.*

(ii) *Ist* $f(x)$ *stetig, so ist* $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *in* (a,b) *differenzierbar, es gilt* $\Phi'(x)=f(x)$, $x\in(a,b)$.

(iii) *Sei* $f(x)$ *in* $[a,b]$ *stetig und* F *eine beliebige Stammfunktion von* $f(x)$. *Dann gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b)-F(a)\ .$$

Beweis : zu (i) : o.B.d.A. $x_1<x_2$ $\implies$ $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\int\limits_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{Satz 8.3.2}}{=} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\implies \quad |\Phi(x_2)-\Phi(x_1)| \underset{\text{Satz 8.3.2}}{\le} \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \underset{\text{Satz 8.3.1}}{\le} \int\limits_{x_1}^{x_2} M\,\mathrm{d}t \;\le\; M\,|x_2-x_1|$$

zu (ii) : sei $x_0\in(a,b),\ x>x_0$ $\implies$ $\Phi(x)-\Phi(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t+\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t}_{=(x-x_0)f(x_0)}$

$$\implies \quad \left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| \le \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}\underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\varepsilon\ \text{für}\ |x-x_0|<\delta}\mathrm{d}t \;\le\; \frac{x-x_0}{x-x_0}\,\varepsilon \qquad \text{für} \quad |x-x_0|<\delta$$

$$\implies \quad \lim_{x\downarrow x_0}\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=0 \quad\iff\quad \Phi'_+(x_0)=\lim_{x\downarrow x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

analog : $\Phi'_-(x_0)=\lim\limits_{x\uparrow x_0}\dfrac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$ $\implies$ $\Phi'(x_0)=f(x_0)$

zu (iii) : F Stammfunktion zu f $\xRightarrow[\text{Satz 7.6.2, (ii)}]{}$ $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+c$

$\curvearrowright$ $F(a)=c,\quad F(b)=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+c$ $\curvearrowright$ $F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ $\square$

Bemerkung*: Ist $f(x)$ in $[a,b]$ integrierbar und x_0 ein Stetigkeitspunkt von f, so ist $\Phi(x)$ in x_0 differenzierbar und $\Phi'(x_0)=f(x_0)$.

Folgerung 8.4.4 *Jede stetige Funktion* $f(x)$, $D(f)=[a,b]$, *besitzt mindestens eine Stammfunktion*

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Beweis : folgt aus Satz 8.4.3 (ii); außerdem folgt aus dessen Beweis $\Phi'_+(a)=f(a)$, $\Phi'_-(b)=f(b)$ $\square$

Bemerkung*:

- Satz 8.4.3 = '*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*', Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe der Stammfunktion
- Eine Ableitung muss nicht Riemann-integrierbar sein, obwohl sie immer eine Stammfunktion besitzt; z.B.

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\curvearrowright$ F' ist auf keinem Intervall $[0,b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar (unbeschränkt bei 0)

- Eine Riemann-integrierbare Funktion muss keine Stammfunktion besitzen, z.B. ist

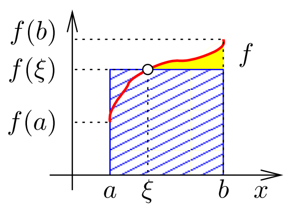
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

integrierbar, hat aber keine Stammfunktion.

- Es gilt also $\int\limits_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ bzw. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]_a^b}_{\text{Stammfunktion}}$ nur dann, wenn alle auftretenden Ausdrücke existieren !

Folgerung 8.4.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei f in $D(f) = [a,b]$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$



B e w e i s : MWS der Differentialrechnung (Satz 7.3.4) auf F anwenden ☐

zur Erinnerung: $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R

$\xRightarrow[\text{Satz 6.2.4}]{}$ Reihe ist $\begin{cases} \text{absolut konvergent für} & |x-x_0| < R, \\ \text{divergent für} & |x-x_0| > R, \end{cases}$ p stetig in $[x_0 - s, x_0 + s]$ für alle $s \in (0,R)$

$\xRightarrow[\text{Satz 8.2.1(ii)}]{}$ p integrierbar auf jedem Intervall $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$

Lemma 8.4.6 *Seien $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$, und $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| < R$. Dann gilt für alle ξ mit $|\xi - x| < R - |x - x_0|$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi - x)^k \quad \textit{mit} \quad b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x-x_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

B e w e i s : verwenden Großen Umordnungssatz für Reihen (Satz 3.3.3) und Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\xi - x)^k (x - x_0)^{n-k}}_{(\xi - x + x - x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} (\xi - x)^k (x - x_0)^{n-k}}_{A_n}$$

$$\curvearrowright\ |A_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} |\xi - x|^k |x - x_0|^{n-k} = |a_n| \big(\underbrace{|\xi - x| + |x - x_0|}_{<R \text{ nach Vor.}} \big)^n \xrightarrow[\text{Satz 5.2.6}]{} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ absolut konvergent}$$

setzen $\gamma_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k}, & n \ge k \\ 0, & n < k \end{cases}$

$$\curvearrowright\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \gamma_{n,k} (\xi - x)^k (x - x_0)^{n-k} \underset{\text{Satz 3.3.3}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (\xi - x)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\gamma_{n,k}}_{=0, n<k} (x - x_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\xi - x)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (x - x_0)^{n-k}}_{b_k}$$

□

Satz 8.4.7 (Differentiation und Integration von Potenzreihen)

Sei $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $R > 0$.

(i) p *ist auf* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *differenzierbar, es gilt*

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} , \quad |x - x_0| < R,$$

die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ *hat den Konvergenzradius* R.

(ii) p *ist integrierbar auf jedem Intervall* $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, *insbesondere gilt für* $|y - x_0| < R$,

$$\int_{x_0}^{y} p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{y} a_n (x - x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (y - x_0)^{n+1}, \qquad |y - x_0| < R.$$

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (y - x_0)^{n+1}$ *hat den Konvergenzradius* R.

B e w e i s : zu (i): sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$, wählen $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi - x| < R - |x - x_0|$

$$\xrightarrow[\text{Lemma 8.4.6}]{} p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\xi - x)^k \quad \text{mit} \quad b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

$$p \text{ stetig in } \xi \xrightarrow[\text{siehe Bew. von Satz 6.2.5}]{} \frac{p(\xi) - p(x)}{\xi - x} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} (\xi - x)^k \xrightarrow[\xi \to x]{} b_1 = p'(x) \underset{\text{s.o.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

zu (ii): folgt aus (i) und Satz 8.4.3(iii) □

Bemerkung*: Potenzreihen sind in ihrem Konvergenzgebiet beliebig oft differenzierbar

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Big) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Beispiele : **(a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad |x| < 1$

$$\underset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\underset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}\right) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}, \qquad |x| < 1, \quad k \in \mathbb{N}_0}$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1, \quad x_0 = 0$

$$\underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |y| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\arctan y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}, \quad |y| < 1}$$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}, \quad |x| < 1, \quad x_0 = 0$

$$\underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \qquad |y| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad |y| < 1}$$

früher: f $(n+1)$-mal differenzierbar in $U(x_0) \subset D(f)$, $x \in U(x_0) \underset{\text{Satz 7.4.2}}{\Longrightarrow} \exists\, \theta = \theta(x) \in (0,1)$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{t_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{r_n(x),\ \text{Restglied von Lagrange}}$$

Satz 8.4.8 (Satz von Taylor, Integralrestglied)
Sei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar in $U(x_0) \subset D(f)$. Dann gilt für jedes $x \in U(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f^{(n+1)}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis : setzen $g_n(x) := \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-y)^n f^{(n+1)}(y)\,\mathrm{d}y$, $n \in \mathbb{N}$; <u>z.z.</u>: $f(x) = t_n(x) + g_n(x)$

mit partieller Integration & vollständiger Induktion:

$$n=0: t_0(x)=f(x_0),\ g_0(x)=\int_{x_0}^{x} f'(y)\,\mathrm{d}y \underset{\text{Satz 8.4.3}}{=} f(x)-f(x_0) \curvearrowright t_0(x)+g_0(x)=f(x)$$

$$n\to n+1: \quad \text{sei } f(x)=t_n(x)+g_n(x); \quad t_{n+1}(x)=t_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-y)^{n+1}}_{u(y)}\underbrace{f^{(n+2)}(y)}_{v'(y)}\,\mathrm{d}y$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}f^{(n+1)}(y)\Big|_{y=x_0}^{y=x}}_{-(x-x_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}=-(t_{n+1}(x)-t_n(x))} + \frac{n+1}{(n+1)!}\underbrace{\int_{x_0}^{x}(x-y)^n f^{(n+1)}(y)\,\mathrm{d}y}_{n!g_n(x)}$$

$$= t_n(x)-t_{n+1}(x)+g_n(x)$$

$$\curvearrowright f(x) \underset{\text{I.V.}}{=} t_n(x)+g_n(x)=t_{n+1}(x)+g_{n+1}(x)$$

□

8.5 Uneigentliche Integrale

bisher : beschränkte Funktionen auf endlichen Intervallen $\Longrightarrow$ zwei mögliche Typen 'uneigentlicher' Integrale

Definition 8.5.1

(i) *Sei* $f(x)$ *auf* $D(f)=(a,b]$ *definiert und auf jedem Teilintervall* $[a+\varepsilon,b]$, $\varepsilon>0$, *integrierbar. Dann setzt man*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Dieser Wert heißt uneigentliches (Riemannsches) Integral.

(ii) *Sei* $g(x)$ *auf* $D(g)=[a,\infty)$ *definiert und auf jedem Teilintervall* $[a,T]$, $T>a$, *integrierbar. Dann setzt man*

$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty}\int_a^T g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Dieser Wert heißt uneigentliches (Riemannsches) Integral.

Bemerkung*: Analog definiert man für f, $D(f)=[a,b)$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$, falls f auf jedem $[a,b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, integrierbar ist, bzw.

$$\int_{-\infty}^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to-\infty}\int_T^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

für g mit $D(g)=(-\infty,b]$, falls g auf jedem Teilintervall $[T,b]$, $T<b$, integrierbar ist.

Beispiele : **(1)** $f(x) = x^\alpha$, $D(f) = (0,1]$, $\alpha < 0$ (für $\alpha \geq 0$ stetig $\curvearrowright$ bereits durch Satz 8.2.1 abgedeckt)

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_\varepsilon^1 = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) & , \ \alpha \neq -1 \\ \ln x\big|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon & , \ \alpha = -1 \end{cases}$$

Es gilt $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{\alpha+1} = \begin{cases} 0 & , \ \alpha+1>0 \\ \infty & , \ \alpha+1<0 \end{cases}$, $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \ln\varepsilon = -\infty$

$\curvearrowright$ $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ existiert $\iff$ $\alpha > -1$, $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$, $\alpha > -1$

(2) $f(x) = x^\beta$, $D(f) = [1,\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int_1^T x^\beta \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\right|_1^T = \dfrac{1}{\beta+1}\left(T^{\beta+1}-1\right) & , \ \beta \neq -1 \\ \ln x\big|_1^T = \ln T & , \ \beta = -1 \end{cases}$$

Es gilt $\lim\limits_{T\to\infty} T^{\beta+1} = \begin{cases} 0 & , \ \beta+1<0 \\ \infty & , \ \beta+1>0 \end{cases}$, $\lim\limits_{T\to\infty} \ln T = \infty$

$\curvearrowright$ $\lim\limits_{T\to\infty} \displaystyle\int_1^T x^\beta \,\mathrm{d}x$ existiert $\iff$ $\beta < -1$, $\displaystyle\int_1^\infty x^\beta \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta+1}$, $\beta < -1$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $D(f) = [0,\infty)$

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\big|_0^T = \arctan T \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \curvearrowright \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{(existiert)}$$

analog : $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

(4) $\displaystyle\int_0^T \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\big|_0^T = 1 - \underbrace{\cos T}_{\lim\limits_{T\to\infty} \text{ ex. nicht}} \implies \int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$ existiert nicht

analog : $\displaystyle\int_0^\infty \cos x \,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \sin x \,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \cos x \,\mathrm{d}x$, … existieren nicht

(5) $\displaystyle\int_{-T}^T \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\big|_{-T}^T = 0$

$\curvearrowright$ *Cauchy'scher Hauptwert* $\quad \mathrm{C.H.}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x \,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^T \sin x \,\mathrm{d}x = 0$ existiert

(6) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \implies \frac{\sin x}{x}$ stetig bei 0

$$T := n\pi,\ n\in\mathbb{N}:\quad \int\limits_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{I_2} + \cdots + \underbrace{\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{I_n}$$

$$= I_1 - I_2 + \cdots \pm I_n$$

$$I_k = \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\ ,\ k\in\mathbb{N} \implies 0\le I_{k+1} < I_k, \quad \text{und} \quad I_k \le \frac{\pi}{(k-1)\pi} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\underset{\substack{\text{Satz 3.2.4}\\ \text{Leibniz-Krit.}}}{\implies} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,I_k = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{existiert} \qquad (\textit{später}: \int\limits_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2})$$

Lemma 8.5.2 *Seien* $f(x)$ *und* $g(x)$ *mit* $D(f) = D(g) = [a,\infty)$ *auf* $[a,T]$ *integrierbar für alle* $T > a$. *Es gelte* $0 \le f(x) \le g(x)$ *für alle* $x\in[a,\infty)$.

(i) *Ist* $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent, so konvergiert auch* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$; *dabei ist* $0 \le \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) *Ist* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *divergent, so auch* $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

B e w e i s : <u>zu (i)</u> : *z.z.* $G(t) := \int\limits_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\implies F(t) := \int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent

Cauchy-Kriterium (*Konv.*) $\implies$ *g.z.z.* : $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,T_0>0\ \ \forall\,t,t'>T_0\ :\ |F(t)-F(t')|<\varepsilon$

sei o.B.d.A. $t' < t \implies |F(t)-F(t')| = \left|\int\limits_{t'}^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_{t'}^t \underbrace{|f(x)|}_{=f(x)} \le \int\limits_{t'}^t g(x)\,\mathrm{d}x \le |G(t)-G(t')| < \varepsilon$

für $t,t' > T_0$ (da $\lim\limits_{t\to\infty} G(t)$ existiert);

weiterhin gilt für alle $t > 0$

$$\int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^t g(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \implies \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>zu (ii)</u> : *Annahme* : $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent $\underset{\text{(i)}}{\implies} \int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent $\implies$ Widerspruch □

Lemma 8.5.3 *Sei* $f(x)$ *eine auf* $D(f) = [a,\infty)$ *definierte Funktion, die auf* $[a,T]$ *integrierbar ist für alle* $T > a$, *und für die* $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *existieren möge. Dann existiert auch* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *und es gilt*

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

B e w e i s : *... in Analogie zu Lemma 8.5.2* □

Beispiele :

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$: $\quad x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}\,, \quad \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$ konv.

$$\Longrightarrow \int\limits_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \mathrm{d}x \text{ konv.} \quad \Longrightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ konv.}$$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \sin x\; e^{-x}\,\mathrm{d}x$: $\quad x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sin x\; e^{-x}\right| \leq e^{-x}$,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} (1 - e^{-T}) = 1 \text{ konv.}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \left|\sin x\; e^{-x}\right| \mathrm{d}x \text{ konv.} \quad \Longrightarrow \int\limits_0^\infty \sin x\; e^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ konv.}$$

(c) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$: $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \underset{\text{part. Int.}}{=} -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_{\frac{\pi}{2}}^T - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \lim_{T\to\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{\cos T}{T}}_{=0} - \underbrace{\lim_{T\to\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{existiert nach (a)}}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ konv.} \quad (\textit{siehe auch Bsp. (6)})$$

(d) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$: $\quad x \geq \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{1-\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\mathrm{d}x}{x}}_{\text{div.}} - \underbrace{\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T \frac{\cos(2x)}{2x}\,\mathrm{d}x}_{\text{konv., wie (c)}}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ div.} \quad \Longrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \text{ div.}$$

Bemerkung*:

	(uneigentliche) Integrale	**Reihen**
	$\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$	$\sum\limits_{j=1}^\infty a_j$
Partialsummen Existenz	$F(T) = \int\limits_1^T f(x)\,\mathrm{d}x$ $\exists \lim\limits_{T\to\infty} F(T)$?	$S_m = \sum\limits_{j=1}^m a_j$ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_m$?
Vergleichskriterien	Lemma 8.5.2	Satz 3.2.1
absolute Konvergenz	Lemma 8.5.3	Satz 3.1.2 (ii)
Konvergenz alternierender Reihen	Beispiel (6), $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$	Satz 3.2.4 (Leibniz-Krit.)

Satz 8.5.4 (Integralkriterium für Reihen)

Gegeben sei eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n > 0$, *durch die mittels* $h(x) := a_n$, $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Funktion* $h(x)$ *auf* $[0, \infty)$ *definiert wird. Weiterhin seien* $f(x)$ *und* $g(x)$ *auf* $[0, \infty)$ *gegeben mit*

$$0 \;\le\; f(x) \;\le\; h(x) \;\le\; g(x)$$

für alle $x \in [0, \infty)$.

(i) *Ist* $\int\limits_0^{\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$ *konvergent, so konvergiert auch die unendliche Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\le\; \int_0^{\infty} g(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

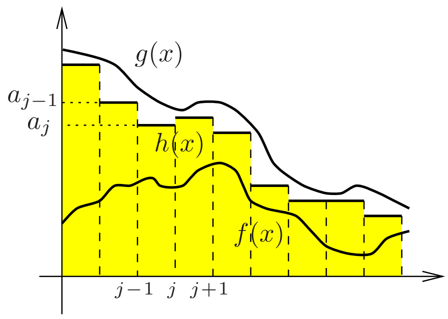
(ii) *Ist* $\int\limits_0^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ *divergent, so divergiert auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

B e w e i s : h stückweise stetig auf $[0, T]$, $T > 0$

$\curvearrowright$ Satz folgt sofort aus Lemma 8.5.2, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \int_0^{\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$$

nach Konstruktion gilt $\square$

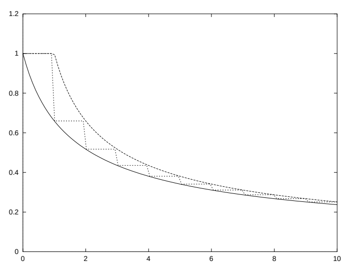


Beispiel : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\nu}$, $\nu > 0$: suchen geeignete Vergleichsfunktionen $f(x)$, $g(x)$, $D(f) = D(g) = [0, \infty)$

$$x \in [n-1, n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{(x+1)^\nu} \;\le\; \frac{1}{n^\nu} \;<\; \frac{1}{x^\nu}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) := \frac{1}{(x+1)^\nu}\ , \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & ,\ \ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x^\nu} & ,\ \ 1 \le x < \infty \end{cases}$$

(*um zusätzlichen Pol bei* 0 *zu vermeiden*)



$$\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \lim_{T\to\infty} \int_1^{T} \frac{\mathrm{d}x}{x^\nu} = 1 + \lim_{T\to\infty} \frac{T^{1-\nu} - 1}{1-\nu} = \frac{\nu}{\nu - 1} < \infty \qquad \text{für} \quad \nu > 1$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^\nu} = \lim_{T\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{(T+1)^{1-\nu} - 1}{1-\nu} & ,\ \ \nu \neq 1 \\ \ln{(T+1)} & ,\ \ \nu = 1 \end{matrix} \right\} = \infty \quad \text{für} \quad \nu \le 1$$

$$\underset{\text{Satz 8.5.4}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\nu} \ \text{konvergent für} \quad \nu > 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\nu} \ \text{divergent für} \quad \nu \le 1$$

Bemerkung*: Untersuchung von $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ in ähnlicher Weise möglich

Bemerkung*: • In ähnlicher Weise kann man unter Verwendung der Integralrechnung zeigen:

$$\exists\ D > 0: \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \ = \ D,$$

$D \approx 0.577215\ldots$ heißt 'Euler-Mascheroni[30]-Konstante'.

• *Interpretation*: harmonische Reihe $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert 'etwa so stark' wie $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n$

• *'Anwendung'* : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$

8.6 Die $\Gamma-$ Funktion

Definition 8.6.1 *Für* $x > 0$ *wird die Funktion* $\Gamma(x)$ *definiert durch*

$$\Gamma(x) \ := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} \ \mathrm{d}t.$$

$\Gamma(x)$ wird durch ein *konvergentes* uneigentliches Integral definiert (*d.h. Definition ist sinnvoll*) :

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\ \mathrm{d}t \ = \underbrace{\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\ \mathrm{d}t}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\ \mathrm{d}t}_{=:I_2}$$

<u>*zu* I_1</u> : uneigentlich nur für $0 < x < 1$;

$$0 < t \le 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{-1}\, t^{x-1} \ \le \ e^{-t}\, t^{x-1} \ \le \ t^{x-1}\,, \qquad \int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \quad \text{ex. für } x > 0$$

$$\Longrightarrow \quad I_1 \quad \text{konvergent,} \quad \frac{e^{-1}}{x} \ \le \ I_1 \ \le \ \frac{1}{x}$$

<u>*zu* I_2</u> : sei $x > 0$ beliebig,

$$t \ge 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{-t}\, t^{x-1} \ = \ e^{-\frac{t}{2}}\ \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}\, t^{x-1}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} \ \le \ c_x\, e^{-\frac{t}{2}}\,, \qquad \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$\Longrightarrow \quad I_2 \quad \text{konvergent}$$

$\curvearrowright\ \Gamma(x) \ = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ konvergent für alle $x > 0$

Bemerkung*: Sei $0 < x \le 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{-t}\, t^{x-1} \ \le \ e^{-t}$ für $t \ge 1 \quad \Longrightarrow \quad I_2 \ \le \ e^{-1}$

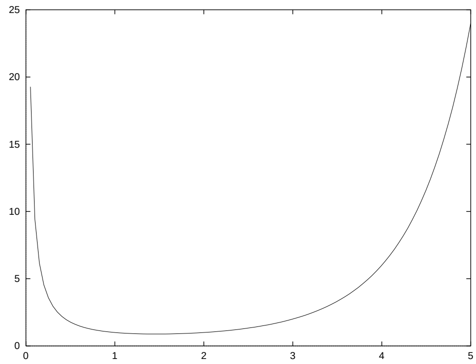
$$\Longrightarrow \quad \frac{e^{-1}}{x} \ \le \ I_1 \ \le \ \Gamma(x) \ = \ I_1 + I_2 \ \le \ \frac{1}{x} + e^{-1}$$

Satz 8.6.2 $\Gamma(x)$ *ist eine beliebig oft differenzierbare, konvexe, positive Funktion auf* $(0,\infty)$. *Außerdem gilt:*

$$\lim_{x\downarrow 0}\ \Gamma(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\ \Gamma(x) = \infty,$$

$$x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \quad x > 0, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

[30] Lorenzo Mascheroni (* 13.5.1750 Bergamo/Italien † 14.7.1800 Paris)



$\Gamma(x), \quad 0 < x \le 5$

B e w e i s : *Wir verwenden Resultate aus Kapitel 5, um die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von* $\Gamma(x)$ *zu zeigen.*

Wir setzen für $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac1k} e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t}_{=:f_k(x)} + \sum_{\ell=1}^\infty \underbrace{\int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t}_{=:g_\ell(x)}\end{aligned}$$

Seien $0 < a < b < \infty$ fixiert, und $x \in [a,b]$.

<u>1. Schritt</u> : zeigen $f_k(x),\ g_\ell(x) \in \mathsf{C}([a,b]),\ \ k,\ \ell \in \mathbb{N}$

Seien $a \le x_1 < x_2 \le b$

$$f_k(x_2) - f_k(x_1) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac1k} e^{-t}\left(t^{x_2-1} - t^{x_1-1}\right)\mathrm{d}t \underset{\text{MWS}}{=} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac1k} e^{-t}\,(x_2-x_1)\ln t\ t^{\xi-1}\ \mathrm{d}t$$

$$\curvearrowright\ |f_k(x_2) - f_k(x_1)| \le |x_2 - x_1| \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac1k} e^{-t}\,|\ln t|\ t^{\xi-1}\ \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{k+1} < t < \frac1k \ \curvearrowright \begin{cases} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{\xi-1} < t^{\xi-1} < \left(\frac1k\right)^{\xi-1}, & \xi > 1 \\ \left(\frac1k\right)^{\xi-1} \le t^{\xi-1} \le \left(\frac{1}{k+1}\right)^{\xi-1}, & \xi \le 1 \end{cases} \xRightarrow[a<\xi<b]{} t^{\xi-1} \le \max\left\{\frac{1}{k^{a-1}},\ \frac{1}{(k+1)^{a-1}}\right\}$$

$$\Longrightarrow\ |f_k(x_2) - f_k(x_1)| \le |x_2-x_1| \underbrace{\max\left\{\left(\frac1k\right)^{a-1}, \left(\frac{1}{k+1}\right)^{a-1}\right\} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac1k} e^{-t}\,|\ln t|\ \mathrm{d}t}_{=:\alpha_k} \le \alpha_k\ |x_2-x_1|$$

analog : $$|g_\ell(x_2) - g_\ell(x_1)| \le |x_2-x_1| \underbrace{\max\left\{(\ell+1)^{b-1}, \ell^{b-1}\right\} \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\ \ln t\ \mathrm{d}t}_{=:\beta_\ell} \le \beta_\ell\ |x_2-x_1|$$

$$\Longrightarrow\quad f_k(x),\ g_\ell(x) \in \mathsf{C}([a,b]),\ \ k,\ \ell \in \mathbb{N}$$

<u>2. Schritt</u> : zeigen $$\left\|\Gamma - \sum_{k=1}^{i-1} f_k - \sum_{\ell=1}^{j-1} g_\ell\ \middle|\mathsf{C}([a,b])\right\| = \left\|\sum_{k=i}^\infty f_k + \sum_{\ell=j}^\infty g_\ell\ \middle|\mathsf{C}([a,b])\right\| \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$$

$\xRightarrow[\text{Satz 5.2.3}]{}$ <u>g.z.z.</u> : $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists i_0\ \ \forall\, n,\ m,\ j,\ i \ge i_0\ :\ \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\sum\limits_{k=i}^n f_k(x) + \sum\limits_{\ell=j}^m g_\ell(x)\right| < \varepsilon$

$$0 \le \sum_{k=i}^n f_k(x) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac1i} \underbrace{e^{-t}}_{\le 1}\ \underbrace{t^{x-1}}_{\le t^{a-1}}\ \mathrm{d}t \le c_a\left(\frac{1}{i^a} - \frac{1}{(n+1)^a}\right) < \frac{c_a}{i^a} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n > i \ge i_0$$

$$0 \le \sum_{\ell=j}^m g_\ell(x) = \int_j^{m+1} e^{-\frac t2}\ \underbrace{e^{-\frac t2}\ t^{x-1}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} \mathrm{d}t \le c_b \int_j^{m+1} e^{-\frac t2}\ \mathrm{d}t < c_b'\, e^{-\frac j2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad m > j \ge i_0$$

$$\curvearrowright \sum_{k=1}^{i-1} f_k(x) + \sum_{\ell=1}^{j-1} g_\ell(x) \xrightarrow[i,j\to\infty]{\text{glm.}} \Gamma(x) \underset{\substack{\text{1. Schritt \&}\\ \text{Folg. 5.2.5}}}{\Longrightarrow} \Gamma(x) \quad \text{stetig auf} \quad [a,b]$$

<u>3. Schritt</u> : zeigen $f_k(x)$, $g_\ell(x)$, $k,\ell \in \mathbb{N}$, sind (einmal) differenzierbar

Behauptung : $$g'_\ell(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right) \underset{\Uparrow}{=} \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} t^{x-1}\right)\mathrm{d}t = \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g_\ell(x+h)-g_\ell(x)}{h} - \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{h\to 0}\int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\left[\underbrace{\frac{t^{x+h-1}-t^{x-1}}{h}}_{\text{MWS}} - \ln t\; t^{x-1}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\left[t^{\theta h}-1\right]\mathrm{d}t$$

$$0 \le \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\underbrace{\left|t^{\theta h}-1\right|}\,\mathrm{d}t \le \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\left[(\ell+1)^{\theta|h|}-1\right]\mathrm{d}t$$

$$= \begin{Bmatrix} t^{\theta|h|}-1 &, & h>0 \\ 1-t^{-\theta|h|} &, & h<0 \end{Bmatrix}$$

$$\le \begin{Bmatrix} (\ell+1)^{\theta|h|}-1 , & h>0 \\ 1-(\ell+1)^{-\theta|h|}, & h<0 \end{Bmatrix}$$

$$\le (\ell+1)^{\theta|h|}-1$$

$$= \underbrace{\left[(\ell+1)^{\theta|h|}-1\right]}_{\xrightarrow[h\to 0]{}0}\ \underbrace{\int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t}_{=:A(x,\ell)<\infty}$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\left[t^{\theta h}-1\right]\mathrm{d}t = 0 \iff g'_\ell(x) = \int_\ell^{\ell+1} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

analog : $$f'_k(x) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

<u>4. Schritt</u> : zeigen $\Gamma(x)$ ist (einmal) differenzierbar

dazu : $$\sum_{k=1}^{n} f'_k(x) + \sum_{\ell=1}^{m} g'_\ell(x) \Longrightarrow \int_0^\infty e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{auf} \quad [a,b] \quad \text{für} \quad n,m\longrightarrow\infty$$

Integral existiert (in Analogie zu $\Gamma(x)$, da $\lim\limits_{t\downarrow 0} t^{\varkappa}\,\ln t = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\nu}\,\ln t$ für alle $\varkappa,\nu>0$).

Sei

$$\Psi_{n,m}(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{\ell=1}^{m} g_\ell(x) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \xrightarrow[\text{2. Schritt}]{} & \Psi_{n,m}(x) & \underset{n,m\to\infty}{\Longrightarrow} & \Gamma(x) \\ \xrightarrow[\text{2. \& 3. Schritt}]{} & \Psi'_{n,m}(x) & \underset{n,m\to\infty}{\Longrightarrow} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(x) \quad \text{differenzierbar in} \quad (a,b), \quad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,\ln t\; t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{(in Analogie zu 2. und 3. Schritt)}$$

analog beweist man : $\Gamma(x)$ k-mal differenzierbar in (a,b), $\Gamma^{(k)}(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,(\ln t)^k\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad k\in\mathbb{N}$

insbesondere gilt also für $k=2$: $\quad \Gamma''(x) = \int\limits_0^\infty \underbrace{e^{-t}\,(\ln t)^2\, t^{x-1}}_{>0}\ dt > 0 \quad \curvearrowright \Gamma$ konvex $\qquad (*)$

<u>5. Schritt</u>: zeigen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \lim\limits_{x\downarrow 0}\Gamma(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\Gamma(x) = \infty \ldots$

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^x\ dt = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_\varepsilon^1 e^{-t}\, t^x\ dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T e^{-t}\, t^x\ dt$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[-e^{-t}\, t^x\Big|_\varepsilon^1 + x\int\limits_\varepsilon^1 e^{-t}\, t^{x-1}\ dt\right] + \lim_{T\to\infty}\left[-e^{-t}\, t^x\Big|_1^T + x\int\limits_1^T e^{-t}\, t^{x-1}\ dt\right]$$

$$= -e^{-1} + x\int\limits_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\ dt + e^{-1} + x\int\limits_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\ dt = x\,\Gamma(x)$$

$$\curvearrowright \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!\underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-t}\ dt}_{=1} = (n-1)!\,, \quad n\in\mathbb{N}$$

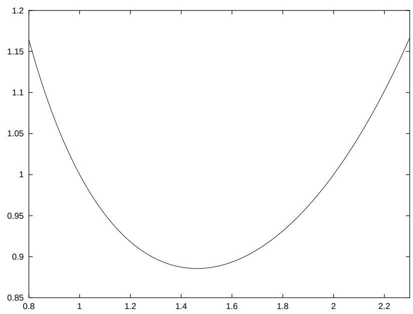
insbesondere also auch $\quad \Gamma(2) = \Gamma(1) = 1 \underset{\substack{\text{Satz 7.3.4}\\ \text{MWS, Satz von Rolle}}}{\Longrightarrow} \exists\, x_0 \in (1,2)\ :\ \Gamma'(x_0) = 0$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\Gamma'(x)$ streng monoton wachsend, d.h.

$$\Gamma'(x) \begin{cases} <0 & , \quad 0<x<x_0 \\ >0 & , \quad x_0<x<\infty \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Gamma(x) \text{ streng monoton } \begin{cases} \text{fallend} & , \quad 0<x<x_0 \\ \text{wachsend} & , \quad x_0<x<\infty \end{cases}$$

$(x_0 \approx 1,4616\ldots, \quad \Gamma(x_0) \approx 0,8856\ldots)$



$\Gamma(x), \quad 0.8 \le x \le 2.3$

Bem. vor Satz 8.6.2 $\Longrightarrow \quad \Gamma(x) \ge \dfrac{e^{-1}}{x}$ für $0<x\le 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\downarrow 0}\Gamma(x) \ge \lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{e^{-1}}{x} = \infty,$

$\Gamma(n) = (n-1)!, \ \Gamma(x)$ streng monoton wachsend für $x \ge 2 > x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\Gamma(x) = \infty$ $\square$

Bemerkung*:
- *später:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- Oberflächeninhalt $|\omega_n|$ und Volumen $|K_n|$ der n-dimensionalen Einheitskugel, $n\in\mathbb{N}$:

$$|\omega_n| = \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad |K_n| = \frac{2\sqrt{\pi}^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Teil II

Analysis 2

9 Metrische Räume und Abbildungen

9.1 Topologische Grundbegriffe

in Abschnitten 1.1, 1.3, 1.4: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty)$ bzw. $|\cdot| : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ absoluter Betrag in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, sowie als Verallgemeinerung $\|\cdot\| : N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ Norm (Definition 1.4.5), mit:

(N0)	$\|x\|$	$\geq$	0	für alle	$x \in N$
(N1)	$\|x\|$	$=$	$0 \iff$	$x = 0$	(Nullelement aus N)
(N2)	$\|\lambda x\|$	$=$	$|\lambda|\ \|x\|$	für alle	$\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und alle $x \in N$
(N3)	$\|x + y\|$	$\leq$	$\|x\| + \|y\|$	für alle	$x, y \in N$

Beispiele :

- $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, \infty$, wobei für $a \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a \in \mathbb{C}^n$ gilt (Definition 1.4.2)

$$\|a\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|, \quad \|a\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}, \quad \|a\|_\infty = \max\{|a_j| : j = 1, \ldots, n\}$$

- $\mathsf{C}(M)$ mit $\|f|\mathsf{C}(M)\| = \sup\limits_{x \in M} |f(x)|$ (Abschnitt 5.2)

jetzt: Verallgemeinerung: „Metrik“

Definition 9.1.1 *Es sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung*

$$d : M \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(M0)	$d(x, y)$	$\geq$	0		
(M1)	$d(x, y)$	$=$	0	$\iff$	$x = y$
(M2)	$d(x, y)$	$=$	$d(y, x)$		
(M3)	$d(x, y)$	$\leq$	$d(x, z) + d(z, y)$		

für alle $x, y, z \in M$ heißt Metrik *und* $[M, d]$ metrischer Raum.

Für eine Teilmenge $A \subset M$, $A \neq \emptyset$ nennt man $d_A(x, y) = d(x, y)$, $x, y \in A$, induzierte Metrik *und $[A, d_A]$ Teilraum des metrischen Raumes $[M, d]$.*

Bemerkung*:

- Mit $d(x, y) = \|x - y\|$ wird jeder normierte Raum zu einem metrischen Raum.
- Eine ‘Grundmenge’ M kann mit verschiedenen Metriken ausgestattet sein.

Beispiele :

- $\mathbb{R}^n$ mit $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$, $i = 1, 2, \infty$, $x, y \in \mathbb{R}^n$; d_2 … *euklidische Metrik*
- $M \neq \emptyset$ beliebig, *diskrete Metrik* $d_0(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \quad x, y \in M$

Definition 9.1.2 *Seien* $[M,d]$ *ein metrischer Raum und* $A \subset M$.

(i) *Für* $a \in M$ *und* $\varepsilon > 0$ *heißt* $K_\varepsilon(a) = K(a,\varepsilon) = \{b \in M : d(a,b) < \varepsilon\}$ offene Kugel *um* a *mit Radius* ε.

(ii) $a \in M$ *heißt* innerer Punkt *von* $A \iff \exists\, \varepsilon > 0 : K(a,\varepsilon) \subset A$

Die Menge aller inneren Punkte von A *wird mit* $\mathring{A}$ *bezeichnet.*

(iii) $a \in M$ *heißt* Randpunkt *von* $A \iff \forall\, \varepsilon > 0 : \quad K(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ K(a,\varepsilon) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$

Die Menge aller Randpunkte von A *wird mit* ∂A *bezeichnet.*

(iv) $a \in M$ *heißt* Berührungspunkt *von* $A \iff \forall\, \varepsilon > 0 : K(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Die Menge aller Berührungspunkte von A *heißt* Abschluss *von* A *und wird mit* $\overline{A}$ *bezeichnet.*

(v) $a \in M$ *heißt* isolierter Punkt *zu* $A \iff \exists\, \varepsilon > 0 : K(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$

(vi) $a \in M$ *heißt* Häufungspunkt *von* $A \iff \forall\, \varepsilon > 0 : \# K(a,\varepsilon) \cap A = \infty$

Bemerkung*: $a \in M$ heißt *äußerer Punkt* von $A \iff \exists\, \varepsilon > 0 : K(a,\varepsilon) \subset M \setminus A$

Beispiele :

- $M = \mathbb{R}^n$, $d = d_2$ euklidische Metrik $\curvearrowright$ $K(a,\varepsilon)$ sind 'übliche' offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ (bzw. Intervalle, Kreise ...)
- $M = \mathbb{R}^n$, $d = d_\infty$ $\curvearrowright$ $K(a,\varepsilon)$ sind Quader (ohne Rand), analog für $d = d_1$ (Übung)
- $[M, d_0]$ diskreter metrischer Raum, $x \in M$ $\curvearrowright$ $K(x,\varepsilon) = \begin{cases} \{x\}, & 0 < \varepsilon \le 1 \\ M, & \varepsilon > 1 \end{cases}$

Lemma 9.1.3 *Seien* $[M,d]$ *ein metrischer Raum,* $A, B \subseteq M$. *Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $A \subseteq \overline{A}$

(ii) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$

(iii) $B \subseteq A \implies \overline{B} \subseteq \overline{A}$

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(v) $\mathring{A}$, $\partial A = \partial(M \setminus A)$ *und* $(M \setminus A)^\circ$ *bilden eine disjunkte Zerlegung von* M, $M = \mathring{A} \cup \partial A \cup (M \setminus A)^\circ$

(vi) $\mathring{A}$ *und* ∂A *bilden eine disjunkte Zerlegung von* $\overline{A}$, *d.h.* $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ *mit* $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$

Beweis : <u>zu (i)</u>: $a \in A$, $\varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ a \in K_\varepsilon(a) \cap A \ \curvearrowright \ a \in \overline{A}$

<u>zu (iii)</u>: $a \in \overline{B}$, $\varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ K_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset \ \underset{B \subseteq A}{\Longrightarrow} \ K_\varepsilon(a) \cap A \supseteq K_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset \ \curvearrowright \ a \in \overline{A}$

<u>zu (ii)</u>: $A \underset{\text{(i)}}{\subseteq} \overline{A} \underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$, <u>*n.z.z.*</u>: $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$

sei $a \in \overline{\overline{A}}$, $\varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ \exists\, x \in K_{\varepsilon/2}(a) \cap \overline{A} \ \curvearrowright \ x \in \overline{A} \ \curvearrowright \ \exists\, y \in K_{\varepsilon/2}(x) \cap A$

$\curvearrowright \ \exists\, y \in A : \ d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \curvearrowright \ \exists\, y \in K_\varepsilon(a) \cap A \ \curvearrowright \ a \in \overline{A}$

<u>zu (iv)</u>: $A, B \subset A \cup B \underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, <u>*n.z.z.*</u>: $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

sei $x \in \overline{A \cup B}$, $\varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ K_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \ \curvearrowright \ (K_\varepsilon(x) \cap A) \cup (K_\varepsilon(x) \cap B) \neq \emptyset$

$\curvearrowright \ (K_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset) \ \vee \ (K_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset) \ \curvearrowright \ x \in \overline{A} \ \vee \ x \in \overline{B} \ \curvearrowright \ x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

zu (v): $\partial A = \partial(M \setminus A)$, $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$, $(M \setminus A)^\circ \cap \partial A = \emptyset$ klar aus Definition

g.z.z.: $M \subseteq \mathring{A} \ \cup \ \partial A \ \cup \ (M \setminus A)^\circ$
sei $x \in M \ \curvearrowright \ (\exists\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset A) \ \vee \ (\forall\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset)$
$\curvearrowright \ x \in \mathring{A} \ \vee \ (\exists\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset (M \setminus A)) \ \vee \ (\forall\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset \ \wedge \ K_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset)$
$\curvearrowright \ x \in \mathring{A} \ \vee \ x \in (M \setminus A)^\circ \ \vee \ x \in \partial A \iff x \in \mathring{A} \ \cup \ \partial A \ \cup \ (M \setminus A)^\circ$

zu (vi): klar □

Beispiele : (a) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, $A = (a,b) \ \curvearrowright \ \partial A = \{a,b\}$, $\mathring{A} = A = (a,b)$, $\overline{A} = [a,b]$:
$\partial A = \{a,b\}$: $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$, $x \neq b$, $\varepsilon := \frac{1}{2}\min(|x-a|, |x-b|) > 0$
$\curvearrowright \ (K_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset) \ \vee \ (K_\varepsilon(x) \cap (M \setminus A) = \emptyset) \ \curvearrowright \ x \notin \partial A, \ x \in \mathring{A} \cup (M \setminus A)^\circ$
$\mathring{A} = A = (a,b)$: $x \in (a,b)$, $\varepsilon := \frac{1}{2}\min(x-a, b-x) > 0 \ \curvearrowright \ K_\varepsilon(x) \subset (a,b)$
$\xRightarrow[\text{Lemma 9.1.3(vi)}]{} \ \overline{A} = (a,b) \cup \{a,b\} = [a,b]$

(b) $[M,d]$ metrischer Raum, $x \in M$, $\varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ \overline{K(x,\varepsilon)} = \{y \in M : d(x,y) \leq \varepsilon\}$

(c) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y| \ \curvearrowright \ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Satz 9.1.4 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum, $A \subseteq M$.*
(i) *$x \in M$ ist Berührungspunkt zu A genau dann, wenn x entweder Häufungspunkt zu A oder isolierter Punkt von A ist.*
(ii) *$\overline{A} = A \cup \{x \in M \setminus A : \ x$ Häufungspunkt zu $A\}$*

Beweis : zu (i): „$\Longleftarrow$" a isolierter Punkt $\curvearrowright \ a \in A \ \curvearrowright \ \forall\, \varepsilon > 0 : \ K_\varepsilon(a) \cap A \supseteq \{a\} \neq \emptyset \ \curvearrowright \ a \in \overline{A}$,
a Häufungspunkt $\curvearrowright \ a \in \overline{A}$

„$\Longrightarrow$" sei $a \in \overline{A}$; falls $\#K_\varepsilon(a) \cap A = \infty$ für alle $\varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ a$ Häufungspunkt zu A
sonst: $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \ \#K_\varepsilon(a) \cap A = m \in \mathbb{N} \quad (K_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \ \curvearrowright \ m \in \mathbb{N})$
g.z.z.: a isolierter Punkt zu A
$\#K_\varepsilon(a) \ \cap \ A = m \ \curvearrowright \ \exists\, x_1, \ldots, x_m \in A : \ K_\varepsilon(a) \ \cap \ A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, setzen $\varepsilon_0 := \frac{1}{2} \min\limits_{j=1,\ldots,m} d(a, x_j)$
$\curvearrowright \ \varepsilon > d(a, x_j) \geq 2\varepsilon_0$, $j = 1, \ldots, m$
zeigen: $a \in K_\varepsilon(a) \cap A = \{x_1, \ldots, x_m\}$; indirekt, Annahme: $a \notin \{x_1, \ldots, x_m\} \ \curvearrowright \ \varepsilon_0 > 0 \ \curvearrowright \ d(a, x_j) > \varepsilon_0$
$\curvearrowright \ x_j \notin K_{\varepsilon_0}(a)$, $j = 1, \ldots, m \ \curvearrowright \ K_\varepsilon(a) \cap A = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq M \setminus K_{\varepsilon_0}(a)$
$\xRightarrow[\varepsilon_0 < \varepsilon]{} \ K_{\varepsilon_0}(a) \cap A \subseteq (M \setminus K_{\varepsilon_0}(a)) \cap \ K_{\varepsilon_0}(a) = \emptyset \ \curvearrowright \ \exists\, \varepsilon_0 > 0 : K_{\varepsilon_0}(a) \cap A = \emptyset \ \curvearrowright \ a \notin \overline{A} \ \lightning$

$\curvearrowright \ a \in K_\varepsilon(a) \cap A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, o.B.d.A. $x_1 = a$
falls $m = 1 \iff K_\varepsilon(a) \cap A = \{a\} \ \curvearrowright \ a$ isolierter Punkt
sonst $m \geq 2$, setzen $\varepsilon_1 := \frac{1}{2} \min\limits_{j=2,\ldots,m} d(a, x_j) \ \curvearrowright \ \varepsilon > d(a, x_j) > \varepsilon_1$, $j = 2, \ldots, m$
$\xRightarrow[\text{wie vorher}]{} \ x_j \notin K_{\varepsilon_1}(a)$, $j = 2, \ldots, m \ \curvearrowright \ \{a\} \subseteq A \cap K_{\varepsilon_1}(a) \subseteq (A \cap K_\varepsilon(a)) \setminus \{x_2, \ldots, x_m\} = \{a\}$

zu (ii): setzen $B := \{x \in M \setminus A : \ x$ Häufungspunkt zu $A\}$, z.z.: $\overline{A} = A \cup B$
nach (i) und Lemma 9.1.3(i) folgt $\overline{A} \supseteq A \cup B$, g.z.z.: $\overline{A} \subseteq A \cup B$

$x \in \overline{A} \ \underset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \ x$ Häufungspunkt oder x isolierter Punkt zu A

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{1. Fall: } x \text{ isolierter Punkt } \curvearrowright \ x \in A \\ \text{2. Fall: } x \text{ Häufungspunkt } \wedge x \in A \ \curvearrowright \ x \in A \\ \text{3. Fall: } x \text{ Häufungspunkt } \wedge x \notin A \ \curvearrowright \ x \in B \end{array} \right\} \curvearrowright \ x \in A \cup B$$

□

Definition 9.1.5 *Seien* $[M,d]$ *ein metrischer Raum und* $A \subseteq M$.
(i) A *heißt* offen, *wenn* A *nur innere Punkte enthält, d.h.* $A = \mathring{A}$.
(ii) A *heißt* abgeschlossen, *wenn* $A = \overline{A}$ *gilt.*

Bemerkung*: offene/abgeschlossene Kugeln im Sinne von Definition 9.1.2 sind offene/abgeschlossene Mengen im Sinne von Definition 9.1.5

Satz 9.1.6 *Seien* $[M,d]$ *ein metrischer Raum und* $A \subset M$.
(i) *A ist offen genau dann, wenn $M \setminus A$ abgeschlossen ist.*

(ii) *A ist abgeschlossen genau dann, wenn gilt* $A = \mathring{A} \cup \partial A$.

