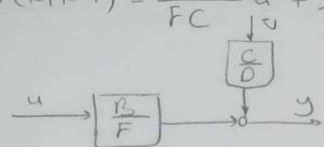
به روز رسانی پارامتر نویز با استفاده از روش گرادیان نزولی

$$\hat{y}(k|k-1) = \frac{BD}{FC}u + \frac{C-D}{C}y \Big/ C = c_0 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots$$



$$e(k) = \frac{D}{C}y(k) - \frac{BD}{FC}u(k)$$

باید برابر این: $n(k) = \frac{C(q)}{D(q)} v(k)$

$$e = y - \hat{y} = \left(\frac{B}{F}u + \frac{C}{D}v\right) - \left(\frac{BD}{FC}u + \frac{C-D}{C}y\right) =$$

$$e = \frac{B}{F}\left(1 - \frac{D}{C}\right)u + \frac{C}{D}v - \left(1 - \frac{D}{C}\right)y$$

$$e = \underline{\underline{\frac{D}{C}y}} - \cancel{y} + \underbrace{\frac{C}{D}v + \frac{B}{F}u}_{y} - \underline{\underline{\frac{BD}{CF}u}}$$

$$\boxed{e = \frac{D}{C}y - \frac{BD}{CF}u} \qquad J = \frac{1}{2}ee^T = \frac{1}{2}e^2$$

$$c_i^+ = c_i^- - \left.\frac{\partial J}{\partial c_i}\right|_{c_i^-}$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial c_i}\right|_{c_i} = \frac{\partial J}{\partial e} \times \frac{\partial e}{\partial c} = \frac{1}{2} \times 2e \times \frac{\partial}{\partial c_i}\left[\frac{D}{C}y - \frac{BD}{CF}u\right]$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial c_i}\right|_{c_i} = \left(\frac{D}{C}y - \frac{BD}{CF}u\right)\left(Dy\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{C} - \frac{BD}{F}u\frac{\partial}{\partial c_i}\frac{1}{C}\right) =$$

$$\left(\frac{D}{C}y - \frac{BD}{CF}u\right)\left(Dy\frac{-q^{-i}}{C^2} - \frac{BD}{F}u\frac{-q^{-i}}{C^2}\right) =$$

$$\left(\frac{D}{C}y(k) - \frac{BD}{CF}u(k)\right)\left(\frac{Dy(k-i)}{C^2} - \frac{BD}{FC^2}u(k-i)\right) = \left.\frac{\partial J}{\partial c_i}\right|_{c_i}$$

$$c_i^+ = c_i^- - \left(\frac{D}{C}y(k) - \frac{BD}{CF}u(k)\right)\left(\frac{Dy(k-i)}{C^2} - \frac{BD}{FC^2}u(k-i)\right) =$$

$$c_i^+ = c_i^- - \frac{D}{C}\left(y(k) - \frac{B}{F}u(k)\right)\frac{D}{C^2}\left(y(k-i) - \frac{B}{F}u(k-i)\right) =$$

$$c_i^+ = c_i^- - \frac{D^2}{C^3}\left(y(k) - \frac{B}{F}u(k)\right)\left(y(k-i) - \frac{B}{F}u(k-i)\right)$$

② فراموش نشود که $\hat{y}(k)$ در اصل به صورت $\hat{y}(k|k-1)$ است و برای سادگی به صورت $\hat{y}(k)$ نوشته شده است
(در BJ, برخلاف OE مقادیر تخمینی به مقادیر قبلی وابسته است)

سوالات هماهنگ نشده

۱- در روش LS، $cov(e) = cov(n)$ می‌شود؟ چگونه؟ (۵ نمره)

سوال ۱:

$$E(e) = E(y-\hat{y}) = E(U\theta + n - U\hat{\theta})$$

$$\xrightarrow{\text{E is linear}} E(U\theta - U\hat{\theta}) + 0 = UE(\theta-\hat{\theta}) \rightarrow$$

$$E(e) = U(\theta - E(\hat{\theta})) = U(\theta-\theta) = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$Cov(e) = E\left((e-E(e))\cdot(e-E(e))^T\right) = E(e\cdot e^T) =$$

$$E\left([U(\theta-\hat{\theta})+n]\cdot[U(\theta-\hat{\theta})+n]^T\right) =$$

$$E\left[(U(\theta-\hat{\theta})+n)((\theta-\hat{\theta})^T U^T + n^T)\right] =$$

$$U\,cov(\hat{\theta})\,U^T + UE((\theta-\hat{\theta})\cdot n^T) + E(n(\theta-\hat{\theta})^T)U^T +$$

$$\underbrace{Cov(n)}_{\sigma^2 I}$$

از طرفی داریم:

$$E((\theta-\hat{\theta})n^T) = E((\theta - (U^TU)^{-1}U^Ty)n^T) =$$

$$E(\theta-\theta-(U^TU)^{-1}U^T n n^T) = -E((U^TU)^{-1}U^Tnn^T)$$

$$= -(U^TU)^{-1}U^TE(nn^T) = -(U^TU)^{-1}U^T\sigma^2 \quad (\mathrm{II})$$

اگر رابطه‌ی (II) را در $cov(e)$ جایگذاری کنیم ←

$$Cov(e) = U\sigma^