(iii) *A ist abgeschlossen genau dann, wenn A alle seine Häufungspunkte enthält.*

(iv) *Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von M. Dann ist* $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ *abgeschlossen.*
Ist I endlich, so ist auch $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ *abgeschlossen.*

(v) *Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von M. Dann ist* $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ *offen.*
Ist I endlich, so ist auch $\bigcap\limits_{i\in I} O_i$ *offen.*

Beweis : zu (i): Kontraposition

$$\begin{aligned}
A \text{ nicht offen } &\iff \neg(\forall\, x\in A \quad \exists\, \varepsilon>0:\ K_\varepsilon(x)\subset A) \iff \exists\, x\in A \quad \forall\, \varepsilon>0:\ K_\varepsilon(x)\ \cap\ (M\setminus A)\neq\emptyset \\
&\iff \exists\, x\in A:\ x\in\overline{M\setminus A} \iff A\ \cap\ \overline{M\setminus A}\neq\emptyset \underset{A\cap(M\setminus A)=\emptyset}{\iff} \overline{M\setminus A}\supsetneq M\setminus A \\
&\iff M\setminus A \text{ nicht abgeschlossen}
\end{aligned}$$

zu (ii): folgt aus Def. 9.1.5(ii) und Lemma 9.1.3(vi)

zu (iii): folgt aus Satz 9.1.4(ii)

zu (iv): 2. Teil folgt aus Def. 9.1.5(ii) und Lemma 9.1.3(iv)
zum 1. Teil: Lemma 9.1.3(i) $\curvearrowright\ \bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}$, g.z.z.: $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} A_i$

$$\begin{aligned}
x\in\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} &\curvearrowright \forall\,\varepsilon>0:\ K_\varepsilon(x)\ \cap\ \bigcap_{i\in I} A_i\neq\emptyset \qquad \curvearrowright \forall\,\varepsilon>0:\ \bigcap_{i\in I}(K_\varepsilon(x)\cap A_i)\neq\emptyset \\
&\curvearrowright \forall\,\varepsilon>0 \quad \forall\, i\in I: K_\varepsilon(x)\cap A_i\neq\emptyset \curvearrowright \forall\, i\in I:\ x\in\overline{A_i} \\
&\curvearrowright x\in\bigcap_{i\in I}\overline{A_i} \underset{A_i \text{ abg.}}{=} \bigcap_{i\in I} A_i
\end{aligned}$$

zu (v): folgt aus (i) und (iv) □

Beispiele :
- $[M,d]$ beliebiger metrischer Raum $\curvearrowright$ $\emptyset, M$ sowohl offen, als auch abgeschlossen
- $[M,d]$ beliebiger metrischer Raum, $A\subset M$ endlich, d.h. $\exists\, m\in\mathbb{N}:\ \#A=m$ $\curvearrowright$ A abgeschlossen (Übung)
- $[M,d_0]$ diskreter metrischer Raum, $A\subset M$ beliebig $\curvearrowright$ A offen & abgeschlossen

Bemerkung*:

- zweite Aussagen in (iv), (v) für unendliche Indexmengen I i.a. falsch, z.B. $M = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}$, $O_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $A_n = [\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ $\curvearrowright$ O_n offen, A_n abgeschlossen in M, $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n = \{0\}$ nicht offen, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,2)$ nicht abgeschlossen
- $\mathring{A}$ offen, $\overline{A} = \bigcap\{B \supset A : B \text{ abgeschlossen}\}$, $\mathring{A} = \bigcup\{B \subset A : B \text{ offen}\}$ (Übung)
- Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, $M \neq \emptyset$, heißt *Topologie* auf M, falls folgende Eigenschaften gelten:

  (i) $\emptyset, M \in \mathcal{T}$

  (ii) Für jedes Mengensystem $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

  (iii) Ist I endlich und $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, so gilt auch $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

  Dann heißt $[M, \mathcal{T}]$ *topologischer Raum*.

  Beispiel : $[M,d]$ metrischer Raum, $\mathcal{T} = \{A \subseteq M : A \text{ offen}\}$ (Satz 9.1.6)

Definition 9.1.7 **(i)** *Ein metrischer Raum* $[M,d]$ *heißt* zusammenhängend, *wenn außer* $\emptyset$ *und* M *keine weitere Teilmenge von* M *existiert, die sowohl offen, als auch abgeschlossen ist.*

(ii) *Eine Teilmenge* $A \subset M$ *eines metrischen Raumes* $[M,d]$ *heißt zusammenhängend, wenn der Teilraum* $[A, d_A]$ *zusammenhängend ist.*

Beispiele :

- $[M,d]$ beliebig, $x \in M$, $A = \{x\}$ $\curvearrowright$ $\{x\}$ ist zusammenhängend ($\mathfrak{P}(A) = \{A, \emptyset\}$)
- $[M, d_0]$ diskreter metrischer Raum, $A \subseteq M$

  A zusammenhängend $\iff$ $\#A \in \{0,1\}$, d.h. $A = \emptyset$ oder $A = \{a\}$, $a \in M$
- $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ $\curvearrowright$ $A \neq \emptyset$ zusammenhängend $\iff \begin{cases} A = \mathbb{R} & \textit{oder} \\ A \text{ Intervall} & \textit{oder} \\ A \text{ Halbstrahl} & \end{cases}$

Definition 9.1.8 *Seien* $[M,d]$ *ein metrischer Raum und* $A \subseteq M$.

(i) A *heißt* dicht *in* M*, falls gilt:* $\forall\, x \in M \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in A: \; d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$, *d.h.* $x_\varepsilon \in K(x,\varepsilon)$.

(ii) A *heißt* beschränkt, *falls ein* $b \in M$ *und ein* $D > 0$ *existieren mit* $d(a,b) \leq D$ *für alle* $a \in A$.

Beispiel : $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$

Bemerkung*:

- im normierten Raum: Definition 1.4.6
- $\operatorname{diam} A := \sup\limits_{a,b\in A} d(a,b)$ Durchmesser von A $\curvearrowright$ A beschränkt $\iff \operatorname{diam} A < \infty$
- $\operatorname{dist}(A,B) := \inf\limits_{a\in A, b\in B} d(a,b)$ Abstand von $A, B \subset M$

9.2 Konvergenz und Vollständigkeit

Definition 9.2.1 *Sei* $[M,d]$ *ein metrischer Raum.*

(i) *Eine Folge* $(x_n)_{n=1}^\infty \subset M$ *heißt* konvergent, *wenn es ein* $x^0 \in M$ *mit folgender Eigenschaft gibt :*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \;:\; d\left(x_n, x^0\right) < \varepsilon\,.$$

(ii) *Eine Folge* $(x_n)_{n=1}^\infty \subset M$ *heißt* Cauchy-Folge (Fundamentalfolge), *wenn gilt :*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n,m \geq n_0(\varepsilon) \;:\; d(x_n, x_m) < \varepsilon\,.$$

Bemerkung*:
- siehe Definitionen 2.1.2, 2.3.1 und 5.2.2
- $x^0 \in M$ heißt Grenzwert/Limes von $(x_n)_n$, man schreibt z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^0$, oder $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^0$, oder $x_n \longrightarrow x^0$ für $n \to \infty$, bzw. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } M} x^0$

Lemma 9.2.2 *Sei $[M,d]$ ein metrischer Raum. Jede konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset M$ ist eine Cauchy-Folge in $[M,d]$.*

Beweis: Seien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^0$ in $[M,d]$ und $\varepsilon > 0 \implies \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0(\varepsilon) : d\left(x_n, x^0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\implies \exists\, n_0(\varepsilon) \quad \forall\, n,\ m \geq n_0(\varepsilon) : d\left(x_n, x_m\right) \leq d\left(x_n, x^0\right) + d\left(x^0, x_m\right) < \varepsilon$ □

Bemerkung*: Sätze 2.3.2 und 5.2.3 $\implies$ dort auch Umkehrung richtig, i.a. jedoch nicht,
z.B. $x_n = \frac{1}{n}$, $[M,d] = [(0,1], |\cdot|]$; $\quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $[M,d] = [\mathbb{Q}, |\cdot|]$

Folgerung 9.2.3 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. A ist abgeschlossen genau dann, wenn für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_n \subset A$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$" folgt aus Satz 9.1.6(iii)
„$\Longleftarrow$" Kontraposition, sei A nicht abgeschlossen $\curvearrowright$ $M \setminus A$ nicht offen
$\curvearrowright \exists\, a \in M \setminus A \quad \forall\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(a) \not\subset M \setminus A \curvearrowright \exists\, a \notin A \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in K_\varepsilon(a) \setminus (M \setminus A) = K_\varepsilon(a) \cap A$
$\xRightarrow[\varepsilon = \frac{1}{k}]{} \exists\, a \notin A \quad \exists\, (x_k)_k \subset A: \ d(x_k, a) < \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \curvearrowright \exists\, (x_k)_k \subset A: \lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \notin A$ □

Definition 9.2.4 **(i)** *Ein metrischer Raum $[M,d]$ heißt* vollständig, *wenn jede Cauchy-Folge in $[M,d]$ konvergiert.*

(ii) *Ein normierter Raum $[N, \|\cdot\|]$ heißt* vollständig (Banach-Raum), *wenn der (zugehörige) metrische Raum $[N,d]$ mit $d(x,y) = \|x-y\|$ ein vollständiger metrischer Raum ist.*

Bemerkung*:
- Nicht jeder normierte Raum ist vollständig.
- Vollständigkeit kann von gewählter Norm abhängen.
- Unterräume vollständiger Räume müssen nicht vollständig sein.

Beispiele:
- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ mit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ vollständig
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^n$ mit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ nicht vollständig
- $\mathrm{C}(M)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ vollständig (Bem. nach Satz 5.2.3)
- $\mathrm{B}(M) = \{f : M \to \mathbb{K} : \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in M} |f(x)| < \infty\}$ vollständig
  Raum der beschränkten Funktionen

Beispiele :

- $\mathsf{C}[a,b]$ mit $\|\cdot\|_1$ nicht vollständig, z.B. $[a,b]=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\|f\|_1=\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(\frac{1}{n},\frac{1}{2}]\\ nx, & x\in(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\\ -1, & x\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{n})\end{cases} \curvearrowright\ f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\frac{1}{2}]\\ 0, & x=0\\ -1, & x\in[-\frac{1}{2},0)\end{cases}$$

$\curvearrowright$ $f_n\in\mathsf{C}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $f\notin\mathsf{C}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, <u>z.z.</u>: $(f_n)_n$ Cauchyfolge in $\mathsf{C}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, nicht konvergent

sei $m>n$ $\curvearrowright$ $\|f_n-f_m\|_1=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\|f_n-f\|_1=\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Annahme: $\exists\ g\in\mathsf{C}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]:\|f_n-g\|_1\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\curvearrowright$ $\|g-f\|_1=0$

$\curvearrowright$ $\forall\ \delta\in(0,\frac{1}{2}]:\int_{-\delta}^0|g(x)+1|\,\mathrm{d}x=0=\int_0^\delta|g(x)-1|\,\mathrm{d}x$ $\curvearrowright$ $\lightning$ g stetig in 0

- $\mathcal{P}=\{p:[a,b]\to\mathbb{K},\ p \text{ Polynom}\}\subset\mathsf{C}[a,b]$ ... Polynome, Teilraum von $\mathsf{C}[a,b]$

$\mathcal{P}$ mit $\|\cdot\|_\infty$ nicht vollständig: betrachten $p_m(x)=\sum\limits_{k=0}^m\frac{x^k}{k!}\in\mathcal{P}$, $(p_m)_{m=0}^\infty$ Cauchy-Folge, $p_m\xrightarrow[m\to\infty]{\text{in }\mathsf{C}[a,b]}f\in\mathsf{C}[a,b]$, $f(x)=\exp(x)=e^x\notin\mathcal{P}$

9.3 Kompaktheit

Definition 9.3.1 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum, $K\subseteq M$. K heißt* (folgen)kompakt, *wenn gilt:*

(i) *K ist abgeschlossen,*

(ii) *jede Folge aus K enthält eine konvergente Teilfolge.*

Bemerkung*: *später:* $[M,d]$ metrischer Raum, $K\subseteq M$

- K *präkompakt* $\Longleftrightarrow$ für jede Folge in K existiert eine (in M) konvergente Teilfolge
- K kompakt $\Longleftrightarrow$ K abgeschlossen und präkompakt

Folgerung 9.3.2 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum, $K\subseteq M$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn jede Folge aus K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ folgt aus Def. 9.3.1 und Satz 9.1.6(iii)

„$\Longleftarrow$“ <u>g.z.z.</u>: K abgeschlossen; verwenden Folgerung 9.2.3: sei $(x_n)_n\subset K$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in M$

$\underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ (x_{n_k})_k\subset(x_n)_n\ \exists\ x_0\in K:\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ $\xRightarrow[\text{Satz 2.2.2(i)}]{}$ $x=x_0\in K$ $\xRightarrow[\text{Folg. 9.2.3}]{}$ K abgeschlossen $\square$

Definition 9.3.3 *Seien I eine beliebige Indexmenge und die Mengen U_α, $\alpha\in I$, offen, und $K\subset M$.*

(i) *Das System $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ heißt* offene Überdeckung *von K, falls gilt $K\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$.*

(ii) *Sei $I_0\subset I$. Dann heißt $\{U_\gamma\}_{\gamma\in I_0}$* offene Teilüberdeckung *von K, falls gilt $K\subset\bigcup_{\gamma\in I_0}U_\gamma$.*

(iii) *K heißt* überdeckungskompakt, *wenn zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung existiert.*

Satz 9.3.4 (Heine[31]- Borel[32])
Seien $[M,d]$ metrischer Raum, $K\subset M$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *K (folgen)kompakt*

(ii) *K überdeckungskompakt*

(iii) *Jede unendliche Teilmenge von K besitzt einen Häufungspunkt in K.*

B e w e i s*: <u>*1. Schritt*</u>: seien K (folgen)kompakt, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung; zeigen zunächst

$$\exists\, \varepsilon>0 \quad \forall\, x\in K \quad \exists\, \alpha\in I:\ K_\varepsilon(x)\subset U_\alpha \tag{$*$}$$

indirekt, <u>Annahme</u>: $(*)$ falsch, d.h. (mit $\varepsilon=\frac{1}{n}$)

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \quad \exists\, x_n\in K \quad \forall\, \alpha\in I: K_{1/n}(x_n)\not\subset U_\alpha$$

$(x_n)_n\subset K \xRightarrow[K \text{ kompakt}]{} \exists\,(x_{n_k})_k\subset(x_n)_n$ in K konvergente Teilfolge, d.h. $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} x^0\in K$

$x^0\in K\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha \curvearrowright \exists\,\alpha_0\in I: x^0\in U_{\alpha_0} \xRightarrow[U_{\alpha_0}\text{ offen}]{} \exists\,\varepsilon_0>0: K_{\varepsilon_0}(x^0)\subset U_{\alpha_0}$

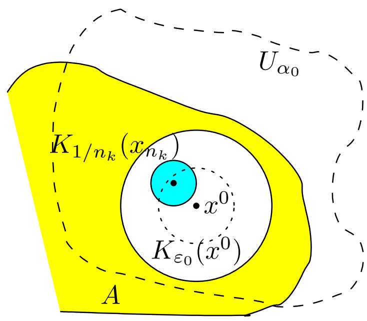
$x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} x^0 \curvearrowright \exists\, k_0 \quad \forall\, k\geq k_0: d(x_{n_k},x^0)<\frac{\varepsilon_0}{2},\ \frac{1}{n_k}<\frac{\varepsilon_0}{2}$

sei $x\in K_{\varepsilon_0/2}(x_{n_k}),\ k\geq k_0$

$$\curvearrowright\ d(x,x^0)\leq d(x,x_{n_k})+d(x_{n_k},x^0)<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0$$

$\curvearrowright\ K_{1/n_k}(x_{n_k})\subset K_{\varepsilon_0/2}(x_{n_k})\subset K_{\varepsilon_0}(x^0)$

$\curvearrowright\ K_{1/n_k}(x_{n_k})\subset K_{\varepsilon_0}(x^0)\subset U_{\alpha_0},\ k\geq k_0$ $\lightning$ zur Annahme



<u>*2. Schritt*</u>: $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ seien $K\neq\emptyset$ (folgen)kompakt, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ offene Überdeckung; wählen $\varepsilon>0$ aus $(*)$;
sei $x_1\in K \underset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\,\alpha_1\in I:\ K_\varepsilon(x_1)\subset U_{\alpha_1}$;
wählen $x_2\in K\setminus K_\varepsilon(x_1) \curvearrowright d(x_2,x_1)\geq\varepsilon$, $\exists\,\alpha_2\in I:\ K_\varepsilon(x_2)\subset U_{\alpha_2}$;
Iteration $\curvearrowright$ wählen $x_n\in K\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}K_\varepsilon(x_k) \curvearrowright \min_{k\neq i} d(x_k,x_i)\geq\varepsilon$, $\exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in I:\ \bigcup_{k=1}^{n}K_\varepsilon(x_k)\subset\bigcup_{k=1}^{n}U_{\alpha_k}$;

<u>g.z.z.</u>: $\exists\, m\in\mathbb{N}:\ K\setminus\bigcup_{k=1}^{m}K_\varepsilon(x_k)=\emptyset$ (Folge bricht ab)

indirekt, <u>Annahme</u>: $\forall\, m\in\mathbb{N}:\ K\setminus\bigcup_{k=1}^{m}K_\varepsilon(x_k)\neq\emptyset \curvearrowright \exists\,(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset K: d(x_i,x_k)\geq\varepsilon>0,\ i\neq k$

$\curvearrowright\ \exists\,(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset K:(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge $\lightning$ zu K kompakt

$\curvearrowright\ \exists\, m\in\mathbb{N}:\ K\subset\bigcup_{k=1}^{m-1}K_\varepsilon(x_k)\subset\bigcup_{k=1}^{m-1}U_{\alpha_k}$

<u>*3. Schritt*</u>: $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ sei $A\subset K$ unendlich, <u>z.z.</u>: A hat Häufungspunkt in K

indirekt, <u>Annahme</u>: A hat keinen Häufungspunkt in $K \xRightarrow[\text{Satz 9.1.4}]{} A$ abgeschlossen,
$\forall\, m\in A \quad \exists\,\varepsilon_m>0:\ A\cap K_{\varepsilon_m}(m)=\{m\} \curvearrowright A\subset\bigcup_{m\in A}K_{\varepsilon_m}(m)\subset M$

$M\setminus A$ offen $\curvearrowright K\ \subset(M\setminus A)\cup\bigcup_{m\in A}K_{\varepsilon_m}(m)=:\bigcup_{\alpha\in I_A}U_\alpha$ offene Überdeckung

$\underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \exists\,\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}\subset\{U_\alpha\}_{\alpha\in I_A}:K\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i} \curvearrowright \#A=\#\{x\in M: x\in K\cap A\}\leq n<\infty$ $\lightning$

<u>*4. Schritt*</u>: $\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ sei $(x_k)_k\subset K$ beliebige Folge

falls $\#\{x_k: k\in\mathbb{N}\}<\infty$ (nur endlich viele verschiedene Werte) $\curvearrowright$ es existiert eine konvergente Teilfolge
falls $\#A=\#\{x_k: k\in\mathbb{N}\}=\infty \underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \exists\, x^0$ Häufungspunkt für $(x_k)_k \curvearrowright \exists\,(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}\subset(x_k)_{k\in\mathbb{N}}: x_{k_l}\xrightarrow[l\to\infty]{} x^0$ □

---

[31]Heinrich Eduard Heine (* 16.3.1821 Berlin † 21.10.1881 Halle)
[32]Félix Edouard Justin Emile Borel (* 7.1.1871 Aveyron/Frankreich † 3.2.1956 Paris)

Bemerkung*:

- ausreichend zur Bezeichnung: K kompakt
- K endlich $\xRightarrow[\text{Satz 9.3.4}]{}$ K kompakt

Lemma 9.3.5 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum, $K \subseteq M$, wobei jede Folge aus K eine konvergente Teilfolge enthalte. Dann ist K beschränkt.*

Beweis: <u>1. Schritt</u>: zeigen zunächst: K beschränkt $\iff \forall\, x \in K \quad \exists\, r > 0: \; K \subset K_r(x)$ $\qquad (*)$

„$\Longrightarrow$“ K beschränkt $\curvearrowright\; \exists\, y_0 \in K\; \exists\, D > 0\; \forall\, y \in K: \; d(y,y_0) \le D$, wählen $r > D + d(x,y_0)$

$$\curvearrowright\; \forall\, y \in K: \; d(x,y) \le d(x,y_0) + d(y_0,y) \le d(x,y_0) + D < r \;\curvearrowright\; K \subset K_r(x)$$

„$\Longleftarrow$“ $K \subset K_r(x) \;\curvearrowright\; \operatorname{diam} K \le 2r < \infty \;\curvearrowright\; K$ beschränkt

<u>2. Schritt</u>: indirekt, Annahme: K nicht beschränkt $\xRightarrow[\text{1. Schritt}]{}$ $\exists\, x \in K \quad \forall\, r > 0 \quad \exists\, y_r \in K \setminus K_r(x)$

$\curvearrowright\; \exists\, x \in K \quad \exists\, (r_k)_k \subset \mathbb{R}_+ \quad \exists\, (y_k)_k \subset K: \; r_k \le d(y_k,x) < r_{k+1}$, o.B.d.A. $r_{k+1} \ge r_k + 1,\; k \in \mathbb{N}$

$\curvearrowright\; \exists\, x \in K,\; (y_k)_k \subset K: d(y_k,y_{k+m}) \ge d(y_{k+m},x) - d(y_k,x) > r_{k+m} - r_{k+1} \underset{m \ge 2}{\ge} r_{k+2} - r_{k+1} \ge 1$

$\curvearrowright\; \exists\, (y_k)_k \subset K: (y_k)_k$ besitzt keine konvergente Teilfolge $\lightning$ $\qquad \square$

Folgerung 9.3.6 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum, $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.*

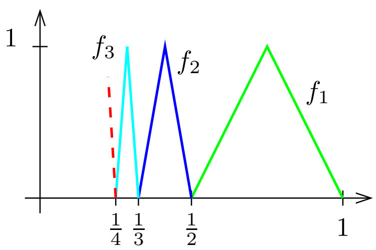
Beweis: Def. 9.3.1 und Folg. 9.3.6 $\qquad \square$

Beispiel: Umkehrung i.a. falsch: betrachten $\mathsf{C}[0,1]$, $A = \{f \in \mathsf{C}[0,1] : \|f|\mathsf{C}[0,1]\| \le 1\} \;\curvearrowright\; A$ beschränkt, A abgeschlossen:

sei $(g_n)_n \subset A,\; g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \in \mathsf{C}[0,1] \;\curvearrowright\; \|g|\mathsf{C}[0,1]\| \le \underbrace{\|g - g_n|\mathsf{C}[0,1]\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|g_n|\mathsf{C}[0,1]\|}_{\le 1} \le 1$

$\curvearrowright\; g \in A;$ aber A nicht kompakt: betrachten ‘Hutfunktionen’ $f_n : [0,1] \to [0,1]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ 2n(n+1)x - 2n, & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right) \\ -2n(n+1)x + 2(n+1), & x \in \left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$



$\curvearrowright\; f_n \in \mathsf{C}[0,1],\; \|f_n|\mathsf{C}[0,1]\| = 1 \;\curvearrowright\; (f_n)_n \subset A$,
aber $\|f_n - f_m|\mathsf{C}[0,1]\| = 1,\; n \ne m \;\curvearrowright\; (f_n)_n$ enthält keine konvergente Teilfolge $\curvearrowright\; A$ nicht kompakt

Bemerkung*:

- K präkompakt $\xRightarrow[\text{Lemma 9.3.5}]{}$ K beschränkt; Umkehrung i.a. (d.h. in unendlich-dimensionalen) Räumen falsch
- in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auch Umkehrung richtig (Bolzano-Weierstraß, Satz 2.2.3 bzw. Folg. 2.2.6)

Satz 9.3.7 *Sei $[\mathbb{R}^n, d_2]$ gegeben. Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Folg. 9.3.6; „$\Longleftarrow$“ verwenden Folg. 9.3.2 und vollständige Induktion

$n=1$: Satz 2.2.3 (Bolzano-Weierstraß) bzw. Folg. 2.2.6

$n \to n+1$: sei $(x^k)_k \subset K \xRightarrow[K \text{ beschränkt}]{} (x^k)_k$ beschränkt, $x^k = (\overbrace{x_1^k, \ldots, x_n^k}^{\xi^k}, x_{n+1}^k) =: (\xi^k, x_{n+1}^k)$, $k \in \mathbb{N}$

$(\xi^k, x_{n+1}^k)_k$ beschränkt $\curvearrowright$ $(\xi^k)_k$ beschränkt in $\mathbb{R}^n \xRightarrow[\text{Ind.vor.}]{} \exists\, (\xi^{k_l})_l \subset (\xi^k)_k \quad \exists\, \xi^0 \in \mathbb{R}^n :\ \xi^{k_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \xi^0$

$(x_{n+1}^{k_l})_l \subset (x_{n+1}^k)_k$ beschränkt in $\mathbb{R} \xRightarrow[\text{Ind.anf.}]{} \exists\, (x_{n+1}^{k_{l_m}})_m \subset (x_{n+1}^{k_l})_l \quad \exists\, x_{n+1}^0 \in \mathbb{R} :\ x_{n+1}^{k_{l_m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_{n+1}^0$

$\curvearrowright\ \exists\, (x^{k_{l_m}})_m \subset (x_n)_n\ \exists\, x^0 = (\xi^0, x_{n+1}^0) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x^{k_{l_m}} = (\xi^{k_{l_m}}, x_{n+1}^{k_{l_m}}) \xrightarrow[m\to\infty]{} x^0 \xRightarrow[K \text{ abg.}]{\text{Folg. 9.2.3}} x^0 \in K$

$\xRightarrow[\text{Folg.9.3.2}]{} K$ kompakt □

9.4 Stetige Abbildungen

Definition 9.4.1 *Seien* $[M_1, d_1]$ *und* $[M_2, d_2]$ *metrische Räume, und* F *eine Abbildung von* M_1 *in* M_2.

(i) F *heißt* stetig in $x^0 \in M_1$, *wenn gilt:* $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, x^0) > 0 \quad \forall\, x \in M_1,\ d_1\left(x, x^0\right) < \delta :$ $d_2\left(F(x), F(x^0)\right) < \varepsilon$.

(ii) F *heißt* stetig in $U \subseteq M_1$, *wenn* F *in jedem* $x^0 \in U$ *stetig ist.*

(iii) F *heißt* gleichmäßig stetig in $U \subseteq M_1$, *wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in U,\ d_1(x_1, x_2) < \delta :\ d_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon.$$

(iv) F *heißt* Lipschitz-stetig auf $U \subseteq M_1$, *wenn gilt:*

$$\exists\, L > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in U :\ d_2(F(x_1), F(x_2)) \le L\, d_1(x_1, x_2).$$

Bemerkung*: $[M_1, d_1]$, $[M_2, d_2]$ metrische Räume, $F : M_1 \to M_2$, $U \subseteq M_1$

- F Lipschitz-stetig in $U \xRightarrow[\text{à la Lemma 8.4.2}]{} F$ gleichmäßig stetig in U $\curvearrowright$ F stetig in U
- $[M_1, d_1] = [M_2, d_2] = [\mathbb{R}, |\cdot|]$ $\curvearrowright$ Definition 9.4.1 entspricht Definitionen 4.1.2, 8.4.1
- F stetig in $x_0 \in M_1$ genau dann, wenn für alle Umgebungen $V \subseteq M_2$ von $F(x_0)$ eine Umgebung $U \subseteq M_1$ von x_0 existiert, so dass $F(U) \subseteq V$ gilt. (Übung)
- F stetig im Häufungspunkt $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$ ($\sim$ Folg. 4.1.5)

$$\iff \forall\, (x_k)_{k=1}^\infty \subset M_1,\ \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 :\ \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Beispiele : **(1)** $[M_1, d_1] = [M_2, d_2] = [\mathbb{R}, |\cdot|]$

z.B. *Polynome* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$, *Potenzreihen* $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$;

insbesondere $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$, ...

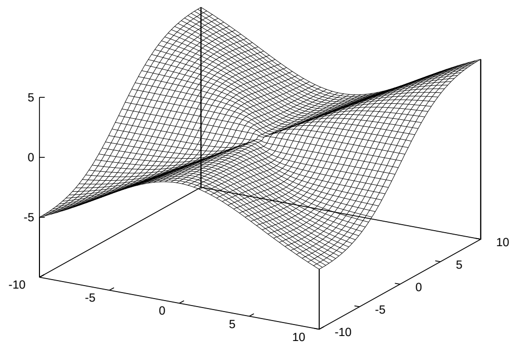
(2) $[M_1, d_1] = [\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1]$, $[M_2, d_2] = [\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1]$ (*siehe Abschnitt 9.6*)

$$y = Ax \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad j = 1, \ldots, m$$

$A \ldots (m,n)-$Matrix (*lineare Abbildung*)

(3) $\big[M_1, d_1\big] = \big[\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\big], \ \big[M_2, d_2\big] = \big[\mathbb{R}, |\cdot|\big]$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(x,y)$ stetig in $(x^0, y^0) = (0,0)$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le \frac{|x|}{2} < \varepsilon$$

für $\|(x,y) - (0,0)\|_1 = |x| + |y| < \delta \le 2\varepsilon$

(4) $\big[M_1, d_1\big] = \big[M_2, d_2\big] = \big[\mathsf{C}[a,b], d_{\mathsf{C}}\big], \quad d_{\mathsf{C}}(f,g) = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$

(i) $Q : \mathsf{C}[a,b] \longrightarrow \mathsf{C}[a,b], \quad Q : f \mapsto f^2 + 1$

(ii) $F : \mathsf{C}[a,b] \longrightarrow \mathsf{C}[a,b], \quad F : f \mapsto \Phi, \quad (F(f))(x) = \Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \ \ x \in [a,b]$

Sei $f_0 \in \mathsf{C}[a,b]$,
$$\begin{aligned} \|F(f) - F(f_0)\|_\infty &= \sup_{a \le x \le b} \left| \int_a^x (f(t) - f_0(t))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\le \sup_{a \le t \le b} |f(t) - f_0(t)| \sup_{a \le x \le b} (x-a) \\ &= \|f - f_0\|_\infty (b-a) \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ F stetig in jedem $f_0 \in \mathsf{C}[a,b]$, sogar Lipschitz-stetig in $\mathsf{C}[a,b]$

(iii) $\mathbf{K} : \mathsf{C}[a,b] \longrightarrow \mathsf{C}[a,b], \quad \mathbf{K} : f \mapsto \mathbf{K}f, \quad (\mathbf{K}f)(x) = \int\limits_a^b k(x,t)\ f(t)\ \mathrm{d}t, \ \ x \in [a,b]$

$k(x,t) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, beschränkt

$$\Longrightarrow \quad \|\mathbf{K}f - \mathbf{K}g\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} \left| \int_a^b k(x,t)\ (f(t) - g(t))\ \mathrm{d}t \right|$$

$$\le \sup_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)| \sup_{a \le x \le b} \int_a^b \underbrace{|k(x,t)|}_{\le M}\ \mathrm{d}t \ \le \ \|f - g\|_\infty M\ (b-a)$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{K}$ (Lipschitz-) stetig in $\mathsf{C}[a,b]$ <u>*Fredholm[33]scher Integraloperator*</u>

(iv) $\mathcal{K} : \mathsf{C}[a,b] \longrightarrow \mathsf{C}[a,b], \quad \mathcal{K} : f \mapsto \mathcal{K}f, \quad (\mathcal{K}f)(x) = \int\limits_a^x k(x, f(t))\ \mathrm{d}t, \ \ x \in [a,b]$

$k(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und genüge bezüglich y einer Lipschitz-Bedingung, d.h. es existiere ein $L > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$ und alle $y, y' \in \mathbb{R}$ gilt

$$|k(x,y) - k(x,y')| \ \le \ L\ |y - y'|$$

[33] Erik Ivar Fredholm (* 7.4.1866 Stockholm † 17.8.1927 Stockholm)

$$\|\mathcal{K}f - \mathcal{K}g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} \left| \int_a^x [k(x,f(t)) - k(x,g(t))]\,\mathrm{d}t \right| \le \sup_{a\le x\le b} \int_a^x \underbrace{|k(x,f(t)) - k(x,g(t))|}_{\le L\ |f(t)-g(t)|}\,\mathrm{d}t$$
$$\le L \sup_{a\le t\le b} |f(t)-g(t)| \sup_{a\le x\le b} \int_a^b \mathrm{d}t = L\,(b-a)\,\|f-g\|_\infty$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{K}$ (Lipschitz-) stetig in $\mathrm{C}[a,b]$

Satz 9.4.2 *Seien $[M,d]$ ein metrischer Raum und N ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Funktionen $f,g : M \to N$ seien stetig in $x_0 \in M$.*

(i) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + \mu g : M \to N$ stetig in x_0.*

(ii) *Für $N = \mathbb{K}$ ist auch fg stetig in x_0; falls $g(x_0) \neq 0$ gilt, so ist auch die Funktion $\dfrac{f}{g}$ stetig in x_0.*

(iii) *Falls f auf M (Lipschitz-)stetig ist, so ist auch $\|f\| : M \to [0,\infty)$ (Lipschitz-)stetig auf M.*

(iv) *Ist $N = \mathbb{R}$ und $f(x_0) > 0$, so existiert ein $\delta = \delta(x_0) > 0$, so dass für alle $x \in K_\delta(x_0) \subset M$ gilt: $f(x) > 0$.*

B e w e i s : in Analogie zu Satz 4.2.1 und Übungen □

Satz 9.4.3 *Seien $[M_i, d_i]$, $i = 1,2,3$, metrische Räume.*

(i) *Sind $f : M_1 \to M_2$ stetig in $x_0 \in M_1$ und $g : M_2 \to M_3$ stetig in $y_0 = f(x_0) \in M_2$, so ist $g \circ f : M_1 \to M_3$ stetig in x_0.*

(ii) *Seien $K \subseteq M_1$ kompakt und $f : M_1 \to M_2$ stetig auf K. So gelten folgende Aussagen:*

- *$f(K)$ ist kompakt,*
- *f gleichmäßig stetig auf K,*
- *Falls f injektiv ist auf K, so existiert $f^{-1} : f(K) \to K$ und ist stetig auf $f(K)$.*
- *Ist $[M_2, d_2] = [\mathbb{R}, |\cdot|]$, so existieren $x_* \in K$ und $x^* \in K$, für die gilt*

$$f(x_*) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x), \qquad f(x^*) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x).$$

Insbesondere ist f beschränkt auf K.

B e w e i s : siehe Sätze 4.2.2, 4.2.5, 4.3.2, nur zur Umkehrfunktion:
sei $y^0 \in f(K)$, $(y_k)_k \subset f(K)$ mit $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} y^0$ (in M_2); <u>z.z.</u>: $f^{-1}(y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f^{-1}(y^0)$

$y^0, y_k \in f(K) \curvearrowright \exists\, x^0, x_k \in K : f(x^0) = y^0,\ f(x_k) = y_k \iff x^0 = f^{-1}(y^0),\ x_k = f^{-1}(y_k)$

$(x_k)_k \subset K \xRightarrow[K \text{ kompakt}]{} \exists\, (x_{k_m})_m \subset (x_k)_k \quad \exists\, x \in K :\ x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

$\xRightarrow[f \text{ stetig in } K]{} y_{k_m} = f(x_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x) = y^0 = f(x^0) \xRightarrow[f \text{ injektiv}]{} x = x^0$, analog gilt für beliebige Häufungspunkte $x^* = x^0 \curvearrowright (x_k)_k$ beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt $\curvearrowright (x_k)_k$ konvergent, d.h. $f^{-1}(y_k) = x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^0 = f^{-1}(y^0)$ □

Bemerkung*: $(x_k)_k \subset K$, alle Teilfolgen von $(x_k)_k$ konvergieren gegen x^0; <u>z.z.</u>: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^0$

Annahme: $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N} \quad \exists\, k_l : d(x_{k_l}, x^0) > \varepsilon$, o.B.d.A. $k_{l+1} > k_l$

$\curvearrowright \exists\, (x_{k_l})_l \subset (x_k)_k :\ (x_{k_l})_l$ nicht konvergent gegen x^0

andererseits $(x_{k_l})_l \subset K \xRightarrow[K \text{ kompakt}]{} \exists\, (x_{k_{l_m}})_m \subset (x_{k_l})_l \quad \exists\, \xi \in K :\ x_{k_{l_m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} \xi \neq x^0$ ↯

9.5 Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 9.5.1 *Sei* $[M,d]$ *ein metrischer Raum. Eine Abbildung* $F : M \to M$ *heißt* kontrahierend, *falls es eine Zahl* α *mit* $0 \le \alpha < 1$ *gibt, so dass für alle* $x, x' \in M$ *gilt:*

$$d\left(F(x), F(x')\right) \le \alpha\, d(x, x').$$

Bemerkung*: Eine kontrahierende Abbildung ist Lipschitz- und damit auch gleichmäßig stetig.

Beispiele : (2i) $[M,d] = [\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1] \quad (n = m)$

$$y = Ax \iff y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1,\dots,n, \quad A \dots (n,n)\text{–Matrix}$$

$$\begin{aligned} \|Ax - Ax'\|_1 &= \sum_{j=1}^n |y_j - y'_j| &&= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{jk}\,(x_k - x'_k) \right| \\ &\le \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|\; |x_k - x'_k| &&= \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n |a_{jk}| \Big)\; |x_k - x'_k| \\ &\le \Big(\max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}| \Big) \|x - x'\|_1 \end{aligned}$$

d.h. $\max\limits_{k=1,\dots,n} \Big(\sum\limits_{j=1}^n |a_{jk}| \Big) < 1 \implies A$ Kontraktion in $[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1]$

(4ii) $F : \mathrm{C}[a,b] \longrightarrow \mathrm{C}[a,b], \quad F : f \mapsto \Phi, \quad (F(f))(x) = \Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$

$\|F(f) - F(f_0)\|_\infty \le \|f - f_0\|_\infty (b-a) \curvearrowright F$ Kontraktion in $\mathrm{C}[a,b]$ für $(b-a) < 1$

(4iii) $\mathbf{K} : \mathrm{C}[a,b] \longrightarrow \mathrm{C}[a,b], \quad \mathbf{K} : f \mapsto \mathbf{K}f, \quad (\mathbf{K}f)(x) = \int\limits_a^b k(x,t)\; f(t)\; \mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$, und

$k(x,t) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig

$\|\mathbf{K}f - \mathbf{K}g\|_\infty \le \|f - g\|_\infty M(b-a) \curvearrowright \mathbf{K}$ Kontraktion in $\mathrm{C}[a,b]$ für $M(b-a) < 1$

(4iv) $\mathcal{K} : \mathrm{C}[a,b] \longrightarrow \mathrm{C}[a,b], \quad \mathcal{K} : f \mapsto \mathcal{K}f, \quad (\mathcal{K}f)(x) = \int\limits_a^x k\left(x, f(t)\right)\; \mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$, wobei

$k(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sei und bezüglich y einer Lipschitz-Bedingung genüge

$\|\mathcal{K}f - \mathcal{K}g\|_\infty \le L(b-a)\,\|f - g\|_\infty \curvearrowright \mathcal{K}$ Kontraktion in $\mathrm{C}[a,b]$ für $L(b-a) < 1$

Bemerkung*: in (2i): setzen $M = \max\limits_{j,k=1,\dots,n} |a_{jk}| \underset{\text{s.o.}}{\implies} \|Ax\|_1 \le nM\|x\|_1 \xRightarrow[\text{Lemma 1.4.4}]{} \|Ax\|_2 \le n^2 M \|x\|_2$

aus linearer Algebra für Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $|\langle x,y\rangle| \le |\langle x,x\rangle||\langle y,y\rangle|$, für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^n x_k y_k \curvearrowright \langle x,x\rangle = \|x\|_2^2$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \le \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Bunyakovsky[34]-Schwarz[35]-Ungleichung bzw. auch spezielle Hölder[36]-Ungleichung

$\curvearrowright$ damit kann man sogar zeigen: $\|Ax\|_2 \le Mn\|x\|_2$

[34] Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (* 16.12.1804 Bar/Ukraine † 12.12.1889 St. Petersburg)
[35] Hermann Amandus Schwarz (* 25.1.1843 Hermsdorf (Schlesien) † 30.11.1921 Berlin)
[36] Otto Ludwig Hölder (* 22.12.1859 Stuttgart † 29.8.1937 Leipzig)

Satz 9.5.2 *Seien* $[M,d]$ *ein vollständiger metrischer Raum und* F *eine kontrahierende Abbildung in* M. *Dann gibt es genau einen Fixpunkt* $x^* \in M$ *mit* $F(x^*) = x^*$.

Beweis : Sei $x_0 \in M$ beliebig gewählt; wir definieren iterativ eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ durch

$$x_{n+1} = F(x_n)\ , \quad n \in \mathbb{N}$$

(*möglich, da* $F: M \longrightarrow M$ *abbildet*). Sei $k \in \mathbb{N}$,

$$\Longrightarrow \quad d(x_{k+1}, x_k) \ = \ d\left(F(x_k), F(x_{k-1})\right) \underset{F \text{ kontrahierend}}{\leq} \alpha\, d\left(x_k, x_{k-1}\right) \ \leq \ \cdots \ \leq \ \alpha^k\ d(x_1, x_0)$$

Also gilt für $j > \ell$,

$$\begin{aligned} d(x_j, x_\ell) \ \leq \ \sum_{k=\ell}^{j-1} d(x_{k+1}, x_k) \quad & \leq \ \sum_{k=\ell}^{j-1} \alpha^k\ d(x_1, x_0) \quad = \ d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{j-\ell-1} \alpha^{\ell+i} \\ = \ \alpha^\ell\ d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{j-\ell-1} \alpha^i \ & \leq \ \alpha^\ell\ d(x_1, x_0) \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i}_{=\frac{1}{1-\alpha}} \ = \ \underbrace{\frac{\alpha^\ell}{1-\alpha}}_{\xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad d(x_j, x_\ell) \xrightarrow[j,\ell\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x_j)_{j=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge in $[M,d]$,

$[M,d]$ vollständig $\quad \Longrightarrow \quad \exists\ x^* \in M\ :\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$;

F stetig $\overset{}{\underset{\text{Folg. 4.1.5}}{\Longrightarrow}} \lim\limits_{k\to\infty} F(x_k) \ = \ F(x^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} \ = \ F(x^*) \quad \Longleftrightarrow \quad x^* \ = \ F(x^*)$

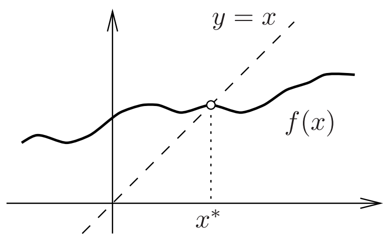
<u>n.z.z.</u> : Eindeutigkeit, <u>*Annahme*</u> : $\exists\ x \neq y\ :\ x = F(x), \quad y = F(y)$

$\Longrightarrow \quad 0 < d(x,y) \ = \ d\left(F(x), F(y)\right) \ \leq \ \alpha\ d(x,y) \quad \Longrightarrow$ Widerspruch zu $\alpha < 1$ □

Bemerkung*: Abschätzung der 'Güte' der Approximation im $n-$ten Schritt :

$$\begin{aligned} d(x_n, x^*) \ & \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) \ \leq \ \alpha^n\ d(x_1, x_0) + d(F(x_n), \underbrace{F(x^*)}_{=x^*}) \\ & \leq \alpha^n\ d(x_1, x_0) + \alpha\ d(x_n, x^*) \\ \curvearrowright\ d(x_n, x^*) \ & \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\ d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Beispiele : (1) $M = \mathbb{R}$, $f(x)$ Funktion mit $|f(x) - f(y)| \ \leq \ \alpha|x-y|$ für ein $\alpha < 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ (*entspricht Lipschitz-Bedingung mit* $L = \alpha$);



nach Satz 7.3.4 (MWS) ist dafür hinreichend

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |f'(\xi)| < 1$$

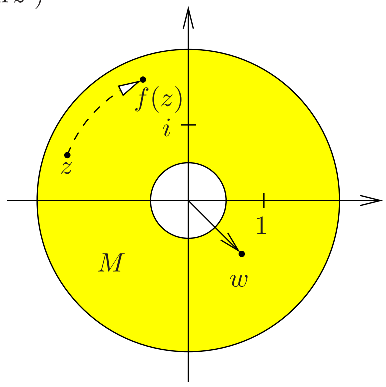
<u>*geometrisch*</u> : $\exists\,!\ x^* : f(x^*) = x^* \quad \Longleftrightarrow$ 'es existiert genau ein Schnittpunkt des Graphen von $f(x)$ mit der Geraden $y = x$'

auch $M = [a,b] \subset \mathbb{R}$ möglich; allerdings muss stets $W(f) \ \subseteq D(f) = [a,b]$ gelten

Beispiele : (2) $\alpha < 1$ (Kontraktion) ist wesentlich : sei $M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 2 \right\} \subset \mathbb{C}$,

$d(z, z') = |z - z'| = \sqrt{(\Re\mathrm{e}\, z - \Re\mathrm{e}\, z')^2 + (\Im\mathrm{m}\, z - \Im\mathrm{m}\, z')^2}$

$$f(z) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right)}_{=:w} z \;=\; w \cdot z$$



geometrisch : Drehung um $-\frac{\pi}{4}$ $\curvearrowright$ kein Fixpunkt!

$$|f(z) - f(z')| \;=\; \underbrace{\left| \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right|}_{=1} \; |z - z'| \;=\; |z - z'|$$

$\Longrightarrow \quad \alpha = 1$

(3) *Lösen eines Gleichungssystems*

$y = Ax \quad \Longleftrightarrow \quad y + (\mathrm{id} - A)x = x, \qquad \mathrm{id}$ ... Einheitsmatrix, A ... $(n,n)-$ Matrix

$Bx := y + (\mathrm{id} - A)x\ , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow$ suchen Fixpunkt x^* von B, $\quad Bx^* = x^*$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{id} - A = \left((b_{jk})_{j,k=1}^n \right), \quad b_{jk} = \left\{ \begin{array}{cc} -a_{jk} & , \; j \neq k \\ 1 - a_{kk} & , \; j = k \end{array} \right\}, \quad j,k = 1, \ldots, n$$

$$\underset{\text{Bsp. (2i), s.o.}}{\Longrightarrow} \quad \|Bx - Bx'\|_1 \;=\; \|(\mathrm{id} - A)\,(x - x')\|_1 \;\leq\; \left(\max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |b_{jk}| \right) \|x - x'\|_1$$

$$= \max_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}| + |1 - a_{kk}| \right) \|x - x'\|_1$$

$\curvearrowright$ B Kontraktion, falls $\displaystyle \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}| + |1 - a_{kk}| < 1$

$\curvearrowright$ dann Gleichungssystem iterativ durch $x_{k+1} = Bx_k$, $k \in \mathbb{N}$, (mit beliebigem x_0) lösbar

(4) *Anwendung Integraloperatoren über* $\mathsf{C}[a,b]$

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y\ , \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad y(0) = 1,$$

d.h. man sucht Lösungen $y = y(x)$, die diese Differentialgleichung (lokal) mit der gegebenen Anfangsbedingung lösen

Dieses Problem kann durch Integration äquivalent zu einem Fixpunktproblem für einen (geeigneten) Integraloperator umgeformt werden: falls gilt

$$\int_0^x \underbrace{y'(t)}_{=y(t)}\, \mathrm{d}t \;=\; y(x) - \underbrace{y(0)}_{1} = y(x) - 1,$$

y^* löst DGL $\Longleftrightarrow$ $y^*(x) = \displaystyle\int_0^x y^*(t)\,\mathrm{d}t + 1$ $\Longleftrightarrow$ $y^* = Fy^*$ mit $(Fy)(x) = \displaystyle\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t + 1$,

$\curvearrowright$ y^* Fixpunkt des Integraloperators F (siehe auch Bsp. (4ii)); betrachten F in $\mathsf{C}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ („bei 0“),

$$\|Ff - Fg\|_\infty \leq \sup_{-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}} \int_0^x |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t \;\leq\; \|f-g\|_\infty \sup_{-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}} |x| \;=\; \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

$\Longrightarrow F$ Kontraktion, $\mathrm{C}\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ vollständig $\xRightarrow[\text{Satz 9.5.2}]{}$ $\exists\,!\; y^* \in \mathrm{C}\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \;:\; y^* = Fy^*$

$\Longleftrightarrow$ Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $y^* \in \mathrm{C}\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ der DGL $y' = y,\; y(0) = 1.$

iterative Bestimmung der Lösung : sei $y_0 = 0$ Startwert, $y_{k+1} = Fy_k,\;\; k \in \mathbb{N}$,

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= \int_0^x \underbrace{0}_{y_0(t)}\,\mathrm{d}t + 1 &&= 1\\
y_2 &= \int_0^x \underbrace{1}_{y_1(t)}\,\mathrm{d}t + 1 &&= 1 + x\\
&\;\vdots\\
y_{k+1} &= \int_0^x \underbrace{\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)}_{y_k(t)}\mathrm{d}t + 1 &&= \sum_{j=0}^{k}\frac{x^j}{j!}
\end{aligned}\right\} \curvearrowright\; \begin{aligned} y^* &= \lim_{k\to\infty} y_{k+1} = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{x^j}{j!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!} = e^x\end{aligned}$$

$\curvearrowright\;\; y(x) = e^x$ ist eindeutig bestimmte Lösung der DGL $y' = y,\; y(0) = 1$ (*erst lokal, dann fortsetzen*)

9.6 Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

$[N, \|\cdot\|] = [\mathbb{R}^n, \|\cdot\|]$, bisher $\|\cdot\| = \|\cdot\|_i,\;\; i = 1, 2, \infty$, betrachtet

<u>*Ziel:*</u> zeigen, dass alle (diese) Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind

Definition 9.6.1 *Sei N ein linearer Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen* äquivalent *auf N falls*

$$\exists\; c_1 > 0,\; c_2 > 0 \quad \forall\, x \in N: \;\; c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 .$$

Bemerkung*: Äquivalente Normen erzeugen gleichen Konvergenzbegriff und gleiche Topologie, d.h. A offen bzgl. $d_1 \sim \|\cdot\|_1 \iff A$ offen bzgl. $d_2 \sim \|\cdot\|_2$

Beispiel : Sei $x \in \mathbb{R}^n \xRightarrow[\text{Lemma 1.4.4}]{} \frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \curvearrowright \|\cdot\|_i,\; i = 1, 2, \infty$, auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent

Bemerkung*: Äquivalenzaussage sogar für $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\;\; 1 \leq p \leq \infty$, richtig

Satz 9.6.2 *In einem endlich-dimensionalen Vektorraum N sind alle Normen zueinander äquivalent.*

B e w e i s : N beliebiger Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N} \curvearrowright \exists\,\{e^1, \ldots, e^n\} \subset N$ Basis in N

$\curvearrowright\; \forall\, x \in N \;\;\exists\, \lambda_i \in \mathbb{K} : x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^k$; o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d.h. $\lambda_k \in \mathbb{R}$; in Analogie zu $\mathbb{R}^n$ definiert man

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\,, \qquad x \in N$$

Sei jetzt $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf N.

<u>*g.z.z.*</u> : $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ sind äquivalent, d.h. $\exists\, D > C > 0 \quad \forall\, x \in N:\ C\|x\|_1 \ \le\ \|x\| \ \le\ D\|x\|_1$

Sei $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e^k \in N \quad \Longrightarrow \quad \|x\| = \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e^k\right\| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|\ \|e^k\| \ \le \max\limits_{k=1,\dots,n} \|e^k\| \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|}_{=\|x\|_1} \ \le\ D\,\|x\|_1$

umgekehrte Abschätzung:

Sei $S = \left\{ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) : \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ die *Oberfläche der Einheitskugel in* $\left[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1\right]$ $\curvearrowright$ $S \subset \mathbb{R}^n$

beschränkt & abgeschlossen $\xrightarrow[\text{Satz 9.3.7}]{}$ S kompakt; betrachten $g : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $g(\lambda_1,\dots,\lambda_n) := \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e^k\right\|$

$\xrightarrow[0 \notin S]{}$ $g(\lambda_1,\dots,\lambda_n) > 0$ auf S, außerdem gilt für beliebige $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n) \in S$:

$$|g(\lambda_1,\dots,\lambda_n) - g(\mu_1,\dots,\mu_n)| = \left| \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^k\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k e^k\right\| \right| \le \left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) e^k\right\| \le\ c \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_k|$$

$\curvearrowright$ g stetig, S kompakt $\xrightarrow[\text{Satz 9.4.3}]{}$ $\exists\ \lambda^* = (\lambda_1^*,\dots,\lambda_n^*)\ :\ g(\lambda_1^*,\dots,\lambda_n^*) \ =\ \min\limits_{\lambda\in S}\, g(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \ =\ C > 0$

Sei $\quad x \in N,\ x \ne 0 \ \curvearrowright\ y = \dfrac{x}{\|x\|_1} \in N,\ y = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k e^k \ \curvearrowright\ 1 = \|y\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |\gamma_k| \ \curvearrowright\ (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in S$

$\curvearrowright\ \|x\| = \|x\|_1 \left\| \underbrace{\dfrac{x}{\|x\|_1}}_{y} \right\| = \|x\|_1\, \underbrace{g(\gamma_1,\dots,\gamma_n)}_{\ge\ g(\lambda_1^*,\dots,\lambda_n^*)} \ge\ C\,\|x\|_1$ mit $\lambda_k = \dfrac{x_k}{\|x\|_1},\ k = 1,\dots,n\ \curvearrowright\ \|x\| \ge\ C\,\|x\|_1$

$\square$

Bemerkung*: $N = \mathbb{R}^n,\ \ \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty,\ e^k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0),\ k = 1,\dots,n\ \curvearrowright\ \left\|e^k\right\|_\infty = 1\ \curvearrowright\ D = 1$

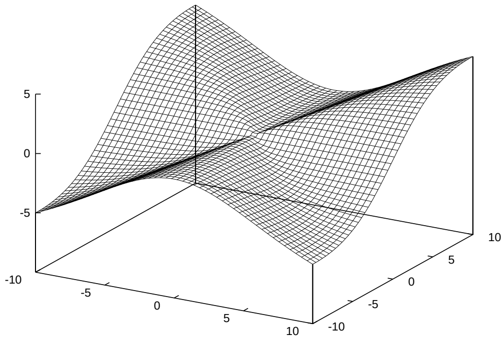
umgekehrt: $\lambda_k^* = \dfrac{1}{n},\ k = 1,\dots,n\ \curvearrowright\ g(\lambda_1^*,\dots,\lambda_n^*) = \dfrac{1}{n}\Big\| \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} e^k}_{=(1,\dots,1)} \Big\|_\infty = \dfrac{1}{n} \sup\limits_{j=1,\dots,n} 1 = \dfrac{1}{n} = C$

$\curvearrowright\ \dfrac{1}{n}\ \|x\|_1 \ \le\ \|x\|_\infty \ \le\ \|x\|_1$

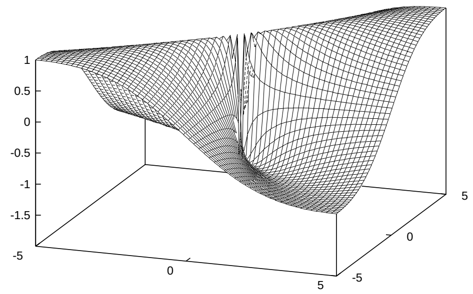
Beispiele : <u>*Funktionen* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$</u>

- $V(R,h) = \pi R^2 h, \quad R > 0, \quad h > 0, \qquad V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
  Volumen eines Kreiszylinders mit Radius $R > 0$ *und Höhe* $h > 0$
- $\mathcal{K}(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,m_1,m_2) = \gamma\ \dfrac{m_1\ m_2}{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$
  $\mathcal{K} : D(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \dots$ *Anziehungskraft zwischen zwei Massen*
- $x = x(r_1,r_2,r_3) = 10\ r_1^{0,2}\ r_2^{0,3}\ r_3^{0,5},\quad x : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
  Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

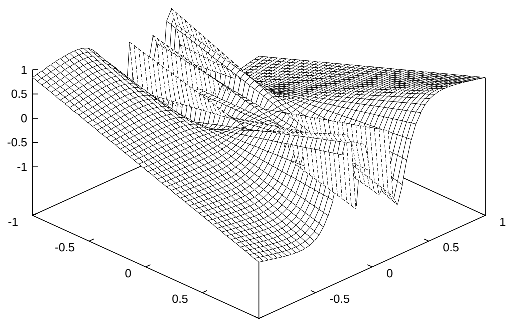
<u>*speziell*</u> : Funktionen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$



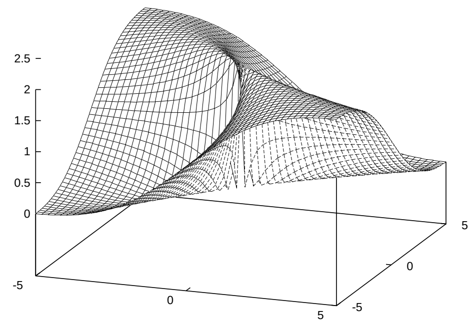
(a) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2\ x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$



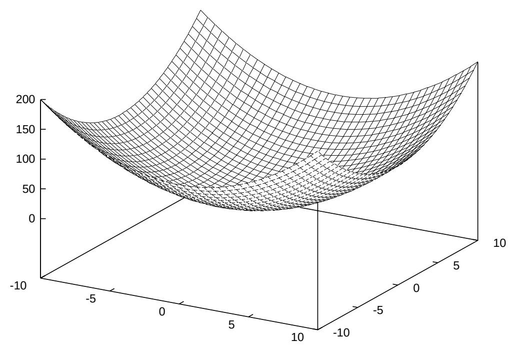
(b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2\ x_1\ x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$



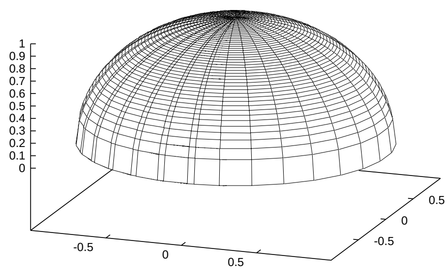
(c) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1\ \sin\left(\dfrac{1}{x_2}\right) & , \quad x_2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x_2 = 0 \end{cases}$



(d) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$



(e) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$



(f) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

Beispiele : betrachten (a)-(f) jeweils in $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (0,0)$, o.B.d.A. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$

(a) $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x_1^2\, x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{Bsp. 9.4(3)}]{} f(x_1,x_2)$ stetig in $(0,0)$

(b) $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x_1,x_2)$ unstetig in $(0,0)$:

sei $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, <u>g.z.z.</u> : $\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, (x_1^\delta, x_2^\delta)$:

$$\left\|(x_1^\delta, x_2^\delta)\right\| = |x_1^\delta| + |x_2^\delta| < \delta, \quad \left|f(x_1^\delta, x_2^\delta) - f(0,0)\right| = \left|f(x_1^\delta, x_2^\delta)\right| \geq \frac{1}{2}$$

sei $\delta > 0$, wählen $x_1^\delta = x_2^\delta = \dfrac{\delta}{3} \Longrightarrow |x_1^\delta| + |x_2^\delta| = \dfrac{2}{3}\delta < \delta$, $\left|f(x_1^\delta, x_2^\delta)\right| = 1 > \dfrac{1}{2}$

(c) $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 \sin\left(\dfrac{1}{x_2}\right) & , \quad x_2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x_2 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x_1,x_2)$ stetig in $(0,0)$:

$$|f(x_1,x_2) - f(0,0)| = \left| x_1 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leq |x_1| \leq \|(x_1,x_2)\|_1 < \delta$$

(d) $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x_1,x_2)$ unstetig in $(0,0)$:

sei $\varepsilon = 1$, <u>g.z.z.</u> : $\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, (x_1^\delta, x_2^\delta)$:

$$\left\|(x_1^\delta, x_2^\delta)\right\| = |x_1^\delta| + |x_2^\delta| < \delta, \quad \left|f(x_1^\delta, x_2^\delta) - f(0,0)\right| = \left|f(x_1^\delta, x_2^\delta)\right| \geq 1$$

sei $\delta > 0$, wählen $x_1^\delta = -x_2^\delta = \dfrac{\delta}{3} \curvearrowright |x_1^\delta| + |x_2^\delta| = \dfrac{2}{3}\delta < \delta$, $\left|f(x_1^\delta, x_2^\delta)\right| = 2 > 1$

(e) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \Longrightarrow f(x_1,x_2)$ stetig in $(0,0)$

(f) $f(x_1,x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \Longrightarrow f(x_1,x_2)$ stetig in $(0,0)$:

$$|f(x_1,x_2) - f(0,0)| = 1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \leq x_1^2 + x_2^2 < \delta^2$$

Lemma 9.6.3 *Ist* $f(x_1,\ldots,x_n)$, $D(f) = M \subset \mathbb{R}^n$, *stetig in* $x^0 \in M$, *so sind die Funktionen* $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1,\ldots,n$, *gegeben durch*

$$\varphi_k(\xi) := f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{\xi}, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

jeweils stetig in x_k^0, $k = 1,\ldots,n$.

Beweis : Sei f stetig in $x^0 \curvearrowright \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D(f), \|x - x_0\| < \delta : \left|f(x) - f(x^0)\right| < \varepsilon$ sei $k \in \{1,\ldots,n\}$, wählen speziell $x = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, \xi, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) \Longrightarrow \|x - x_0\| = |\xi - x_k^0|$ (z.B. für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_i$, $i = 1,2,\infty$) und $\left|f(x) - f(x^0)\right| = \left|\varphi_k(\xi) - \varphi_k(x_k^0)\right|$ □

Bemerkung*: Die Umkehrung ist nicht richtig !, z.B. $f(x_1,x_2)$ wie in **(b)** von oben, $(x_1^0,x_2^0)=(0,0)$

$$f(x_1,x_2)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{2\,x_1\,x_2}{x_1^2+x_2^2} & ,\quad (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0 & ,\quad (x_1,x_2)=(0,0)\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad f(x_1,x_2)\ \text{ unstetig in }\ (0,0)$$

$$\text{aber : } \varphi_1(\xi)=f(\xi,0)\equiv 0\,,\quad \varphi_2(\xi)=f(0,\xi)\equiv 0\quad\Longrightarrow\quad \varphi_1(\xi),\ \varphi_2(\xi)\ \text{ stetig in }\ \xi=0$$

<u>*Wiederholung*</u>:

- x^0 *Häufungspunkt* von $M \iff \exists\ \left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}\subset M \quad \forall\ k\in\mathbb{N}: x^k\neq x^0,\quad \lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$
- $M\subset\mathbb{R}^n$, x^0 Häufungspunkt von M, f Funktion mit $D(f)=M$

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=a \iff \forall\ \left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}\subset D(f),\ x^k\neq x^0,\ \lim_{k\to\infty}x^k=x^0:\ \lim_{k\to\infty} f(x^k)=a$$

- *analog zu Satz 4.1.4 & Folg. 4.1.5:* Sei f mit $D(f)\subset\mathbb{R}^n$ und Häufungspunkt x^0 von $D(f)$ gegeben. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)=f(x^0) \iff f$ stetig in x^0.

Kann der Grenzwert einer Funktion $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ *koordinatenweise gebildet werden ?* $\underset{\text{s.o.}}{\iff}$ Frage der Stetigkeit von $f(x)$ in x^0, d.h.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x_1^0,x_2^0)} f(x_1,x_2) = \lim_{x_1\to x_1^0}\ \lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1,x_2) = \lim_{x_2\to x_2^0}\ \lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1,x_2)$$

ist i.a. nur für (in x^0) stetige $f(x)$ richtig (falls die Grenzwerte überhaupt existieren). Insbesondere folgt aus

$$\lim_{x_1\to x_1^0}\ \lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1,x_2) = \lim_{x_2\to x_2^0}\ \lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1,x_2) = A$$

i.a. <u>nicht</u> die Existenz von $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)=A$!

$\boxed{\textbf{Beispiele}}$: **(b)** $f(x_1,x_2)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{2\,x_1\,x_2}{x_1^2+x_2^2} & ,\quad (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0 & ,\quad (x_1,x_2)=(0,0)\end{array}\right\}$, $f(x_1,x_2)$ unstetig in $(0,0)$

$$\lim_{x_1\to 0}\ \lim_{x_2\to 0} f(x_1,x_2) = \lim_{x_1\to 0}\frac{0}{x_1^2}=0,\quad \lim_{x_2\to 0}\ \lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_2) = \lim_{x_2\to 0}\frac{0}{x_2^2}=0$$

$$x^k=\left(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}\right)\ \curvearrowright\ \lim_{k\to\infty}x^k=(0,0),\ \lim_{k\to\infty}f(x^k)=\lim_{k\to\infty}1=1$$

$$\curvearrowright\ \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)\ \text{existiert nicht}$$

(c) $f(x_1,x_2)=\left\{\begin{array}{ll} x_1\ \sin\left(\dfrac{1}{x_2}\right) & ,\quad x_2\neq 0\\ 0 & ,\quad x_2=0\end{array}\right\}$, $f(x_1,x_2)$ stetig in $(0,0)$

$$\curvearrowright\ \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)=f(0,0)=0$$

$$\lim_{x_1\to 0}\ \lim_{x_2\to 0} f(x_1,x_2) = \lim_{x_1\to 0}\ x_1\ \underbrace{\lim_{x_2\to 0}\sin\left(\frac{1}{x_2}\right)}_{\text{ex. nicht}}\quad \text{existiert nicht,}$$

$$\lim_{x_2\to 0}\ \lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_2) = \lim_{x_2\to 0}\ 0 = 0$$

Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Beispiele :

- Bsp. 9.4.(2i) : $A \dots (m,n)-$Matrix,

$$y = Ax \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{array}{c} y_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k, \\ j = 1, \dots, m \end{array}$$

- $\mathfrak{M}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{\gamma\, m}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\,(x_1,x_2,x_3), \quad D(\mathfrak{M}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

  Gravitationsfeld einer im Koordinatenursprung liegenden punktförmigen Masse m

allgemein : $F(x_1,\dots,x_n) = \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big), \ n,m \in \mathbb{N}, \ D(F) \subseteq \mathbb{R}^n, \ W(F) \subseteq \mathbb{R}^m$

Lemma 9.6.4 *Eine Funktion* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, *gegeben durch*

$$F(x_1,\dots,x_n) = \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) \ ,$$

ist stetig in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn die Funktionen* $f_k(x)$, $D(f_k) = D(F)$, $k = 1,\dots,m$, *in* x^0 *stetig sind.*

Beweis : wählen o.B.d.A. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$; sei $F(x)$ stetig in x^0

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D(F), \ \left\|x - x^0\right\|_1 < \delta \ : \quad \left\|F(x) - F(x^0)\right\| = \sum_{k=1}^{m} \left|f_k(x) - f_k(x^0)\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, k \in \{1,\dots,m\} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D(f_k), \ \left\|x - x^0\right\|_1 < \delta \ : \quad \left|f_k(x) - f_k(x^0)\right| < \varepsilon$$

$\iff \quad f_k(x)$ stetig in x^0, $k = 1,\dots,m$

Seien nun $f_k(x)$ stetig in x^0, $k = 1,\dots,m$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, k \in \{1,\dots,m\} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_k > 0 \quad \forall\, x \in D(f_k), \ \left\|x - x^0\right\|_1 < \delta_k : \quad \left|f_k(x) - f_k(x^0)\right| < \frac{\varepsilon}{m}$$

$$\xRightarrow[\delta = \min \delta_k]{} \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \forall\, x \in D(F), \left\|x - x^0\right\|_1 < \delta : \ \left\|F(x) - F(x^0)\right\| = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left|f_k(x) - f_k(x^0)\right|}_{< \frac{\varepsilon}{m}} < \varepsilon \quad \square$$

Bemerkung*:

- Lemma 9.6.4 $\curvearrowright$ ausreichend, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten anstelle von $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
- Lemma 9.6.3 $\iff$ weitere Reduzierung nicht möglich; für wesentliche Effekte aber oft Situation $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ausreichend
- Linearkombinationen, Produkt und Quotient stetiger $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind wieder stetig, solange die Funktion im Nenner nicht verschwindet (Satz 9.4.2)

Verkettung von Funktionen

Seien $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$, $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow W(f) \subseteq \mathbb{R}$, und $x_k = \varphi_k(t) = \varphi_k(t_1,\dots,t_m)$, $\varphi_k : D(\varphi_k) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow W(\varphi_k) \subseteq \mathbb{R}$, $k = 1,\dots,n$, es gelte $\bigcap\limits_{k=1}^{n} D(\varphi_k) \neq \emptyset$, und $\bigtimes\limits_{k\,=\,1}^{n} W(\varphi_k) \subset D(f)$.

Dann wird durch

$$(f \circ \phi)\,(t) := f\big(\varphi_1(t_1,\dots,t_m),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_m)\big)$$

die zusammengesetzte ('verkettete') Funktion $(f \circ \phi) : D(\phi) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} D(\varphi_k) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert.

Folgerung 9.6.5 *Sind* $f(x)$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, *und* $x = \phi(t)$, $D(\phi) \subseteq \mathbb{R}^m$, *wie oben gegeben und stetig, so ist auch* $(f \circ \phi)$ *auf* $D(\phi)$ *stetig.*

Beweis : Satz 9.4.3 □

Beispiel : $z \;=\; \mathcal{K}(x,y) = \gamma \dfrac{m_1\, m_2}{\|x-y\|_2}$, m_1, m_2 konstant

$x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$ … *zeitabhängige Bahnkurve eines Massepunktes* *mit Masse* m_1
$y(t) = \big(y_1(t), y_2(t), y_3(t)\big)$ *mit Masse* m_2

$$\Longrightarrow \quad z(t) = \mathcal{K}(x(t), y(t)) \;=\; \gamma \frac{m_1\, m_2}{\|x(t)-y(t)\|_2^2} \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Anziehungskraft zwischen zwei Massen m_1 *und* m_2 *zum Zeitpunkt* t

Bemerkung*:

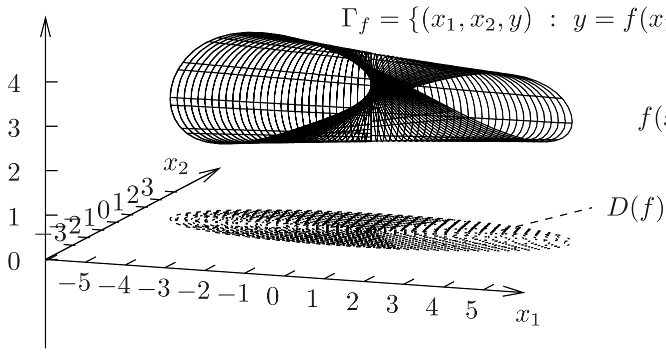
- Satz 9.4.3 als Verallgemeinerung von Sätzen 4.2.2 (Max./Min.), 4.2.5 (glm. Stetigkeit)
- anstelle von Satz 4.2.4 (Zwischenwertsatz): seien $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $D(f)$ zusammenhängend, und es existieren x^0, $x^1 \in D(f)$ mit $f(x^0) \cdot f(x^1) < 0$
  $\curvearrowright\; \exists\, \xi \in D(f) :\; f(\xi) = 0$

10 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

10.1 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $D(f)$ ein *Gebiet*, d.h. eine offene und zusammenhängende Menge sein soll.

Graphische Veranschaulichung der Funktion



$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{x_1}{5} - \frac{x_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{x_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2} + 2 \,, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 2 & , (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

$$D(f) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \left(\frac{x_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 \;<\; 1 \right\}$$

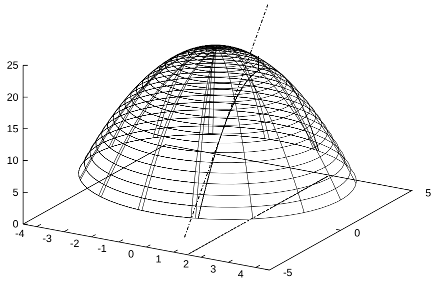
Definition 10.1.1 *Eine Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *mit* $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ *besitzt in* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$ *eine* partielle Ableitung *nach* x_k, $k = 1, \ldots, n$, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}$$

existiert. Er wird dann mit $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ *bezeichnet.*

Bemerkung*: *frühere Bezeichnung :* $f(x_1,\dots,x_n)$ hat partielle Ableitung nach x_k $\iff$ $\varphi_k(\xi)$ ist in $\xi = x_k^0$ differenzierbar, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \;=\; \varphi_k'(x_k^0)$.

Tangente an $\left(x_1^0, x_2^0, f\left(x_1^0, x_2^0\right)\right)$ *mit Anstieg* $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)$



$$f(x_1,x_2) = 25 - \left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \;=\; -\,2\,x_2^0 \;=\; 5$$

<u>*Tangente*</u> : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{33}{2} \end{pmatrix} + \; t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Beispiele :

- <u>*Bsp. 9.6(e)*</u> : $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2, \;\; D(f) = \mathbb{R}^2$

  $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = 2\;x_1^0\;, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = 2\;x_2^0$

- <u>*Bsp. 9.6(f)*</u> : $f(x_1,x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \;\; D(f) = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$

  $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \dfrac{-\,x_1^0}{\sqrt{1-(x_1^0)^2-(x_2^0)^2}}\;, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = \dfrac{-\,x_2^0}{\sqrt{1-(x_1^0)^2-(x_2^0)^2}}$

- <u>*Bsp. 9.6(b)*</u> : $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{2\;x_1\;x_2}{x_1^2+x_2^2} & , \quad (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}\;, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2$

  $(x_1^0, x_2^0) \neq (0,0)$:

  $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \frac{2x_2^0\left[(x_2^0)^2 - (x_1^0)^2\right]}{\left[(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2\right]^2}\;, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \;=\; \frac{2\;x_1^0\left[(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2\right]}{\left[(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2\right]^2}$$

  $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$:

  $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(0,h)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0$$

  $\curvearrowright\; \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0) \;=\; 0,\; i \;=\; 1,2,$ existieren, aber $f(x_1,x_2)$ nicht stetig in $(x_1^0, x_2^0) \;=\; (0,0)$ (*siehe Abschnitt 9.6*)

Satz 10.1.2 *Besitzt eine Funktion* $f(x)$ *in einer Umgebung* U *eines Punktes* $x^0 \in D(f)$ *alle partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x),\;\; k = 1,\dots,n,\;\; x \in U$*, und sind diese beschränkt, d.h.*

$$\sup_{x\in U}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right| \;\leq\; M\;, \quad k = 1,\dots,n,$$

so ist $f(x)$ *in* x^0 *auch stetig.*

Beweis : <u>z.z.</u> : $\left|f(x) - f(x^0)\right| \xrightarrow[x\to x^0]{} 0,\;\; x, x^0 \in U$:

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-f(x^0)\right| &= \left|f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2,\dots,x_n)+f(x_1^0,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n)\right.\\
&\qquad\qquad \left.\pm\dots+f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\right|\\
&\underset{\text{MWS}}{\leq} \left|x_1-x_1^0\right|\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,\dots,x_n)\right|+\dots+\left|x_n-x_n^0\right|\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{n-1}^0,\xi_n)\right|\\
&\leq M\sum_{k=1}^n\left|x_k-x_k^0\right| = M\left\|x-x^0\right\|_1 \xrightarrow[x\to x^0]{} 0
\end{aligned}$$

da $(\xi_1,x_2,\dots,x_n),\ \dots,\ (x_1^0,x_2^0,\dots,x_{n-1}^0,\xi_n)\in U$ zusammenhängend □

Bemerkung*: Beschränktheit der partiellen Ableitungen ist wesentlich !

Bsp. 9.6(b), siehe oben :
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0) &= \frac{2\,x_2^0\left[(x_2^0)^2-(x_1^0)^2\right]}{\left[(x_1^0)^2+(x_2^0)^2\right]^2}\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0) &= \frac{2\,x_1^0\left[(x_1^0)^2-(x_2^0)^2\right]}{\left[(x_1^0)^2+(x_2^0)^2\right]^2}
\end{aligned}\right\}\quad \text{unbeschränkt bei } x^0=0$$

<u>*nächstes Ziel*</u> : *Approximation von* $f(x)$ *mittels* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ *in einer Umgebung von* x^0

Lemma 7.1.2 ($n=1$): $f(x)$ in x^0 differenzierbar $\iff$

$$\exists\ \alpha\in\mathbb{R}\ :\quad f(x)=f(x^0)+\alpha(x-x^0)+r(x-x^0)\quad \text{mit}\quad \lim_{x\to x^0}\frac{r(x-x^0)}{x-x^0}=0,\qquad \text{dann}:\ \alpha=f'(x^0)$$

suchen Analogon für $n>1$, *zunächst* $n=2$:

Sei $f(x_1,x_2)$ definiert in einer offenen, zusammenhängenden Menge $G\subset\mathbb{R}^2$ und besitze dort partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$. Außerdem seien $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,x_2)$, $k=1,2$, stetig bei $(x_1^0,x_2^0)\in G$ $\curvearrowright$ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,x_2)$, $k=1,2$, beschränkt bei x^0 $\xRightarrow[\text{Satz 10.1.2}]{}$ $f(x_1,x_2)$ stetig in (x_1^0,x_2^0)

Seien $h_1^0,\ h_2^0>0$ so, dass $x^0+h\in G$ für $|h_1|\leq h_1^0,\ |h_2|\leq h_2^0$

$$\begin{aligned}
&f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0)\\
&\quad=\underbrace{f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0+h_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0+\theta_1h_1,x_2^0+h_2)\ h_1}+\underbrace{f(x_1^0,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0+\theta_2h_2)\ h_2}\\
&\quad=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\ h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\ h_2+\\
&\qquad+\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0+\theta_1h_1,x_2^0+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\right]h_1+\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0+\theta_2h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\right]h_2}_{r(h_1,h_2)}\\
&\quad=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\ h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\ h_2+r(h_1,h_2)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{r(h)}{\|h\|_1}&=\frac{r(h_1,h_2)}{|h_1|+|h_2|}\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0+\theta_1h_1,x_2^0+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0+\theta_2h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\right|\\
&\xrightarrow[h\to0]{\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\ \text{stetig}} 0
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright f(x^0+h) \;=\; f(x^0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\; h_1 \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\; h_2 \;+\; r(h) \qquad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|_1}=0$$

Definition 10.1.3 *Eine Funktion* $f(x)$, $D(f)=G\subset\mathbb{R}^n$, *heißt* differenzierbar in $x^0\in G$, *wenn Zahlen* $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ *existieren, für die gilt*

$$f(x)=f(x^0)\;+\;\sum_{k=1}^{n} a_k(x_k-x_k^0)+r(x-x^0) \qquad \textit{mit} \qquad \lim_{x\to x^0}\frac{r(x-x^0)}{\|x-x^0\|} \;=\; 0\,.$$

Bemerkung*:

- siehe Lemma 7.1.2 im eindimensionalen Fall (*dort als Charakterisierung für differenzierbare* $f(x)$)
- analog zum eindimensionalen Fall sind a_i eindeutig bestimmt (falls sie existieren) :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)(x_k-x_k^0)+r_a(x-x^0)-r_b(x-x^0)=0$$

$$x:=(x_1^0,\dots,x_i,\dots,x_n^0) \quad\Longrightarrow\quad (a_i-b_i)(x_i-x_i^0)+r_a(x-x^0)-r_b(x-x^0)=0$$

$$\Longrightarrow\quad (a_i-b_i)\;+\;\underbrace{\lim_{x_i\to x_i^0}\frac{r_a(x-x^0)-r_b(x-x^0)}{|x_i-x_i^0|}}_{=0}\;=\;0 \quad\Longrightarrow\quad a_i=b_i$$

Lemma 10.1.4 *Sei* $f(x)$ *mit* $D(f)=G\subset\mathbb{R}^n$ *differenzierbar in* $x^0\in G$. *Dann besitzt* $f(x)$ *in* x^0 *alle partiellen Ableitungen erster Ordnung, es gilt*

$$a_k \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\,, \qquad k=1,\dots,n\,.$$

Beweis : $f(x)=f(x^0)+\sum_{k=1}^{n} a_k(x_k-x_k^0)+r(x-x^0)$ mit $\lim_{x\to x^0}\frac{\left|r(x-x^0)\right|}{\|x-x^0\|} \;=\; 0$

setzen $x:=(x_1^0,\dots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\dots,x_n^0)\,,\quad k=1,\dots,n$

$$\Longrightarrow\quad f(x_1^0,\dots,x_k,\dots,x_n^0)-f(x^0)=a_k(x_k-x_k^0)+r(0,\dots,0,x_k-x_k^0,0\dots,0)$$

$$\Longrightarrow\quad \underbrace{\lim_{x_k\to x_k^0}\frac{f(x_1^0,\dots,x_k,\dots,x_n^0)-f(x^0)}{x_k-x_k^0}}_{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)} \;=\; a_k+\underbrace{\lim_{x_k\to x_k^0}\frac{r(0,\dots,0,x_k-x_k^0,0\dots,0)}{x_k-x_k^0}}_{0} \;=\; a_k \qquad \square$$

Bemerkung*: <u>eindimensionaler Fall</u> $\xRightarrow[\text{Lemma 7.1.2}]{}$ $f(x)$ differenzierbar genau dann, wenn ein $\alpha\in\mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0)+r(x-x^0)$ mit $\lim_{x\to x_0}\frac{r(x-x^0)}{x-x_0}=0$ gilt

<u>n-dimensionaler Fall</u> $\xRightarrow[\text{Lemma 10.1.4}]{}$ Existenz erster partieller Ableitungen in x^0 ist *notwendig* für Differenzierbarkeit von $f(x)$ in x^0; *hinreichend* dafür ist (außer der Existenz der ersten partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x^0) deren Stetigkeit in x^0 (*siehe Überlegungen vor Def. 10.1.3*)

Lemma 10.1.5 *Sei* $f(x)$ *mit* $D(f)=G\subset\mathbb{R}^n$ *differenzierbar in* $x^0\in G$. *Dann ist* $f(x)$ *stetig in* x^0.

Beweis : $f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - x_k^0) + r(x - x^0)$ mit $\lim_{x \to x^0} \frac{|r(x-x^0)|}{\|x - x^0\|} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\lim_{x \to x^0}(x_k - x_k^0)}_{0} + \underbrace{\lim_{x \to x^0} \frac{r(x-x^0)}{x - x^0}}_{0} \underbrace{\lim_{x \to x^0} (x - x^0)}_{0} = f(x^0) \qquad \square$$

Definition 10.1.6 *Eine Funktion* $g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *mit* $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$, $g_k : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, *heißt* differenzierbar in $x^0 \in G$, *falls eine* $(m,n)-$ *Matrix* $A = (a_{k\ell})_{\substack{k=1,\dots,m \\ \ell=1,\dots,n}}$ *existiert, so dass gilt:*

$$g(x) = g(x^0) + A(x - x^0) + r(x - x^0) \qquad \textit{mit} \qquad \lim_{x \to x^0} \frac{\|r(x-x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0.$$

Lemma 10.1.7 *Ist* $g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $x^0 \in G$, *so gilt*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}.$$

Beweis : analog zu Lemma 10.1.4 $\square$

Bemerkung*: Die Matrix $A = \mathcal{J}(f, x^0)$ heißt *Funktionalmatrix* bzw. *Jacobi*[37]*-Matrix*.

Satz 10.1.8 *Sind die Funktionen* f, $g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $x^0 \in G$, *so sind auch die Funktionen* $f + g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *und* $\alpha f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *in* x^0 *differenzierbar.*

Beweis : Definition 10.1.6 $\curvearrowright$ $f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + r_f(x - x^0)$, $g(x) = g(x^0) + B(x - x^0) + r_g(x - x^0)$

$$\Longrightarrow \quad (f+g)(x) = (f+g)(x^0) + (A+B)(x - x^0) + r_f(x - x^0) + r_g(x - x^0)\ ,$$
$$(\alpha f)(x) = (\alpha f)(x^0) + (\alpha A)(x - x^0) + \alpha r_f(x - x^0) \qquad \square$$

Bemerkung*: Aussagen über Produkte und Quotienten nur für $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$-Funktionen möglich

10.2 Kettenregel, Richtungsableitung, Tangentialebene

Satz 10.2.1 (Kettenregel) *Gegeben sei eine Funktion* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit stetigen partiellen Ableitungen in* G, *und Funktionen* $\varphi_j : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, *die stetig differenzierbar auf* I *sind und für die* $\phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in G$ *für* $t \in I$ *gilt. Dann ist die (verkettete) Funktion* $f \circ \phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar auf* I, *es gilt*

$$(f \circ \phi)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(t)) \cdot \varphi_j'(t)\ .$$

[37] Carl Gustav Jacob Jacobi (* 10.12.1804 Potsdam † 18.2.1851 Berlin)

Beweis : $\dfrac{(f\circ\phi)(t+h)-(f\circ\phi)(t)}{h}$

$$= \frac{1}{h}\Big[f(\varphi_1(t+h),\ldots,\varphi_n(t+h)) - f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))\Big]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[f(\varphi_1(t+h),\ldots,\varphi_n(t+h)) - f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t+h))$$

$$+\ f(\varphi_1(t),\varphi_2(t+h),\ldots,\varphi_n(t+h)) - f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t+h))$$

$$\pm\cdots+ f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t),\varphi_n(t+h)) - f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t),\varphi_n(t))\Big]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\varphi_1(t)+\theta_1\big(\varphi_1(t+h)-\varphi_1(t)\big),\ldots,\varphi_n(t+h)\big)\cdot(\varphi_1(t+h)-\varphi_1(t)) + \cdots\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t),\varphi_n(t)+\theta_n\big(\varphi_n(t+h)-\varphi_n(t)\big)\big)\cdot(\varphi_n(t+h)-\varphi_n(t))\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_j(t)+\theta_j\big(\varphi_j(t+h)-\varphi_j(t)\big),\ldots,\varphi_n(t+h)\big)}_{\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(t)),\ \text{da}\ \frac{\partial f}{\partial x_j}\ \text{stetig}}\ \underbrace{\frac{\varphi_j(t+h)-\varphi_j(t)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{}\varphi_j'(t)}$$

□

Bemerkung*:

- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\phi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar $\curvearrowright$ $f\circ\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, Satz 10.2.1
- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\phi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n):\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar $\curvearrowright$ $f\circ\phi:\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar,

$$\frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial t_i}(t_1,\ldots,t_\ell) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(t))\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_i}(t_1,\ldots,t_\ell),\quad i=1,\ldots,\ell$$

- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\phi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n):\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar $\curvearrowright$ $f\circ\phi:\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar,

$$\frac{\partial(f\circ\phi)_k}{\partial t_i}(t_1,\ldots,t_\ell) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\phi(t))\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_i}(t_1,\ldots,t_\ell),\quad k=1,\ldots,m,\ i=1,\ldots,\ell$$

bzw. $\underbrace{\mathcal{J}(f\circ\phi,t)}_{(m,\ell)\text{-Matrix}} = \underbrace{\mathcal{J}(f,\phi(t))}_{(m,n)\text{-Matrix}}\ \underbrace{\mathcal{J}(\phi,t)}_{(n,\ell)\text{-Matrix}}$ mit Matrix-Multiplikation

Definition 10.2.2 *Seien* $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{R}^n$, $\|\nu\|_2=1$, *und* $f(x):G\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. *Die Funktion* $f(x)$ *besitzt in* $x^0\in G$ *eine* Richtungsableitung in Richtung ν, *falls*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+h\nu)-f(x^0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial\nu}(x^0)$$

existiert.

Bemerkung*: Äquivalente Formulierung :

$$\frac{\partial f}{\partial\nu}(x^0)\ \text{existiert}\quad\Longleftrightarrow\quad\varphi_{\nu,x^0}(t) := f(x_1^0+t\nu_1,\ldots,x_n^0+t\nu_n)\ \text{ist in}\ t=0\ \text{differenzierbar}$$

<u>*Bezeichnung*</u>: $f(x)$ in $x^0 \in G$ differenzierbar

$$(\operatorname{grad} f)(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right) \quad \textit{Gradient von } f \textit{ in } x^0$$

Satz 10.2.3 *Ist* $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *in* $x^0 \in G$ *differenzierbar und* $\nu \in \mathbb{R}^n$ *beliebig mit* $\|\nu\|_2 = 1$, *so gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot \nu_k \;=\; \big\langle (\operatorname{grad} f)(x^0),\ \nu \big\rangle \;.$$

Beweis: Lemma 10.1.4 mit $x = x^0 + h\nu$: $f(x^0 + h\nu) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)(h\nu_k) + r(h\nu)$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h\nu)}{\underbrace{\|h\nu\|_2}_{=|h|\|\nu\|_2=|h|}} = 0 \;\curvearrowright\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + h\nu) - f(x^0)}{h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\nu_k + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{r(h\nu)}{h}}_{=0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\nu_k \qquad \square$$

Bemerkung*: $\nu_0 := \dfrac{\operatorname{grad} f(x^0)}{\|\operatorname{grad} f(x^0)\|_2}$ ... *Richtung des stärksten Wachstums von* $f(x)$ *im Punkt* x^0;

insbesondere zeigt $\operatorname{grad} f(x^0)$ in die Richtung des stärksten Wachstums der Funktion $f(x)$ in x^0, $-\operatorname{grad} f(x^0)$ in die Richtung des stärksten Abstiegs:

Richtung des stärksten Wachstums/Abstiegs von f in x^0 $\sim$ ν mit max./min. $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$

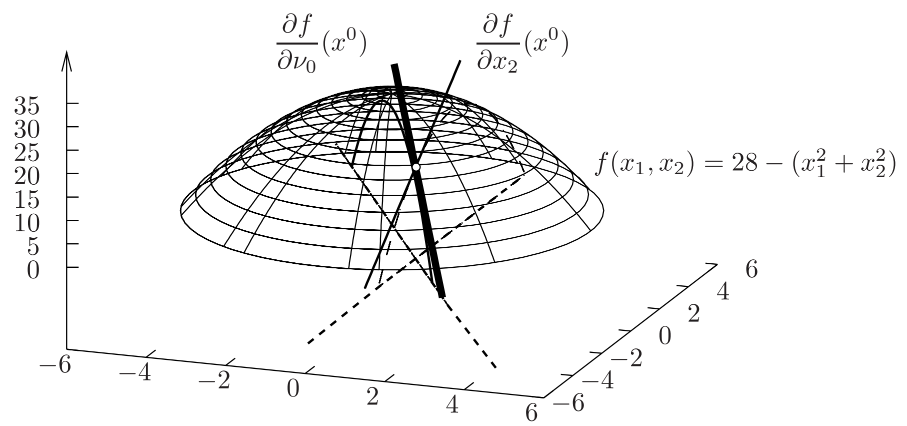
$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) = \big\langle (\operatorname{grad} f)(x^0),\ \nu \big\rangle = \big\|\operatorname{grad} f(x^0)\big\|_2 \underbrace{\|\nu\|_2}_{1} \underbrace{\cos\big(\operatorname{grad} f(x^0), \nu\big)}$$

maximal, falls $\angle(\operatorname{grad} f(x^0), \nu) = 0$

minimal, falls $\angle(\operatorname{grad} f(x^0), \nu) = \pi$

$$\curvearrowright\; \frac{\partial f}{\partial \nu_0}(x^0) = \big\|\operatorname{grad} f(x^0)\big\|_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial \widetilde{\nu_0}}(x^0) = -\big\|\operatorname{grad} f(x^0)\big\|_2, \quad \widetilde{\nu_0} = -\frac{\operatorname{grad} f(x^0)}{\|\operatorname{grad} f(x^0)\|_2}$$

Beispiel: $f(x_1, x_2) = 28 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)$, $(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $\nu_0 := \dfrac{\operatorname{grad} f(x^0)}{\|\operatorname{grad} f(x^0)\|_2} = \dfrac{1}{\sqrt{34}}(-3, 5)$



Tangentialebene

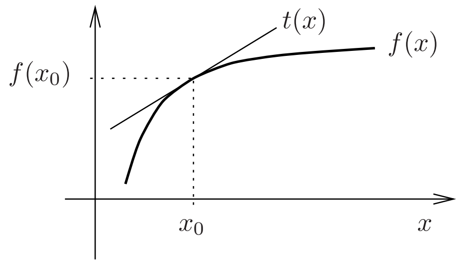
$z \;=\; f(x,y), \quad (x,y) \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (n=2)$

Rückblick: $n=1$, Tangente $t(x)$ in $x_0 \in D(f)$:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

mit $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-t(x)}{x-x_0} \;=\; 0,$

$t(x)$ ist einzige Gerade mit dieser Eigenschaft



suchen Äquivalent für $n=2$ $\Longrightarrow$ *geometrisch* : Tangential*ebene*

Sei $z = f(x,y)$, $D(f) = G \subset \mathbb{R}^2$ stetig,

$$\Gamma_f = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in G,\; z = f(x,y)\big\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \ldots \quad \text{Fläche im } \mathbb{R}^3$$

Ebene im $\mathbb{R}^3$: $\quad E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = \alpha x + \beta y + \gamma\big\}, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$

Ebene durch $\big(x^0, y^0, f(x^0,y^0)\big)$: $\quad z - \underbrace{z^0}_{=f(x^0,y^0)} = \alpha(x-x^0) + \beta(y-y^0)$

$$\Longleftrightarrow \quad g(x,y) := z = \alpha(x-x^0) + \beta(y-y^0) + f(x^0,y^0)$$

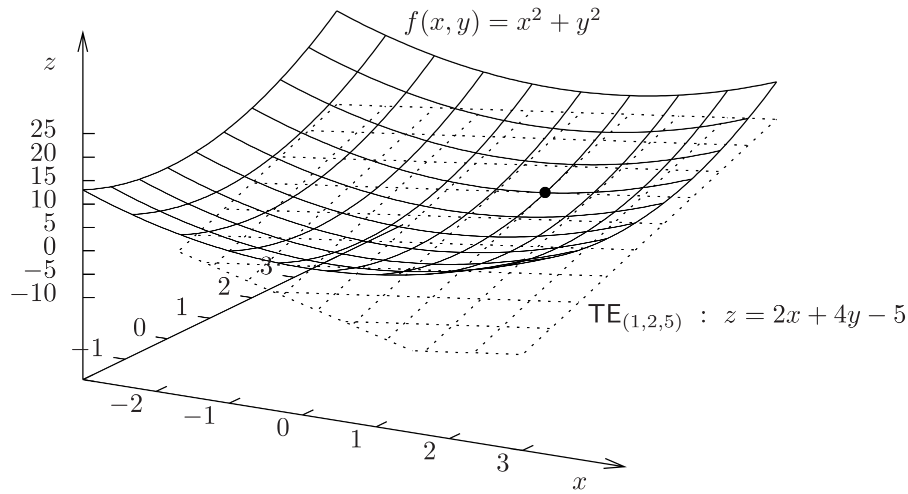
Eine solche Ebene heißt *Tangentialebene*, falls $\lim\limits_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \dfrac{f(x,y)-g(x,y)}{\|(x-x^0, y-y^0)\|} \;=\; 0$ gilt.

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $f(x,y) = x^2+y^2, \quad (x^0,y^0) = (1,2) \quad \Longrightarrow \quad z^0 = f(x^0,y^0) = 5$

Behauptung : $\quad g(x,y) := 2x+4y-5$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \frac{f(x,y)-g(x,y)}{\|(x-x^0, y-y^0)\|_2} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+y^2-2x-4y+5}{\|(x-1,y-2)\|_2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \|(x-1,y-2)\|_2 \;=\; 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad g(x,y)$ ist Tangentialebene durch $\big(x^0,y^0,f(x^0,y^0)\big) = (1,2,5)$



Satz 10.2.4 *Ist* $f(x,y)$, $D(f)=G\subset\mathbb{R}^2$, *differenzierbar in* $(x^0,y^0)\in G$, *so ist*

$$z-z^0=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\,(x-x^0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\,(y-y^0)$$

die eindeutig bestimmte Tangentialebene an $f(x,y)$ *im Punkt* (x^0,y^0,z^0), $z^0=f(x^0,y^0)$.
Die Tangenten aller Richtungsableitungen an $f(x,y)$ *im Punkt* (x^0,y^0,z^0) *liegen in dieser Ebene.*

Beweis : $f(x,y)$ differenzierbar

$$\Longrightarrow\quad f(x,y)=\underbrace{f(x^0,y^0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\,(x-x^0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\,(y-y^0)}_{=z=:g(x,y)}+r(x-x^0,y-y^0)$$

$$\text{mit}\quad\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)}\frac{r(x-x^0,y-y^0)}{\|(x-x^0,y-y^0)\|}=0$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)}\frac{f(x,y)-g(x,y)}{\|(x-x^0,y-y^0)\|}=\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)}\frac{r(x-x^0,y-y^0)}{\|(x-x^0,y-y^0)\|}=0,\ \text{Darstellung ist eindeutig}$$

Sei $\nu=(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{R}^2$, $\nu_1^2+\nu_2^2=1$ $\Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial\nu}(x^0,y^0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\,\nu_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\,\nu_2$

Tangentengleichung : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^0\\y^0\\f(x^0,y^0)\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\nu_1\\\nu_2\\\frac{\partial f}{\partial\nu}(x^0,y^0)\end{pmatrix}$

$$\curvearrowright\ \underbrace{t\,\frac{\partial f}{\partial\nu}(x^0,y^0)}_{z-f(x^0,y^0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\ \underbrace{t\,\nu_1}_{x-x^0}+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\ \underbrace{t\,\nu_2}_{y-y^0}$$

$\curvearrowright$ Tangente (für beliebiges $\nu\in\mathbb{R}^2$) liegt in Tangentialebene $\square$

Bemerkung*: allgemeiner : $f:G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ differenzierbar

$$\curvearrowright\ f(x)=f(x^0)+\langle(\operatorname{grad}f)(x^0),x-x^0\rangle+r(x-x^0)$$

Tangentialebene: $g(x)=f(x^0)+\langle(\operatorname{grad}f)(x^0),x-x^0\rangle$

$$g(x)-f(x^0)=\langle\operatorname{grad}f\,(x^0)\,,x-x^0\rangle$$

$$\Longleftrightarrow\qquad 0=\langle(\operatorname{grad}f\,(x^0)\,,-1)\,,(x-x^0,g(x)-f\,(x^0))\rangle$$

$$=\left\langle\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0),-1\right)}_{\text{Normalenvektor an } f(x) \text{ in } x^0},(x_1-x_1^0,\ldots,x_n-x_n^0,g(x)-f\,(x^0))\right\rangle$$

10.3 Vertauschbarkeit partieller Ableitungen höherer Ordnung, Satz von Taylor

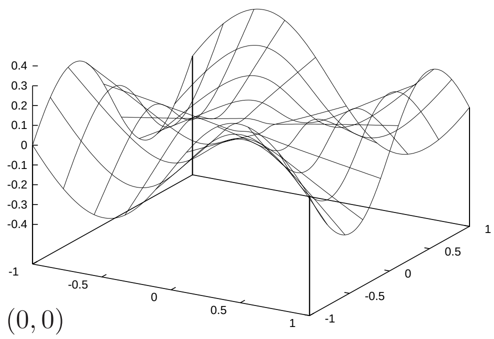
Definition 10.3.1 *Sei* $f(x)$ *in* $D(f)=U\subset\mathbb{R}^n$ *gegeben mit* $x^0\in U$. *Dann besitzt* $f(x)$ *in* x^0 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(x^0)\,,\quad j,k=1,\ldots,n,$$

falls $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ *in einer Umgebung von* x^0 *und* $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x^0)$ *existieren.*

Bemerkung*: iterativ : $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \partial x_{k_{m-1}} \dots \partial x_{k_1}} := \dfrac{\partial}{\partial x_{k_m}} \left(\dfrac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \dots \partial x_{k_1}} \right) \quad , \quad m \in \mathbb{N}$

<u>*Problem*</u> : i.a. ist $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x^0) \neq \dfrac{\partial}{\partial x_k} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x^0)$



Beispiel : $f(x,y) = \begin{cases} xy\, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} \right], \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y,\ y \neq 0 \ \underset{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,=\,0}{\Longrightarrow} \ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} \right], \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x, \quad x \neq 0 \ \underset{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,=\,0}{\Longrightarrow} \ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0)$$

$$(x,y) \neq (0,0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left[1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} \right],$$

besitzt aber für $(x,y) \to (0,0)$ keinen Grenzwert und ist demzufolge in $(0,0)$ unstetig

Satz 10.3.2 (Satz von Schwarz)
Ist $f(x)$ *in einer Umgebung* U *von* $x^0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ *stetig, existieren in* U *für* $j,k \in \{1,\dots,n\}$ *die partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$, *und sind* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ *und* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$ *in* x^0 *stetig, so gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x^0) .$$

B e w e i s : o.B.d.A. $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$;
sei $f(x,y)$ in $D(f) = G \subset \mathbb{R}^2$ definiert, $(x^0, y^0) \in G$, und U eine Umgebung von (x^0, y^0)

$$\Longrightarrow \quad \exists\ h_0 > 0,\ k_0 > 0 \quad \forall\ h,k, |h| \le h_0, |k| \le k_0 : \left(x^0 + h, y^0 + k\right) \in U$$

o.B.d.A. $h > 0$, $k > 0$; $\varphi(x) := f\left(x, y^0 + k\right) - f\left(x, y^0\right)$ definiert für $x \in (x^0 - h_0, x^0 + h_0)$, differenzierbar,

$$\Longrightarrow \quad \varphi(x^0 + h) - \varphi(x^0) = h\varphi'(\xi), \quad \xi \in (x^0, x^0 + h)$$

$$F(h,k) := \underbrace{f\left(x^0+h,y^0+k\right)-f\left(x^0+h,y^0\right)}_{\varphi(x^0+h)} - \Big(\underbrace{f\left(x^0,y^0+k\right)-f\left(x^0,y^0\right)}_{\varphi(x^0)}\Big) = h\varphi'(\xi)$$

$$= h\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y^0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y^0)\right]}_{\varphi'(\xi)} = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta)$$

nach Mittelwertsatz für $\eta\in(y^0,y^0+k)$, $\xi\in(x^0,x^0+h)$

Sei $\psi(y) := f\left(x^0+h,y\right)-f\left(x^0,y\right)$, definiert für $y\in(y^0-k_0,y^0+k_0)$, differenzierbar

$$\curvearrowright\ F(h,k) = \underbrace{f\left(x^0+h,y^0+k\right)-f\left(x^0,y^0+k\right)}_{\psi(y^0+k)} - \underbrace{\left(f\left(x^0+h,y^0\right)-f\left(x^0,y^0\right)\right)}_{\psi(y^0)} = k\psi'(\widetilde{\eta}) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right),$$

für $\widetilde{\xi}\in\left(x^0,x^0+h\right)$, $\widetilde{\eta}\in\left(y^0,y^0+k\right)$

$$\curvearrowright\ hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) = F(h,k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right) \xRightarrow[h\neq 0,\,k\neq 0]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right)$$

nach Voraussetzung sind $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ stetig in U, d.h. für $(h,k)\to(0,0)$ ergibt sich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x^0,y^0\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x^0,y^0\right)$$

□

Bemerkung*: $f(x)$ habe in einer Umgebung U sämtliche partielle Ableitungen bis zur Ordnung m, die alle stetig seien. Dann folgt aus der iterativen Anwendung des Satzes

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m}\ \dots\ \partial x_{k_1}}(x) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \dots\ \partial x_n^{\alpha_n}}(x) =: \left(\mathrm{D}^\alpha f\right)(x),$$

mit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ und $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n=m$.

Bezeichnungen : $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ ... 'Multi-index'

$|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_n!$

$y=(y_1,\dots,y_n) \implies y^\alpha = y_1^{\alpha_1}\cdot y_2^{\alpha_2}\cdots y_n^{\alpha_n}$, $\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)(y) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial y_1^{\alpha_1}\ \dots\ \partial y_n^{\alpha_n}}(y)$

Satz 10.3.3 (Satz von Taylor im $\mathbb{R}^n$)

Sei $f: G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ in einer Umgebung U von $x^0\in G$ $(k+1)$-mal stetig partiell differenzierbar, d.h. $(\mathrm{D}^\alpha f)(x)$ existiert in U und ist stetig für $|\alpha|\le k+1$. Dann gibt es für jedes $x\in U$ ein $\theta=\theta\left(x^0,x\right)\in(0,1)$, so dass gilt

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)\left(x-x^0\right)^\alpha + \sum_{|\beta|=k+1}\frac{1}{\beta!}\left(\mathrm{D}^\beta f\right)\left(x^0+\theta(x-x^0)\right)\left(x-x^0\right)^\beta.$$

Beweis : $\psi(t) := f\big(\underbrace{x^0+t(x-x^0)}_{=:\varphi(t)}\big) = f(\varphi(t)) \implies \psi(0)=f\left(x^0\right)$, $\psi(1)=f(x)$

$\xRightarrow[\text{Satz 10.2.1}]{\text{Kettenregel}}$ $\psi(t)$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar $\xRightarrow[\text{Satz 7.4.2}]{x=1,\ x^0=0}$ $\exists\,\theta\in(0,1):\ \psi(1)=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{\psi^{(j)}(0)}{j!}+\frac{\psi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0 + t(x-x^0)\right)\left(x_j - x_j^0\right)\\
\psi''(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell\,\partial x_j}\left(x^0 + t(x-x^0)\right)\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_\ell - x_\ell^0\right)\\
\psi^{(m)}(t) &\underset{\text{ÜA}}{=} \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\,\ldots\,\partial x_{i_m}}\left(x^0 + t(x-x^0)\right)\left(x_{i_1} - x_{i_1}^0\right)\cdots\left(x_{i_m} - x_{i_m}^0\right)\\
\curvearrowright\ \psi^{(m)}(0) &= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\,\ldots\,\partial x_{i_m}}\left(x^0\right)\left(x_{i_1} - x_{i_1}^0\right)\cdots\left(x_{i_m} - x_{i_m}^0\right)
\end{aligned}
$$

<u>*formalisieren*</u> : $\mathrm{D}_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n$ ... Operator

$$
\begin{aligned}
n = 2:\quad \psi'(0) &= \left[\left(\left(x_1 - x_1^0\right)\mathrm{D}_1 + \left(x_2 - x_2^0\right)\mathrm{D}_2\right) f\right]\left(x^0\right)\\
\psi''(0) &= \left[\left(\left(x_1 - x_1^0\right)\mathrm{D}_1 + \left(x_2 - x_2^0\right)\mathrm{D}_2\right)^2 f\right]\left(x^0\right)\\
&\ \ \vdots\\
\psi^{(m)}(0) &= \left[\left(\left(x_1 - x_1^0\right)\mathrm{D}_1 + \left(x_2 - x_2^0\right)\mathrm{D}_2\right)^m f\right]\left(x^0\right)\\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^\ell \partial x_2^{m-\ell}}\left(x^0\right)\left(x_1 - x_1^0\right)^\ell\left(x_2 - x_2^0\right)^{m-\ell}\\
&\underset{\alpha_1 = \ell,\, \alpha_2 = m-\ell}{=} \sum_{|\alpha| = m}\underbrace{\frac{m!}{\alpha_1!\ \alpha_2!}}_{\alpha!}\ \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}}\left(x^0\right)}_{(\mathrm{D}^\alpha f)(x^0)}\ \underbrace{\left(x_1 - x_1^0\right)^{\alpha_1}\left(x_2 - x_2^0\right)^{\alpha_2}}_{(x - x^0)^\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\curvearrowright\quad \frac{\psi^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|\alpha| = m}\frac{\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)}{\alpha!}\left(x - x^0\right)^\alpha, \qquad \text{analog für } n \geq 3
$$

$$
\begin{aligned}
\curvearrowright\ f(x) = \psi(1) &= \sum_{m=0}^{k}\underbrace{\sum_{|\alpha| = m}\frac{\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)}{\alpha!}\left(x - x^0\right)^\alpha}_{\frac{\psi^{(m)}(0)}{m!}} + \underbrace{\sum_{|\beta| = k+1}\frac{\left(\mathrm{D}^\beta f\right)\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right)}{\beta!}\left(x - x^0\right)^\beta}_{\frac{\psi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}}\\
&= \sum_{|\alpha| \leq k}\frac{\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)}{\alpha!}\left(x - x^0\right)^\alpha + \sum_{|\beta| = k+1}\frac{\left(\mathrm{D}^\beta f\right)\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right)}{\beta!}\left(x - x^0\right)^\beta
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung*:

- *Schreibweise aus Abschnitt 7.1* $\curvearrowright$ Restglied in Satz 10.3.3:

$$
\sum_{|\beta| = k+1}\frac{\left(\mathrm{D}^\beta f\right)\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right)}{\beta!}\left(x - x^0\right)^\beta \sim \mathbf{o}\left(\left|x - x^0\right|^k\right)
$$

- $k = 1 \implies$ $$f(x) = \underbrace{f\left(x^0\right) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right)\left(x_j - x_j^0\right)}_{\text{Tangentialebene}} + \underbrace{r\left(x - x^0\right)}_{= \mathbf{o}(|x - x^0|)}$$

- Taylor-Polynom vom Grad k : $p_k(x) = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k}\frac{\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)}{\alpha!}\left(x - x^0\right)^\alpha$ einziges Polynom dieser Ordnung, für das $f(x) - p_k(x) = \mathbf{o}\left(|x - x^0|^k\right)$ in einer Umgebung von x^0 gilt (*unter den Voraussetzungen des Satzes*)

$n-$ dimensionale Taylorreihe

$p_k(x) = \sum\limits_{|\alpha|\le k} \dfrac{(\mathrm{D}^\alpha f)(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha,\ k\in\mathbb{N}$ ... $n-$ dimensionales Taylor-Polynom, Grad k

$\curvearrowright \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \dfrac{(\mathrm{D}^\alpha f)(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha$ ... n-dimensionale Taylor-Reihe, falls f beliebig oft partiell differenzierbar ist und Restglied gleichmäßig gegen 0 konvergiert ($n=1$: *Satz 7.4.3*)

Satz 10.3.4 *Seien $\delta>0$ und $x\in Q_\delta(x^0) := \{y\in\mathbb{R}^n : |y_j-x_j^0|<\delta,\ j=1,\dots,n\}$. Für jedes $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ und bei fixierten Koordinaten $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n$ seien die eindimensionalen Funktionen $g_{j,\alpha}(x_j) = (\mathrm{D}^\alpha f)(\dots,x_j,\dots)$ im Intervall $[x_j^0-\delta, x_j^0+\delta]$ als absolut konvergente Potenzreihen mit dem Entwicklungspunkt x_j^0 darstellbar, $j=1,\dots,n$. Dann ist $f(x)$ im Würfel $Q_\delta(x^0)$ als absolut konvergente Taylorreihe darstellbar,*

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{(\mathrm{D}^\alpha f)(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha .$$

Beweis : o.B.d.A. $x^0=0$, sei $x'=(x_2,\dots,x_n)$, $x''=(x_3,\dots,x_n)$

$$f(x_1,x') = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\underbrace{\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}(0,x')}_{\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}(0,x_2,x'')}\ x_1^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\Big(\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\frac{\partial^{k+j}f}{\partial x_2^j\,\partial x_1^k}(0,0,x'')\ x_2^j\Big)x_1^k$$

$$\curvearrowright\ f(x_1,x_2,x'') = \sum_{k=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!\,k!}\frac{\partial^{k+j}f}{\partial x_2^j\,\partial x_1^k}(0,0,x'')\ x_1^k\ x_2^j$$

$\sum\limits_{k=0}^\infty\Big(\sum\limits_{j=0}^\infty a_{kj}\Big)$ absolut konvergent, eineindeutige Zuordnung $a_{kj}\leftrightarrow b_m$

$\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^K\sum\limits_{j=0}^J |a_{kj}| \le A$ gleichmäßig für alle K,J

$\Longrightarrow \sum\limits_{m=0}^M |b_m| \le A$ gleichmäßig konvergent, monoton $\Longrightarrow \sum\limits_{m=0}^\infty b_m$ absolut konvergent

$\Longrightarrow$ Doppelreihe $\sum\limits_{k=0}^\infty\sum\limits_{j=0}^\infty a_{kj} = \sum\limits_{k,j=0}^\infty a_{kj}$ konvergiert absolut (*Großer Umordnungssatz 3.3.3*)

$\Longrightarrow f(x_1,x_2,x'') = \sum\limits_{k,j=0}^\infty \dfrac{1}{k!\,j!}\dfrac{\partial^{k+j}f}{\partial x_2^j\,\partial x_1^k}(0,0,x'')\ x_1^k\ x_2^j \Longrightarrow$ iterativ fortsetzen □

Bemerkung*: hinreichende Bedingung für Existenz der Taylor-Reihe, maximales Konvergenzgebiet wird i.a. nicht erfasst

10.4 Implizite Funktionen und Auflösungssätze

eindimensionaler Fall : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ y=f(x) \Longrightarrow$ wann existiert Umkehrfunktion $x=f^{-1}(y)$?

hinreichend : $f'(x^0)\neq 0 \xRightarrow[\text{Lemma 4.3.2, Satz 7.2.3}]{} \exists\,\delta>0: f$ umkehrbar auf $(x^0-\delta,x^0+\delta)$, $D(f^{-1})=W(f)$,

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)}\Bigg|_{y=f(x)}$$

$n-$ dimensionaler Fall :

betrachten zunächst lineare Abbildungen $y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ A\ \ldots\ (m,n)-$ Matrix

$$y = Ax \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \qquad j = 1, \ldots, m$$

Wann ist das entsprechende Gleichungssystem eindeutig nach $x_1, \ldots, x_n$ auflösbar für beliebig gegebene $y_1, \ldots, y_m$? $\xRightarrow[\text{lineare Algebra}]{} m = n, \quad \det A \neq 0$

Idee: $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x^0 $\xRightarrow[\text{Lemma 10.1.7}]{} y = f(x) = f(x^0) + \mathcal{J}(f, x^0)(x - x^0) + r(x - x^0)$

mit $\displaystyle \lim_{x \to x^0} \frac{\|r(x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0$, wobei $\mathcal{J}\left(f, x^0\right)$ die Funktionalmatrix ist

$$\mathcal{J}\left(f, x^0\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

$m = n$, $\det \mathcal{J}\left(f, x^0\right) \neq 0 \curvearrowright \mathcal{J}\left(f, x^0\right)$ invertierbar $\curvearrowright a_{jk}^{-1} = \dfrac{\partial x_j}{\partial y_k}$ lassen sich (bei x^0) aus den $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_m}(x^0)$ berechnen $\rightsquigarrow \mathcal{J}\left(f, x^0\right)^{-1} y = \mathcal{J}\left(f, x^0\right)^{-1} \underbrace{y_0}_{f(x^0)} + (x - x^0) + \underbrace{\mathcal{J}\left(f, x^0\right)^{-1} r(x - x^0)}_{\text{'klein'}}$

Bezeichnungen :

$$\frac{\partial\left(f_1, \ldots, f_n\right)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\left(x^0\right) = \frac{\partial\left(y_1, \ldots, y_n\right)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\left(x^0\right) = \det \mathcal{J}\left(f, x^0\right) \quad \ldots$$

Funktionaldeterminante, Jacobi-Determinante

$\left(\dfrac{\partial\left(y_1, \ldots, y_n\right)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right)^{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$

$\ldots$ *Minor zum Element* $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_k}$

(Determinante der Matrix, die durch Streichung der j-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht)

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & k-\text{ te Spalte} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k} & \ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_j}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial y_j}{\partial x_k} & & \dfrac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_k} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} & \longleftarrow j-\text{ te Zeile} \end{array}$$

Lineare Algebra

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sei A^{jk} Minor zu $a_{jk},\ j, k = 1, \ldots, n \curvearrowright \det A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \left(-1\right)^{j+k} A^{jk}}_{\text{Entwicklung nach } j-\text{ter Zeile}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \left(-1\right)^{j+k} A^{jk}}_{\text{Entwicklung nach } k-\text{ter Spalte}}$

$\det A \neq 0 \curvearrowright \widetilde{b}_{kj} := \dfrac{(-1)^{j+k} A^{jk}}{\det A} \quad \ldots$ Glieder der inversen Matrix zu A

Satz 10.4.1 *Die Funktion* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *besitze in* G *stetige erste partielle Ableitungen* $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$*,* $j,k = 1,\ldots,n$*, und für* $x^0 \in G$ *gelte* $\det \mathcal{J}\left(f,x^0\right) \neq 0$*.*

Dann existiert eine Umgebung U *von* x^0*, so dass* $y = f(x)$ *eine eineindeutige Abbildung von* U *auf eine Umgebung* V *von* $y^0 = f\left(x^0\right)$ *beschreibt. Die Umkehrabbildung* $x = g(y)$ *besitzt stetige erste partielle Ableitungen* $\frac{\partial g_k}{\partial y_m}$*,* $m,k = 1,\ldots,n$*, und es gilt*

$$\mathcal{J}\left(g,y^0\right) = \mathcal{J}^{-1}\left(f,g\left(y^0\right)\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\left(y^0\right) = \mathcal{J}^{-1}(f,x^0)_{km} = (-1)^{m+k}\,\frac{\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\left(x^0\right)\right)^{mk}}{\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\left(x^0\right)}.$$

B e w e i s : f hat stetige erste partielle Ableitungen in $x^0 \underset{\text{früher}}{\Longrightarrow} f(x)$ differenzierbar in U, d.h.

$$y - y^0 \;=\; f(x) - f\left(x^0\right) \;=\; \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\left(x-x^0\right) + r(x-x^0)$$

mit

$$\lim_{x\to x^0} \frac{\left\|r(x-x^0)\right\|}{\|x-x^0\|} \;=\; \lim_{x\to x^0} \frac{\left\|f(x) - f\left(x^0\right) - \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\left(x-x^0\right)\right\|}{\|x-x^0\|} = 0 \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{J}\left(f,x^0\right) \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left[\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\right]^{-1} \;=\; \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right) \quad \text{existiert}\\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left(y-y^0\right) \;=\; \left(x-x^0\right) + \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right) r(x-x^0)\\
&\Longleftrightarrow \quad x \;=\; x^0 \;+\; \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left(y-y^0\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right) r(x-x^0)
\end{aligned}$$

Sei y gegeben, suchen Urbild x mit $y = f(x)$; definieren Operator B_y,

$$\begin{aligned}
B_y(x) &:= x^0 \;+\; \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left(y-y^0\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right) r(x-x^0) \\
&= x^0 \;+\; \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left(y-y^0\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left[f(x) - f\left(x^0\right) - \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\left(x-x^0\right)\right]\\
&= x^0 \;+\; \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\Big[y - y^0 - f(x) + \overbrace{f\left(x^0\right)}^{y^0} + \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\left(x-x^0\right)\Big]\\
&= \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left[y - f(x)\right] + x
\end{aligned} \tag{10.2}$$

d.h. $y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = B_y(x)$, d.h. wenn x Fixpunkt von B_y ist, wäre ein Urbild zu y konstruiert

Existenz der Umkehrfunktion

Idee : wollen Banachschen Fixpunktsatz (*Satz 9.5.2*) anwenden, dazu notwendig :

(i) vollständiger metrischer Raum

(ii) B_y ist Selbstabbildung in diesem Raum

(iii) B_y ist Kontraktion

zu (i) : setzen $Q = Q\left(\delta^*, x^0\right) = \left\{x \;:\; x \in \mathbb{R}^n,\ \left\|x-x^0\right\|_\infty \leq \delta^*\right\} \subset U$, wobei δ^* (in Abhängigkeit von f und x^0) noch zu bestimmen ist $\Longrightarrow$ $\Big[Q, \|\cdot\|\Big]$ ist vollständiger metrischer Raum

zu (ii), (iii) : bestimmen $\delta^* > 0$ so, dass B_y Selbstabbildung in Q ist und B_y Kontraktion wird

(a) $\det \mathcal{J}\left(f,x^0\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, M>0 \quad \forall\, j,k \in \{1,\ldots,n\}: \left|\mathcal{J}\left(f,x^0\right)_{jk}\right| \leq M, \ \left|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)_{jk}\right| \leq M$

$$\curvearrowright \ \left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left(y-y^0\right)\right\|_\infty \ \leq \ M \sum_{k=1}^n \left|y_k - y_k^0\right| \ = \ M \ \left\|y-y^0\right\|_1 \tag{10.3}$$

und $\left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right) r\left(x-x^0\right)\right\|_\infty \leq \ M \left\|r\left(x-x^0\right)\right\|_1$

$$\underset{(10.1)}{\leq} M\varepsilon \left\|x-x^0\right\|_\infty \qquad \text{für } \left\|x-x^0\right\|_\infty < \delta(\varepsilon)$$

$$\underset{\varepsilon = \frac{1}{2M}}{\leq} \frac{1}{2}\left\|x-x^0\right\|_\infty \qquad \text{für } \left\|x-x^0\right\|_\infty < \delta\left(\frac{1}{2M}\right) =: \delta_1 \tag{10.4}$$

(b) (*notwendig für Kontraktion*) MWS, Satz von Taylor (*Satz 10.3.3*)

$$\curvearrowright \ f_k(x) - f_k(\overline{x}) \ = \ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\left(\overline{x} + \vartheta_k(x-\overline{x})\right)\left(x_j - \overline{x}_j\right), \quad 0 < \vartheta_k < 1, \quad k = 1,\ldots,n$$

$$\curvearrowright \ f(x) - f(\overline{x}) \ = \ \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_n(x) - f_n(\overline{x}) \end{pmatrix} = \mathcal{J}\left(f, \overline{x} + \theta(x-\overline{x})\right)(x-\overline{x}) \tag{10.5}$$

$$\text{mit} \quad \theta(x-\overline{x}) \ = \begin{pmatrix} \vartheta_1(x-\overline{x}) \\ \vdots \\ \vartheta_n(x-\overline{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}\left(f, \overline{x} + \theta(x-\overline{x})\right) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\left(\overline{x} + \vartheta_k(x-\overline{x})\right)\right)_{j,k=1}^n$$

n^2 Komponenten der Matrix $\mathcal{J}(f,\xi)$ sind stetig in ξ nach Voraussetzung

$\Longrightarrow \quad \exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, \xi, \ \left\|\xi - x^0\right\|_\infty < 3\delta_2:$

$$\left\|\mathcal{J}(f,\xi) - \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\right\|_1 \leq n^2 \left\|\mathcal{J}(f,\xi) - \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\right\|_\infty = n^2 \max_{j,k=1,\ldots,n} \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\left(x^0\right)\right| < \varepsilon' = \frac{1}{2M}$$

setzen $\xi := \overline{x} + \theta(x-\overline{x})$, und nehmen an $\left\|x-x^0\right\|_\infty \ < \ \delta_2, \ \left\|\overline{x}-x^0\right\|_\infty \ < \ \delta_2$

$$\curvearrowright \ \left\|\overline{x} + \theta(x-\overline{x}) - x^0\right\|_\infty \leq \left\|\overline{x} - x^0\right\|_\infty \ + \ \max_{k=1,\ldots,n} \underbrace{|\vartheta_k|}_{\leq 1} \ \underbrace{\|x-\overline{x}\|_\infty}_{\leq \|x-x^0\|_\infty + \|\overline{x}-x^0\|_\infty} \ \leq \ \delta_2 + 2\delta_2 \ = \ 3\delta_2$$

$$\curvearrowright \ \forall\, x, \overline{x}: \left\|x-x^0\right\|_\infty < \delta_2, \ \left\|\overline{x}-x^0\right\|_\infty < \delta_2: \left\|\mathcal{J}\left(f, \overline{x}+\theta(x-\overline{x})\right) - \mathcal{J}\left(f,x^0\right)\right\|_1 < \frac{1}{2M} \tag{10.6}$$

setzen $\delta^* := \min(\delta_1, \delta_2)$, seien $x \in Q$ und y gegeben mit $\left\|y-y^0\right\|_1 < \dfrac{\delta^*}{2M}$

$$\underset{(10.2)}{\Longrightarrow} \ \left\|B_y(x) - x^0\right\|_\infty \ \leq \ \underbrace{\left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left(y-y^0\right)\right\|_\infty}_{\leq\, M\|y-y^0\|_1,\ (10.3)} + \underbrace{\left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right) r(x-x^0)\right\|_\infty}_{\leq\, \frac{1}{2}\|x-x^0\|_\infty,(10.4)}$$

$$\leq \ M\,\frac{\delta^*}{2M} \ + \ \frac{1}{2} \underbrace{\left\|x-x^0\right\|_\infty}_{<\delta^*, \text{da } x \in Q} \ < \ \delta^*$$

$\curvearrowright \ B_y(x) \in Q$ für $x \in Q$ und $\left\|y-y^0\right\|_1 < \dfrac{\delta^*}{2M} \quad \curvearrowright \ \forall\, y, \ \left\|y-y^0\right\|_1 < \dfrac{\delta^*}{2M}: \ B_y: Q \to Q \ \curvearrowright$ (ii)

Seien $x, \overline{x} \in Q \ \underset{(10.2),\ (10.3)}{\Longrightarrow} \ \left\|B_y(x) - B_y(\overline{x})\right\|_\infty \ \leq \ M \ \left\|r\left(x-x^0\right) - r\left(\overline{x}-x^0\right)\right\|_1$

$$\begin{aligned}
r\left(x-x^0\right)-r\left(\overline{x}-x^0\right) =&\ f(x)-f\left(x^0\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\left(x-x^0\right)-\left[f(\overline{x})-f\left(x^0\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\left(\overline{x}-x^0\right)\right]\\
=&\ f(x)-f(\overline{x})-\mathcal{J}\left(f,x^0\right)(x-\overline{x})\\
\underset{(10.5)}{=}&\ \left[\mathcal{J}\left(f,\overline{x}+\theta(x-\overline{x})\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\right](x-\overline{x})
\end{aligned}$$

$$\left\|r(x-x^0)-r(\overline{x}-x^0)\right\|_1 \leq \left\|\mathcal{J}\left(f,\overline{x}+\theta(x-\overline{x})\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\right\|_1 \|x-\overline{x}\|_\infty \underset{(10.6)}{\leq} \frac{1}{2M}\|x-\overline{x}\|_\infty \tag{10.7}$$

$$\curvearrowright \ \|B_y(x)-B_y(\overline{x})\|_\infty \leq M\left\|r\left(x-x^0\right)-r\left(\overline{x}-x^0\right)\right\|_1 \leq \frac{1}{2}\|x-\overline{x}\|_\infty$$

$\curvearrowright$ B_y Kontraktion $\Longrightarrow$ (iii)

Nach Banachschem Fixpunktsatz (*Satz 9.5.2*) existiert damit für jedes $y \in V := \left\{\eta : \left\|\eta-y^0\right\|_1 < \frac{\delta^*}{2M}\right\}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in Q$ mit $B_y(x)=x$, d.h. $y=f(x)$; dadurch wird auf V eine Funktion $g(y)$ mit $g(y)=x$ definiert $\Longrightarrow$ $g(y)$ ist (lokale) Umkehrfunktion zu $f(x)$ (bei x^0)

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Seien $x,\overline{x}\in Q$, g.z.z. : $\|g(y)-g(\overline{y})\|_\infty = \|x-\overline{x}\|_\infty \leq c\ \|y-\overline{y}\|_1 \Longrightarrow g(y)$ stetig

$$x-\overline{x} = g(y)-g(\overline{y}) = B_y(x)-B_{\overline{y}}(\overline{x}) \underset{(10.2)}{=} \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)(y-\overline{y})-\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0\right)\left[r\left(x-x^0\right)-r\left(\overline{x}-x^0\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \|x-\overline{x}\|_\infty \underset{(10.3)}{\leq} M\|y-\overline{y}\|_1+M\left\|r\left(x-x^0\right)-r\left(\overline{x}-x^0\right)\right\|_1 \underset{(10.7)}{\leq} M\|y-\overline{y}\|_1+\frac{1}{2}\|x-\overline{x}\|_\infty$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|x-\overline{x}\|_\infty \leq 2M\ \|y-\overline{y}\|_1$$

(partielle) Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

$x=g(y) \Longleftrightarrow f(g(y))=y,\ y^0=f\left(x^0\right)$, betrachten $\frac{\partial g_k}{\partial y_m}\left(y^0\right),\ k,m\in\{1,\dots,n\}$

Seien $y^0=\left(y_1^0,\dots,y_n^0\right)$, $h\neq 0$, und $y_h^0=\left(y_1^0,\dots,y_{m-1}^0,y_m^0+h,y_{m+1}^0,\dots,y_n^0\right)$

$$\curvearrowright \underbrace{(0,\dots,\overset{\overset{m}{\downarrow}}{h},\dots,0)}_{y_h^0-y^0} = f\left(g\left(y_h^0\right)\right)-f\left(g\left(y^0\right)\right)=\mathcal{J}\Big(f,x^0+\overline{\theta}\big(g\left(y_h^0\right)-\overbrace{x^0}^{g(y^0)}\big)\Big)\left(g\left(y_h^0\right)-g\left(y^0\right)\right) \tag{10.8}$$

nach Voraussetzung ist $\det\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\neq 0$, außerdem ist $\det\mathcal{J}(f,\xi)$ stetig in ξ $\curvearrowright$ $\det\mathcal{J}(f,\xi)\neq 0$ für $\left\|x^0-\xi\right\|<\delta \Longleftrightarrow \mathcal{J}(f,\xi)$ invertierbar für $\left\|x^0-\xi\right\|<\delta$

setzen $\xi := x^0+\overline{\theta}\left(g\left(y_h^0\right)-x^0\right) \Longrightarrow \left\|\xi-x^0\right\|_\infty \leq \left\|g\left(y_h^0\right)-x^0\right\|_\infty$, $g(y)$ stetig

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} g\left(y_h^0\right) = \lim_{y_h^0\to y^0} g\left(y_h^0\right) = g\left(y^0\right) = x^0 \Longrightarrow \left\|g\left(y_h^0\right)-x^0\right\|_\infty<\delta \quad \text{für } |h|\leq h_0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{J}\left(f,x^0+\overline{\theta}\left(g\left(y_h^0\right)-x^0\right)\right) \quad \text{invertierbar für } |h|\leq h_0$$

$$\underset{(10.8)}{\Longrightarrow} \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0+\overline{\theta}\left(g\left(y_h^0\right)-x^0\right)\right)(0,\dots,\overset{\overset{m}{\downarrow}}{h},\dots,0) = g\left(y_h^0\right)-g\left(y^0\right)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}\widetilde{b}_{11} & \cdots & \widetilde{b}_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \widetilde{b}_{n1} & \cdots & \widetilde{b}_{nn}\end{pmatrix}}_{\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0+\overline{\theta}\left(g\left(y_h^0\right)-x^0\right)\right)}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ h\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g_1\left(y_h^0\right)-g_1\left(y^0\right)\\ \vdots\\ g_k\left(y_h^0\right)-g_k\left(y^0\right)\\ \vdots\\ g_n\left(y_h^0\right)-g_n\left(y^0\right)\end{pmatrix} \Longrightarrow \widetilde{b}_{km}\ h = g_k\left(y_h^0\right)-g_k\left(y^0\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\lim_{h\to 0} \overbrace{\mathcal{J}^{-1}\left(f, x^0 + \overline{\theta}\left(g\left(y_h^0\right) - x^0\right)\right)_{km}}^{\widetilde{b}_{km}}}_{=\mathcal{J}^{-1}(f,x^0)_{km},\ \text{da}\ \mathcal{J}^{-1}(f,\xi)\ \text{stetig}} = \lim_{h\to 0} \frac{g_k\left(y_h^0\right) - g_k\left(y^0\right)}{h} = \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\left(y^0\right)$$

$$\curvearrowright \ \mathcal{J}^{-1}\left(f, x^0\right)_{km} = \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\left(y^0\right), \quad k, m = 1, \ldots, n \ \underset{\text{lin. Alg.}}{\Longrightarrow} \ \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\left(y^0\right) = (-1)^{k+m} \frac{\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\left(x^0\right)\right)^{mk}}{\det \mathcal{J}\left(f, x^0\right)} \qquad \square$$

Beispiel : $n = 2,\ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\left(x^0, y^0\right) = \det \mathcal{J}\left(x^0, y^0\right) = e^{2x^0}\left(\cos^2 y^0 + \sin^2 y^0\right) = e^{2x^0} \neq 0 \ \text{ für alle } \ x^0 \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ lokale Umkehrbarkeit in jedem Punkt $\left(x^0, y^0\right) \in \mathbb{R}^2$

wählen als $U = U\left(x^0, y^0\right) = \mathbb{R} \times \underbrace{\left(y^0 - \pi, y^0 + \pi\right)}_{\text{wegen } f(x,y) = f(x, y+2\pi) \text{ und geforderter Eineindeutigkeit nötig}}$,

direkte Berechnung der Umkehrfunktion $g(u,v)$ hier möglich (*i.a. nicht*) :

$$u^2 + v^2 = e^{2x} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ \ln\left(u^2 + v^2\right), \quad v = e^x \sin y \quad \Longrightarrow \quad \sin y = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$y \in \left(y^0 - \pi, y^0 + \pi\right) \Longrightarrow \exists\ k = k\left(y^0\right) \in \mathbb{Z} : y \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow \ y - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin\left([y - k\pi] + k\pi\right) = (-1)^k \ \sin\left(y - k\pi\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y - k\pi = \arcsin_0 \left[(-1)^k \ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad y = \arcsin_0 \left[(-1)^k \ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right] + k\pi$$

(*d.h.* $y = g_2(u,v)$ *existiert jeweils lokal, dort eindeutig*)

analog möglich : $y = \arccos_0 \left[(-1)^k \ \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right] + k\pi$

Folgerung 10.4.2 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes, und die Funktion $f(x)$ sei n-mal stetig partiell differenzierbar in U. Dann ist auch die Umkehrfunktion $x = g(y)$ n-mal stetig partiell differenzierbar in V.*

Beweis : $\dfrac{\partial g_k}{\partial y_m}(y) = (-1)^{k+m} \dfrac{\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\left(g(y)\right)\right)^{mk}}{\det \mathcal{J}\left(f, g(y)\right)}$, weitere Ableitungen mittels Kettenregel ... $\square$

Beispiele : *verschiedene Koordinaten-Transformationen*

- $n = 2$: *kartesische / Polarkoordinaten*

  $(x,y) = g(r,\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

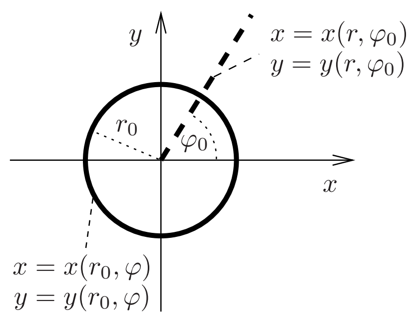
  $x = g_1(r,\varphi) = r\cos\varphi, \ \ y = g_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$

  $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}(r,\varphi) = \mathcal{J}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow \quad \det \mathcal{J}(r_0, \varphi_0) = r_0 > 0$

  d.h. überall auflösbar für $r_0 > 0$,

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)(+\pi), & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}(+\pi), & x = 0 \end{cases}$$



transformierte Koordinatenlinien

Beispiele :

- $n = 3$: _kartesische / Zylinderkoordinaten_

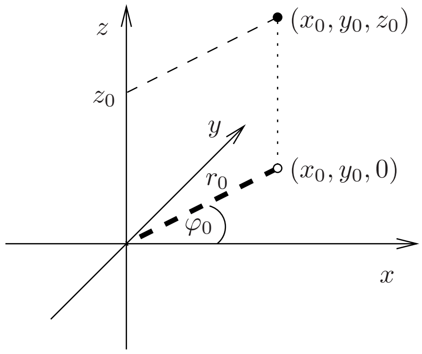
  $(x, y, z) = g(r, \varphi, z),\ 0 < r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &= g_1(r,\varphi,z) &= r\cos\varphi \\ y &= g_2(r,\varphi,z) &= r\sin\varphi \\ z &= g_3(r,\varphi,z) &= z \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}(r,\varphi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det \mathcal{J}(r_0,\varphi_0,z_0) = r_0 > 0$$

  d.h. überall auflösbar für $r_0 > 0$
  (*Formeln wie Polarkoordinaten*)



transformierte Koordinaten

- $n = 3$: _kartesische / Kugelkoordinaten_

  $(x, y, z) = g(r, \varphi, \vartheta),\ 0 < r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \pi$

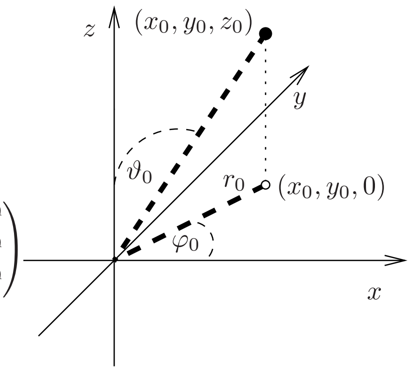
$$\begin{aligned} x &= g_1(r,\varphi,\vartheta) &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= g_2(r,\varphi,\vartheta) &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= g_3(r,\varphi,\vartheta) &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}(r,\varphi,\vartheta) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det \mathcal{J}(r_0,\varphi_0,\vartheta_0) = -r_0^2\sin\vartheta_0 < 0$$

  d.h. überall auflösbar für $r_0 > 0,\ 0 < \vartheta_0 < \pi$



transformierte Koordinaten

Bemerkung*: Kugelkoordinaten : ϑ ... Winkel zwischen Vektor (x, y, z) und $z-$ Achse, $0 \le \vartheta \le \pi$
alternativ : $\widetilde{\vartheta}$ ... *Winkel zwischen Vektor* (x, y, z) *und* $(x, y)-$ *Ebene,* $-\frac{\pi}{2} \le \widetilde{\vartheta} \le \frac{\pi}{2}$

$$\widetilde{\vartheta} = \frac{\pi}{2} - \vartheta \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= g_1(r,\varphi,\widetilde{\vartheta}) &= r\cos\varphi\cos\widetilde{\vartheta} \\ y &= g_2(r,\varphi,\widetilde{\vartheta}) &= r\sin\varphi\cos\widetilde{\vartheta} \\ z &= g_3(r,\varphi,\widetilde{\vartheta}) &= r\sin\widetilde{\vartheta} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \ \det \mathcal{J}(r_0,\varphi_0,\widetilde{\vartheta}_0) = -r_0^2 \ \sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \widetilde{\vartheta}_0\right)}_{\vartheta_0} = -r_0^2 \ \cos\widetilde{\vartheta}_0 < 0 \qquad \text{für} \qquad -\frac{\pi}{2} < \widetilde{\vartheta}_0 < \frac{\pi}{2}$$

Parameterabhängiger Auflösungssatz

Seien $y := f(x,\lambda) = f\big(x_1,\ldots,x_n,\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}_{=:\lambda\in\mathbb{R}^m \ \ldots \ \text{Parameter}}\big)$, und $y^0 = f\left(x^0,\lambda^0\right)$ gegeben

Frage : Existiert für λ ‘dicht bei’ λ^0 und y in einer Umgebung von y^0 eine Abbildung $x = g(y,\lambda)$, so dass (lokal) $y = f\left(g(y,\lambda),\lambda\right)$ und $x = g\left(f\left(x,\lambda\right),\lambda\right)$ gilt ?

Satz 10.4.3 **(i)** *Sind für $\eta > 0$, jedes fixierte $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\left\|\lambda - \lambda^0\right\|_1 < \eta$ und für $y = f(x,\lambda)$ die Voraussetzungen des Satzes 10.4.1 bezüglich x erfüllt, und sind die Funktionen $f_k(x,\lambda)$, $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(x,\lambda)$, $j,k = 1,\dots,n$, in einer $(n+m)$-dimensionalen Umgebung U von $\left(x^0,\lambda^0\right)$ stetig, so sind auch die Umkehrfunktionen $g_j(y,\lambda)$, $j = 1,\dots,n$, aus Satz 10.4.1 in einer $(n+m)$-dimensionalen Umgebung V von $\left(y^0,\lambda^0\right)$ stetig.*

(ii) *Sind die Funktionen $f_k(x,\lambda)$, $k = 1,\dots,n$, zusätzlich noch ℓ-mal stetig partiell differenzierbar bezüglich $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ in einer Umgebung Λ von λ^0, so haben auch die Umkehrfunktionen $g_j(x,\lambda)$ stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung ℓ in einer Umgebung von λ^0. Hierbei berechnen sich die ersten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}(y,\lambda)$, $j = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,m$, mittels*

$$\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}(x,\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x,\lambda)\,\frac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}(y,\lambda) \;=\; 0\,, \quad k = 1,\dots,n\,.$$

Beweis : Sei $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\left\|\lambda - \lambda^0\right\|_1 < \eta$

$$\Longrightarrow \quad y - y^0 = f(x,\lambda) - f\left(x^0,\lambda\right) = \mathcal{J}\left(f,x^0,\lambda\right)\left(x - x^0\right) + r(x - x^0,\lambda) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to x^0} \frac{\left\|r(x-x^0,\lambda)\right\|}{\left\|x - x^0\right\|} = 0$$

$\det \mathcal{J}\left(f,x^0,\lambda\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right)$ existiert, setzen für fixierte y,λ

$$B_{y,\lambda}(x) := x^0 + \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right)\left(y - y^0\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right) r\left(x - x^0,\lambda\right)$$

sei (y,λ) 'dicht' bei $\left(y^0,\lambda^0\right)$, d.h. $\left\|\lambda - \lambda^0\right\|_1 < \eta$, $\left\|y - y^0\right\|_1 < \dfrac{\delta^*}{2M}$ (δ^* kann von η abhängen)

$\curvearrowright$ $B_{y,\lambda}$ ist Kontraktion in $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \left\|x - x^0\right\|_\infty \le \delta^*\right\}$ $\curvearrowright$ $\exists\,!\; x \in Q \;:\; B_{y,\lambda}(x) = x = g(y,\lambda)$

$\curvearrowright$ $B_{y,\lambda}(x) = x \iff y = f(x,\lambda)$, d.h. für $x = g(y,\lambda)$ gilt stets $f\left(g(y,\lambda),\lambda\right) = y$

d.h. für (y,λ) 'dicht' bei $\left(y^0,\lambda^0\right)$ ist Satz 10.4.1 anwendbar, für jedes fixierte λ folgt somit Existenz der Umkehrfunktionen, deren Stetigkeit in y, sowie Existenz & Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen bzgl. y

<u>z.z.</u>: *Stetigkeit der Umkehrfunktionen $g_j(y,\lambda)$, $j = 1,\dots,n$, in einer $(n+m)$-dimensionalen Umgebung V von $\left(y^0,\lambda^0\right)$*

Seien (y,λ), $\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right) \in V$ mit $x = g(y,\lambda)$, $\overline{x} = g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)$

$$\begin{aligned} g(y,\lambda) - g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right) \;&=\; B_{y,\lambda}\left(g(y,\lambda)\right) - B_{\overline{y},\overline{\lambda}}\left(g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right) \\ &=\; \underbrace{B_{y,\lambda}\left(g(y,\lambda)\right) - B_{y,\lambda}\left(g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right)}_{B_{y,\lambda}(x-\overline{x})} + \underbrace{B_{y,\lambda}\left(g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right) - B_{\overline{y},\lambda}\left(g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right)}_{(B_{y,\lambda}-B_{\overline{y},\lambda})(\overline{x})} + \underbrace{B_{\overline{y},\lambda}\left(g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right) - B_{\overline{y},\overline{\lambda}}\left(g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right)}_{\left(B_{\overline{y},\lambda}-B_{\overline{y},\overline{\lambda}}\right)(\overline{x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\|B_{y,\lambda}\left(x - \overline{x}\right)\right\|_\infty \;&\le\; q\left\|x - \overline{x}\right\|_\infty \;=\; \frac{1}{2}\left\|x - \overline{x}\right\|_\infty \quad \text{(Kontraktion)} \\ \left\|\left(B_{y,\lambda} - B_{\overline{y},\lambda}\right)(\overline{x})\right\|_\infty \;&=\; \left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right)\left(\overline{y} - y\right)\right\|_\infty \;\le\; M\,\left\|\overline{y} - y\right\|_\infty \\ \left\|\left(B_{\overline{y},\lambda} - B_{\overline{y},\overline{\lambda}}\right)(\overline{x})\right\|_\infty \;&\le\; \underbrace{\left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right) r\left(\overline{x} - x^0,\lambda\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\overline{\lambda}\right) r\left(\overline{x} - x^0,\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty}_{=:A_1} \\ &\qquad + \underbrace{\left\|\left(\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\overline{\lambda}\right)\right)\left(\overline{y} - y^0\right)\right\|_\infty}_{=:A_2} \end{aligned}$$

Stetigkeit der $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(x,\lambda)$ in λ $\quad\Longrightarrow\quad A_2 \;\le\; \varepsilon\,\left\|\overline{y} - y^0\right\|_\infty$,

$$A_1 \;\le\; \underbrace{\left\|\left(\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\lambda\right) - \mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\overline{\lambda}\right)\right) r\left(\overline{x} - x^0,\lambda\right)\right\|_\infty}_{<\, c\,\varepsilon \quad \text{(Stetigkeit der } \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x,\lambda) \text{ in } \lambda)} + \underbrace{\left\|\mathcal{J}^{-1}\left(f,x^0,\overline{\lambda}\right)\left(r\left(\overline{x} - x^0,\lambda\right) - r\left(\overline{x} - x^0,\overline{\lambda}\right)\right)\right\|_\infty}_{\le\, M\left\|r(\overline{x}-x^0,\lambda)-r\left(\overline{x}-x^0,\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty}$$

$$\begin{aligned}
r\left(\overline{x}-x^0,\lambda\right)-r\left(\overline{x}-x^0,\overline{\lambda}\right) &= f\left(\overline{x},\lambda\right)-f\left(x^0,\lambda\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0,\lambda\right)\left(\overline{x}-x^0\right)\\
&\quad -\left[f\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)-f\left(x^0,\overline{\lambda}\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0,\overline{\lambda}\right)\left(\overline{x}-x^0\right)\right]\\
\left\|r\left(\overline{x}-x^0,\lambda\right)-r\left(\overline{x}-x^0,\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty &= \underbrace{\left\|f\left(\overline{x},\lambda\right)-f\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty}_{<\varepsilon \text{ für } \|\lambda-\overline{\lambda}\|_\infty<\delta} + \underbrace{\left\|f\left(x^0,\lambda\right)-f\left(x^0,\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty}_{<\varepsilon \text{ für } \|\lambda-\overline{\lambda}\|_\infty<\delta}\\
&\quad + \underbrace{\left\|\left(\mathcal{J}\left(f,x^0,\overline{\lambda}\right)-\mathcal{J}\left(f,x^0,\lambda\right)\right)\left(\overline{x}-x^0\right)\right\|_\infty}_{<\ c'\ \varepsilon \text{ (Stetigkeit der } \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x,\lambda) \text{ in } \lambda)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|g(y,\lambda)-g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty \le \frac{1}{2}\ \overbrace{\|x-\overline{x}\|_\infty}^{=\|g(y,\lambda)-g(\overline{y},\overline{\lambda})\|_\infty} + M\ \|\overline{y}-y\|_\infty + C\,\varepsilon \qquad \text{für} \quad \left\|\lambda-\overline{\lambda}\right\|_\infty<\delta$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|g(y,\lambda)-g\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty < \varepsilon' \qquad \text{für} \quad \left\|(y,\lambda)-\left(\overline{y},\overline{\lambda}\right)\right\|_\infty<\delta'$$

n.z.z. : *Existenz und Berechnung der* $\dfrac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}$

Seien $y=f(x,\lambda),\ x=g(y,\lambda) \quad \Longrightarrow \quad y=f\left(g(y,\lambda),\lambda\right),\ x=g\left(f(x,\lambda),\lambda\right);$

mit dem Ansatz $\varphi_k(x) := f_k\left(g(y,\lambda),\lambda\right),\ k=1,\ldots,n$, folgt aus der Kettenregel sofort

$$0=\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\left(g(y,\lambda),\lambda\right)\ \frac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}\left(f(x,\lambda),\lambda\right) + \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}(x,\lambda)\ , \quad i=1,\ldots,m$$

g.z.z. : *Existenz der* $\dfrac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}$; seien $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m),\ h=(0,\ldots,0,h_i,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^m,\ h_i\neq 0$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright\ 0 &= \overbrace{f_k\left(g(y,\lambda+h),\lambda+h\right)}^{\varphi_k(x)} - \overbrace{f_k\left(g(y,\lambda),\lambda\right)}^{\varphi_k(x)}\\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\Big(\underbrace{g(y,\lambda+h)+\theta\left[g(y,\lambda)-g(y,\lambda+h)\right]}_{=:\eta},\lambda+\theta h\Big)\ \Big(g_j(y,\lambda+h)-g_j(y,\lambda)\Big)\\
&\quad + \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_\ell}\Big(\underbrace{g(y,\lambda+h)+\theta\left[g(y,\lambda)-g(y,\lambda+h)\right]}_{=\eta},\lambda+\theta h\Big)\ \underbrace{\delta_{\ell i}}_{=\left\{\begin{smallmatrix}1, & \ell=i\\ 0, & \ell\neq i\end{smallmatrix}\right.}\ h_i \qquad \text{Kronecker-Symbol}\\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\eta,\lambda+\theta h)\ \Big(g_j(y,\lambda+h)-g_j(y,\lambda)\Big) + \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}(\eta,\lambda+\theta h)\ h_i
\end{aligned}$$

$$\xRightarrow[\text{Division durch } h_i\neq 0]{} \ 0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\eta,\lambda+\theta h)\ \frac{g_j(y,\lambda+h)-g_j(y,\lambda)}{h_i} + \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}(\eta,\lambda+\theta h), \quad k=1,\ldots,n$$

Gleichungssystem nach $\dfrac{g_j(y,\lambda+h)-g_j(y,\lambda)}{h_i}$ auflösbar, Grenzübergang $h_i\to 0$ liefert

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\eta,\lambda+\theta h)=\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\Big(g(y,\lambda),\lambda\Big)\ , \quad \lim_{h_i\to 0}\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}(\eta,\lambda+\theta h)=\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}\Big(g(y,\lambda),\lambda\Big)$$

(wegen Stetigkeit der Ableitungen) $\Longrightarrow \quad \lim\limits_{h_i\to 0}\dfrac{g_j(y,\lambda+h)-g_j(y,\lambda)}{h_i}=\dfrac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}(y,\lambda)$ existiert, $i=1,\ldots,m$

zu (ii) : ℓ-fache Differenzierbarkeit folgt aus expliziter Form der $(\ell-1)$-ten Ableitungen (*Iteration*) und Kettenregel □

Bemerkung*: $\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_i}(x,\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x,\lambda)\,\frac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}(y,\lambda) \;=\; 0,\;\; k = 1,\ldots,n,$

$\curvearrowright$ inhomogenes Gleichungssystem aus n Gleichungen, $\det \mathcal{J}(f,x,\lambda) \neq 0$ für (x,λ) in einer Umgebung von (x^0,λ^0) $\curvearrowright$ stets auflösbar nach $\frac{\partial g_j}{\partial \lambda_i}(y,\lambda),\; j = 1,\ldots,n$

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $f(x,\lambda) \;:=\; x^2 + \lambda^2 - 1,\;\; n = m = 1,\;\; x,\lambda \in \mathbb{R}$

$y = f(x,\lambda)$, mit $\frac{\partial f}{\partial x}\,(x^0,\lambda^0) = 2x^0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}\,(x^0,\lambda^0) \neq 0$ für $x^0 \neq 0$ (und beliebige λ^0)

sei o.B.d.A. $x^0 > 0 \quad\Longrightarrow\quad x = g(y,\lambda)$ existiert, hier : $x = g(y,\lambda) = \sqrt{1 + y - \lambda^2}$

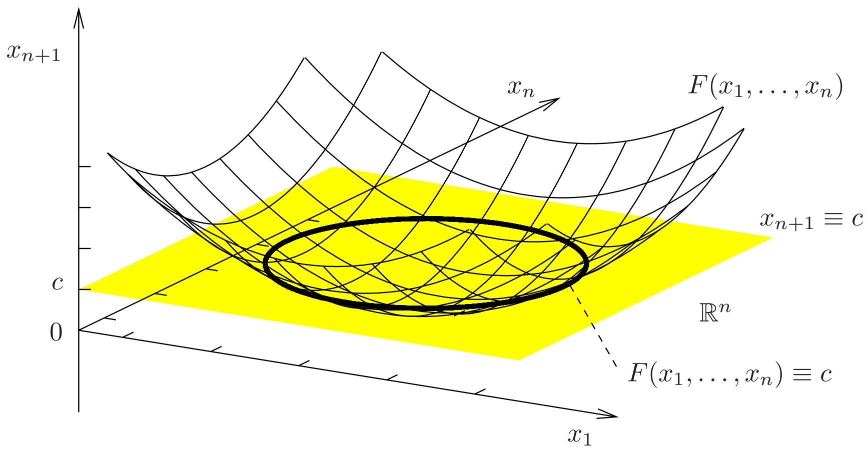
$$\Longrightarrow \quad f\left(g(y,\lambda),\lambda\right) = \left(\sqrt{1+y-\lambda^2}\right)^2 + \lambda^2 - 1 = y$$

$f(x,\lambda)$ stetig partiell differenzierbar nach λ (beliebig oft) $\Longrightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(y,\lambda)$ existiert (*aus spezieller Gestalt von* $g(y,\lambda)$ *natürlich auch ersichtlich*), mit $(i = m = 1,\;\; k = j = n = 1)$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)}_{2\lambda} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda)}_{2x}\,\frac{\partial g}{\partial \lambda}(y,\lambda) = 0 \quad \curvearrowright \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda}(y,\lambda) \;=\; -\,\frac{\lambda}{x} \;=\; -\,\frac{\lambda}{\sqrt{1+y-\lambda^2}}$$

Implizite Funktionen

Sei $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\;\; F : (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto F(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}$, gegeben. Wir betrachten den '*Schnitt des Graphen von* F *mit der Hyperebene* $x_{n+1} \equiv c$ ' für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, meist o.B.d.A. $c = 0$.



Frage : Wie kann $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x_1,\ldots,x_n) \equiv c\} \subset \mathbb{R}^n$ anders beschrieben werden ?

Existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\mathcal{S}_c$ Graph dieser Funktion ist (*zumindest lokal*), d.h. dass sich z.B. $x_n = f(x_1,\ldots,x_{n-1})$ darstellen lässt, wobei (in einer gewissen Umgebung U) gilt

$$\mathcal{S}_c \cap U = \left\{(\xi, f(\xi)) : \xi = (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in D(f) \subset \mathbb{R}^{n-1}\right\} \;\subset\; \mathbb{R}^n$$

bzw. $F\Big(x_1,\ldots,x_{n-1}, \underbrace{f(x_1,\ldots,x_{n-1})}_{x_n}\Big) \equiv c$ für $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in D(f)$?

Satz 10.4.4 *Die Funktion $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ besitze in einer Umgebung von $x^0 \in \mathbb{R}^n$ stetige erste partielle Ableitungen, und es gelte*

$$F\left(x^0\right)=0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial x_n}\left(x^0\right)\neq 0.$$

Dann existiert eine Umgebung U von x^0, so dass in einer $(n-1)$-dimensionalen Umgebung V von $\xi^0 := \left(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0\right)$ eine Funktion $f:\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $x_n = f(\underbrace{x_1,\dots,x_{n-1}}_{\xi})$ existiert, stetig ist, und es gilt

$$\{x\in U\subset\mathbb{R}^n \;:\; F(x)=0\} \;=\; \{(\xi,x_n): x_n=f(\xi),\ \xi\in V\}\,.$$

Ist F in U k-mal stetig differenzierbar, so ist $x_n=f(x_1,\dots,x_{n-1})$ in V ebenfalls k-mal stetig differenzierbar. Insbesondere gilt für die ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) \;=\; -\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\xi,f(\xi)\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\left(\xi,f(\xi)\right)},\qquad j=1,\dots,n-1,\quad \xi\in V\,.$$

B e w e i s : verwenden Satz 10.4.3 mit $m=n-1$ Parametern $x_j =: \lambda_j,\ j=1,\dots,n-1$

$\curvearrowright\ y=F(x_1,\dots,x_n)=F(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},x_n):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ y^0=0,$ setzen $\lambda:=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}\Big(\underbrace{\lambda^0,x_n^0}_{x^0}\Big)\neq 0 \;\underset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow}\; \frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\lambda,x_n^0\right)\neq 0 \quad \text{für } \left\|\lambda-\lambda^0\right\|<\delta,\ \lambda\in\mathbb{R}^{n-1}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j}(x)=\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ stetig in einer Umgebung von $x^0=(\lambda^0,x_n^0),\ j=1,\dots,n-1 \underset{\text{Satz 10.4.3}}{\Longrightarrow} \exists\ g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ in einer Umgebung von $\left(\lambda^0,y^0\right)=\left(\lambda^0,0\right)$, mit $x_n=g(\lambda,y)$, stetig, besitzt erste partielle Ableitungen bzgl. y und λ, und $y=F(\lambda,g(\lambda,y))$

$y^0=0\ \curvearrowright\ 0=F(\lambda,g(\lambda,0)),\ \lambda=(x_1,\dots,x_{n-1}),$ setzen $f(x_1,\dots,x_{n-1}):=g(x_1,\dots,x_{n-1},0)$

$$\Longrightarrow\quad 0=F\Big(x_1,\dots,x_{n-1},f(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)\underset{\xi\,=\,\lambda}{=}\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}}_{\lambda},0)\,,\quad j=1,\dots,n-1\ :$$

$$\underset{\text{Satz 10.4.3}}{\Longrightarrow}\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(\lambda,x_n)+\frac{\partial F}{\partial x_n}(\lambda,x_n)\,\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\lambda,y)=0\ \curvearrowright\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)\;=\;\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\lambda,0)\;=\;-\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\xi,f(\xi)\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\left(\xi,f(\xi)\right)}\qquad\square$$

Bemerkung*: $F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert implizit die Fläche $\mathcal{F}=\{x\in\mathbb{R}^n: F(x)=0\}\subset\mathbb{R}^n$, es gelte $F(x^0)=0,\ (\operatorname{grad}F)(x^0)\neq(0,\dots,0)$. Dann ist F nach (mindestens) einer Variablen auflösbar und besitzt in x^0 eine Tangentialebene, die durch

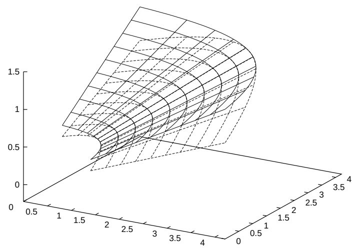
$$\left\langle (\operatorname{grad}F)\left(x^0\right),x-x^0\right\rangle=0$$

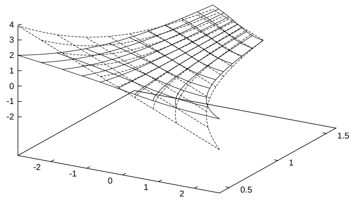
beschrieben wird; o.B.d.A. $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(x^0)\neq 0\curvearrowright x_n=f(x_1,\dots,x_{n-1})\curvearrowright$ Tangentialebene in x^0:

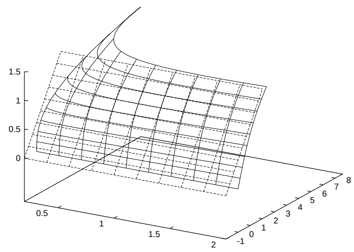
$$x_n-x_n^0=\left\langle(\operatorname{grad}f)\left(\xi^0\right),\xi-\xi^0\right\rangle=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi^0)(x_j-x_j^0)\underset{\text{Satz 10.4.4}}{=}\sum_{j=1}^{n-1}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x^0\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(x^0\right)}\right)(x_j-x_j^0)$$

$$\Longleftrightarrow\ -\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(x^0\right)\left(x_n-x_n^0\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x^0\right)\left(x_j-x_j^0\right)\ \Longleftrightarrow\ \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x^0\right)\left(x_j-x_j^0\right)=0}_{\text{Tangentialebene an }\mathcal{F}\text{ in }x^0}$$

Beispiele







$$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8 \qquad\qquad z^3 + 3\,x\,y\,z = 1 \qquad\qquad z^3 + x^2\,z = 2\,x\,y$$

$\mathsf{TE}_{(2,2,1)}:\quad z = \frac{1}{4}(x+y)$ $\qquad \mathsf{TE}_{(0,1,1)}:\quad z = -x+1$ $\qquad \mathsf{TE}_{(1,1,1)}:\quad z = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$

10.5 Extremwerte von Funktionen

Vorbereitung

Definition 10.5.1 *Seien* $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{n}$ *reelle Zahlen. Die quadratische Form*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\ \xi_j\xi_k\ , \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

heißt positiv definit *bzw.* negativ definit, *falls eine Zahl* $c > 0$ *existiert, so dass für alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\ \xi_j\xi_k\ \geq\ c\ \|\xi\|_2^2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\ \xi_j\xi_k\ \leq\ -\,c\ \|\xi\|_2^2\,.$$

Bemerkung*:

- Definiert man für reelle Zahlen $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{n}$ die symmetrische Matrix A^* durch

$$A^* \;=\; \left(\frac{a_{jk}+a_{kj}}{2}\right)_{j,k=1}^{n} \quad \text{und setzt } \xi^\top = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \text{ für } \xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}, \text{ so ist}$$

$$\xi^\top A\xi \;=\; \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\ \xi_j\xi_k \;=\xi^\top A^*\xi$$

$\Longrightarrow$ ausreichend, symmetrische (reelle) Matrizen zu betrachten

- Sei für $\ell = 1,\ldots,n$

$$\Delta_\ell = \det A_\ell = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\ell} \\ a_{21} & \ldots & a_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\ell 1} & \ldots & a_{\ell\ell} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ell} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ell} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & & a_{\ell\ell} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_1, A_2, A_ℓ

Dann gilt :

A *positiv* definit $\iff \Delta_\ell > 0,\quad \ell = 1,\ldots,n$

A *negativ* definit $\iff \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$

(*alternierende Vorzeichen*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}: \quad A \left\{ \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix} \right\} \text{ definit} \iff \begin{cases} \det A > 0, & a_{11} > 0 \\ \det A > 0, & a_{11} < 0 \end{cases}$$

Definition 10.5.2 *Die Funktion* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitzt in* $x^0 \in G$ *ein* lokales Maximum bzw. Minimum, *falls eine Umgebung* $U = \left\{x \in G : \left\|x - x^0\right\| < \delta\right\}$ *von* x^0 *existiert, so dass für alle* $x \in U$ *gilt*

$$f(x) \ \le \ f\left(x^0\right) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \ \ge \ f\left(x^0\right).$$

Bemerkung*:

- $n = 1 \curvearrowright$ Definition 10.5.2 entspricht Definition 7.3.1
- Man bezeichnet

$$\mathcal{H}_f\left(x^0\right) \ = \ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}\left(x^0\right)\right)_{j,k=1}^{n}$$

als *Hesse*[38]*-Matrix* der Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ in x^0.

Satz 10.5.3 *Die Funktion* $f(x) : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitze in* G *stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung.*

(i) *Besitzt* f *in* $x^0 \in G$ *ein lokales Extremum, so gilt* $(\operatorname{grad} f)(x^0) = (0, \ldots, 0)$*, d.h.* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

(ii) *Es sei* $(\operatorname{grad} f)(x^0) = (0, \ldots, 0)$ *für* $x^0 \in G$*. Ist* $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ *positiv definit, so hat* f *in* x^0 *ein lokales Minimum, ist* $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ *negativ definit sind, so liegt in* x^0 *ein lokales Maximum von* f *vor. Falls* $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ *indefinit ist, so besitzt* f *in* x^0 *kein lokales Extremum.*

Beweis : zu (i) : f habe in x^0 ein lokales Extremum $\Longrightarrow$ $\varphi_k^{x^0}(\xi) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \xi, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ hat in x_k^0 ein lokales Extremum $\xRightarrow[\text{Lemma 7.3.2}]{} 0 = \dfrac{\mathrm{d}\varphi_k^{x^0}}{\mathrm{d}\xi}\left(x_k^0\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right)$, $k = 1, \ldots, n$

zu (ii) : sei $(\operatorname{grad} f)(x^0) = (0, \ldots, 0)$, o.B.d.A. $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ positiv definit

z.z. : $f(x) \ \ge \ f\left(x^0\right)$ für $\left\|x - x^0\right\| < \delta$ für ein geeignetes $\delta > 0$

o.B.d.A. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, verwenden Taylor-Entwicklung von $f(x)$ bei x^0, Satz 10.3.3 mit $k = 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) \ &= \ f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right)}_{=0}\left(x_j - x_j^0\right) \ + \ \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right)\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_\ell - x_\ell^0\right) \\
&= \ f(x^0) + \underbrace{\sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0\right)\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_\ell - x_\ell^0\right)}_{(x-x^0)^\top \mathcal{H}(x^0)(x-x^0)} \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{j,\ell=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0\right)\right]\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_\ell - x_\ell^0\right)}_{(x-x^0)^\top [\mathcal{H}(x^0+\theta(x-x^0)) - \mathcal{H}(x^0)](x-x^0)} \\
&= \ f\left(x^0\right) \ + \ \underbrace{\left(x - x^0\right)^\top \mathcal{H}\left(x^0\right)\left(x - x^0\right)}_{\ge\, c\, \|x-x^0\|^2,\ \text{da } \mathcal{H}\left(x^0\right) \text{ positiv definit}} \ + \ \left(x - x^0\right)^\top \left[\mathcal{H}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \mathcal{H}\left(x^0\right)\right]\left(x - x^0\right) \\
&\ge \ f\left(x^0\right) \ + \ c\ \left\|x - x^0\right\|^2 \ + \ \left(x - x^0\right)^\top \left[\mathcal{H}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \mathcal{H}\left(x^0\right)\right]\left(x - x^0\right)
\end{aligned}$$

[38] Ludwig Otto Hesse (* 22.4.1811 Königsberg † 4.8.1874 München)

Stetigkeit der 2. Ableitungen $\implies \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, j, \ell = 1, \dots, n \quad \forall\, x,\ \left\|x - x^0\right\| < \delta:$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0\right) \right| \ \le\ \frac{c}{2n^2}$$

$$\implies \left| \sum_{j,\ell=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\left(x^0\right) \right] \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_\ell - x_\ell^0\right) \right|$$

$$\le\ \frac{c}{2n^2} \underbrace{\sum_{j,\ell=1}^{n} \left|x_j - x_j^0\right| \left|x_\ell - x_\ell^0\right|}_{=\|x-x^0\|_1^2 \le\ n^2\|x-x^0\|^2} \ \le\ \frac{c}{2} \left\|x - x^0\right\|^2 \qquad \text{für} \quad \left\|x - x^0\right\| < \delta$$

$$\implies \left| \left(x - x^0\right)^\top \left[\mathcal{H}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \mathcal{H}\left(x^0\right)\right] \left(x - x^0\right) \right| \ \le\ \frac{c}{2} \left\|x - x^0\right\|^2 \qquad \text{für} \quad \left\|x - x^0\right\| < \delta$$

$$\implies \left(x - x^0\right)^\top \left[\mathcal{H}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \mathcal{H}\left(x^0\right)\right] \left(x - x^0\right) \ \ge\ -\frac{c}{2} \left\|x - x^0\right\|^2 \qquad \text{für} \quad \left\|x - x^0\right\| < \delta$$

$$\implies f(x) - f\left(x^0\right) \ \ge\ c\left\|x - x^0\right\|^2 \ +\ \left(x - x^0\right)^\top \left[\mathcal{H}\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right) - \mathcal{H}\left(x^0\right)\right] \left(x - x^0\right)$$

$$\ge\ \frac{c}{2} \left\|x - x^0\right\|^2 \ \ge\ 0 \qquad \text{für} \quad \left\|x - x^0\right\| < \delta$$

□

Bemerkung*:

- Aussage zu *inneren* Punkten von G; lokales Extremum auch auf dem Rand ∂G möglich
- weitere Charakterisierung :
  - $\mathcal{H}\left(x^0\right)$ positiv / negativ definit, falls alle Eigenwerte positiv / negativ sind $\curvearrowright$ lokales Extremum (*Minimum / Maximum*)
  - $\mathcal{H}\left(x^0\right)$ besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte $\curvearrowright$ kein Extremum

    (*folgt auch aus Beweis : es existieren* $x,\ x'$ *mit* $\left\|x - x^0\right\| < \delta,\ \left\|x' - x^0\right\| < \delta,$ *und* $f(x) > f\left(x^0\right),\ f(x') < f\left(x^0\right)$ $\curvearrowright$ *kein Extremum*)
  - $\mathcal{H}\left(x^0\right)$ besitzt einen Eigenwert $\lambda = 0$ $\curvearrowright$ keine Entscheidung möglich, weitere Untersuchungen notwendig (*höhere Ableitungen*)

Beispiele : (1) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y + 3 = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y - 2 = 0 \ \curvearrowright\ x^0 = -\frac{4}{3},\ y^0 = \frac{1}{3}$$

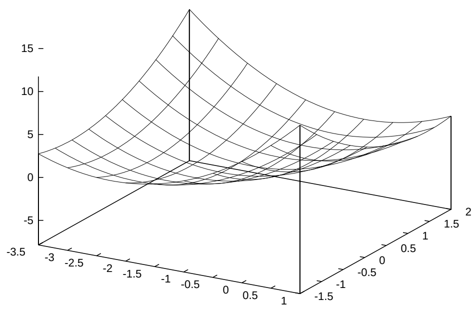
$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{H}(x^0, y^0)$$

$\implies \quad \mathcal{H}(x^0, y^0)$ positiv definit

$(\det \mathcal{H}(x^0, y^0) = 3 > 0,\ a_{11} = 2 > 0)$

$\implies \quad$ lokales Minimum in

$$P_{\min} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad f\left(P_{\min}\right) = -\frac{4}{3}$$



Beispiele : (2) $f(x,y) = \left(x^2+2y^2\right)\ e^{-(x^2+y^2)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left(1-x^2-2y^2\right)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & x=0 \\ \searrow & x^2+2y^2=1 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(2-x^2-2y^2\right)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & y=0 \\ \searrow & x^2+2y^2=2 \end{matrix}$$

$$\curvearrowright \quad \begin{aligned} (x_1^0,y_1^0) &= (0,0) \\ (x_2^0,y_2^0) &= (0,1) \\ (x_3^0,y_3^0) &= (0,-1) \\ (x_4^0,y_4^0) &= (1,0) \\ (x_5^0,y_5^0) &= (-1,0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \curvearrowright \det\mathcal{H}(0,0) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$$

$\curvearrowright$ lokales Minimum in $(0,0)$, $f(0,0)=0$

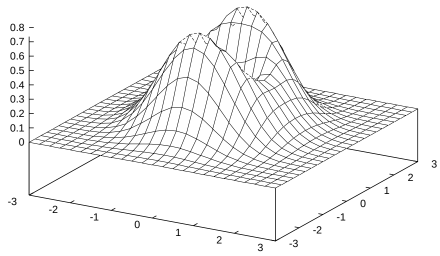
$$\mathcal{H}(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright \ \det\mathcal{H}(0,\pm 1) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) < 0$$

$\curvearrowright$ lokale Maxima in $(0,\pm 1)$, $f(0,\pm 1) = \dfrac{2}{e}$

$$\mathcal{H}(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \curvearrowright \det\mathcal{H}(\pm 1,0) < 0$$

$\curvearrowright$ keine lokalen Extrema in $(\pm 1,0)$



$P_{\min} = (0,0)$,	$f(P_{\min}) = 0$
$P_{\max}^{1,2} = (0,\pm 1)$,	$f\left(P_{\max}^{1,2}\right) = 2\,e^{-1}$

<u>*Extremwerte mit Nebenbedingungen*</u>

Definition 10.5.4 *Seien* $f: G\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: G\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m<n$, *und*

$$M = \{x\in\mathbb{R}^n \ : \ g(x)=0\} \subset G\,.$$

Die Funktion f *besitzt in* $x^0 \in G$ *ein* lokales Maximum bzw. Minimum unter der Nebenbedingung $g(x)=0$, *falls* $x^0\in M$ *ist und eine Umgebung* $U = \left\{x\in G : \left\|x-x^0\right\| < \delta\right\}$ *von* x^0 *existiert, so dass*

$$f(x) \ \le\ f\left(x^0\right) \quad \textit{bzw.} \quad f(x) \ \ge \ f\left(x^0\right)$$

für alle $x\in U\cap M$ *gilt.*

Sei $f(x_1,\ldots,x_n)$ gegeben mit den Nebenbedingungen $g_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n)=0$, $m<n$.

<u>*Spezialfall*</u> : Nebenbedingungen lassen sich so auflösen, dass z.B.

$$x_1 = h_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ \ldots,\ \ x_m = h_m(x_{m+1},\ldots,x_n)$$

explizit darstellbar sind für geeignete Funktionen h_i $\Longrightarrow$ Problem reduziert sich auf Suche lokaler Extremwerte (*ohne Nebenbedingungen*),

$$\varphi(x_{m+1},\ldots,x_n) := f\Big(\overbrace{h_1(x_{m+1},\ldots,x_n)}^{x_1},\ldots,\overbrace{h_m(x_{m+1},\ldots,x_n)}^{x_m},x_{m+1},\ldots,x_n\Big) \ : \ \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Beispiel : $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$

$D(f) = \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+} \subset \mathbb{R}^2$

Nebenbedingung : $(n = 2, m = 1)$

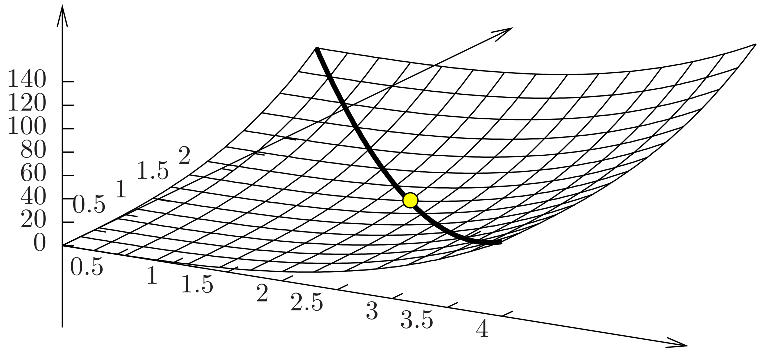
$x_1 + x_2 = 4 \iff$

$g(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad x_2 = 4 - x_1$

$\Longrightarrow \quad \varphi(x_1) := x_1^3 + (4 - x_1)^3,$

$D(\varphi) = [0, 4]$



$\varphi'(\xi) = 0 \iff 3\xi^2 - 3(4-\xi)^2 = 0 \iff \xi = 2,\ \varphi''(2) = 24 > 0 \Longrightarrow$ lokales Minimum in $\xi = 2,\ \varphi(2) = 16 \Longrightarrow f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ hat unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - 4 = 0$ ein lokales Minimum in $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (2, 2),\ f(2, 2) = 16$

Wie ist zu verfahren, wenn dieser Spezialfall nicht vorliegt (bzw. der Aufwand des Auflösens nach einzelnen Koordinaten 'sehr groß' wird) ?

z.B. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$, Nebenbedingungen :

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Satz 10.5.5 *Seien* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ m < n$, *mit stetigen ersten partiellen Ableitungen. Die Funktion* f *besitze in* $x^0 \in G$ *ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung* $g(x) = 0$. *Außerdem gebe es in*

$$\mathcal{J}\left(g, x^0\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

eine m*-reihige Unterdeterminante, die nicht verschwindet. Dann existieren reelle Zahlen* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, *mit denen die Gleichungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\left(x^0\right) = 0\,, \quad j = 1, \dots, n,$$

erfüllt werden.

Beweis : Sei o.B.d.A. $\det A\left(x^0\right) \neq 0$ für

$$A\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}$$

Dann erfüllt

$$y = g(\overbrace{x_1, \dots, x_m}^{\widehat{x}}, \overbrace{\mu_1}^{x_{m+1}}, \dots, \overbrace{\mu_{n-m}}^{x_n}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die Voraussetzungen von Satz 10.4.3 (*parameterabhängiger Auflösungssatz*) bei

$$x^0 = \Big(\underbrace{x_1^0, \dots, x_m^0}_{=:\widehat{x^0}}, \underbrace{x_{m+1}^0, \dots, x_n^0}_{=:\mu^0}\Big)\,, \quad \text{d.h. für} \quad \widehat{x^0} = \left(x_1^0, \dots, x_m^0\right),\ \mu^0 = \left(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\right)$$

Nebenbedingung : $g\left(x^0\right)=0 \iff \underbrace{g\left(\widehat{x^0},\mu^0\right)}_{y^0}=0 \iff y^0=0$

$\curvearrowright\ \exists\, h_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\ x_k=h_k\Big(\underbrace{y_1,\ldots,y_m}_{=0,\ y^0=0},\underbrace{\mu_1}_{x_{m+1}},\ldots,\underbrace{\mu_{n-m}}_{x_n}\Big) \iff x_k=h_k(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n)$

i.a. sind die Funktionen h_k, $k=1,\ldots,m$, unbekannt (*d.h. nicht explizit anzugeben*); nach Satz 10.4.3 (ii) können aber deren partielle Ableitungen berechnet werden :

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\widehat{x},\mu)+\sum_{\ell=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial x_\ell}(\widehat{x},\mu)\ \frac{\partial h_\ell}{\partial x_i}(0,\mu)\ =\ 0\ ,\quad k=1,\ldots,m\ ,\quad i=m+1,\ldots,n$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\widehat{x},\mu)\\ \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\widehat{x},\mu)\end{pmatrix}}_{=:\frac{\partial g}{\partial x_i}(\widehat{x},\mu)}+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\widehat{x},\mu) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\widehat{x},\mu)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\widehat{x},\mu) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(\widehat{x},\mu)\end{pmatrix}}_{A(\widehat{x},\mu)}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x_i}(0,\mu)\\ \vdots\\ \frac{\partial h_m}{\partial x_i}(0,\mu)\end{pmatrix}}_{=:\frac{\partial h}{\partial x_i}(0,\mu)}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[(\widehat{x},\mu)=(\widehat{x_0},\mu_0)=x^0]{}\ \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(x^0\right)\ =\ -\,A\left(x^0\right)\circ\frac{\partial h}{\partial x_i}\left(0,\mu^0\right)\ ,\quad i=m+1,\ldots,n$$

$\det A\left(x^0\right)\neq 0 \implies A\left(x^0\right)$ invertierbar

$$\implies \frac{\partial h}{\partial x_i}\left(0,\mu^0\right)\ =\ -\,A^{-1}\left(x^0\right)\circ\frac{\partial g}{\partial x_i}\left(x^0\right),\quad i=m+1,\ldots,n \qquad (*)$$

Sei nun x^0 ein lokaler Extremwert unter der Nebenbedingung $g(x)=0 \implies \varphi\ :\ \mathbb{R}^{n-m}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\varphi(x_{m+1},\ldots,x_n):=f\big(h_1(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,h_m(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n),x_{m+1},\ldots,x_n\big)$$

hat Extremwert in $\mu^0=\left(x^0_{m+1},\ldots,x^0_n\right) \xRightarrow[\text{Satz 10.5.3(i)}]{} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\mu^0\right)=0,\quad i=m+1,\ldots,n$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\mu^0\right)\ =\ 0\ &=\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right)\ \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\left(0,\mu^0\right)\ +\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\\ &=\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(x^0\right)\right)\circ\underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_i}\left(0,\mu^0\right)}_{(*)}\ +\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\\ &=\ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(x^0\right)\right)\circ\left(-\,A^{-1}\left(x^0\right)\right)}_{=:\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}\circ\frac{\partial g}{\partial x_i}\left(x^0\right)\ +\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\end{aligned}$$

mit $\lambda_\ell=-\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right)\ \underbrace{b_{k\ell}\left(x^0\right)}_{\text{Elemente von } A^{-1}\left(x^0\right)}\quad \curvearrowright\ 0\ =\ \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell\ \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}\left(x^0\right)\ +\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right),\ \ i=m+1,\ldots,n$

Andererseits ist nach Definition $\lambda\ =\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(x^0\right)\right)\circ\left(-\,A^{-1}\left(x^0\right)\right)$

$$\implies \lambda\circ A\left(x^0\right)\ =\ -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(x^0\right)\right) \iff \lambda\circ A\left(x^0\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(x^0\right)\right)=0$$

$$\implies 0\ =\ \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell\ \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}\left(x^0\right)\ +\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right),\ \ i=1,\ldots,m$$

□

Bemerkung*:

- Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heißen *Lagrange-Multiplikatoren*.
- Gleichungssystem mit $n+m$ Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\left(x^0\right)=0,\quad j=1,\ldots,n,\qquad g_k\left(x^0\right)=0,\quad k=1,\ldots,m$$

und $n+m$ Unbekannten : $x_1^0,\ldots,x_n^0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$; es ergibt sich aus dem Ansatz

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m):=f(x_1,\ldots,x_n)+\lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n)+\cdots+\lambda_m g_m(x_1,\ldots,x_n)$$

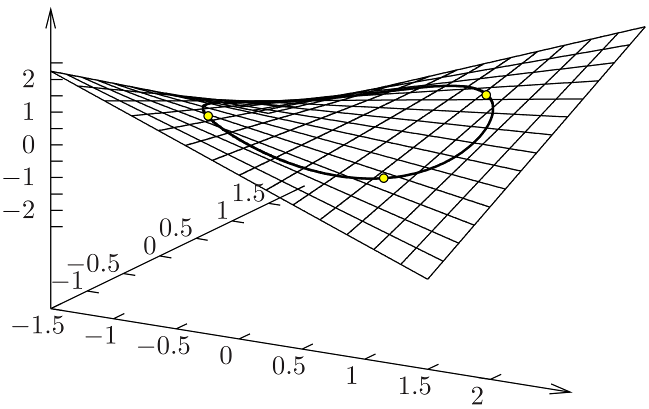
durch formales Differenzieren, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_k}(y):=0,\ k=1,\ldots,n+m$

- i.a. erhält man so nur Punkte x^0, die *'extremwertverdächtig'* sind
- Sei zusätzlich $M=\{x\in\mathbb{R}^n : g_k(x)=0,\ k=1,\ldots,m\}$ kompakt $\curvearrowright$ f nimmt (als stetige Funktion) auf M Minimum/Maximum an $\curvearrowright$ f hat globales Minimum/Maximum unter der Nebenbedingung $g(x)=0$

Sind $\xi^0, \ldots, \xi^\ell$ *'extremwertverdächtig'* $\curvearrowright$ $\begin{cases} f\left(\xi^*\right):=\max\left\{f\left(\xi^0\right),\ldots,f\left(\xi^\ell\right)\right\}\\ f\left(\xi_*\right):=\min\left\{f\left(\xi^0\right),\ldots,f\left(\xi^\ell\right)\right\}\end{cases}$

gesuchte Extremwerte

Beispiel : Sei $f(x,y)=xy$, Nebenbedingung : $x^2+y^2=1 \iff g(x,y)=x^2+y^2-1=0$



$\Longrightarrow\ \mathcal{J}\left(g,\left(x^0,y^0\right)\right)=\left(2x^0,2y^0\right)$

verschwindet nur für

$\left(x^0,y^0\right)=(0,0)\notin\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\right\}$

$\Longrightarrow$ wählen $A\left(x^0,y^0\right)=\begin{cases}2x^0, & x^0\neq 0\\ 2y^0, & x^0=0\end{cases}$

$\Longrightarrow$ Satz 10.5.5 anwendbar

$$\Phi(x,y,\lambda):=\underbrace{xy}_{f(x,y)}+\lambda\underbrace{\left(x^2+y^2-1\right)}_{g(x,y)=0}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,\lambda)&=y+\lambda 2x&&=0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,\lambda)&=x+\lambda 2y&&=0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)&=x^2+y^2-1&&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\ y=-2\lambda x\ \Longrightarrow\ \left\{\begin{aligned}x(1-4\lambda^2)&=0\\ x^2(1+4\lambda^2)&=1\end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow\ \lambda=\pm\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\curvearrowright$ *'extremwertverdächtige'* $\left(x^0,y^0\right)$: $\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{f(x^0,y^0)=\frac{1}{2}},\ \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{f(x^0,y^0)=-\frac{1}{2}}$

aus Skizze bzw. da $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$ *kompakt*

$\curvearrowright\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$ Maximum, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ Minimum

Beispiele : (1) Gesucht ist der Abstand eines Punktes $(x^0+y^0+z^0)$ von der Ebene $ax+by+cz=d$, wobei zusätzlich $a^2+b^2+c^2=1$ gelten soll.

$$f(x,y,z) \;=\; \left\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\right\|_2 \;=\; \sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2+(z-z^0)^2}$$

Nebenbedingung : $g(x,y,z)=ax+by+cz-d=0$

(*auch möglich :* $g_1(x,y,z)=ax+by+cz-d=0,\ g_2(x,y,z)\equiv a^2+b^2+c^2-1=0$

$$\curvearrowright\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)\equiv 0)$$

$\Longrightarrow\quad \mathcal{J}\left(g,(x^0,y^0,z^0)\right)=(a,b,c)$

verschwindet nur für $(a,b,c)=(0,0,0)$, das ist aber durch 2. Nebenbedingung ausgeschlossen $\Longrightarrow$ Satz 10.5.5 anwendbar

$$\Phi(x,y,z,\lambda) := \underbrace{\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2+(z-z^0)^2}}_{f(x,y,z)}+\lambda\underbrace{(ax+by+cz-d)}_{g(x,y,z)=0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z,\lambda) &= \frac{x-x^0}{\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\|_2}+\lambda a &&= 0\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z,\lambda) &= \frac{y-y^0}{\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\|_2}+\lambda b &&= 0\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z,\lambda) &= \frac{z-z^0}{\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\|_2}+\lambda c &&= 0\\
\frac{\partial\Phi}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) &= ax+by+cz-d &&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= ax+by+cz\\
&= a\left(x^0-\lambda a\left\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\right\|_2\right)+b\left(y^0-\lambda b\left\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\right\|_2\right)\\
&\qquad\qquad +c\left(z^0-\lambda c\left\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\right\|_2\right)\\
&= ax^0+by^0+cz^0-\lambda\underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{=1}\left\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\right\|_2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{ax^0+by^0+cz^0-d}{\|(x,y,z)-(x^0,y^0,z^0)\|_2}\qquad\curvearrowright\ \text{'extremwertverdächtig':}$$

$x^*=x^0-a(ax^0+by^0+cz^0-d),\quad y^*=y^0-b(ax^0+by^0+cz^0-d),$
$z^*=z^0-c(ax^0+by^0+cz^0-d)$

$f(x^*,y^*,z^*)=\left|ax^0+by^0+cz^0-d\right| \xRightarrow[\text{Aufgabenstellung}]{}$ Minimum

(2) Sei $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad D(f)=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ x_k>0,\quad k=1,\ldots,n\}$

suchen Extremum von f unter der Nebenbedingung :

$$g(x_1,\ldots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n-G=0\ ,\quad G>0$$

$\mathcal{J}\left(g,(x_1^0,\ldots,x_n^0)\right)=\left(x_2^0\cdots x_n^0,\ldots,x_1^0\cdots x_{n-1}^0\right)$ verschwindet nur für $x_1^0\cdots x_n^0=0$

$\Longrightarrow\quad x^0\notin\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)=0\}\quad\Longrightarrow\quad$ Satz 10.5.5 anwendbar

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\lambda) := \underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_n}_{f(x_1,\ldots,x_n)}+\lambda\underbrace{(x_1x_2\cdots x_n-G)}_{g(x_1,\ldots,x_n)=0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n,\lambda) &= 1+\lambda x_1\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_n &&= 0\,, \qquad j=1,\ldots,n\\
\frac{\partial\Phi}{\partial \lambda}(x_1,\ldots,x_n,\lambda) &= x_1x_2\cdots x_n - G &&= 0
\end{aligned}$$

$$\underset{x_j\neq 0 \text{ für } g(x)=0}{\Longrightarrow} x_j=-\lambda G,\ j=1,\ldots,n \quad\Longrightarrow\quad (-\lambda)^n = G^{1-n} \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda = -G^{\frac{1}{n}-1}$$

$\Longrightarrow \quad x_j^0 = \sqrt[n]{G},\ j=1,\ldots,n$ *'extremwertverdächtig'*, $f(\sqrt[n]{G},\ldots,\sqrt[n]{G}) = n\sqrt[n]{G}$

klar : x mit $x_k = G,\ x_j\equiv 1,\ j\neq k \quad\Longrightarrow\quad g(x)=0,\ f(x)=(n-1)+G \underset{\text{Lemma 1.1.4}}{\geq} n\sqrt[n]{G}$

$\rightsquigarrow f$ hat in $x^0 = (\sqrt[n]{G},\ldots,\sqrt[n]{G})$ lokales Minimum, $f(x_1,\ldots,x_n) \geq n\sqrt[n]{G}$

$\Longleftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ (*Ungleichung vom arithmetischen/geometrischen Mittel*)

11 Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

11.1 Kurvenintegrale

Rektifizierbare Wege

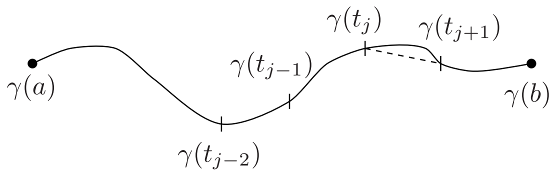
Definition 11.1.1 *Eine stetige Abbildung* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt ein* Weg *in* $\mathbb{R}^n$ *mit dem* Anfangspunkt $\gamma(a)$ *und dem* Endpunkt $\gamma(b)$.

Bemerkung*:
- Bezeichnungen $\mathfrak{Z}$ ... Zerlegung des Intervalls, $\mathcal{U}_\mathfrak{Z}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{Z}$, $\mathcal{Z}_\mathfrak{Z}$ ... Unter-, Ober-, Zwischensumme wie in Abschnitt 8.1
- Satz 9.6.2 $\curvearrowright$ Äquivalenz der Normen in $\mathbb{R}^n$, daher ab jetzt

$$\|x\| := \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

Sei $\mathfrak{Z} = \{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, $t_0=a,\ t_m=b$, und

$$\mathcal{L}(\mathfrak{Z},\gamma) = \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|$$



Definition 11.1.2 *Der Weg* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt* rektifizierbar, *wenn es eine Konstante* $M>0$ *gibt, so dass für alle Zerlegungen* $\mathfrak{Z}$

$$\mathcal{L}(\mathfrak{Z},\gamma) \leq M$$

gilt. In diesem Fall heißt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\mathfrak{Z}} \mathcal{L}(\mathfrak{Z},\gamma)$$

die Länge des Weges γ.

Bemerkung*:
- wie früher : $\mathfrak{Z}_1\subset\mathfrak{Z}_2 \Longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{Z}_1,\gamma)\leq\mathcal{L}(\mathfrak{Z}_2,\gamma) \Longrightarrow \mathcal{L}(\gamma)$ sinnvoll definiert
- $\mathcal{L}(\gamma)$ hängt momentan noch von γ statt von Bildmenge im $\mathbb{R}^n$ ab, z.B. haben

  $$\gamma_1(t) = (\cos t,\sin t) \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) = (\cos(2t),\sin(2t)) \ , \quad t\in[0,2\pi]$$

  gleiche Bildmenge im $\mathbb{R}^n$, wird aber von γ_2 doppelt durchlaufen

Beispiele : auch für stetige γ muss zugehöriger Weg nicht rektifizierbar sein

(i) $$\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(t, t\cos\frac{\pi}{t}\right) & , \quad t \in (0,1] \\ (0,0) & , \quad t = 0 \end{array} \right\}, \quad \lim_{t \downarrow 0} t\cos\frac{\pi}{t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(t) \text{ stetig}$$

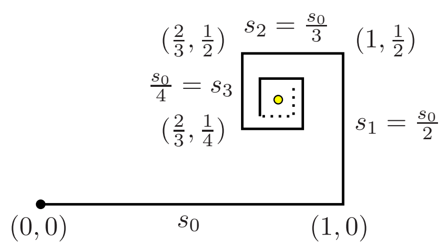
$$\mathfrak{Z}_m := \left\{0, \tfrac{1}{2m}, \tfrac{1}{2m-1}, \ldots, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad t_k = \tfrac{1}{2m+1-k}, \ k = 1, \ldots, 2m$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{t_k} = \cos(2m+1-k)\pi = (-1)^{k-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(t_k \cos\frac{\pi}{t_k} - t_{k-1}\cos\frac{\pi}{t_{k-1}}\right)^2 = (t_k + t_{k-1})^2, \ \ k = 1, \ldots, 2m$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathfrak{Z}_m, \gamma) = \sum_{k=1}^{2m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \sum_{k=1}^{2m} (t_k + t_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty$$

(ii)



'Zielpunkt' : (x_0, y_0) mit

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \frac{\ln 2}{2}$$

Länge der ersten m Teilstücke:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty$$

Definition 11.1.3 *Eine Funktion* $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* von beschränkter Variation *auf* $[a,b]$, *wenn es eine Konstante* $M > 0$ *gibt, so dass für jede Zerlegung* $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ *von* $[a,b]$ *stets*

$$\mathbb{V}(\varphi, \mathfrak{Z}) := \sum_{k=1}^{m} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \ \leq \ M$$

bleibt. Dann heißt

$$\mathbb{V}_a^b \varphi \ := \ \sup_{\mathfrak{Z}} \ \mathbb{V}(\varphi, \mathfrak{Z})$$

totale Variation *von* φ *auf* $[a,b]$.

Bemerkung*: Eine Funktion φ ist genau dann von beschränkter Variation auf $[a,b]$, wenn sie dort als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden kann.

Lemma 11.1.4 *Der Weg* γ *ist rektifizierbar genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen* $\gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, *von beschränkter Variation sind.*

Beweis : *siehe z.B. Heuser, Analysis II, Satz 177.1, S. 350* □

Definition 11.1.5 *Ein Weg* $\gamma(t)$ *heißt* (stetig) differenzierbar, *wenn jede Komponentenfunktion* $\gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, *auf* $[a,b]$ *(stetig) differenzierbar ist.*

Bemerkung*: falls $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) \neq \vec{0}$, so ist $\gamma'(t)$ Tangentenvektor an γ in t

Satz 11.1.6 *Der Weg* γ *sei stetig differenzierbar. Dann ist er rektifizierbar, und es gilt*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1')^2(t) + \cdots + (\gamma_n')^2(t)} \, \mathrm{d}t \, .$$

Beweis : o.B.d.A. $n = 2$, $\gamma_1(t) =: x(t)$, $\gamma_2(t) =: y(t)$; γ stetig differenzierbar $\curvearrowright$ $\exists\, M > 0 \quad \forall\, \tau \in (a, b) : \ |x'(\tau)| \le M, \ |y'(\tau)| \le M$

1. Schritt : *z.z. :* γ *rektifizierbar*

Sei $\mathfrak{Z} = \{t_0, \ldots, t_m\}$ Zerlegung von $[a, b]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathfrak{Z}, \gamma) &= \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \sqrt{\underbrace{\frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2}}_{(x')^2(\xi_k)} + \underbrace{\frac{(y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2}}_{(y')^2(\eta_k)}} \, (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{(x')^2(\xi_k) + (y')^2(\eta_k)} \, (t_k - t_{k-1}) \\ &\le \sqrt{2} \, M \, (b - a) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathfrak{Z}, \gamma) \le \sqrt{2} \, M \, (b - a) \ \text{(unabhängig von } \mathfrak{Z}) \quad \Longrightarrow \quad \gamma \ \text{rektifizierbar}$$

2. Schritt : *z.z. : Es existiert eine Zerlegungsfolge* $\{\mathfrak{Z}_m\}_{m=1}^\infty$ *mit den Eigenschaften*

(i) $\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\mathfrak{Z}_m, \gamma) < \frac{1}{m}$

(ii) $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \cdots$

(iii) $|\mathfrak{Z}_m| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\mathfrak{Z}} \mathcal{L}(\mathfrak{Z}, \gamma) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \ \ \exists\, \mathfrak{Z}_m^* \ : \ \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\mathfrak{Z}_m^*, \gamma) < \frac{1}{m} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathfrak{Z}_m^*\}_{m=1}^\infty$$

Sei $\{\mathfrak{Z}_m^{**}\}_{m=1}^\infty$ eine weitere Zerlegungsfolge mit $\mathfrak{Z}_m^{**} = \left\{ t_k = a + k\frac{b-a}{2m} \ , \ k = 0, \ldots, 2m \right\}$

$$\Longrightarrow \quad |\mathfrak{Z}_m^{**}| = \frac{1}{2m} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

gesuchte Folge $\{\mathfrak{Z}_m\}_{m=1}^\infty$ wird gebildet durch $\mathfrak{Z}_1 := \mathfrak{Z}_1^* \cup \mathfrak{Z}_1^{**}$, $\quad \mathfrak{Z}_m := \mathfrak{Z}_{m-1} \cup \mathfrak{Z}_m^* \cup \mathfrak{Z}_m^{**}$, $m \in \mathbb{N}$

3. Schritt : *z.z.:* $\forall\, \varepsilon > 0 \, \exists\, \delta > 0 \, \forall$ *Zwischensummen* $Z\,(\mathfrak{Z}, \|\gamma'(t)\|)$ *mit* $|\mathfrak{Z}| < \delta : |\mathcal{L}(\mathfrak{Z}, \gamma) - Z\,(\mathfrak{Z}, \|\gamma'(t)\|)| < \varepsilon$

$\|\gamma'(t)\|$ stetig von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}_+$, eine beliebige Zwischensumme hat die Gestalt

$$Z\,(\mathfrak{Z}, \|\gamma'(t)\|) = \sum_{k=1}^m \|\gamma'(\zeta_k)\| \ (t_k - t_{k-1}) \ , \qquad \zeta_k \in (t_{k-1}, t_k)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\mathfrak{Z}, \gamma) - Z\,(\mathfrak{Z}, \|\gamma'(t)\|)| &\le \sum_{k=1}^m \Big| \, \|(x'(\xi_k), y'(\eta_k))\| - \|(x'(\zeta_k), y'(\zeta_k))\| \, \Big| \ (t_k - t_{k-1}) \\ &\le \sum_{k=1}^m \|(x'(\xi_k) - x'(\zeta_k), y'(\eta_k) - y'(\zeta_k))\| \ (t_k - t_{k-1}) \\ &\le \sum_{k=1}^m \sqrt{(x'(\xi_k) - x'(\zeta_k))^2 + (y'(\eta_k) - y'(\zeta_k))^2} \ (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

$x'(t),\ \ y'(t)$ stetig auf $[a,b]$ $\underset{\text{Satz 4.2.5}}{\Longrightarrow}$ gleichmäßig stetig $\Longrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,t,\tau\ :$

$$|t-\tau|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |x'(t)-x'(\tau)|<\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(b-a)}\ ,\quad |y'(t)-y'(\tau)|<\varepsilon'$$

Sei $\mathfrak{Z}$ Zerlegung mit $|\mathfrak{Z}|<\delta \ \curvearrowright$

$$|\mathcal{L}(\mathfrak{Z},\gamma)-Z\left(\mathfrak{Z},\|\gamma'(t)\|\right)| \ \le\ \sum_{k=1}^{m}\sqrt{2\ (\varepsilon')^2}\ \ (t_k-t_{k-1}) \ =\ \sqrt{2}\varepsilon'(b-a)=\varepsilon$$

<u>4. Schritt</u> : *z.z. :* $\mathcal{L}(\gamma)\ =\ \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t$

Sei $\{\mathfrak{Z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ die Zerlegungsfolge aus dem 2. Schritt; nach Satz 8.1.4 gilt dann

$$\lim_{m\to\infty} Z\left(\mathfrak{Z}_m,\|\gamma'(t)\|\right)\ =\ \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t$$

also gilt

$$\left|\mathcal{L}(\gamma)-\int\limits_a^b\|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t\ \right|$$
$$\le \underbrace{\left|\mathcal{L}(\gamma)-\mathcal{L}\left(\mathfrak{Z}_m,\gamma\right)\right|}_{<\frac{1}{m}<\varepsilon,\ m\ge m_0} + \underbrace{\left|\mathcal{L}\left(\mathfrak{Z}_m,\gamma\right)-Z\left(\mathfrak{Z}_m,\|\gamma'(t)\|\right)\right|}_{<\varepsilon\ \text{für}\ |\mathfrak{Z}|<\delta\ \curvearrowright\ m\ge m_1} + \underbrace{\left|Z\left(\mathfrak{Z}_m,\|\gamma'(t)\|\right)-\int\limits_a^b\|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t\right|}_{<\varepsilon\ \text{für}\ m\ge m_2} < 3\varepsilon$$

für $m\ge m_3 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}(\gamma)=\int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t$ $\square$

Bemerkung*: $\gamma(t)$ beschreibt einen *stückweise glatten Weg*, wenn $\gamma(t)$ stetig und aus endlich vielen stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_\ell,\ \ \ell=1,\dots,r$ zusammengesetzt ist

$$\Longrightarrow\quad \mathcal{L}(\gamma)=\sum_{\ell=1}^{r}\mathcal{L}(\gamma_\ell)$$

Definition 11.1.7 $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ *heißt* Jordan[39]-Bogen *bzw.* Jordan-Kurve, *wenn es einen stetigen Weg* $\gamma : [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *gibt, so dass die Abbildung* $\gamma:[a,b]\longrightarrow\Gamma$ *bijektiv ist.*

Bemerkung*: also ausgeschlossen : Doppelpunkte, mehrmalige Durchläufe etc.

Lemma 11.1.8 *Sei* $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *eine Jordan-Darstellung des Jordanbogens* $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$*.*

(i) *Ist* $\widetilde{\gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ *eine weitere Jordan-Darstellung von* Γ*, so existiert eine Funktion* $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$*, surjektiv, stetig, streng monoton, mit* $\widetilde{\gamma}=\gamma\circ\varphi$*, d.h.*

$$\widetilde{\gamma}(\tau)\ =\gamma\left(\varphi(\tau)\right)\ ,\quad \tau\in[\alpha,\beta]\ .$$

(ii) *Ist* $\psi:[c,d]\to[a,b]$ *eine surjektive, stetige und streng monotone Abbildung, so wird durch* $\widehat{\gamma}=\gamma\circ\psi$*, d.h.*

$$\widehat{\gamma}(s):=\gamma\left(\psi(s)\right)\ ,\quad s\in[c,d]$$

stets eine Jordan-Darstellung von Γ *erzeugt.*

[39] Marie Ennemond Camille Jordan (* 5.1.1838 Lyon † 22.1.1922 Paris)

B e w e i s : (ii) klar, nur zu (i): seien $\gamma, \widetilde{\gamma}$ wie oben gegeben, setzen $\varphi := \gamma^{-1} \circ \widetilde{\gamma}$

Injektivität : klar, da $\gamma,\ \widetilde{\gamma}$ injektiv nach Voraussetzung

$$\underbrace{\varphi(\tau_1)}_{t_1} = \underbrace{\varphi(\tau_2)}_{t_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \underset{\text{Abschnitt 4.3}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{\widetilde{\gamma}^{-1}(\gamma(t_1))}_{\tau_1} = \underbrace{\widetilde{\gamma}^{-1}(\gamma(t_2))}_{\tau_2}$$

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, dashed, shift left, "\gamma^{-1}"] \arrow[dr, dashed, shift left, "\widetilde{\gamma}^{-1}"] & \\ {[a,b]} \arrow[ur, "\gamma"] & & {[\alpha,\beta]} \arrow[ll, "\varphi"] \arrow[ul, "\widetilde{\gamma}"'] \end{tikzcd}$$

Stetigkeit : klar, da Komposition stetiger Funktionen γ^{-1} und $\widetilde{\gamma}$

Monotonie : folgt aus Injektivität und Stetigkeit; seien $u,\ v \in [\alpha, \beta]$ mit $u < v \underset{\text{Inj.}}{\Longrightarrow} \varphi(u) \neq \varphi(v)$

o.B.d.A. $\varphi(u) < \varphi(v)$ z.z. $\varphi(u) < \varphi(\xi) < \varphi(v)$ für alle $\xi \in (u, v)$

indirekt : sei $\xi \in (u, v)$, Annahmen : (i) $\varphi(u) \geq \varphi(\xi)$ (ii) $\varphi(\xi) \geq \varphi(v)$

zu (i) : $\varphi(u) \geq \varphi(\xi) \underset{\text{Inj.}}{\Longrightarrow} \varphi(u) > \varphi(\xi) \underset{\substack{\text{ZWS 4.2.4} \\ \varphi \text{ auf } [\xi, v]}}{\Longrightarrow} \exists\, u' \in (\xi, v) : \varphi(u') = \varphi(u) \Longrightarrow$ Widerspruch zur Injektivität

zu (ii) : analog, ZWS 4.2.4 für φ auf $[u, \xi]$

$\Longrightarrow$ $\varphi(u) < \varphi(\xi) < \varphi(v)$ für alle $\xi \in (u, v)$ $(*)$

Annahme : φ sei nicht streng monoton wachsend auf $[u, v]$, d.h.

$$\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [u, v] \ : \ \xi_1 < \xi_2,\ \varphi(\xi_1) \geq \varphi(\xi_2) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \varphi(u) < \varphi(\xi_2) \leq \varphi(\xi_1) < \varphi(v)$$

$\Longrightarrow$ Widerspruch zum ZWS 4.2.4 für φ auf $[u, \xi_1]$ □

Bemerkung*: Argumentation oben $\curvearrowright$ *Jede auf einem Intervall* I *injektive und stetige Funktion ist dort streng monoton.*

Satz 11.1.9 *Seien* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *und* $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *zwei Jordan-Darstellungen von* Γ. *Dann sind die Wege* γ *und* $\widetilde{\gamma}$ *entweder beide rektifizierbar oder beide nicht rektifizierbar. Im ersten Fall gilt*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\widetilde{\gamma}) .$$

B e w e i s : Lemma 11.1.8 $\curvearrowright$ $\exists\, \varphi = \gamma^{-1} \circ \widetilde{\gamma}$ von $[\alpha, \beta]$ auf $[a, b]$, stetig, streng monoton, o.B.d.A. φ streng monoton wachsend

Sei zunächst γ rektifizierbar, z.z. : $\widetilde{\gamma}$ rektifizierbar, $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\widetilde{\gamma})$

Sei $\widetilde{\mathfrak{Z}} = \{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ eine Zerlegung von $[\alpha, \beta] \Longrightarrow \{t_0, \ldots, t_m : t_j = \varphi(\tau_j),\ j = 0, \ldots, m\}$ Zerlegung von $[a, b]$,

$$\mathcal{L}\left(\widetilde{\mathfrak{Z}}, \widetilde{\gamma}\right) = \sum_{j=1}^{m} \|\widetilde{\gamma}(\tau_j) - \widetilde{\gamma}(\tau_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\varphi(\tau_j)) - \gamma(\varphi(\tau_{j-1}))\| = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|}_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z}, \gamma)} \leq \mathcal{L}(\gamma)$$

$\Longrightarrow$ $\widetilde{\gamma}$ rektifizierbar, $\mathcal{L}\left(\widetilde{\mathfrak{Z}}, \widetilde{\gamma}\right) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ für alle Zerlegungen $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}(\widetilde{\gamma}) \leq \mathcal{L}(\gamma)$, γ und $\widetilde{\gamma}$ vertauschen $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}(\widetilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma)$

Sei γ nicht rektifizierbar $\Longrightarrow$ $\exists\, \{\mathfrak{Z}_\ell\}_{\ell=1}^{\infty},\ \mathfrak{Z}_\ell = \{t_j^\ell,\ j = 0, \ldots, m_\ell\} : \mathcal{L}(\mathfrak{Z}_\ell, \gamma) \geq \ell$

$$\Longrightarrow \quad \exists \left\{\widetilde{\mathfrak{Z}}_\ell\right\}_{\ell=1}^{\infty},\ \widetilde{\mathfrak{Z}}_\ell = \{\tau_j^\ell = \varphi^{-1}(t_j^\ell),\ j = 0, \ldots, m_\ell\} : \mathcal{L}\left(\widetilde{\mathfrak{Z}}_\ell, \widetilde{\gamma}\right) = \mathcal{L}(\mathfrak{Z}_\ell, \gamma) \geq \ell$$

$\Longrightarrow$ $\widetilde{\gamma}$ nicht rektifizierbar □

Bemerkung*: für streng monoton fallendes φ setzt man $\widetilde{\mathfrak{Z}}_\ell = \{\tau_j^\ell = \varphi^{-1}\left(t_{m_\ell-j}^\ell\right),\ j = 0,\dots,m_\ell\}$, d.h. $\tau_0^\ell = \varphi^{-1}(t_{m_\ell}^\ell) < \varphi^{-1}(t_{m_\ell-1}^\ell) = \tau_1^\ell < \cdots < \tau_{m_\ell-1}^\ell = \varphi^{-1}(t_1^\ell) < \varphi^{-1}(t_0^\ell) = \tau_{m_\ell}^\ell$

Unter einer *geschlossenen Jordan-Kurve* versteht man eine Punktmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, die von einem stetigen Weg $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ erzeugt wird, wobei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Gamma$ surjektiv und injektiv auf $[a,b)$ ist und $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Bemerkung*: vorangegangene Überlegungen entsprechend gültig

Definition 11.1.10 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *besitze eine rektifizierbare Jordan-Darstellung* γ. *Dann heißt* Γ rektifizierbar; *die* Länge der Kurve Γ (*bzw. die* Kurvenlänge, Bogenlänge *von* Γ) *entspricht der Weglänge* $\mathcal{L}(\gamma)$ *und wird mit*

$$|\Gamma| \ = \ \mathcal{L}(\gamma)$$

bezeichnet.

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* glatte Jordan-Kurve, *falls es eine Jordan-Darstellung* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *für* Γ *gibt, die stetig differenzierbar ist und* $\gamma'(t) \neq 0$ *für alle* $t \in (a,b)$ *gilt.*

Bemerkung*: Satz 11.1.9 $\curvearrowright$ alle anderen Jordan-Darstellungen von Γ rektifizierbar, gleiche Länge

Sei Γ eine glatte Jordan-Kurve mit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$ $\curvearrowright$

$$s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$$

beschreibt Länge des Bogens von $\gamma(a)$ bis $\gamma(t)$, $s : [a,b] \longrightarrow \big[0, |\Gamma|\big]$ stetig differenzierbar, streng monoton wachsend mit

$$s'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \ = \ \|\gamma'(t)\| \ > \ 0$$

Lemma 11.1.11 *Sei* Γ *eine glatte Jordan-Kurve mit Länge* $|\Gamma| > 0$. *Dann existiert eine ausgezeichnete Jordan-Darstellung* $\widetilde{\gamma}$ *von* Γ, *für die gilt*

$$\widetilde{\gamma} : \big[0, |\Gamma|\big] \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \textit{und} \qquad \|\widetilde{\gamma}'(u)\| = 1, \quad u \in \big[0, |\Gamma|\big].$$

B e w e i s : Γ glatte Jordan-Kurve $\Longrightarrow$ $\exists\ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$,

$$s_\gamma(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \ : \ [a,b] \longrightarrow \big[0, |\Gamma|\big], \quad s_\gamma'(t) = \ \|\gamma'(t)\| \ > \ 0,$$

s_γ streng monoton wachsend auf $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $\exists\ s_\gamma^{-1} : \big[0, |\Gamma|\big] \longrightarrow [a,b]$ existiert, setzen

$$\widetilde{\gamma}(u) := \gamma\left(s_\gamma^{-1}(u)\right), \quad u \in \big[0, |\Gamma|\big]$$

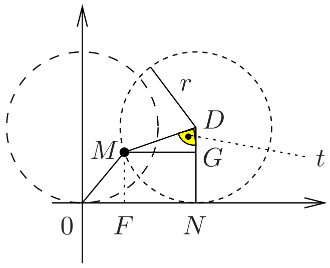
$$\xRightarrow[\text{Sätze 7.2.3, 7.2.4}]{} \widetilde{\gamma}'(u) = \gamma'\left(s_\gamma^{-1}(u)\right)\left(s_\gamma^{-1}\right)'(u) = \gamma'\left(s_\gamma^{-1}(u)\right)\frac{1}{s_\gamma'(v)} = \frac{\gamma'(v)}{\|\gamma'(v)\|}, \qquad v = s_\gamma^{-1}(u)$$

$$\Longrightarrow \quad \|\widetilde{\gamma}'(u)\| = \left\|\frac{\gamma'(v)}{\|\gamma'(v)\|}\right\| = 1, \qquad u \in \big[0, |\Gamma|\big]$$

□

Beispiel : (1) <u>*Zykloide*</u> : $\gamma(t) = \big(\overbrace{r(t-\sin t)}^{x(t)}, \overbrace{r(1-\cos t)}^{y(t)}\big), \quad r > 0, \quad 0 \le t \le 2\pi$

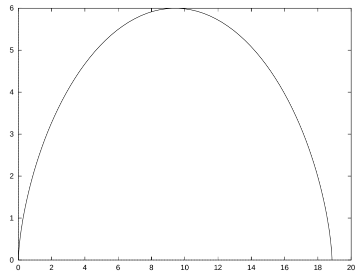
„Weg, den fester Punkt auf Peripherie eines Kreises vom Radius r beschreibt, wenn dieser in Richtung der positiven x- Achse rollt und der Punkt zu Beginn im Nullpunkt war“



$$\overline{0N} = \widehat{NM}$$

$$M = (x_M, y_M) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x_M &= \overline{0N} - \overline{FN} \\ &= \widehat{NM} - \overline{MG} \\ &= rt - r\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \overline{DN} - \overline{DG} \\ &= r - r\cos t \end{aligned}$$


$(r = 3)$

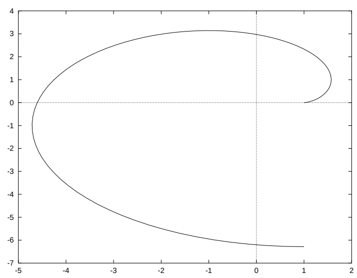
$$\curvearrowright \ \gamma(t) = M(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma'(t) = (r - r\cos t, r\sin t)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(r - r\cos t)^2 + (r\sin t)^2} \\ &= \sqrt{2}r\,\sqrt{1-\cos t} \\ &= \sqrt{2}r\,\sqrt{2\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)} \\ &= 2r\left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

Sei $0 \le T \le 2\pi \ \curvearrowright \ s(T) = \int\limits_0^T \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = 2r\int\limits_0^T \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 4r\left[1 - \cos\left(\frac{T}{2}\right)\right]$

(2) $\gamma(t) = \big(\underbrace{\cos t + t\sin t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t - t\cos t}_{y(t)}\big), \qquad 0 \le t \le 2\pi$



$$\Longrightarrow \quad \gamma'(t) = (t\cos t, t\sin t)$$

$$\Longrightarrow \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2} = t$$

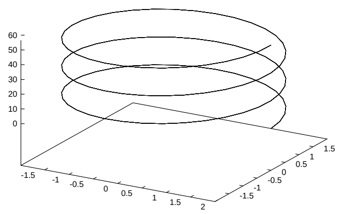
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = 2\pi^2$$

(3) <u>*Schraubenlinie*</u> : $\gamma(t) = \big(\overbrace{r\cos t}^{x(t)}, \overbrace{r\sin t}^{y(t)}, \overbrace{ht}^{z(t)}\big), \qquad r > 0, \ \ h > 0, \ \ 0 \le t \le 2\,m\pi, \ \ m \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t, h)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\gamma) = \int\limits_0^{2m\pi} \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = 2m\pi\sqrt{r^2+h^2}$$



<u>*Kurvenintegrale 1. Art*</u>

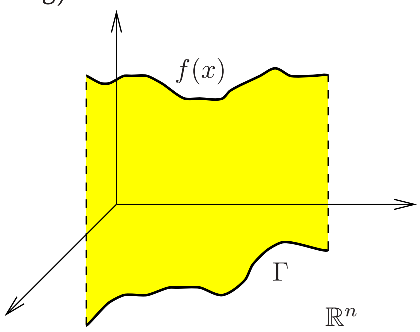
Seien eine Jordan-Kurve Γ mit Jordan-Darstellung (*Parameter-Darstellung*)

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \quad \gamma([a,b]) = \Gamma$$

und

$$f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{stetig}$$

gegeben



inhaltliche Deutung :

- Γ mit Masse der Dichte $f(x)$ belegt
- Fläche über Γ bis $f(x)$

Seien für eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_m\}$ von $[a,b]$ die Kurvenstücke $\Gamma_k := \gamma\left([t_{k-1}, t_k]\right)$, $k = 1, \dots, m$. Eine Zwischensumme ist dann gegeben als

$$\mathcal{Z}\left(\mathfrak{Z}, f, \Gamma\right) := \sum_{k=1}^{m} f\left(\xi_k\right) |\Gamma_k| \ , \qquad \xi_k \in \Gamma_k, \ k = 1, \dots, m,$$

d.h. $\xi_k \in \gamma\left([t_{k-1}, t_k]\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \ \tau_k \in [t_{k-1}, t_k], \ \xi_k = \gamma(\tau_k)$

Definition 11.1.12 *Seien* Γ *eine Jordan-Kurve und* $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.*

(i) *Sei* $\{\mathfrak{Z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ *eine beliebige Zerlegungsfolge mit* $\mathfrak{Z}_m \subset \mathfrak{Z}_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, *und* $\lim\limits_{m\to\infty} |\mathfrak{Z}_m| = 0$, *dann heißt* $\{\mathfrak{Z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ *eine* zulässige Zerlegungsfolge.

(ii) *Existiert stets*

$$\lim_{m\to\infty} \ \mathcal{Z}\left(\mathfrak{Z}_m, f, \Gamma\right) \ = \ I$$

unabhängig von der Auswahl der zulässigen Zerlegungsfolge und der Wahl der Zwischenpunkte ξ_k, *so heißt der Grenzwert* I *das* Kurvenintegral 1. Art von f längs der Kurve Γ *und wird bezeichnet mit*

$$\int\limits_{\Gamma} f(x)\, \mathrm{d}s \ .$$

Satz 11.1.13 *Ist* Γ *eine glatte Jordan-Kurve und* $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so existiert das Kurvenintegral 1. Art von* $f(x)$ *längs der Kurve* Γ. *Es kann durch*

$$\int\limits_{\Gamma} f(x)\, \mathrm{d}s \ = \ \int\limits_{a}^{b} f\left(\gamma(t)\right) \ \|\gamma'(t)\| \ \mathrm{d}t$$

berechnet werden, wobei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eine Jordan-Darstellung von* Γ *ist.*

Beweis : Satz 11.1.6 $\curvearrowright$ $|\Gamma_k| = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| \ \mathrm{d}t = \|\gamma'(\nu_k)\| \left(t_k - t_{k-1}\right), \ \nu_k \in (t_{k-1}, t_k), \ k = 1, \dots, m$

Mittelwertsatz der Integralrechnung, bzw. Sätze 7.3.4, 8.4.3

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(x)\, \mathrm{d}s - \int\limits_{a}^{b} f\left(\gamma(t)\right) \|\gamma'(t)\| \ \mathrm{d}t \right| \le \underbrace{\left| \int\limits_{\Gamma} f(x)\, \mathrm{d}s - \mathcal{Z}\left(\mathfrak{Z}_m, f, \Gamma\right) \right|}_{<\varepsilon \text{ für } m \ge m_0(\varepsilon), \text{Def. 11.1.12 (ii)}} + \left| \mathcal{Z}\left(\mathfrak{Z}_m, f, \Gamma\right) - \mathcal{Z}\left(\mathfrak{Z}_m, (f\circ\gamma)(t) \, \|\gamma'(t)\|\right) \right|$$

$$+ \underbrace{\left| \mathcal{Z}\left(\mathfrak{Z}_m, (f\circ\gamma)(t) \, \|\gamma'(t)\|\right) - \int\limits_{a}^{b} f\left(\gamma(t)\right) \ \|\gamma'(t)\| \ \mathrm{d}t \right|}_{<\varepsilon \text{ für } m \ge m_1(\varepsilon), \text{ Satz 8.1.4, } (f\circ\gamma)(t)\|\gamma'(t)\| \text{ stetig}}$$

$$\curvearrowright\ \left|\int\limits_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}s-\int\limits_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t\right|\ \le\ 2\varepsilon\ +\ \left|\mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m,f,\Gamma)-\mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m,(f\circ\gamma)(t)\,\|\gamma'(t)\|)\right|,\qquad m\ge m_2$$

$$\left|\mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m,f,\Gamma)-\mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m,(f\circ\gamma)(t)\,\|\gamma'(t)\|)\right|\ \le\ \sum_{k=1}^{L_m}\underbrace{\Big|f\big(\underbrace{\gamma(\tau_k)}_{\xi_k}\big)-f(\gamma(\nu_k))\Big|}_{<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{(b-a)M}}\ \underbrace{\|\gamma'(\nu_k)\|}_{\le\sup\limits_{s\in[a,b]}\|\gamma'(s)\|=:M}\ (t_k-t_{k-1})$$

$$<\ \varepsilon\qquad \text{für}\quad m\ge m_3$$

da $(f\circ\gamma)$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ und $|\tau_k-\nu_k|<t_k-t_{k-1}\le|\mathfrak{Z}_m|<\delta$ für $m\ge m_3$

$$\curvearrowright\ \left|\int\limits_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}s-\int\limits_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t\right|\ <\ 3\varepsilon\quad\text{für}\quad m\ge m_4\quad\curvearrowright\ \int\limits_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}s\ =\ \int\limits_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t$$

$\square$

Bemerkung*:

- Monotonie-Bedingung $\mathfrak{Z}_m\subset\mathfrak{Z}_{m+1}$ (*zulässige Zerlegungsfolge*) nicht notwendig; sei $\{\widetilde{\mathfrak{Z}}_m\}_{m=1}^\infty$ Zerlegungsfolge mit $\lim\limits_{m\to\infty}\left|\widetilde{\mathfrak{Z}}_m\right|=0,\ \lim\limits_{m\to\infty}\mathcal{Z}\left(\widetilde{\mathfrak{Z}}_m,f,\Gamma\right)=I$

  $\curvearrowright\ \lim\limits_{m\to\infty}\mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m,f,\Gamma)=I$ für $\{\mathfrak{Z}_m\}_{m=1}^\infty$ mit $\mathfrak{Z}_m\subset\mathfrak{Z}_{m+1}$

  wir setzen $\mathfrak{Z}^k:=\bigcup\limits_{j=1}^k\widetilde{\mathfrak{Z}}_j\ \curvearrowright\ \widetilde{\mathfrak{Z}}_k\subset\mathfrak{Z}^k\subset\mathfrak{Z}^{k+1}$; Zwischensummen $\curvearrowright\ \exists\ \{\xi_\ell\},\ \{\eta_\ell\}$:

  $$\underbrace{\mathcal{Z}^\xi(\mathfrak{Z}^k,f,\Gamma)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s}\ \overset{\widetilde{\mathfrak{Z}}_k\subset\mathfrak{Z}^k}{\le}\ \mathcal{Z}^\xi\left(\widetilde{\mathfrak{Z}}_k,f,\Gamma\right)\ \le\ \underbrace{\mathcal{Z}^\eta(\mathfrak{Z}^k,f,\Gamma)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s}\ \curvearrowright\ \lim_{k\to\infty}\mathcal{Z}^\xi\left(\widetilde{\mathfrak{Z}}_k,f,\Gamma\right)=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}s$$

- Die Existenz des Kurvenintegrals 1. Art kann auch unter schwächeren Voraussetzungen (*z.B.* Γ *rektifizierbare Jordan-Kurve,* f *stetig*) nachgewiesen werden.

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: *Schwerpunkt* (x_s,y_s) *einer mit Masse belegten ebenen Kurve* $\mathcal{K}$*, wobei die (stetige) Massendichte* $\varrho(x,y)$ *gegeben sei:*

Masse : $m\ =\ \displaystyle\int\limits_{\mathcal{K}}\varrho(x,y)\,\mathrm{d}s$

Schwerpunkt-Koordinaten : $x_s\ =\ \displaystyle\frac{1}{m}\int\limits_{\mathcal{K}}x\ \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s,\quad y_s\ =\ \frac{1}{m}\int\limits_{\mathcal{K}}y\ \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s$

$\mathcal{K}:\quad\gamma(\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi),\quad 0\le\varphi\le\alpha,\ \ 0<\alpha\le\pi,\ \ \varrho(x,y)=y^2$

$\curvearrowright\ \gamma'(\varphi)=(-r\sin\varphi,r\cos\varphi)\quad\Longrightarrow\quad\|\gamma'(\varphi)\|=r$

$$\curvearrowright\ m(\alpha)=\int\limits_{\mathcal{K}}\underbrace{\varrho(x,y)}_{y^2}\,\mathrm{d}s=\int\limits_0^\alpha\underbrace{r^2\sin^2\varphi}_{\varrho(\gamma(\varphi))}\ \underbrace{r}_{\|\gamma'(\varphi)\|}\ \mathrm{d}\varphi\ =\ r^3\int\limits_0^\alpha\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\ =\ \frac{r^3}{4}\underbrace{(2\alpha-\sin(2\alpha))}_{>0,\ \alpha>0},$$

z.B. $\quad m\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}r^3,\quad m(\pi)=\dfrac{\pi}{2}r^3=2\,m\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$x_s(\alpha)=\frac{1}{m}\int\limits_{\mathcal{K}}x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{m}\int\limits_0^\alpha\underbrace{r\cos\varphi\ r^2\sin^2\varphi}_{x\varrho(x,y)}\ \underbrace{r}_{\|\gamma'(t)\|}\ \mathrm{d}\varphi=\frac{r^4}{m}\int\limits_0^\alpha\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{r^4}{3m}\sin^3\alpha$$

$\curvearrowright\ x_s(\alpha)=\dfrac{4}{3}r\ \dfrac{\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin(2\alpha)}\ ,\quad$ z.B. $\quad x_s\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{3\pi}r,\quad x_s(\pi)=0$

$$y_s(\alpha) = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{K}} y\ \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{m}\int_0^\alpha \underbrace{r\sin\varphi\ r^2\sin^2\varphi}_{y\varrho(x,y)}\ \underbrace{r}_{\|\gamma'(t)\|}\ \mathrm{d}\varphi = \dots = \frac{r^4}{3m}\left(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y_s(\alpha) = \frac{4}{3}r\ \frac{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2}{2\alpha - \sin(2\alpha)}\ , \quad \text{z.B.}\quad y_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{3\pi}r, \quad y_s(\pi) = \frac{8}{3\pi}r = y_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Kurvenintegrale 2. Art

Sei Γ eine orientierte Jordan-Kurve mit Jordan-Darstellung $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$, $\gamma([a,b]) = \Gamma$, *Orientierung* : Durchlaufsinn von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bzw. umgekehrt

$F : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine stetige vektorwertige Funktion,

$$F(y) = (F_1(y),\dots,F_n(y))\,, \quad y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n, \qquad \text{mit} \quad F_i : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1,\dots,n$$

Sei $\mathfrak{Z} = \{t_0,\dots,t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathfrak{Z},F,\gamma) \ &:= \ \sum_{k=1}^m \Big\langle F\left(\gamma(\tau_k)\right), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\Big\rangle \\ &= \ \sum_{k=1}^m \underbrace{\sum_{j=1}^n F_j\left(\gamma(\tau_k)\right)\cdot\left(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})\right)}_{\langle F(\gamma(\tau_k)),\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\rangle}\ , \qquad \tau_k \in (t_{k-1},t_k), \quad k = 1,\dots,m \end{aligned}$$

Interpretationsmöglichkeit für $n = 3$, $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$

Projektion von $F(\gamma(t))$ auf

$$\left.\begin{aligned} x-\text{Achse} &: \sum_{k=1}^m F_1\left(\gamma(\tau_k)\right)\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right) \\ y-\text{Achse} &: \sum_{k=1}^m F_2\left(\gamma(\tau_k)\right)\left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right) \\ z-\text{Achse} &: \sum_{k=1}^m F_3\left(\gamma(\tau_k)\right)\left(z(t_k) - z(t_{k-1})\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{Aufsummieren}$$

Kurvenintegral 1. Art	*Kurvenintegral 2. Art*
Funktionswerte in einem Punkt werden mit der Länge $\Delta s \dashrightarrow \mathrm{d}s$ des entsprechenden Kurvenstückes multipliziert und aufsummiert	Funktionswerte werden mit Projektionen $\Delta x \dashrightarrow \mathrm{d}x$ (bzw. $\Delta y \dashrightarrow \mathrm{d}y$ oder $\Delta z \dashrightarrow \mathrm{d}z$) des entsprechenden Kurvenstückes multipliziert und aufsummiert

Definition 11.1.14 *Seien Γ eine orientierte Jordan-Kurve und $F = (F_1,\dots,F_n) : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Existiert stets*

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m,F,\gamma) \ = \ J$$

unabhängig von der Auswahl der zulässigen Zerlegungsfolge und der Wahl der Zwischenpunkte $\xi_k = \gamma(\tau_k)$, so heißt der Grenzwert J das Kurvenintegral 2. Art von $F(x)$ längs des Weges γ *und wird mit*

$$\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \int_\gamma F_1(x)\,\mathrm{d}x_1 \ + \dots + \ F_n(x)\,\mathrm{d}x_n$$

bezeichnet.

Satz 11.1.15 *Seien* Γ *eine orientierte glatte Jordan-Kurve mit Jordan-Darstellung* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma([a,b]) = \Gamma$, *und* $F = (F_1, \ldots, F_n) : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eine stetige vektorwertige Funktion.*

(i) *Dann gilt:*

$$\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[F_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\,\gamma_n'(t)\right]\,\mathrm{d}t\,.$$

(ii) *Ist* φ *eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende Abbildung von* $[\alpha,\beta]$ *auf* $[a,b]$, *so ist*

$$\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi \;: [\alpha,\beta] \longrightarrow \Gamma$$

wieder ein stetig differenzierbarer Weg, dessen Bogen mit dem von γ *übereinstimmt. Es gilt*

$$\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma\circ\varphi} F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

B e w e i s : <u>zu (i)</u> : *in Analogie zu Satz 11.1.6 und 11.1.13*

Transformation auf entsprechendes Riemann-Integral :

$$\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}) = \gamma_j'(\nu_{kj})\,(t_k - t_{k-1}), \quad \nu_{kj} \in (t_{k-1}, t_k), \quad j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,m,$$

setzen $h(t) := F_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\,\gamma_n'(t)$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m, h) \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m, F, \gamma) \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>g.z.z.</u> : $|\mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m, h) - \mathcal{Z}(\mathfrak{Z}_m, F, \gamma)| < \varepsilon$ für $m \geq m_0(\varepsilon)$ $\curvearrowright$ folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit von h

<u>zu (ii)</u> : erste Aussage folgt aus Lemma 11.1.8;

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^n \int_a^b F_j(\gamma(t))\,\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=\varphi(\tau)}{=} \sum_{j=1}^n \int_\alpha^\beta F_j(\gamma(\varphi(\tau)))\,\underbrace{\gamma_j'(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)}_{(\gamma\circ\varphi)_j'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\alpha^\beta F_j(\widetilde{\gamma}(\tau))\,(\gamma\circ\varphi)_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{j=1}^n \int_\alpha^\beta F_j(\widetilde{\gamma}(\tau))\,\widetilde{\gamma}_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\widetilde{\gamma}} F(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Bemerkung*:

- Existenz des Kurvenintegrals 2. Art kann auch unter schwächeren Voraussetzungen gezeigt werden : Γ orientierte rektifizierbare Jordan-Kurve, F stetig
  analoge Aussage auch für Unabhängigkeit der gewählten Jordan-Darstellung (*bei gleicher Orientierung !*)
- $\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x$ unabhängig von konkreter Parameterdarstellung $\Longrightarrow$ $\int_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x$

<u>Einfache Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art</u>

1. Linearität : $\displaystyle\int_\Gamma (F+G)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma G(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_\Gamma (\lambda F)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x, \ \lambda \in \mathbb{R}$

2. Sei $-\Gamma$ die Kurve Γ mit entgegengesetzter Orientierung (Durchlaufsinn) $\curvearrowright$

$$\int_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\Gamma} F(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Sei $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ (bzw. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$) die aus Γ_1 und Γ_2 zusammengesetzte Kurve (*wichtig z.B. für stückweise glatte Kurven ...*) $\curvearrowright$

$$\int\limits_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2} F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Gamma_1} F(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_2} F(x)\,\mathrm{d}x$$

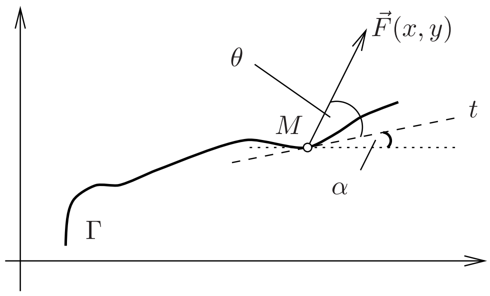
Physikalische Deutung

auf Punkt $M = (x, y)$ der Ebene wirke Kraft $\vec{F} = (P, Q)$, abhängig von (x, y), d.h.

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

α sei der Winkel zwischen Tangente t in M und $x-$Achse

$\curvearrowright$ $P(x, y) = \left\|\vec{F}\right\| \cos(\alpha + \theta), \quad Q(x, y) = \left\|\vec{F}\right\| \sin(\alpha + \theta)$



Massepunkt bewege sich entlang der Kurve Γ unter dem Kraftfeld $\vec{F}$ $\curvearrowright$ wollen dabei verrichtete Arbeit berechnen

Spezialfall : $\vec{F} \equiv \text{const.}$, Γ ... Gerade der Länge ℓ, θ ... Winkel zwischen $\vec{F}$ und Γ

$$\Longrightarrow \quad A = \underbrace{\left\|\vec{F}\right\| \cos\theta}_{\text{Projektion der Kraft auf Bewegungsrichtung}} \ \ell$$

im allgemeinen Fall Approximation : $\Delta A = \|\vec{F}\| \cos\theta \ \Delta\ell$, $\Delta\ell$ ... Stück der Tangente t in M

$$\Longrightarrow \quad \Delta x = \Delta\ell \cos\alpha, \quad \Delta y = \Delta\ell \sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \Delta A &= \|\vec{F}\| \ \overbrace{\big(\cos(\alpha+\theta)\cos\alpha + \sin(\alpha+\theta)\sin\alpha\big)}^{\cos(\alpha+\theta-\alpha)=\cos\theta} \ \Delta\ell \\
&= \underbrace{\|\vec{F}\| \ \cos(\alpha+\theta)}_{P(x,y)} \ \underbrace{\cos\alpha \ \Delta\ell}_{\Delta x} + \underbrace{\|\vec{F}\| \ \sin(\alpha+\theta)}_{Q(x,y)} \ \underbrace{\sin\alpha \ \Delta\ell}_{\Delta y} \quad = P(x,y)\Delta x + Q(x,y)\Delta y
\end{aligned}$$

Verfeinerung der Zerlegung, Grenzprozess $\dashrightarrow$ $A = \int\limits_{\Gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$

Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals 2. Art

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

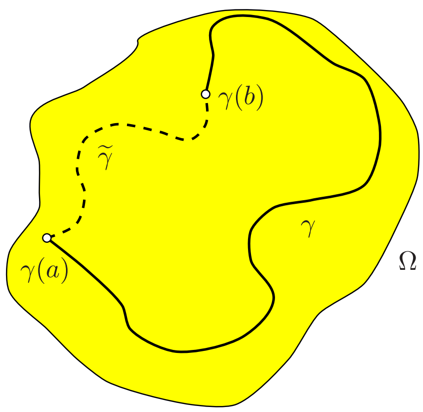
ein stetiges Vektorfeld. Weiterhin seien zwei Wege γ und $\widetilde{\gamma}$ mit

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega, \quad \widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \longrightarrow \Omega$$

und

$$\gamma(a) = \widetilde{\gamma}(\alpha), \quad \gamma(b) = \widetilde{\gamma}(\beta)$$

gegeben.



Definition 11.1.16 *F heißt auf Ω* wegunabhängig integrierbar, *wenn für beliebige, ganz in Ω verlaufende stetig differenzierbare Wege γ und $\widetilde{\gamma}$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets gilt*

$$\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\widetilde{\gamma}} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sei F wegunabhängig integrierbar, $\Gamma = \gamma([a,b]) \oplus (-\widetilde{\gamma}([\alpha,\beta])) \implies \Gamma$ geschlossen,

$$\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\widetilde{\gamma}} F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\widetilde{\gamma}} F(x)\,\mathrm{d}x \iff \oint_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Folgerung 11.1.17 *F ist auf Ω wegunabhängig integrierbar genau dann, wenn für alle geschlossenen, stetig differenzierbaren Jordan-Kurven Γ stets gilt*

$$\oint_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Definition 11.1.18 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. F heißt* Gradientenfeld (Potentialfeld) mit der Stammfunktion (dem Potential) $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *wenn φ auf Ω stetig partiell differenzierbar ist und*

$$F(x) = \operatorname{grad}\varphi(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\right)$$

für alle $x \in \Omega$ gilt.

Bemerkung*: falls φ existiert, so ist es bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt : φ, ψ Potentiale $\implies \operatorname{grad}(\varphi - \psi) \equiv 0 \implies \varphi - \psi \equiv \text{const.}$ (*Satz von Taylor, Satz 10.3.3*)

Satz 11.1.19 *Ein stetiges Vektorfeld F ist auf Ω Potentialfeld genau dann, wenn F auf Ω wegunabhängig integrierbar ist.*

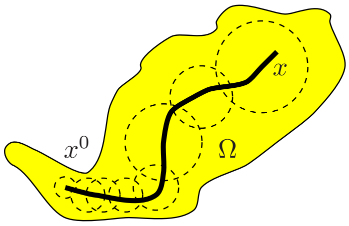
Beweis : $\boxed{\Longrightarrow}$: F sei Potentialfeld $\implies \exists\,\varphi : F = \operatorname{grad}\varphi$

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ stetig differenzierbare Kurve in Ω,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x \quad &\underset{\text{Satz 11.1.15}}{=} \quad \int_a^b \Big[\underbrace{F_1(\gamma(t))}_{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\gamma(t))}\gamma_1'(t) + \cdots + \underbrace{F_n(\gamma(t))}_{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\gamma(t))}\gamma_n'(t)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \int_a^b \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\gamma(t))\,\gamma_n'(t)\right]\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{Satz 10.2.1}}{=} \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varphi(\gamma(t))\,\mathrm{d}t \quad = \quad \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ unabhängig vom jeweils gewählten Weg γ, nur Anfangs- und Endpunkt $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ entscheidend $\iff$ Wegunabhängigkeit

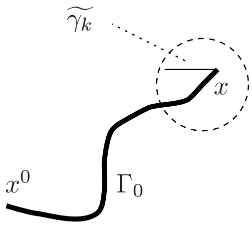
$\boxed{\Longleftarrow}$: Seien F auf Ω wegunabhängig integrierbar, $x^0 \in \Omega$ fest, $x \in \Omega$



Ω zusammenhängend $\curvearrowright$ es existiert ein (stückweise) glatter Weg von x^0 nach x (*zunächst stetiger Weg* γ_0, γ_0 *kompakt* $\curvearrowright$ *Überdeckung mit endlich vielen Kugeln, innerhalb jeder Kugel glatt wählbar*)

Sei $\Gamma_0 = \gamma_{x^0x}$ (beliebiger Weg, da Wegunabhängigkeit vorausgesetzt)

$$\varphi(x) := \int\limits_{\Gamma_0} F(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma_{x^0x}} F(y)\,\mathrm{d}y$$



Seien $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, $k=1,\dots,n$, $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, und $0 \le t \le |h|$, setzen

$$\widetilde{\gamma}_k(t) := \begin{cases} x + te_k & , \quad h>0 \\ x - te_k & , \quad h<0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{x^0(x+he_k)} = \gamma_{x^0x} \oplus \widetilde{\gamma}_k$$

Sei $h>0$ $\curvearrowright$

$$\varphi(x+he_k) - \varphi(x) = \int\limits_{\gamma_{x^0(x+he_k)}} F(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\gamma_{x^0x}} F(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma_{x^0x}\oplus\widetilde{\gamma}_k} F(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\gamma_{x^0x}} F(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_k} F(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^h \Big[F_1(\widetilde{\gamma}_k(t))\underbrace{(\widetilde{\gamma}_k)_1'(t)}_{=0} + \cdots + F_k(\widetilde{\gamma}_k(t))\underbrace{(\widetilde{\gamma}_k)_k'(t)}_{=1} + \cdots + F_n(\widetilde{\gamma}_k(t))\underbrace{(\widetilde{\gamma}_k)_n'(t)}_{=0}\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^h F_k(\widetilde{\gamma}_k(t))\,\mathrm{d}t = h\,F_k(\widetilde{\gamma}_k(\tau)) \quad , \quad \tau\in(0,h)$$

$\curvearrowright$ $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0}\frac{\varphi(x+he_k)-\varphi(x)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} F_k(\widetilde{\gamma}_k(\tau)) = F_k\big(\underbrace{\widetilde{\gamma}_k(0)}_{x}\big) = F_k(x)$, da F stetiges Vektorfeld; analog

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{\varphi(x+he_k)-\varphi(x)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} F_k(\widetilde{\gamma}_k(\eta)) = F_k\big(\underbrace{\widetilde{\gamma}_k(0)}_{x}\big) = F_k(x)$$

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+he_k)-\varphi(x)}{h}$ existiert, $\displaystyle\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = F_k(x)$, $k=1,\dots,n$ □

Beispiel : $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y),Q(x,y)\big) = \big(2xy+x^2, x^2+y^2\big)$, suchen $\varphi(x,y)$ mit

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &=& P(x,y) &=& 2xy+x^2 & \Longrightarrow & \varphi(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}x^3 + h_1(y) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) &=& Q(x,y) &=& x^2+y^2 & \Longrightarrow & \varphi(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + h_2(x) \end{array}\right\}$$

$$\curvearrowright \quad \varphi(x,y) = x^2y + \underbrace{\frac{x^3}{3} + c_1}_{h_2(x)} + \underbrace{\frac{y^3}{3} + c_2}_{h_1(y)} = x^2y + \frac{x^3+y^3}{3} + c$$

$\curvearrowright$ Potential $\varphi(x,y)$ ist stetig partiell differenzierbar für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, d.h. für beliebige $\Omega\subset\mathbb{R}^2$; seien also (x_0,y_0), $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ (beliebig) gegeben und γ eine (beliebiger) Weg von (x_0,y_0) nach (x_1,y_1)

$$\curvearrowright \int\limits_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = x_1^2y_1 + \frac{x_1^3+y_1^3}{3} - x_0^2y_0 - \frac{x_0^3+y_0^3}{3}$$

Beobachtung : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(\underbrace{2xy + x^2}_{P(x,y)}\big) = 2x = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(\underbrace{x^2 + y^2}_{Q(x,y)}\big) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y)$

Ist $F(x)$ ein Potentialfeld und zusätzlich stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_j}(x) \underset{\text{Satz 10.3.2}}{=} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x)\ , \quad j,k = 1,\ldots,n$$

auf Ω, d.h. die sogenannte

$$\underline{\textit{Integrabilitätsbedingung}}\ : \qquad \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) \ = \ \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x)\ , \quad j,k = 1,\ldots,n, \quad x\in\Omega\ .$$

Bemerkung*: Im $\mathbb{R}^3$ ist die Integrabilitätsbedingung gleichbedeutend damit, dass das Vektorfeld $\vec F = (P,Q,R)$ *wirbelfrei* ist, d.h. $\operatorname{rot}\vec F = \vec 0$:

$$\operatorname{rot}(P,Q,R) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \Big(\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}}_{=0}, \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}_{=0}, \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0}\Big) = \vec 0$$

Ein offenes, zusammenhängendes Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig bezüglich eines Punktes* $a\in\Omega$, wenn von jedem $x\in\Omega$ aus eine geradlinige Verbindung zu a in Ω existiert.

Satz 11.1.20 *Seien Ω ein offenes, zusammenhängendes Gebiet, sternförmig bezüglich $a\in\Omega$, und F eine stetig partiell differenzierbare Funktion auf Ω, die der Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) \ = \ \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x)\ , \quad j,k = 1,\ldots,n, \quad x\in\Omega \tag{$*$}$$

genügt. Dann ist F ein Potentialfeld auf Ω.

B e w e i s : Sei $x\in\Omega$ und $\gamma_x(t) = a + t(x-a)$, $0\le t\le 1$, ein spezieller Weg von a nach x, setzen

$$\varphi(x) := \int_{\gamma_x} F(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\curvearrowright\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\int_{\gamma_x} F(u)\,\mathrm{d}u \ = \ \frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j\big(\overbrace{a + t(x-a)}^{\gamma_x(t)}\big)\overbrace{(x_j - a_j)}^{(\gamma_{x_j})'(t)}\,\mathrm{d}t}_{\int_{\gamma_x} F(u)\,\mathrm{d}u}$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{j=1}^n F_j(a + t(x-a))(x_j - a_j)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a + t(x-a))t(x_j - a_j) + F_k(a + t(x-a))\right]\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{(*)}{=} \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(a + t(x-a))t(x_j - a_j) + F_k(a + t(x-a))\right]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[tF_k(a + t(x-a))\right]\,\mathrm{d}t \ = \ tF_k(a + t(x-a))\Big|_{t=0}^{t=1} \ = \ F_k(x)$$

□

Bemerkung*:

- Sternförmigkeit von Ω nicht unbedingt notwendig, z.B. Gravitationsfeld

$$F(x) = -G\frac{m}{\|x\|^3}\, x\ , \quad x \neq 0,$$

mit der Stammfunktion $\varphi(x) = \dfrac{Gm}{\|x\|},\ x \neq 0,$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{Gm}{\|x\|^3}\,(2x_k) = -\frac{Gm}{\|x\|^3}\,x_k \quad \Longrightarrow \quad (\operatorname{grad}\varphi)(x) = -\frac{Gm}{\|x\|^3}\,x = F(x)$$

i.a. aber nicht völlig verzichtbar :

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0)$$

erfüllt Integrabilitätsbedingung,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$$

ist aber kein Gradientenfeld, denn z.B. für $\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\big\}$ gilt

$$\oint_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \big[\underbrace{(-\sin t)}_{F_1(x,y)}\,\underbrace{(-\sin t)}_{\gamma_1'(t)} + \underbrace{\cos t}_{F_2(x,y)}\,\underbrace{\cos t}_{\gamma_2'(t)}\big]\,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

alternativ : Stammfunktion $\varphi(x,y)$ wäre

$$\varphi(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c,$$

ist aber bei $y = 0$ nicht differenzierbar

- Auf einem offenen, sternförmigen Gebiet Ω (also auch zusammenhängend) sind für eine stetig partiell differenzierbare Vektorfunktion $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent :

  (i) F ist wegunabhängig integrierbar in Ω

  (ii) $\oint_\Gamma F(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle in Ω liegenden geschlossenen, glatten Kurven Γ

  (iii) F ist Gradientenfeld in Ω

  (iv) F erfüllt Integrabilitätsbedingung, $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}(x),\ j,k = 1,\ldots,n,\ x \in \Omega$

Exakte Differentialgleichungen

betrachten Differentialgleichungen der Form $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$

$y(x)$ heißt *Lösung* der Differentialgleichung $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ für $x \in [a,b]$, falls $y(x)$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ ist und für alle $x \in [a,b]$ gilt

$$P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) = 0$$

Definition 11.1.21 *Seien* $P(x,y),\ Q(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Die Differentialgleichung* $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ *heißt* exakt, *wenn* $(P(x,y), Q(x,y))$ *auf* Ω *ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn eine Stammfunktion* $\Phi(x,y)$ *auf* Ω *existiert, für die*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

gilt.

Seien $\Omega = (a,b) \times (c,d)$, $\Phi(x,y)$ eine Stammfunktion und $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ in (a,b). Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\Phi(x,y(x)) \;=\; \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y(x))}_{P(x,y(x))} + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y(x))}_{Q(x,y(x))}\,y'(x) \;=\; P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) \;=\; 0$$

auf $(a,b) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(x,y(x)) \equiv C,\ \ x \in (a,b)$

Sei andererseits $y(x)$ auf (a,b) stetig differenzierbar, es gelte $\Phi(x,y(x)) \equiv C,\ x \in (a,b)$
$\curvearrowright\ P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) = 0 \ \curvearrowright\ y(x)$ Lösung der Differentialgleichung

Satz 11.1.22 *Sei* $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$.

(i) *Ist* $\Phi(x,y)$ *eine Stammfunktion für die exakte Differentialgleichung* $P(x,y)+Q(x,y)y' = 0$, *so erhält man genau alle Lösungen der Differentialgleichung, indem man für beliebige Konstanten* $C \in \mathbb{R}$ *die stetig differenzierbaren Lösungen* $y(x)$ *der Gleichung* $\Phi(x,y(x)) \equiv C$ *bestimmt.*

(ii) *Sind die Funktionen* $P(x,y)$ *und* $Q(x,y)$ *auf* Ω *stetig differenzierbar, so ist die Differentialgleichung exakt genau dann, wenn die Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ , \quad (x,y) \in \Omega$$

erfüllt ist.

Beweis : klar, siehe Vorüberlegungen □

Satz 11.1.23 *Die Differentialgleichung* $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ *sei exakt,* $\Phi(x,y)$ *eine Stammfunktion,* $\Omega = (a,b)\times(c,d) \subset \mathbb{R}^2$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, *und* $Q(x_0,y_0) \neq 0$. *Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 *genau eine stetig differenzierbare Lösung* $y(x)$.

Beweis : Sei $\Phi(x_0,y_0) =: C_0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) \neq 0 \underset{\text{Satz 10.4.4}}{\Longrightarrow} \exists\, U(x_0) \quad \exists\, y(x) \quad \forall\, x \in U(x_0)$:

$$\Phi(x,y(x)) = C_0, \quad y(x_0) = y_0$$

Eindeutigkeit : *Annahme* : seien $y(x),\ z(x)$ Lösungen

sei $x \in U(x_0)$ $\Longrightarrow \underbrace{\Phi(x_0,y(x))}_{C_0} - \underbrace{\Phi(x_0,z(x))}_{C_0} \underset{\substack{\text{Satz 10.3.3}\\ \text{(Taylor)}}}{=} \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,\eta_1)(x_0 - x_0)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,\eta_2)}_{Q(x_0,\eta_2)}(y(x) - z(x))$

$$\Longleftrightarrow 0 = Q(x_0,\eta_2)(y(x) - z(x)) \qquad \text{für} \quad x \in U(x_0) \quad \Longrightarrow \quad y(x), z(x) \in \widetilde{U}(y_0)$$

$$\Longrightarrow \quad Q(x_0,\eta_2) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = z(x), \quad x \in U(x_0)$$ □

Beispiel : $\underbrace{12xy+3}_{P(x,y)}+\underbrace{6x^2}_{Q(x,y)}\;y'=0,\;\; y(1)=0 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(12xy+3)}_{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}=12x=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(6x^2)}_{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}$

$P(x,y),\; Q(x,y)$ stetig partiell differenzierbar $\xRightarrow[\text{Satz 11.1.22}]{}$ exakte Differentialgleichung

$Q(x_0,y_0)=Q(1,0)=6\neq 0 \xRightarrow[\text{Satz 11.1.23}]{}$ eindeutig lösbar in Umgebung von $x_0=1$

suchen $\Phi(x,y)$ mit $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=P(x,y),\;\; \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=P(x,y)=12xy+3 \quad\Longrightarrow\quad \Phi(x,y)=6x^2y+3x+h(y)$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=6x^2+h'(y)\overset{!}{=}6x^2=Q(x,y)\quad\Longrightarrow\quad h(y)\equiv c$$

$$\Longrightarrow\quad \Phi(x,y)=6x^2y+3x+c=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y=-\frac{3x+c}{6x^2}\,,\quad x\neq 0,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$y(1)=0 \quad\Longrightarrow\quad c=-3 \quad\Longrightarrow\quad y(x)=\frac{3-3x}{6x^2}=\frac{1-x}{2x^2}\,,\quad x>0$$

Probe : $\underbrace{6\,\frac{1-x}{x}}_{12xy}+3+6x^2\underbrace{\frac{x-2}{2x^3}}_{y'}=3\left(\frac{2-2x}{x}+1+\frac{x-2}{x}\right)=0$

$$y(-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad y(x)=\frac{-3-3x}{6x^2}=-\frac{1+x}{2x^2}\,,\quad x<0$$

11.2 Jordan-Inhalt und Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Jordan-Inhalt

Einführung eines Inhaltsbegriffes $|\cdot|$ für eine möglichst große Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, folgende Eigenschaften erscheinen wünschenswert :

(i)	Positivität	$\lvert M\rvert\geq 0$
(ii)	Bewegungsinvarianz	*kongruente Mengen haben gleichen Inhalt*
(iii)	Normierung	$\lvert\,[0,1]^n\,\rvert=1$
(iv)	Additivität	*für disjunkte Mengen* $M\cap N=\emptyset$ *soll gelten* $\lvert M\cup N\rvert=\lvert M\rvert+\lvert N\rvert$

Bemerkung*: *historisch :* Hausdorff[40](1914) : nicht für alle Mengen möglich falls $n=3$; Banach (1923): für $n=1,2$ existieren optimale Lösungen, die jeder beschränkten Menge einen Inhalt zuordnen; ex existieren verschiedene Lösungsmöglichkeiten

zunächst für $n-$dimensionale 'Intervalle', d.h. achsenparallele Quader :

$$Q=\{x\in\mathbb{R}^n: a_j\leq x_j\leq b_j,\; j=1,\dots,n\}=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\,,$$

wobei $a_j,b_j\in\mathbb{R},\;\; a_j\leq b_j,\;\; j=1,\dots,n$

Ansatz : $|Q|:=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n) \quad\Longrightarrow\quad$ Normierung ✓, Positivität ✓

[40] Felix Hausdorff (* 8.11.1868 Breslau † 26.1.1942 Bonn)

Zerlegungen von Q :

Seien $\mathfrak{Z}_k = \left\{t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \ldots, t_{m_k}^{(k)}\right\}$ Zerlegungen von $[a_k, b_k]$, $k = 1, \ldots, n \implies \mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Z}_n$ ist Zerlegung von Q, die aus allen Quadern der Form

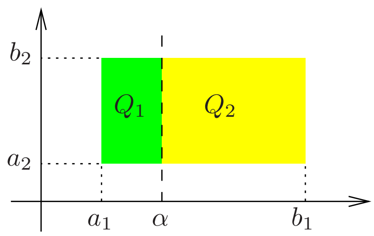
$$Q_{j_1 \ldots j_n} = \left[t_{j_1}^{(1)}, t_{j_1+1}^{(1)}\right] \times \cdots \times \left[t_{j_n}^{(n)}, t_{j_n+1}^{(n)}\right]$$

besteht, insgesamt $m := m_1 \cdots m_n$ Stück (*Charakterisierung durch Gitterpunkte möglich*), neue Numerierung

$$\curvearrowright \; Q = \bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell$$

analog zu früheren Betrachtungen : $\mathfrak{Z}'$ heißt *Verfeinerung* von $\mathfrak{Z}$, falls $\mathfrak{Z}'$ alle Gitterpunkte von $\mathfrak{Z}$ enthält; zu zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ existiert gemeinsame Verfeinerung (*koordinaten-, d.h. achsenweise konstruieren*)

Es gilt : $\quad |Q| = \sum_{\ell=1}^{m} |Q_\ell|$.



Begründung: o.B.d.A. $\quad Q = Q_1 \cup Q_2 \quad (m = 2)$

Seien
$$\begin{aligned} Q_1 &= [a_1, \alpha] \times Q^*, & |Q_1| &= (\alpha - a_1)\,|Q^*|\,, \\ Q_2 &= [\alpha, b_1] \times Q^*, & |Q_2| &= (b_1 - \alpha)\,|Q^*|\,, \end{aligned}$$

wobei Q^* Quader im $\mathbb{R}^{n-1}$ ist (z.B. $Q^* = [a_2, b_2]$ für $n = 2$)

$$\implies \quad |Q_1| + |Q_2| = (\alpha - a_1)\,|Q^*| + (b_1 - \alpha)\,|Q^*| = (b_1 - a_1)\,|Q^*| = \cdots = (b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n) = |Q|$$

Bezeichnungen :

- Zwei Quader Q_1 und Q_2 heißen nicht überlappend, falls gilt: $\mathring{Q}_1 \cap \mathring{Q}_2 = \emptyset$ (*siehe Abschnitt 9.1*).
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Q-Gebiet (Quadersumme), wenn Ω die endliche Vereinigung nicht überlappender Quader ist,

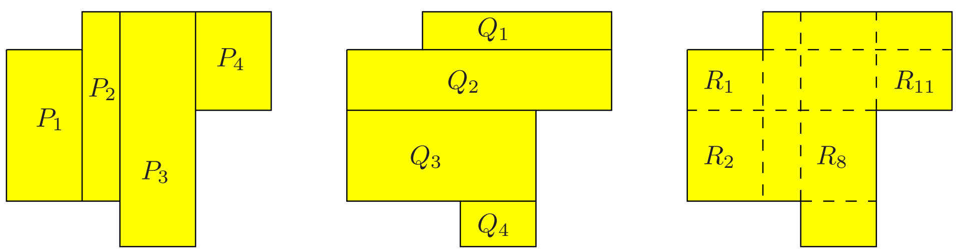
$$\exists\, Q_1, \ldots, Q_m,\; \mathring{Q}_j \cap \mathring{Q}_k = \emptyset,\; j \neq k : \quad \Omega = \bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Q-Gebiet, $\Omega = \bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell$, dann setzt man

$$|\Omega| := \sum_{\ell=1}^{m} |Q_\ell|$$

z.z.: $\quad |\Omega|$ unabhängig von der Art der Darstellung

Sei Ω ein Q-Gebiet mit den beiden Darstellungen $\quad \Omega = \bigcup_{\ell=1}^{m} P_\ell = \bigcup_{k=1}^{r} Q_k$, bilden gemeinsame Verfeinerung



$$\Longrightarrow \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^{\nu} R_j, \text{ wobei } Q_k = \bigcup_{i_k=1}^{L_k} R_{i_k}, \quad k = 1, \dots, r, \qquad P_\ell = \bigcup_{\mu_\ell=1}^{M_\ell} R_{\mu_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, m$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\nu} |R_j| = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\sum_{i_k=1}^{L_k} |R_{i_k}|}_{|Q_k|} = \sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\sum_{\mu_\ell=1}^{M_\ell} |R_{\mu_\ell}|}_{|P_\ell|} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} |Q_k| = \sum_{\ell=1}^{m} |P_\ell| = \sum_{j=1}^{\nu} |R_j| = |\Omega|$$

Es gilt :

- $S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad |S| \le |T|$
- S und T nicht überlappend, d.h. $\mathring{S} \cap \mathring{T} = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |S \cup T| = |S| + |T|$
- $S \subset T \quad \Longrightarrow \quad \exists\, R : \ \mathring{S} \cap \mathring{R} = \emptyset, \quad S \cup R = T, \quad |S| + |R| = |T|$

⇢ für Q-Gebiete Inhalt mit gewünschten Eigenschaften, aber Menge der Q-Gebiete viel zu klein
⇢ Erweiterung

Sei M beschränkt, d.h. $\exists\, c > 0 \quad \forall\, x \in M \ : \ \|x\| \le c$; definieren

$$\begin{array}{rcll} |M|_i & := & \sup\{|S| \ : \ S \subseteq M, \ S \text{ Q-Gebiet}\} & \underline{\text{innerer Inhalt von } M} \\ |M|_a & := & \inf\{|T| \ : \ M \subseteq T, \ T \text{ Q-Gebiet}\} & \underline{\text{äußerer Inhalt von } M} \end{array}$$

$M \neq \emptyset \ \curvearrowright \ \exists\, S : \ S \subseteq M \ \curvearrowright \ \mathcal{M}_i := \{|S| : \ S \subseteq M\} \neq \emptyset$; sei Q_c der (achsenparallele) Würfel $Q_c = [-c, c]^n \ \curvearrowright \ M \subset Q_c \ \curvearrowright \ \forall\, S \subseteq M : \ S \subset Q_c \ \curvearrowright \ |S| \le (2c)^n \ \curvearrowright \ \mathcal{M}_i$ beschränkt nach oben $\curvearrowright \ \sup \ \mathcal{M}_i = |M|_i$ existiert;
analog für $|M|_a$, denn $M \subset Q_c \ \curvearrowright \ \mathcal{M}_a = \{|T| : \ M \subseteq T\} \neq \emptyset$, beschränkt nach unten durch $0 \ \curvearrowright$ $|M|_a = \inf \ \mathcal{M}_a$ existiert

$$\forall\, S, \ T \ : \ S \subseteq M \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad |S| \le |T| \quad \Longrightarrow \quad 0 \le |M|_i \le |M|_a \le (2c)^n < \infty$$

Definition 11.2.1 *Eine beschränkte Menge* $M \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* Jordan-messbar, *wenn*

$$|M|_i = |M|_a$$

gilt. Dann bezeichnet man

$$|M| = |M|^{(n)} := |M|_i = |M|_a$$

als (n*-dimensionalen)* Jordan-Inhalt *von* M.

Bemerkung*:

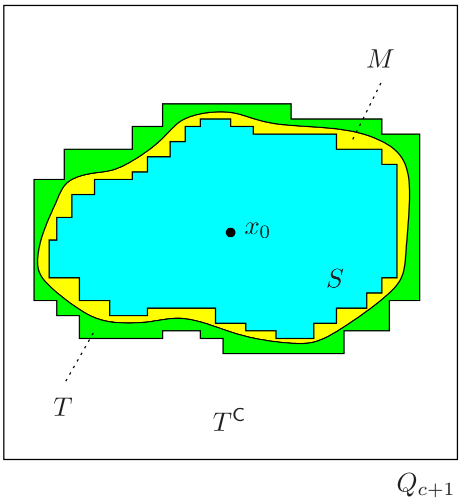
- gelegentlich auch Riemann- bzw. Peano-Inhalt
- Jordan-messbar - auch ‘ I-Gebiete’

Folgerung 11.2.2 *Eine beschränkte Menge* M *ist Jordan-messbar genau dann, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein Q-Gebiet* Q_ε *existiert, das den Rand von* M *überdeckt und den Jordan-Inhalt* $|Q_\varepsilon| < \varepsilon$ *besitzt.*

Beweis : $\boxed{\Longrightarrow}$: $\exists\, S, \ T \ : \ S \subset M \subset T, \quad \overbrace{|M|}^{|M|_i} - |S| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad |T| - \overbrace{|M|}^{|M|_a} < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad |T| - |S| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad \exists\, R \ : \ S \cup R = T, \quad |S| + |R| = |T|, \quad R$ überdeckt ∂M

$\boxed{\Longleftarrow}$: R gegeben, überdeckt ∂M, $|R| < \varepsilon$, müssen $S \subset M$ und $M \subset T$ konstruieren



Sei Q_{c+1} der Quader mit Kantenlänge $2(c+1)$,

$$Q_{c+1} = x_0 + \big[-(c+1), c+1\big]^n \supset M,$$

sei T^{C} das Q-Gebiet in Q_{c+1} außerhalb von R, d.h.

$$T^{\mathsf{C}} \subset Q_{c+1} \implies \exists\, T : T \cup T^{\mathsf{C}} = Q_{c+1},\ |T| + |T^{\mathsf{C}}| = |Q_{c+1}|$$

$$T^{\mathsf{C}} \cup R \subset Q_{c+1} \implies \exists\, S : S \cup \big(T^{\mathsf{C}} \cup R\big) = Q_{c+1},$$
$$|S| + |T^{\mathsf{C}} \cup R| = |S| + |T^{\mathsf{C}}| + |R| = |Q_{c+1}|$$

$\curvearrowright$ $|Q_{c+1}| = |S| + |T^{\mathsf{C}}| + |R| = |T| + |T^{\mathsf{C}}| \iff |S| + |R| = |T|$,
$S \subset M \subset T \implies M$ Jordan-messbar

$\square$

Eigenschaften :

1. Ist $|M|_a = 0$, so ist M Jordan-messbar und $|M| = 0$ (Jordansche Nullmenge).
2. Ist $M = S$ ein Q-Gebiet, so gilt $|M| = |S|$, d.h. Jordan-Inhalt *erweitert* bekannten Inhaltsbegriff.
3. M Jordan-messbar $\iff$ $|\partial M| = 0$
4. Wegen $\big|\mathring{M}\big|_i = |M|_i$ und $\big|\overline{M}\big|_a = |M|_a$ sind für Jordan-messbares M auch $\mathring{M}$ und $\overline{M}$ Jordan-messbar, es gilt
$$\big|\mathring{M}\big| = \big|\overline{M}\big| = |M|$$
5. Liegt M in einer Hyperebene '$x_j \equiv \text{const.}$', so ist M Jordan-messbar (im $\mathbb{R}^n$), und $|M|^{(n)} = 0$.
6. *Monotonie* : $M \subset N \implies |M| \le |N|$
7. *Subadditivität* : $|M \cup N| \le |M| + |N|$
8. *Additivität für nicht-überlappende Mengen* : $\mathring{M} \cap \mathring{N} = \emptyset \implies |M \cup N| = |M| + |N|$
9. *Produktmengen*: $M \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbar, $N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\curvearrowright$ $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ Jordan-messbar,
$$|M \times N|^{(m+n)} = |M|^{(m)} \cdot |N|^{(n)}$$

Beispiel : Nicht Jordan-messbare Menge
$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\big\}$ $\curvearrowright$ $\mathring{M} = \emptyset$, $\overline{M} = [0,1]^2$
$\curvearrowright$ $\big|\mathring{M}\big| = |M|_i = 0$, $\big|\overline{M}\big|_a = |M|_a = 1 \implies M$ nicht Jordan-messbar

Lineare Abbildungen

- $|\cdot|$ ist invariant gegenüber Parallelverschiebungen und Spiegelungen an den Koordinatenebenen
- Seien $D = (\delta_{ij}\lambda_j)_{i,j=1}^n$ eine Diagonalmatrix, $\mu := |\lambda_1 \cdots \lambda_n|$; dann ist
$$|D(M)| = \mu\,|M| \ .$$

- Ist A eine $n \times n$ Matrix, so gilt

$$|A(M)| = |\det A| \cdot |M| \ .$$

Beweis : Sei $\det A = 0$ $\curvearrowright$ A bildet in Hyperebene ab $\curvearrowright$ Drehung in Koordinatenebene $\curvearrowright$ $|A(M)| = 0$

Sei jetzt $\det A \neq 0$, <u>z.z.</u>: $\exists\ S_1, S_2$ orthogonal, $\det S_1 = \det S_2 = 1$: $A = S_2 D S_1$ $\quad (*)$

$A^\top A$ symmetrisch und positiv definit : $\left(A^\top A\right)^\top = A^\top \left(A^\top\right)^\top = A^\top A,\ \ x^\top A^\top A x = |Ax|^2 > 0$

$\curvearrowright$ $\exists\ S_1$ orthogonal, $D_1 = (\delta_{ij}\mu_j)_{i,j=1}^n$: $A^\top A = S_1^\top D_1 S_1$

$\Longleftrightarrow$ $D_1 = S_1 A^\top A S_1^\top$, μ_j Eigenwerte von $A^\top A$, $\mu_j > 0$;

setzen $D := \left(\delta_{ij}\sqrt{\mu_j}\right)_{i,j=1}^n \implies D^2 = D_1 \implies I = D^{-1}\overbrace{D_1}^{D^2}D^{-1} = D^{-1}S_1 A^\top \overbrace{A S_1^\top D^{-1}}^{=:S_2}$

$S_2 = A S_1^\top D^{-1} \implies S_2^\top = D^{-1} S_1 A^\top$, d.h. $I = S_2^\top S_2$ orthogonal, $S_2 D S_1 = A S_1^\top D^{-1} D S_1 = A$

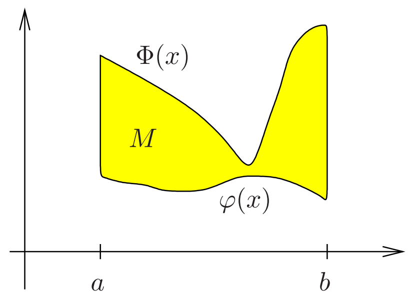
$(*) \implies |\det A| = |\det D|$ $\square$

<u>Spezielle Jordanmengen, Normalbereiche</u>

$M \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der $x-$Achse*, wenn zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ auf $[a,b]$ existieren, stückweise stetig differenzierbar, $\varphi(x) \leq \Phi(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so dass

$$\overline{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq y \leq \Phi(x)\right\}$$

gilt.



analog : *Normalbereich bezüglich der $y-$Achse*

Lemma 11.2.3 *Ein Normalbereich bezüglich der $x-$ bzw. $y-$ Achse ist Jordan-messbar.*

Beweis : <u>g.z.z.</u> : $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ R$ Q-Gebiet : $R \supset \partial M$, $|R| < \varepsilon$

Sei $c_\varphi := \sup\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$, zerlegen $[a,b]$ in $\{x_0, \ldots, x_m\}$ mit $x_j - x_{j-1} < \dfrac{\varepsilon}{8(b-a)c_\varphi}$

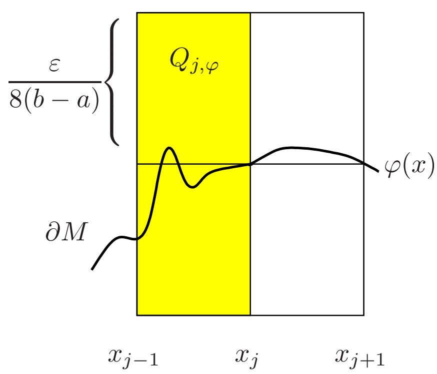
sei $x \in (x_{j-1}, x_j) \implies \varphi(x) = \varphi(x_j) + \varphi'(\xi)(x - x_j)$

$$\implies |\varphi(x) - \varphi(x_j)| \leq c_\varphi |x - x_j| < c_\varphi \frac{\varepsilon}{8(b-a)c_\varphi} = \frac{\varepsilon}{8(b-a)}$$

betrachten Quader $Q_{j,\varphi}$ mit Seitenmittelpunkt $(x_j, \varphi(x_j))$, Seitenlängen $x_j - x_{j-1}$ und $\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\implies |Q_{j,\varphi}| = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_j - x_{j-1}),\ j = 1, \ldots, m$$

$$\implies \sum_{j=1}^m |Q_{j,\varphi}| < \frac{\varepsilon}{4}$$



analog überdeckt man $\Phi(x) \dashrightarrow \{Q_{j,\Phi}\}_{j=1}^k$, $\displaystyle\sum_{j=1}^k |Q_{j,\Phi}| < \frac{\varepsilon}{4}$,

und beide Ränder $\dashrightarrow \{Q_{j,L}\}_{j=1}^\ell$, $\{Q_{j,R}\}_{j=1}^r$, $\displaystyle\sum_{j=1}^\ell |Q_{j,L}| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^r |Q_{j,R}| < \frac{\varepsilon}{4}$

setzen $R := \{Q_{j,\varphi}\}_{j=1}^{m} \cup \{Q_{j,\Phi}\}_{j=1}^{k} \cup \{Q_{j,L}\}_{j=1}^{\ell} \cup \{Q_{j,R}\}_{j=1}^{r} \quad \Longrightarrow \quad R$ überdeckt ∂M und

$$|R| \leq \sum_{j=1}^{m} |Q_{j,\varphi}| + \sum_{j=1}^{k} |Q_{j,\Phi}| + \sum_{j=1}^{\ell} |Q_{j,L}| + \sum_{j=1}^{r} |Q_{j,R}| < \varepsilon$$ □

Bezeichnungen

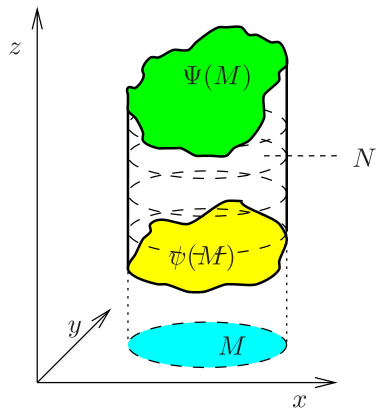
- $N \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Normalbereich bezüglich der* $(x,y)-$*Ebene*, wenn eine Jordan-messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ und zwei stückweise stetig partiell differenzierbaren Funktionen $\psi(x,y)$ und $\Psi(x,y)$ auf $\overline{M}$ existieren, so dass

$$\overline{N} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \overline{M},\ \psi(x,y) \leq z \leq \Psi(x,y)\right\}$$

  gilt.

  analog : *Normalbereiche bezüglich der* $(y,z)-$ *und* $(x,z)-$ *Ebene*

  andere Bezeichnung : *säulenförmige Gebiete* (z.B. $\sim$ *in* $z-$ *Richtung*)



- N heißt *zulässiger Bereich*, wenn M als endliche Vereinigung von Normalbereichen darstellbar ist

Lemma 11.2.4 *Ein so beschriebener Normalbereich in* $\mathbb{R}^3$ *ist Jordan-messbar.*

Beweis : M Jordan-messbar $\Longrightarrow$ $|\partial M| \subset R$ mit $|R|^{(2)} < \varepsilon$

- 'Zylinderwand' $(\partial N)_1$: $\quad c_0 := \max\limits_{(x,y)\in\overline{M}} |\Psi(x,y) - \psi(x,y)|$

  setzen neue Überdeckung R' von $(\partial N)_1$ zusammen aus Quadern mit Grundfläche aus R, Höhe c_0

  $\curvearrowright \ |R'|^{(3)} = |R|^{(2)} \cdot c_0 < \varepsilon c_0 =: \dfrac{\varepsilon'}{2}$

- 'Zylinderdeckel' $(\partial N)_2$: $\quad c_1 := \max\left\{\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)\right|, \left|\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)\right|, \left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y)\right|, \left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}(x,y)\right| : (x,y) \in \overline{M}\right\}$

  konstruieren R'' aus Quadraten um $(x_0,y_0) \in \mathring{M}$, Kantenlänge $r > 0$

$$\curvearrowright \ |\psi(x,y) - \psi(x_0,y_0)| \leq c_1\left(|x-x_0| + |y-y_0|\right) \leq 2c_1 r$$

  analog $|\Psi(x,y) - \Psi(x_0,y_0)| \leq 2c_1 r$, d.h. ein Quader in R'', der 'Bodenfläche' $\psi(M)$ überdeckt, hat Volumen $r^2\, 2c_1 r = 2c_1 r^3$, analog für 'Deckel', Summe über alle (endlich viele) Quader von R''

$$\curvearrowright \ |R''|^{(3)} \leq \underbrace{2\,\frac{|M|^{(2)}}{r^2}}_{\substack{\text{notwendige}\\ \text{Anzahl}}} \ \underbrace{2c_1 r^3}_{\substack{\text{Volumen}\\ \text{eines Quaders}}} \ \underbrace{2}_{\substack{\text{Boden \&}\\ \text{Deckel}}} = 8rc_1\,|M|^{(2)} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

  für r genügend klein □

Lemma 11.2.5 M *sei ein beschränktes Gebiet in* $\mathbb{R}^n$ *mit* $\partial M = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j$, *wobei* $\mathcal{F}_j$ *ein inneres Stück der Fläche* $\mathfrak{F}_j := \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) = 0\}$ *beschreibt,* $j = 1,\ldots,m$. *Dabei seien die Funktionen* $g_j(x)$ *stetig partiell differenzierbar, es gelte* $\operatorname{grad} g_j(x) \neq \vec{0}$, $x \in \mathcal{F}_j$. *Dann ist* M *Jordan-messbar.*

Beweis*: (*Skizze*) : sei $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$, o.B.d.A. $\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x) \neq 0$

$$\underset{\text{Satz 10.4.4}}{\Longrightarrow} \exists\, U(x) \quad \exists\, f : x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{lokal,} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x)}, k = 1, \dots, n-1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1, \dots, x_{n-1}) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})| \leq c \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - \xi_k|,$$

Überdeckung von $\mathcal{F}$ mit kleinen Quadern analog zu vorhergehenden Betrachtungen möglich □

Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar im $\mathbb{R}^n$. $\pi = \{\Omega_j\}_{j=1}^m$ heißt Partition von Ω, wenn alle $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar sind, nicht überlappend, d.h. $\mathring{\Omega}_j \cap \mathring{\Omega}_k = \emptyset$, $j \neq k$, und $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ gilt.

Beispiel : sei Q … $n-$ dimensionaler Quader mit $Q \supset \Omega$, und $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ … Zerlegung von Q

$$\Longrightarrow \quad \pi = \{\Omega_j := \Omega \cap Q_j, \quad j = 1, \dots, \ell\} \quad \text{Partition von } \Omega$$

$\pi = \{\Omega_j\}_{j=1}^m$, $\pi' = \{\mathfrak{B}_k\}_{k=1}^\ell$ Partitionen von Ω $\curvearrowright$ gemeinsame Verfeinerung:

$$\pi \cdot \pi' := \{\Omega_j \cap \mathfrak{B}_k,\ j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, \ell\}$$

Bezeichnungen : sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} \Omega_j &= \sup\{\|x - y\| : x, y \in \Omega_j\}, \quad j = 1, \dots, m \\
|\pi| &= \max\{\operatorname{diam} \Omega_j : j = 1, \dots, m\} && \dots \text{ Feinheit der Partition } \pi \\
m_j &= \inf\{f(x) : x \in \Omega_j\}, \quad j = 1, \dots, m \\
M_j &= \sup\{f(x) : x \in \Omega_j\}, \quad j = 1, \dots, m \\
\mathcal{U}_\pi(f) &:= \sum_{j=1}^m m_j\ |\Omega_j| && \dots \text{ Untersumme (von } f(x) \text{ bezüglich } \pi) \\
\mathcal{O}_\pi(f) &:= \sum_{j=1}^m M_j\ |\Omega_j| && \dots \text{ Obersumme (von } f(x) \text{ bezüglich } \pi) \\
\mathcal{Z}_\pi^\xi(f) &= \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\ |\Omega_j|, \quad \xi_j \in \Omega_j, \quad j = 1, \dots, m && \dots \text{ Zwischensumme (von } f(x) \text{ bezüglich } \pi)
\end{aligned}$$

Folgerungen :
1. $\mathcal{U}_\pi(f) \leq \mathcal{Z}_\pi^\xi(f) \leq \mathcal{O}_\pi(f)$ für alle ξ, π
2. $\mathcal{U}_\pi(f) \leq \mathcal{O}_{\pi'}(f)$ für alle π, π'
3. $\mathcal{U}(f) := \sup\limits_\pi \mathcal{U}_\pi(f)$, $\mathcal{O}(f) := \inf\limits_\pi \mathcal{O}_\pi(f)$ existieren

Definition 11.2.6 *Sei* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt,* $D(f) = \Omega$ *Jordan-messbar in* $\mathbb{R}^n$*. Dann heißt* f integrierbar über Ω, *falls* $\mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$ *gilt. Man bezeichnet*

$$\mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f) =: \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

als Riemann-Integral *von* $f(x)$ *über* Ω.

Satz 11.2.7 *Sei* $\{\pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Folge von Zerlegungen mit* $\lim\limits_{k\to\infty} |\pi_k| = 0$. *Dann gilt*

$$\mathcal{U}(f) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{U}_{\pi_k}(f), \qquad \mathcal{O}(f) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}_{\pi_k}(f) \ .$$

Beweis : *analog zu Satz 8.1.2* □

Satz 11.2.8 *Sei* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt,* $D(f) = \Omega$ *Jordan-messbar in* $\mathbb{R}^n$.

(i) *Ist* f *über* Ω *integrierbar, so gilt für alle Partitionsfolgen* $\{\pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty} |\pi_k| = 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{Z}^{\xi}_{\pi_k}(f) \ = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x$$

unabhängig von der Auswahl der Zwischenpunkte ξ.

(ii) *Für alle Partitionsfolgen* $\{\pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty} |\pi_k| = 0$ *gelte* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{Z}^{\xi}_{\pi_k}(f) \ = I$ *unabhängig von der Auswahl der Zwischenpunkte* ξ. *Dann ist* f *über* Ω *integrierbar, es gilt*

$$I \ = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Beweis : *analog zu Satz 8.1.4* □

Bemerkung*: ausreichend, spezielle Partitionsfolgen zu betrachten, siehe Beispiel oben

Eigenschaften : Seien f, g integrierbar über Ω.

1. *Linearität* : $\displaystyle\int\limits_{\Omega} (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int\limits_{\Omega} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. *Monotonie* : $f(x) \le g(x), \ x \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{\Omega} g(x)\,\mathrm{d}x$

3. Sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit $\mathring{\Omega}_1 \cap \mathring{\Omega}_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x$

4. *Beschränktheit* : sei $m \le f(x) \le M, \ x \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad m\ |\Omega| \ \le \displaystyle\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x \ \le \ M\ |\Omega|$

5. $\displaystyle\left| \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \ \le \ \int\limits_{\Omega} |f(x)| \ \mathrm{d}x \ \le \ \|f\|_{\infty} \ |\Omega|$

6. Seien $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $D(f_k) = \Omega$, mit $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ gleichmäßig auf Ω. Sind die f_k integrierbar über Ω, so auch f, es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_k(x)\,\mathrm{d}x \ = \int\limits_{\Omega} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \ = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Berechnung von Riemann-Integralen

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge, ihre *charakteristische Funktion* $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

Lemma 11.2.9 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, und $Q \supset A$ ein (beliebiger) Quader im $\mathbb{R}^n$. Dann ist χ_A bezüglich Q integrierbar genau dann, wenn A Jordan-messbar ist. In diesem Falle gilt*

$$\int\limits_Q \chi_A(x)\,\mathrm{d}x = |A|^{(n)} \; .$$

Beweis : Sei $\pi_m = \{Q_j^m\}_{j=1}^m$ eine Folge von Partitionen von Q, $Q = \bigcup\limits_{j=1}^m Q_j^m$, $\lim\limits_{m\to\infty} |\pi_m| = 0$

$$\left.\begin{array}{lcl} Q_j^m \subset A & \Longrightarrow & m_j = M_j = 1 \\ Q_j^m \cap A = \emptyset & \Longrightarrow & m_j = M_j = 0 \\ Q_j^m \cap A \neq \emptyset,\; Q_j^m \cap (Q \setminus A) \neq \emptyset & \Longrightarrow & m_j = 0, M_j = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{U}_{\pi_m}(\chi_A) & = & \sum\limits_{Q_j^m \subset A} |Q_j^m| \\ \\ \mathcal{O}_{\pi_m}(\chi_A) & = & \sum\limits_{Q_j^m \cap A \neq \emptyset} |Q_j^m| \end{array}\right.$$

$\curvearrowright$ $S_m = \bigcup\limits_{Q_j^m \subset A} Q_j^m$ Q-Gebiet in A, $|S_m| = \mathcal{U}_{\pi_m}(\chi_A)$, $T_m = \bigcup\limits_{Q_j^m \cap A \neq \emptyset} Q_j^m$ Q-Gebiet um A, $|T_m| = \mathcal{O}_{\pi_m}(\chi_A)$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}_{\pi_m}(\chi_A) \le |A|_i \le |A|_a \le \mathcal{O}_{\pi_m}(\chi_A) \; , \quad m \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$: χ_A integrierbar $\Longrightarrow$ $\mathcal{U}(\chi_A) = \mathcal{O}(\chi_A) \xRightarrow[\text{Satz 11.2.7}]{} \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{U}_{\pi_m}(\chi_A) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{O}_{\pi_m}(\chi_A)$

$\Longrightarrow$ $|A|_i = |A|_a = |A|$ $\Longrightarrow$ A Jordan-messbar

$\boxed{\Longleftarrow}$: A Jordan-messbar $\Longrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, R_\varepsilon,\; R_\varepsilon \supset \partial A,\; |R_\varepsilon| < \varepsilon$

$\dashrightarrow$ erzeugt Partition π_ε von Q in Analogie zu oben ($R_\varepsilon \subset Q$ $\curvearrowright$ $\exists\, S_\varepsilon$ 'innerhalb' von R_ε, dann $\exists\, T_\varepsilon : S_\varepsilon \cup R_\varepsilon = T_\varepsilon$, $|S_\varepsilon| + |R_\varepsilon| = |T_\varepsilon|$), d.h. für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt

$$\underbrace{\mathcal{O}_{\pi_\varepsilon}(\chi_A)}_{|T_\varepsilon|} - \underbrace{\mathcal{U}_{\pi_\varepsilon}(\chi_A)}_{|S_\varepsilon|} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \mathcal{O}(\chi_A) - \mathcal{U}(\chi_A) \le \mathcal{O}_{\pi_\varepsilon}(\chi_A) - \mathcal{U}_{\pi_\varepsilon}(\chi_A) < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \mathcal{U}(\chi_A) = \mathcal{O}(\chi_A)$ $\Longleftrightarrow$ χ_A integrierbar, $\int\limits_Q \chi_A(x)\,\mathrm{d}x = \sup\limits_\pi \mathcal{U}_\pi(\chi_A) = \sup\limits_{S \subset A} |S| = |A|_i^{(n)} = |A|^{(n)}$

$\square$

Bemerkung*: Analog kann man für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über Ω zeigen, dass $f_\Omega(x) := f(x)\,\chi_\Omega(x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ über Ω integrierbar ist, wobei gilt

$$\int\limits_\Omega f_\Omega(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 11.2.10 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *nicht-negativ und über* Ω *integrierbar. Dann ist*

$$M(f) := \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ 0 \le x_{n+1} \le f(x), \ x \in \Omega\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Jordan-messbar in $\mathbb{R}^{n+1}$, *es gilt*

$$|M(f)|^{(n+1)} \ = \ \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Bemerkung*: $M(f)$ ... *Ordinatenmenge von* f

Beweis: Sei $\pi = \{\Omega_j\}_{j=1}^m$ Partition von Ω, $\mathcal{U}_\pi(f) = \sum\limits_{j=1}^m m_j|\Omega_j|$, $\mathcal{O}_\pi(f) = \sum\limits_{j=1}^m M_j|\Omega_j|$

setzen $\mathcal{A}_j := \Omega_j \times [0, m_j]$, $\mathcal{B}_j := \Omega_j \times [0, M_j]$, $j = 1, \ldots, m$ $\Longrightarrow$ $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^m$ Partition (nicht überlappend) von $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{j=1}^m \mathcal{A}_j$ mit $|\mathcal{A}_j|^{(n+1)} = |\Omega_j|^{(n)}\, m_j$, und $\{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m$ Partition von $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{j=1}^m \mathcal{B}_j$ mit $|\mathcal{B}_j|^{(n+1)} = |\Omega_j|^{(n)}\, M_j$, $j = 1, \ldots, m$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \subset M(f) \subset \mathcal{B}$,

$$\mathcal{U}_\pi(f) = \sum_{j=1}^m \overbrace{m_j|\Omega_j|^{(n)}}^{|\mathcal{A}_j|^{(n+1)}} \le |\mathcal{A}|_i^{(n+1)} \le |M(f)|_i^{(n+1)} \le |M(f)|_a^{(n+1)} \le |\mathcal{B}|_a^{(n+1)} \le \sum_{j=1}^m \overbrace{M_j|\Omega_j|^{(n)}}^{|\mathcal{B}_j|^{(n+1)}} = \mathcal{O}_\pi(f)$$

für beliebige (Folgen von) Partitionen π, d.h.

$$\mathcal{U}(f) = \sup_\pi \, \mathcal{U}_\pi(f) \ \le \ |M(f)|_i^{(n+1)} \ \le \ |M(f)|_a^{(n+1)} \ \le \ \inf_\pi \, \mathcal{O}_\pi(f) = \mathcal{O}(f) \ .$$

f integrierbar $\curvearrowright$ $\mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$ $\Longleftrightarrow$ $|M(f)|_i^{(n+1)} = |M(f)|_a^{(n+1)} = |M(f)|^{(n+1)}$ $\curvearrowright$ $M(f)$ Jordan-messbar,

$$|M(f)|^{(n+1)} \ = \ \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f) = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Folgerung 11.2.11 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar und* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *über* Ω *integrierbar mit* $f(x) \le g(x)$, $x \in \Omega$. *Dann ist*

$$M(f,g) := \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ f(x) \le x_{n+1} \le g(x), \ x \in \Omega\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Jordan-messbar in $\mathbb{R}^{n+1}$, *es gilt*

$$|M(f,g)|^{(n+1)} \ = \ \int\limits_{\Omega} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \ .$$

Bemerkung*:

- $M \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich (bezüglich der x-Achse): $|M|^{(2)} = \int\limits_a^b (\Phi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x$
- $N \subset \mathbb{R}^3$ Normalbereich (bezüglich der (x,y)-Ebene):
$$|N|^{(3)} = \int\limits_M (\Psi(x,y) - \psi(x,y))\,\mathrm{d}(x,y)$$
- $M(f,g)$ Normalbereich in $\mathbb{R}^{(n+1)}$ bezüglich $\mathbb{R}^n$

Satz 11.2.12 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar.*

(i) *Ist* $f(x)$ *stetig auf* $\overline{\Omega}$*, dann ist* $f(x)$ *integrierbar über* Ω.

(ii) *Ist* $f(x)$ *beschränkt auf* Ω *und stetig in* $\mathring{\Omega}$*, dann ist* $f(x)$ *integrierbar über* Ω.

Beweis : analog zu Satz 8.2.1 (ii) $\square$

Bemerkung*: $\overline{\Omega}$ abgeschlossen und beschränkt, $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ Analogon zu $\mathrm{C}([a,b])$

Satz von Fubini [41]

$M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\curvearrowright$ $M \times N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ Jordan-messbar, $|M \times N|^{(m+n)} = |M|^{(m)}|N|^{(n)}$

Seien $Q_x \subset \mathbb{R}^m$, $Q_y \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $f = f(x,y) : Q_x \times Q_y \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $\pi_x = \{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^r$ eine Partition von Q_x, $Q_x = \bigcup_{j=1}^r \mathcal{A}_j$, und $\pi_y = \{\mathcal{B}_k\}_{k=1}^\ell$ eine Partition von Q_y, $Q_y = \bigcup_{k=1}^\ell \mathcal{B}_k$. Weiterhin sei

$$m_{jk} := \inf\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in \mathcal{A}_j \times \mathcal{B}_k\}, \quad j = 1,\ldots,r, \ k = 1,\ldots,\ell$$

$$\Longrightarrow \quad m_{jk}\,|\mathcal{A}_j|^{(m)} \ \leq \int\limits_{\mathcal{A}_j} f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathcal{B}_k, \qquad j = 1,\ldots,r, \ k = 1,\ldots,\ell$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^r m_{jk}\,|\mathcal{A}_j|^{(m)} \ \leq \int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x \ =: \ F(y) \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathcal{B}_k, \ k = 1,\ldots,\ell$$

$$\Longrightarrow \quad \inf\{F(y) \ : \ y \in \mathcal{B}_k\}\,|\mathcal{B}_k|^{(n)} \ \leq \int\limits_{\mathcal{B}_k} F(y)\,\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^r m_{jk}\,|\mathcal{A}_j|^{(m)}\,|\mathcal{B}_k|^{(n)} \ \leq \int\limits_{\mathcal{B}_k} F(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}_{\pi_x\times\pi_y}(f) \ = \ \sum_{k=1}^\ell \underbrace{\sum_{j=1}^r m_{jk}\,|\mathcal{A}_j|^{(m)}\,|\mathcal{B}_k|^{(n)}}_{\leq \int_{\mathcal{B}_k} F(y)\,\mathrm{d}y} \ \leq \int\limits_{Q_y} F(y)\,\mathrm{d}y \ = \int\limits_{Q_y} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Bigg)}_{F(y)}\,\mathrm{d}y$$

analog zeigt man : $\displaystyle\int\limits_{Q_y} \Bigg(\int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Bigg)\,\mathrm{d}y \ \leq \ \mathcal{O}_{\pi_x\times\pi_y}(f)$

Satz 11.2.13 (Satz von Fubini)
$Q_x \subset \mathbb{R}^m$ *und* $Q_y \subset \mathbb{R}^n$ *seien abgeschlossene Quader. Ist* $f(x,y)$ *auf* $Q_x \times Q_y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *integrierbar und existiert*

$$F(y) = \int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \quad y \in Q_y\ ,$$

so ist $F(y)$ *auf* Q_y *integrierbar. Es gilt*

$$\int\limits_{Q_x\times Q_y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \ = \int\limits_{Q_y} \Bigg(\int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Bigg)\,\mathrm{d}y\ .$$

[41] Guido Fubini (* 19.1.1879 Venedig † 6.6.1943 New York)

Bemerkung*: Rollen von Q_x und Q_y vertauschbar

Folgerung 11.2.14 *Ist $f(x,y)$ auf $Q_x \times Q_y$ integrierbar und existieren*

$$F_1(x) = \int\limits_{Q_y} f(x,y)\,\mathrm{d}y\ , \qquad F_2(y) = \int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

für alle $x \in Q_x$ bzw. $y \in Q_y$, so gilt

$$\int\limits_{Q_x \times Q_y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{Q_y} \Bigg(\int\limits_{Q_x} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Bigg)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{Q_x} \Bigg(\int\limits_{Q_y} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Bigg)\,\mathrm{d}x\ .$$

Bemerkung*:
- 'Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge'
- $f(x,y)$ stetig auf $Q_x \times Q_y \implies F_1(x), F_2(y)$ existieren stets, Voraussetzungen von Satz 11.2.13 und Folgerung sind erfüllt

<u>*Integration über Normalbereiche*</u>

Sei $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ \varphi(x) \le y \le \Phi(x),\ x \in [a,b]\big\} \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich der $x-$ Achse, seien

$$Q_x := [a,b], \quad Q_y := \Big[\inf_{x\in[a,b]} \varphi(x),\ \sup_{x\in[a,b]} \Phi(x) \Big] \quad \implies \quad M \subset Q_x \times Q_y$$

Sei f stetig auf M, $f_M(x,y) = f(x,y)\chi_M(x,y) \curvearrowright \int\limits_{Q_y} f_M(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = F_1(x)$ existiert stets

$$\curvearrowright \int\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{Q_x\times Q_y} f_M(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{Q_x} \underbrace{\Bigg(\int\limits_{Q_y} f_M(x,y)\,\mathrm{d}y \Bigg)}_{= \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

analog: Integration über Normalbereich bezüglich $y-$ Achse

Sei $N \subset \mathbb{R}^3$ Normalbereich bezüglich der $(x,y)-$ Ebene,

$$N = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in M,\ \psi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\big\}$$

Seien $\quad Q_{xy} \supset M,\ Q_z := \Big[\inf_{(x,y)\in M} \psi(x,y),\ \sup_{(x,y)\in M} \Psi(x,y) \Big] \curvearrowright N \subset Q_{xy} \times Q_z$

$$\implies \int\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int\limits_M \Bigg(\int\limits_{\psi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Bigg)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} \int\limits_{\psi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\ ,$$

falls M zusätzlich Normalbereich bezüglich der $x-$ Achse war

Bemerkung*: Folgerung nach Satz 11.2.10 : Spezialfall mit $f \equiv 1$

Das Prinzip von Cavalieri [42]

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar, liege in Richtung $x_{n+1} = t$ zwischen den Hyperebenen

$$\{(x_1, \ldots, x_n, \alpha) \ : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{und} \qquad \{(x_1, \ldots, x_n, \beta) \ : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

Schnittmengen $\Omega_t := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in \mathbb{R}^n, \ (x,t) \in \Omega\right\} = \Omega \cap \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \text{ fest}\right\}$ seien Jordan-messbar in $\mathbb{R}^n$ für jedes feste $t \in [\alpha, \beta]$. Dann ist $h(t) = |\Omega_t|^{(n)}$ bezüglich t integrierbar, es gilt

$$|\Omega|^{(n+1)} = \int_\alpha^\beta |\Omega_t|^{(n)} \, \mathrm{d}t \, .$$

B e w e i s : sei $Q_x \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so dass $\Omega \subset Q_x \times [\alpha, \beta]$ gilt

$$|\Omega|^{(n+1)} \underset{\text{Lemma 11.2.9}}{=} \int_{Q_x \times [\alpha,\beta]} \chi_\Omega(x,t) \, \mathrm{d}(x,t) \underset{\text{Satz 11.2.13}}{=} \int_\alpha^\beta \underbrace{\left(\int_{Q_x} \chi_\Omega(x,t) \, \mathrm{d}x \right)}_{|\Omega_t|^{(n)}} \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\Omega_t|^{(n)} \, \mathrm{d}t$$

□

Bemerkung*: '*zwei Mengen sind inhaltsgleich, wenn alle ihre Schnitte gleichen Inhalt haben*'

Beispiel : Volumen der Kugel $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le R^2\right\}$
$\Longrightarrow \quad \alpha := z_0 - R, \ \beta := z_0 + R,$

$$\Omega_t = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t-z_0)^2 \le R^2\right\}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$|\Omega_t|^{(2)} = \left| \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le R^2 - (t-z_0)^2\right\} \right|^{(2)} = \pi \left(R^2 - (t-z_0)^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |\Omega|^{(3)} = \int_{z_0-R}^{z_0+R} \pi \left(R^2 - (\underbrace{t-z_0}_{\tau})^2\right) \mathrm{d}t = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - \tau^2\right) \mathrm{d}\tau = \pi \left[R^2\tau - \frac{\tau^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Die Substitutionsregel

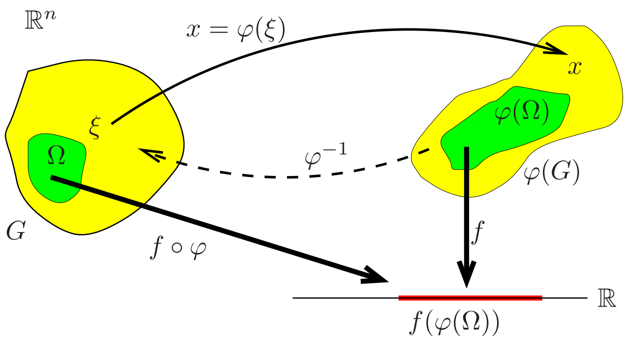
Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig (partiell) differenzierbar, und

$$\det \mathcal{J}(\varphi, \xi) > 0$$

bzw.

$$\det \mathcal{J}(\varphi, \xi) < 0$$

auf G.



Satz 11.2.15 *Seien* $\Omega \subset G$ *abgeschlossen, beschränkt und Jordan-messbar, und* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine auf* $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ *stetige Funktion. Dann ist* $\varphi(\Omega)$ *Jordan-messbar,* f *auf* $\varphi(\Omega)$ *integrierbar, es gilt*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f \circ \varphi)(\xi) \, |\det \mathcal{J}(\varphi, \xi)| \, \mathrm{d}\xi \, .$$

[42] Bonaventura Francesco Cavalieri (* 1598 Milano † 30.11.1647 Bologna)

B e w e i s : (*Skizze*) $f \circ \varphi, \ |\det \mathcal{J}(\varphi,\xi)|$ stetig $\Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega (f\circ\varphi)(\xi)\,|\det \mathcal{J}(\varphi,\xi)|\,\mathrm{d}\xi$ existiert immer

<u>g.z.z.</u> : Existenz von $\displaystyle\int_{\varphi(\Omega)} f(x)\,\mathrm{d}x$, Gleichheit der Integrale

sei $\pi_\varphi = \{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^m$ Partition von $\varphi(\Omega) \curvearrowright \varphi(\Omega) = \bigcup\limits_{j=1}^m \mathcal{A}_j \curvearrowright \pi = \{\mathcal{B}_j := \varphi^{-1}(\mathcal{A}_j)\}_{j=1}^m$ Partition von Ω, $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^m \mathcal{B}_j$

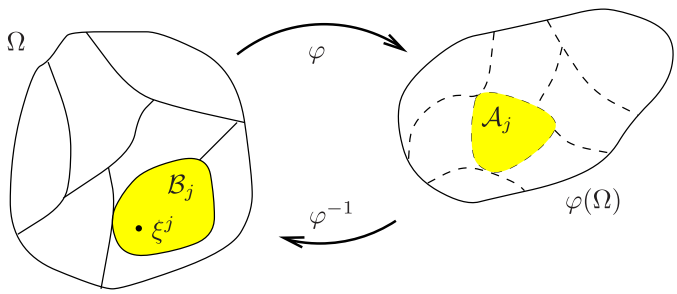
<u>z.z.</u> : $|\pi_\varphi| \sim |\pi|$: seien $x, y \in \mathcal{A}_j \iff x = \varphi(\xi), y = \varphi(\eta),\ \xi,\eta \in \mathcal{B}_j$, Satz 10.3.3 (Taylor) $\curvearrowright$

$$x - y = \varphi(\xi) - \varphi(\eta) = \mathcal{J}(\varphi, \xi + \theta(\eta-\xi))\,(\xi - \eta)\,, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \|x-y\| \le \underbrace{\|\mathcal{J}(\varphi,\xi+\theta(\eta-\xi))\|_\infty}_{\le c_\varphi} \|\xi-\eta\| \ \le\ c_\varphi\ \|\xi-\eta\|$$

analog für $\varphi^{-1} \Longrightarrow \|\xi-\eta\| \sim \|x-y\|$ für alle $x,y\in\mathcal{A}_j,\ \xi,\eta\in\mathcal{B}_j \Longrightarrow \operatorname{diam}\mathcal{A}_j \sim \operatorname{diam}\mathcal{B}_j$, $j = 1,\dots,m \Longrightarrow |\pi_\varphi| \sim |\pi|$

betrachten Zwischensumme



$$\mathcal{Z}_\pi^\xi\left((f\circ\varphi)\,|\det\mathcal{J}(\varphi,\cdot)|\right) = \sum_{j=1}^m (f\circ\varphi)(\xi^j)\,\left|\det\mathcal{J}(\varphi,\xi^j)\right|\,|\mathcal{B}_j|^{(n)}$$

Satz 10.3.3 (Taylor) $\curvearrowright$

$$\varphi(\xi) - \varphi(\xi^j) = \mathcal{J}(\varphi,\xi^j)\,(\xi-\xi^j) + R(\xi,\xi^j)$$

mit $\displaystyle\lim_{\xi\to\xi^j} \frac{\|R(\xi,\xi^j)\|}{\|\xi-\xi^j\|} = 0$

setzen $L_{\varphi,j}(\xi) := \underbrace{\varphi(\xi^j) - \mathcal{J}(\varphi,\xi^j)\,\xi^j}_{=\eta^j\in\mathbb{R}^n} + \mathcal{J}(\varphi,\xi^j)\,\xi$ für $\xi,\xi^j\in\mathcal{B}_j$ (Linearisierung, Tangentialebene)

$$\Longrightarrow \quad |L_{\varphi,j}(\mathcal{B}_j)|^{(n)} = \left|\det\mathcal{J}(\varphi,\xi^j)\right|^{(n)}\ |\mathcal{B}_j|^{(n)}$$

$$\lim_{\xi\to\xi^j}\frac{\|R(\xi,\xi^j)\|}{\|\xi-\xi^j\|} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \left|\,|\varphi(\mathcal{B}_j)|^{(n)} - |L_{\varphi,j}(\mathcal{B}_j)|^{(n)}\right| < \varepsilon \ \text{ für } \ \|\xi-\xi^j\| \le |\pi| < \delta,$$

d.h. für $|\pi_\varphi|$ hinreichend klein

$$\Longrightarrow \quad (1-\varepsilon')\,|L_{\varphi,j}(\mathcal{B}_j)|^{(n)} \ \le\ |\varphi(\mathcal{B}_j)|^{(n)} \ \le\ (1+\varepsilon')\,|L_{\varphi,j}(\mathcal{B}_j)|^{(n)}$$

$$\mathcal{Z}_\pi^\xi\left((f\circ\varphi)\,|\det\mathcal{J}(\varphi,\cdot)|\right) = \sum_{j=1}^m f\left(\varphi(\xi^j)\right)\underbrace{\left|\det\mathcal{J}(\varphi,\xi^j)\right|\,|\mathcal{B}_j|^{(n)}}_{|L_{\varphi,j}(\mathcal{B}_j)|^{(n)}}$$

$$\Longrightarrow \quad (1-\varepsilon')\mathcal{Z}_\pi^\xi\left((f\circ\varphi)\,|\det\mathcal{J}(\varphi,\cdot)|\right) \ \le\ \underbrace{\sum_{j=1}^m f\left(\varphi(\xi^j)\right)|\varphi(\mathcal{B}_j)|^{(n)}}_{\mathcal{Z}_{\pi_\varphi}^x(f)} \ \le\ (1+\varepsilon')\mathcal{Z}_\pi^\xi\left((f\circ\varphi)\,|\det\mathcal{J}(\varphi,\cdot)|\right)$$

mit $x = \varphi(\xi),\ x^j = \varphi(\xi^j)$, d.h.

$$(1-\varepsilon')\mathcal{Z}_\pi^\xi\left((f\circ\varphi)\,|\det\mathcal{J}(\varphi,\cdot)|\right) \ \le\ \mathcal{Z}_{\pi_\varphi}^x(f) \ \le\ (1+\varepsilon')\mathcal{Z}_\pi^\xi\left((f\circ\varphi)\,|\det\mathcal{J}(\varphi,\cdot)|\right)$$

Partitionsfolge $\{\pi_\varphi^m\}_{m=1}^\infty$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} |\pi_\varphi^m| = 0 \Longrightarrow \{\pi^m\}_{m=1}^\infty$ mit $\lim\limits_{m\to\infty}|\pi^m| = 0 \dashrightarrow \ldots$ $\square$

Bemerkung*:
- vollständiger Beweis z.B. Heuser, Analysis II, Abschnitt 205, S. 478-485
- Satz 7.6.4: $\displaystyle\int_a^b \varphi(\psi(x))\cdot\psi'(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\psi(x)}{=} \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$
- Satz bleibt richtig, wenn $\det \mathcal{J}(\varphi,\xi)=0$ für $\xi\in\mathcal{N}$, falls $|\mathcal{N}|^{(n)}=0$; analog, falls φ auf $\mathcal{N}$ nicht injektiv ist

Beispiel: (1) <u>*Flächeninhalt vom Kreis*</u> $K_R(0)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\le R^2\right\}$

$$|K_R(0)|^{(2)} \underset{\text{Lemma 11.2.9}}{=} \int_{K_R(0)} \mathrm{d}(x,y) \underset{\substack{\text{Satz 11.2.10}\\ \text{Folg.}}}{=} \int_{-R}^{R}\Big[\overbrace{\sqrt{R^2-x^2}}^{g(x)}-\overbrace{\Big(-\sqrt{R^2-x^2}\Big)}^{f(x)}\Big]\,\mathrm{d}x = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{x=R\cos u}{=} -2R\int_{-\pi}^{0} R\,\overbrace{|\sin u|}^{-\sin u}\sin u\,\mathrm{d}u = 2R^2\int_{-\pi}^{0}\sin^2 u\,\mathrm{d}u = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

alternativ: Koordinatentransformation, Polarkoordinaten (*Abschnitt 10.4.*)

$$x=r\cos\varphi,\; y=r\sin\varphi,\quad 0\le r\le R,\; 0\le\varphi<2\pi,\quad \det\mathcal{J}(r,\varphi)=r$$

d.h. $(x,y)\in K_R(0) \iff (r,\varphi)\in\Omega:=[0,R]\times[0,2\pi]$

<u>Ausnahmemenge</u> :

$$\mathcal{N}=\underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x=y=0\right\}}_{r=0 \dashrightarrow \det\mathcal{J}(r,\varphi)=0}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y=0,\; x\ge 0\right\}}_{\varphi=2\pi \dashrightarrow \varphi \text{ nicht injektiv}} \implies |\mathcal{N}|^{(2)}=0$$

$$\underset{\text{Satz 11.2.15}}{\Longrightarrow} |K_R(0)|^{(2)} = \int_{K_R(0)}\mathrm{d}(x,y) \underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=} \int_\Omega \overbrace{r}^{|\det\mathcal{J}(r,\varphi)|}\,\mathrm{d}(r,\varphi) \underset{\text{Satz 11.2.13}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\,\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

(2) <u>*Volumen der Kugel*</u> $B_R(0)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$

Koordinatentransformation, Kugelkoordinaten (*Abschnitt 10.4.*)

$$x=r\cos\varphi\sin\vartheta,\; y=r\sin\varphi\sin\vartheta,\; z=r\cos\vartheta,\quad 0\le r\le R,\; 0\le\varphi\le 2\pi,\; 0\le\vartheta\le\pi$$

$\curvearrowright$ $(x,y,z)\in B_R(0) \iff (r,\varphi,\vartheta)\in\Omega:=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\vartheta]$

$\det\mathcal{J}(r,\varphi,\vartheta)=-r^2\sin\vartheta$; <u>Ausnahmemenge</u> :

$$\mathcal{N}=\underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x=y=0\right\}}_{r=0\vee\vartheta=0,\pi \dashrightarrow \det\mathcal{J}(r,\varphi,\vartheta)=0}\cup\underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; y=0,\; x\ge 0\right\}}_{\varphi=2\pi \dashrightarrow \varphi \text{ nicht injektiv}} \implies |\mathcal{N}|^{(3)}=0$$

$$|B_R(0)|^{(3)} = \int_{B_R(0)}\mathrm{d}(x,y,z) \underset{\text{Satz 11.2.15}}{=} \int_\Omega \underbrace{r^2\sin\vartheta}_{|\det\mathcal{J}(r,\varphi,\vartheta)|}\,\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta) \underset{\text{Satz 11.2.13}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\underbrace{\int_0^\pi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}_{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

11.3 Flächenmessung im $\mathbb{R}^3$

Flächen im $\mathbb{R}^3$

1. Explizite Darstellung

$\overline{\omega} \subset \mathbb{R}^2$ sei zulässiger Bereich der $(x,y)-$ Ebene, $f : \overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, stetig partiell differenzierbar in ω

$$\mathcal{F}_z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in \overline{\omega},\; z = f(x,y)\right\} \qquad \ldots \quad \textit{Flächenstück}$$

Bezeichnungen : $\quad f_x(\xi,\eta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta), \quad f_y(\xi,\eta) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta), \qquad \mathfrak{x} := (x,y,z)$

Sei $\mathfrak{x}_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{F}_z$,

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{n} := \dfrac{(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1)}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0) + f_y^2(x_0,y_0) + 1}} & \ldots \text{Normalenvektor in } \mathfrak{x}_0 \\ z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) & \ldots \text{Tangentialebene in } \mathfrak{x}_0 \end{array}\right\} \curvearrowright \left\langle \mathfrak{n}, \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \right\rangle = 0$$

Bemerkung*: analog können mittels Funktionen $x = h(y,z)$, $D(h) = \overline{\omega_1}$, bzw. $y = g(x,z)$, $D(g) = \overline{\omega_2}$, Flächenstücke $\mathcal{F}_x$ und $\mathcal{F}_y$ definiert werden

Beispiele : (1) $\overline{\omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le R^2\right\}$, $R > 0$, $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $D(f) = \overline{\omega}$

$$\mathcal{F}_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le R^2,\; z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\}$$

$\ldots$ *Oberfläche der (oberen) Halbkugel mit Radius* R

(2) $\overline{\omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le R^2\right\}$, $R > 0$, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D(f) = \overline{\omega}$

$$\mathcal{F}_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le R^2,\; z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

$\ldots$ *Mantelfläche eines Kreiskegels, Spitze in* 0, *Grundfläche Radius* R

2. Implizite Darstellung

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar in Ω

$$\mathcal{F}_u := \{(x,y,z) \in \Omega : \; F(x,y,z) = 0\}$$

definiert Flächenstück in $\mathbb{R}^3$, falls $\mathcal{F}_u \neq \emptyset$, und $\operatorname{grad} F(x,y,z) \neq \vec{0}$ für alle $\mathfrak{x} = (x,y,z) \in \mathcal{F}_u$

sei $\mathfrak{x}_0 \in \mathcal{F}_u \quad \Longrightarrow \quad F(x_0,y_0,z_0) = 0$, $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$, o.B.d.A. $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

Satz 10.4.4 $\quad \Longrightarrow \quad \exists\, U(x_0,y_0) \quad \exists\, f : U(x_0,y_0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall\,(x,y) \in U(x_0,y_0) \;:\; F(x,y,f(x,y)) = 0$
$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}_u$ über $z = f(x,y)$ stückweise explizit darstellbar

Sei $\mathfrak{x}_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{F}_u$,

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{n} := \dfrac{\operatorname{grad} F(\mathfrak{x}_0)}{\|\operatorname{grad} F(\mathfrak{x}_0)\|} = \dfrac{(F_x(\mathfrak{x}_0), F_y(\mathfrak{x}_0), F_z(\mathfrak{x}_0))}{\sqrt{F_x^2(\mathfrak{x}_0) + F_y^2(\mathfrak{x}_0) + F_z^2(\mathfrak{x}_0)}} & \text{Normalenvektor in } \mathfrak{x}_0 \\ F_x(\mathfrak{x}_0)(x-x_0) + F_y(\mathfrak{x}_0)(y-y_0) + F_z(\mathfrak{x}_0)(z-z_0) = 0 & \text{Tangentialebene in } \mathfrak{x}_0 \end{array}\right\} \curvearrowright \left\langle \operatorname{grad} F(\mathfrak{x}_0), \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \right\rangle = 0$$

Bemerkung*: Jede explizit gegebene Fläche $z = f(x,y)$ kann über $F(x,y,z) := z - f(x,y) = 0$ implizit dargestellt werden.

Beispiele : (1) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,\ \ \Omega = \mathbb{R}^3,\ \ R > 0$

$$\mathcal{F}_u = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\right\}$$

... *Oberfläche der Kugel mit Radius* R

(2) $G(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2,\ \ \Omega = \mathbb{R}^2 \times [-h,h],\ \ h > 0$

$$\mathcal{F}_u = \left\{(x,y,z) \in \Omega : \ z^2 - x^2 - y^2 = 0\right\}$$

... *Mantelfläche des Doppelkegels, Spitze in* 0, *Grundflächen mit Radius* h

3. Parameterdarstellung

$\overline{\Pi} \subset \mathbb{R}^2$ sei zulässiger Bereich in $(p,q)-$ Ebene (Parameterbereich)

$$x = x(p,q), \quad y = y(p,q), \quad z = z(p,q), \qquad (p,q) \in \overline{\Pi}$$

heißt zulässige Parameterdarstellung, wenn gilt

1) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p,q) = (x(p,q), y(p,q), z(p,q)),\ \ (p,q) \in \overline{\Pi},$ stetig und in Π stetig partiell differenzierbar
2) $(p_1,q_1) \neq (p_2,q_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{x}(p_1,q_1) \neq \mathfrak{x}(p_2,q_2),\ \ (p_i,q_i) \in \Pi$ Injektivität in Π
3) $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(p,q)}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(p,q)}\right|^2 > 0$ für alle $(p,q) \in \Pi$
4) Bedingungen auf dem Rand $\partial\Pi$ von Π

Bezeichnung : $\mathcal{F}_P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p,q),\ (p,q) \in \overline{\Pi}\right\}$ heißt Flächenstück im $\mathbb{R}^3$

Bemerkung*: Bedingung 3) $\dashrightarrow$ Fläche kann (lokal) explizit dargestellt werden : sei o.B.d.A. $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}\right| \neq 0$ in (einer Umgebung von) $(p_0,q_0) \in \Pi,\ \ x_0 = x(p_0,q_0),\ \ y_0 = y(p_0,q_0)$

Satz 10.4.4 $\Longrightarrow \quad \exists\, U(x_0,y_0) \quad \exists\, p,q : U(x_0,y_0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall\, (x,y) \in U(x_0,y_0)$:

$$p = p(x,y), \ \ q = q(x,y)$$

$\curvearrowright$ $\mathcal{F}_P$ in Umgebung von $(p_0,q_0) \in \Pi$ bzw. $(x_0,y_0,z(p_0,q_0))$ explizit darstellbar durch

$$\mathcal{F}_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in U(x_0,y_0), z = z\left(p(x,y), q(x,y)\right)\right\}$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{F}_P$ durch endlich viele solche Flächen in expliziter Form, $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, dargestellt werden kann.

Sei $(p_0,q_0) \in \Pi,\ \ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p_0,q_0) = \left(x(p_0,q_0), y(p_0,q_0), z(p_0,q_0)\right)$

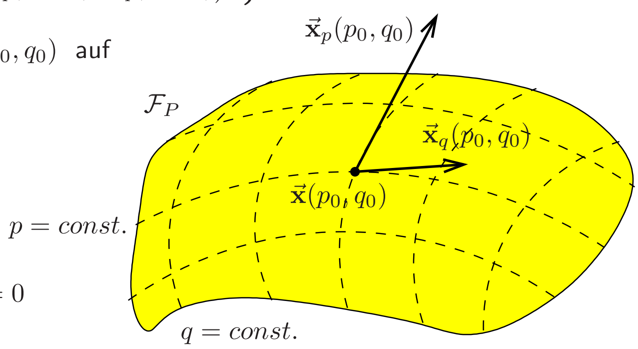
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_p &= \mathfrak{x}_p(p_0,q_0) = (x_p(p_0,q_0),\ y_p(p_0,q_0),\ z_p(p_0,q_0)) \\ \mathfrak{x}_q &= \mathfrak{x}_q(p_0,q_0) = (x_q(p_0,q_0),\ y_q(p_0,q_0),\ z_q(p_0,q_0)) \end{aligned}\right\} \ \text{Tangentialvektoren in } \mathfrak{x}(p_0,q_0)$$

$\mathfrak{x}_p,\ \mathfrak{x}_q$ spannen Tangentialebene in $\mathfrak{x}(p_0,q_0)$ auf

Normale $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{x}(p_0,q_0)$:

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q}{\|\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q\|}$$

Tangentialebene : $\left\langle \mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \right\rangle = 0$



$$\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \end{vmatrix} = \Big(y_p z_q - y_q z_p, \quad x_q z_p - x_p z_q, \quad x_p y_q - x_q y_p \Big)$$

$$= \Bigg(\underbrace{\begin{vmatrix} y_p & y_q \\ z_p & z_q \end{vmatrix}}_{A}, \quad \underbrace{-\begin{vmatrix} x_p & x_q \\ z_p & z_q \end{vmatrix}}_{B}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} x_p & x_q \\ y_p & y_q \end{vmatrix}}_{C} \Bigg) = (A, B, C)$$

mit $\quad A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(p,q)}, \quad B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(p,q)} = -\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(p,q)}, \quad C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)},$ d.h. Bedingung 3) $\iff \mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q \neq \vec{0}$

$$\|\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q\|^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

$$= \underbrace{(y_p z_q - y_q z_p)^2}_{y_p^2 z_q^2 + y_q^2 z_p^2 - 2 y_p y_q z_p z_q} + \underbrace{(x_q z_p - x_p z_q)^2}_{x_p^2 z_q^2 + x_q^2 z_p^2 - 2 x_p x_q z_p z_q} + \underbrace{(x_p y_q - x_q y_p)^2}_{x_p^2 y_q^2 + x_q^2 y_p^2 - 2 x_p x_q y_p y_q}$$

$$= \Big\langle \underbrace{(x_p, y_p, z_p)}_{\mathfrak{x}_p}, \underbrace{(x_p, y_p, z_p)}_{\mathfrak{x}_p} \Big\rangle \Big\langle \underbrace{(x_q, y_q, z_q)}_{\mathfrak{x}_q}, \underbrace{(x_q, y_q, z_q)}_{\mathfrak{x}_q} \Big\rangle - \Big\langle \underbrace{(x_p, y_p, z_p)}_{\mathfrak{x}_p}, \underbrace{(x_q, y_q, z_q)}_{\mathfrak{x}_q} \Big\rangle^2$$

$$= \underbrace{\big\langle \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_p \big\rangle}_{E} \underbrace{\big\langle \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_q \big\rangle}_{G} - \underbrace{\big\langle \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_q \big\rangle}_{F}^2$$

$\curvearrowright \quad \|\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}$ mit

$$\left. \begin{aligned} E &= \langle \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_p \rangle = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 \\ F &= \langle \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_q \rangle = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q \\ G &= \langle \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_q \rangle = x_q^2 + y_q^2 + z_q^2 \end{aligned} \right\} \text{ Gauß[43]sche Fundamentalgrößen}$$

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q}{\|\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q\|} = \frac{(A,B,C)}{\sqrt{EG - F^2}} \implies \begin{cases} \cos\angle(x - \text{Achse}, \mathfrak{n}) = \dfrac{A}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \cos\angle(y - \text{Achse}, \mathfrak{n}) = \dfrac{B}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \cos\angle(z - \text{Achse}, \mathfrak{n}) = \dfrac{C}{\sqrt{EG - F^2}} \end{cases}$$

Bemerkung*: Ist $\mathcal{F}_z$ explizit gegeben, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{\omega} \subset \mathbb{R}^2$, so erhält man z.B. über

$$x = p, \quad y = q, \quad z = f(p,q), \qquad (p,q) \in \overline{\Pi} := \overline{\omega}$$

eine Parameterdarstellung mit

$$\mathfrak{x}_p(p,q) = (\underbrace{x_p}_{1}, \underbrace{y_p}_{0}, \underbrace{z_p}_{f_x}) = (1, 0, f_x), \quad \mathfrak{x}_q(p,q) = (\underbrace{x_q}_{0}, \underbrace{y_q}_{1}, \underbrace{z_q}_{f_y}) = (0, 1, f_y)$$

$$\curvearrowright \quad A = \begin{vmatrix} y_p & y_q \\ z_p & z_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = -f_x, \qquad B = \begin{vmatrix} x_q & x_p \\ z_q & z_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_y & f_x \end{vmatrix} = -f_y,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_p & x_q \\ y_p & y_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad E = \underbrace{x_p^2}_{1} + \underbrace{y_p^2}_{0} + \underbrace{z_p^2}_{f_x^2} = 1 + f_x^2,$$

$$F = \underbrace{x_p x_q}_{1\cdot 0} + \underbrace{y_p y_q}_{0\cdot 1} + \underbrace{z_p z_q}_{f_x f_y} = f_x f_y, \qquad G = \underbrace{x_q^2}_{0} + \underbrace{y_q^2}_{1} + \underbrace{z_q^2}_{f_y^2} = 1 + f_y^2$$

[43] Carl Friedrich Gauß (* 30.4.1777 Brunswick † 23.2.1855 Göttingen)

$$\curvearrowright\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{(1+f_x^2)(1+f_y^2)-f_x^2f_y^2}=\sqrt{EG-F^2}$$

$$\curvearrowright\ \mathfrak{n}\ =\ \frac{(A,B,C)}{\sqrt{EG-F^2}}\ =\ \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$ (*siehe explizite Darstellung in 1.*)

<u>*Inhalt 'gekrümmter' Flächen*</u>

suchen geeignete Definition für Inhalt gekrümmter Flächen, der für ebene Flächen (*Spezialfall*) 'normalen' Flächeninhalt ergibt $\Longrightarrow$ Zurückführung auf ebenen Fall

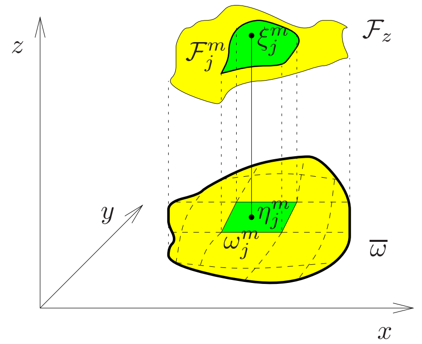
1. Zerlegung von $\mathcal{F}$ in geeignete Teilflächen $\mathcal{F}_j,\ j=1,\ldots,m$
2. Konstruktion einer Tangentialebene in beliebigem Punkt $\xi^j\in\mathcal{F}_j,\ j=1,\ldots,m$
3. Projektion von $\mathcal{F}_j$ auf entsprechende Tangentialebene $\curvearrowright$ ebenes Flächenstück $\Delta_j,\ j=1,\ldots,m$
4. Summation aller Inhalte von $\Delta_j,\ j=1,\ldots,m$ $\dashrightarrow$ Näherung für Inhalt von $\mathcal{F}$

Seien $\varpi\in\mathbb{R}^2$, $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, stetig partiell diferenzierbar, und

$$\mathcal{F}_z=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x,y)\in\varpi,\ z=f(x,y)\}$$

gegeben; weiter sei $\pi_m=\{\omega_j^m\}_{j=1}^{\ell_m}$, $m\in\mathbb{N}$, eine Zerlegung von ϖ mit $\lim\limits_{m\to\infty}|\pi_m|=0$.

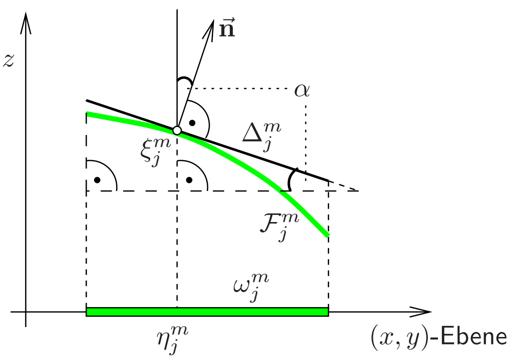
$\curvearrowright$ erzeugt Partition $\{\mathcal{F}_j^m\}_{j=1}^{\ell_m}$ von $\mathcal{F}_z$, $\mathcal{F}_z=\bigcup\limits_{j=1}^{\ell_m}\mathcal{F}_j^m$, mit



$$\mathcal{F}_j^m=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x,y)\in\omega_j^m,\ z=f(x,y)\}\,,\ j=1,\ldots,\ell_m$$

Sei $\eta_j^m=(x_j^m,y_j^m)\in\omega_j^m \Longrightarrow \xi_j^m=(x_j^m,y_j^m,\underbrace{f(x_j^m,y_j^m)}_{z_j^m})\in\mathcal{F}_j^m \Longrightarrow$ Tangentialebene in ξ_j^m :

$$\Delta_j^m=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x,y)\in\omega_j^m,\ z=\underbrace{f(x_j^m,y_j^m)}_{z_j^m}+f_x(x_j^m,y_j^m)(x-x_j^m)+f_y(x_j^m,y_j^m)(y-y_j^m)\Big\}$$



Approximation $\dashrightarrow$ $|\mathcal{F}_j^m|\ \sim\ |\Delta_j^m|$

$$|\omega_j^m|\ \sim\ \cos\alpha\,|\Delta_j^m|=\cos\underbrace{\angle(z-\text{Achse},\mathfrak{n})}_{\alpha}|\Delta_j^m|$$

und $$\cos\angle(z\text{–Achse},\mathfrak{n})\ =\ \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}\ =\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\eta_j^m)+f_y^2(\eta_j^m)}}$$

$$\Longrightarrow\ |\mathcal{F}_j^m|\ \sim\ \underbrace{\sqrt{1+f_x^2(\eta_j^m)+f_y^2(\eta_j^m)}\ |\omega_j^m|}_{|\Delta_j^m|}$$

$$\Longrightarrow\ |\mathcal{F}_z|\ \sim\ \sum_{j=1}^{\ell_m}|\Delta_j^m|\ =\ \sum_{j=1}^{\ell_m}\sqrt{1+f_x^2(\eta_j^m)+f_y^2(\eta_j^m)}\ |\omega_j^m|\ ,\quad \eta_j^m=(x_j^m,y_j^m)\in\omega_j^m$$

Bemerkung*: Voraussetzungen $\Longrightarrow \lim\limits_{|\pi|_m \to 0} \sum\limits_{j=1}^{\ell_m} \left|\Delta_j^m\right|$ existiert, unabhängig von Auswahl der Partitionsfolgen $\{\pi_m\}_{m=1}^{\infty}$ und Auswahl der Zwischenpunkte $\eta_j^m \in \omega_j^m$

Definition 11.3.1 *Der* Flächeninhalt *einer explizit gegebenen Fläche*

$$\mathcal{F}_z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in \overline{\omega},\; z = f(x,y)\right\}$$

ist bestimmt als

$$|\mathcal{F}_z| = \int\limits_{\overline{\omega}} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\; \mathrm{d}(x,y)\ .$$

$\mathcal{F}_P$ Fläche in Parameterdarstellung $\Longrightarrow\quad A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(p,q)},\; B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(p,q)},\; C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)},\; E = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2,$

$F = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q,\; G = x_q^2 + y_q^2 + z_q^2,\quad \sqrt{A^2+B^2+C^2} \;=\; \sqrt{EG-F^2}$

Satz 11.3.2 *Die Fläche $\mathcal{F}_P$ sei in Parameterdarstellung gegeben,*

$$\mathcal{F}_P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = x(p,q),\; y = y(p,q),\; z = z(p,q),\quad (p,q) = \overline{\Pi}\right\}\ .$$

Dann gilt

$$|\mathcal{F}_P| = \int\limits_{\overline{\Pi}} \sqrt{EG-F^2}\; \mathrm{d}(p,q) \;=\; \int\limits_{\overline{\Pi}} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\; \mathrm{d}(p,q)\ .$$

Der Flächeninhalt ist unabhängig von der Darstellung der Fläche, d.h. verschiedenen Parameterdarstellungen oder expliziter Darstellung.

B e w e i s : zerlegen $\mathcal{F}_P$ lokal in endlich viele *explizit* gegebene Flächenstücke $\left\{\mathcal{F}_P^k\right\}_{k=1}^{r}$, sei o.B.d.A. $\mathcal{F}_P^k = \mathcal{F}_z^k$, wegen

$$\cos\angle(z\text{–Achse}, \mathfrak{n}) = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}}_{C} \mathrm{d}(p,q) = C\,\mathrm{d}(p,q)$$

gilt also

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}_P^k\right| = \left|\mathcal{F}_z^k\right| \;&=\; \int\limits_{\omega^k} \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\; \mathrm{d}(x,y) \;=\; \int\limits_{\Pi^k} \underbrace{\frac{\sqrt{EG-F^2}}{C}}_{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}} \underbrace{C\,\mathrm{d}(p,q)}_{\mathrm{d}(x,y)} \\ &=\; \int\limits_{\Pi^k} \sqrt{EG-F^2}\; \mathrm{d}(p,q)\end{aligned}$$

Seien (u,v) Parameter einer zweiten Darstellung $\curvearrowright$ existiert eineindeutige Zuordnung $\Phi : (u,v) \longmapsto (p,q)$, so dass $p = p(u,v),\; q = q(u,v) \quad\Longrightarrow\quad x = x\left(p(u,v),q(u,v)\right),\; y = y\left(p(u,v),q(u,v)\right),\; z = z\left(p(u,v),q(u,v)\right)$

$$\textit{Kettenregel} \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}_{C_{(u,v)}} = \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}}_{C_{(p,q)}} \circ \underbrace{\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)}}_{\det\mathcal{J}(\Phi,\cdot)} \quad\Longrightarrow\quad \left|C_{(u,v)}\right| = \left|C_{(p,q)}\right| \left|\det\mathcal{J}(\Phi,\cdot)\right|$$

Integraltransformation (*Satz 11.2.15*) liefert Unabhängigkeit von Parameterdarstellung (insbesondere auch von expliziter Darstellung als spezieller Parameterdarstellung) $\square$

Beispiel : *Oberfläche einer Kugel vom Radius* $R > 0$: Parameterdarstellung
Kugelkoordinaten (*Abschnitt 10.4.*)

$$x = R\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = R\cos\vartheta$$

mit $p = \vartheta,\ q = \varphi,\quad \overline{\Pi} := \{(\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$A = \begin{vmatrix} y_\vartheta & y_\varphi \\ z_\vartheta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\sin\varphi\cos\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta$$

$$B = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\vartheta \\ z_\varphi & z_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta & R\cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 & -R\sin\vartheta \end{vmatrix} = R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta$$

$$\begin{aligned} C = \begin{vmatrix} x_\vartheta & x_\varphi \\ y_\vartheta & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta & -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta \end{vmatrix} &= R^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta + R^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &= R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \underbrace{R^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta}_{x_\vartheta^2} + \underbrace{R^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta}_{y_\vartheta^2} + \underbrace{R^2\sin^2\vartheta}_{z_\vartheta^2} &&= R^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = R^2 \\ F &= \underbrace{-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}_{x_\varphi x_\vartheta} + \underbrace{R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}_{y_\varphi y_\vartheta} + \underbrace{0(-R\sin\vartheta)}_{z_\varphi z_\vartheta} = 0 \\ G &= \underbrace{R^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}_{x_\varphi^2} + \underbrace{R^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta}_{y_\varphi^2} + \underbrace{0}_{z_\varphi^2} &&= R^2\sin^2\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright\ \sqrt{A^2+B^2+C^2} &= \sqrt{R^4\cos^2\varphi\sin^4\vartheta + R^4\sin^2\varphi\sin^4\vartheta + R^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta} \\ &= R^2\sqrt{\underbrace{\underbrace{\cos^2\varphi\sin^4\vartheta + \sin^2\varphi\sin^4\vartheta}_{\sin^4\vartheta} + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}_{\sin^2\vartheta}} = R^2\sin\vartheta \\ &= \sqrt{\underbrace{R^2}_{E}\underbrace{R^2\sin^2\vartheta}_{G} - \underbrace{0}_{F^2}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad \|\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2} = R^2\sin\vartheta,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \frac{(A,B,C)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\left(R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta, R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta, R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)}{R^2\sin\vartheta} \\ &= \Big(\underbrace{\cos\varphi\sin\vartheta}_{\frac{x}{R}}, \underbrace{\sin\varphi\sin\vartheta}_{\frac{y}{R}}, \underbrace{\cos\vartheta}_{\frac{z}{R}}\Big) = \frac{(x,y,z)}{R} \end{aligned}$$

(äußere) Normale
= skalierter Vektor, gleiche Richtung

<u>*Oberflächeninhalt*</u> : $S_R(0)$

$$\Longrightarrow\quad |S_R(0)| = \int_{\Pi} \underbrace{R^2\ \sin\vartheta}_{\sqrt{EG-F^2}}\ \underbrace{\mathrm{d}(\vartheta,\varphi)}_{\mathrm{d}(p,q)} = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} R^2\ \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi R^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}_{2} = 4\pi R^2$$

Beispiel : *Oberflächeninhalt und Volumen der Einheitskugel im* $\mathbb{R}^n$

$K_n = K_n(0)$ ... $n-$dimensionale Einheitskugel, $\omega_n = \partial K_n$ ... Sphäre, Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel

verallgemeinerte Kugelkoordinaten :

$$\underbrace{\begin{array}{rcl} x_1 & = & r\cos\varphi\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\,\ldots\,\sin\vartheta_{n-2} \\ x_2 & = & r\sin\varphi\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\,\ldots\,\sin\vartheta_{n-2} \\ x_3 & = & r\cos\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\,\ldots\,\sin\vartheta_{n-2} \\ \vdots & & \ddots \qquad \vdots \\ x_{n-1} & = & r\cos\vartheta_{n-3}\,\sin\vartheta_{n-2} \\ x_n & = & r\cos\vartheta_{n-2} \end{array}}_{x\;=\;\Phi_n(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})}$$

$$\overline{\Pi}\ :\ 0\le r<\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le\vartheta_j\le\pi,\ \ j=1,\ldots,n-2$$

$$\left|\frac{\partial(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}\right| = \left|\det\mathcal{J}\big(\Phi_n,(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})\big)\right| = r^{n-1}\sin\vartheta_1\,(\sin\vartheta_2)^2\cdots(\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}$$

$$|\omega_n| = \int\limits_{\omega_n}\mathrm{d}\sigma \;=\; \int\limits_{\overline{\Pi}|_{r=1}}\left|\frac{\partial(1,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}\right|\mathrm{d}(\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi}\underbrace{\sin\vartheta_1\,(\sin\vartheta_2)^2\ldots(\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}\,\mathrm{d}\vartheta_{n-2}\ldots\mathrm{d}\vartheta_1\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}\omega}$$

$$|K_n| \;=\; \int\limits_{K_n}\mathrm{d}x = \int\limits_{\overline{\Pi}}\left|\frac{\partial(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}\right|\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2}) = \int\limits_0^1\int\limits_{\omega_n} r^{n-1}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r$$

$$= \;|\omega_n|\underbrace{\int\limits_0^1 r^{n-1}\,\mathrm{d}r}_{\frac{1}{n}} = \frac{|\omega_n|}{n}$$

$\Gamma-$ Funktion, *Abschnitt 8.6* : $\Gamma(y) := \int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{y-1}\,\mathrm{d}t,\ \ y>0,\quad \Gamma(m+1) = m!,\ \ m\in\mathbb{N}$

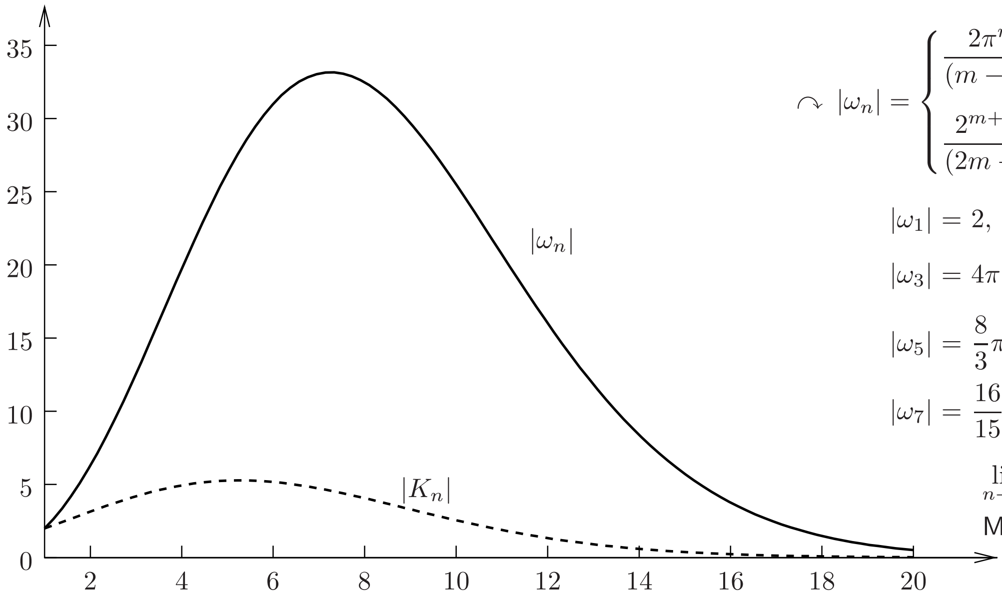
$$I_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty\int\limits_{\omega_n} e^{-r^2}\underbrace{r^{n-1}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}x} = |\omega_n|\int\limits_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}\,\mathrm{d}r \underset{u\,=\,r^2}{=} \frac{|\omega_n|}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{|\omega_n|}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

andererseits ist $I_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)^n = I_1^n = \frac{|\omega_n|}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

$$n=2 \curvearrowright |\omega_2| = 2\pi \curvearrowright I_1^2 = \frac{|\omega_2|}{2}\overbrace{\Gamma(1)}^{1} = \pi \curvearrowright I_1 = \sqrt{\pi} \curvearrowright |\omega_n| = \frac{2\,\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$n=3 \curvearrowright 4\pi = |\omega_3| = \frac{2\,\sqrt{\pi}^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \iff \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \iff \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$



$$\curvearrowright \ |\omega_n| = \begin{cases} \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!}, & n = 2m \\ \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$|\omega_1| = 2, \qquad |\omega_2| = 2\pi,$$

$$|\omega_3| = 4\pi, \qquad |\omega_4| = 2\pi^2,$$

$$|\omega_5| = \frac{8}{3}\pi^2, \qquad |\omega_6| = \pi^3,$$

$$|\omega_7| = \frac{16}{15}\pi^3, \quad |\omega_8| = \frac{1}{3}\pi^4, \ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \ |\omega_n| = 0$$

Maximum bei $n = 7$

$$|K_n| = \frac{|\omega_n|}{n} = \frac{2\ \sqrt{\pi}^{\ n}}{n\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!}, & n = 2m \\ \dfrac{2^{m+1}\ \pi^m}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$\curvearrowright$ $|K_1| = 2,\ |K_2| = \pi,\ |K_3| = \dfrac{4}{3}\pi,\ |K_4| = \dfrac{\pi^2}{2},\ |K_5| = \dfrac{8}{15}\pi^2,\ |K_6| = \dfrac{\pi^3}{6},\ |K_7| = \dfrac{16}{105}\pi^3,\ |K_8| = \dfrac{\pi^4}{24},\ \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} \ |K_n| = 0,$ Maximum bei $n = 5$

Literatur

[Beh04] E. Behrends. *Analysis. Band 1. Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni*. Vieweg, Wiesbaden, 2nd edition, 2004.

[Beh07] E. Behrends. *Analysis. Band 2*. Vieweg, Wiesbaden, 2nd edition, 2007.

[Fic74a] G.M. Fichtenholz. *Differential- und Integralrechnung I*, volume 61 of *Hochschulbücher für Mathematik*. Dt. Verlag Wiss., Berlin, 1974.

[Fic74b] G.M. Fichtenholz. *Differential- und Integralrechnung II*, volume 62 of *Hochschulbücher für Mathematik*. Dt. Verlag Wiss., Berlin, 1974.

[Fic74c] G.M. Fichtenholz. *Differential- und Integralrechnung III*, volume 63 of *Hochschulbücher für Mathematik*. Dt. Verlag Wiss., Berlin, 1974.

[For06] O. Forster. *Analysis 1*. vieweg, Wiesbaden, 8th edition, 2006.

[Heu81a] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Teubner, Stuttgart, 2nd edition, 1981.

[Heu81b] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Teubner, Stuttgart, 1981.

[Kön04] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer, Berlin, 6th edition, 2004.

[Tri81] H. Triebel. *Analysis und mathematische Physik*. Teubner, Leipzig, 1981.

[Wal02] W. Walter. *Analysis 2*. Springer, Berlin, 5th edition, 2002.

[Wal04] W. Walter. *Analysis 1*. Springer, Berlin, 7th edition, 2004.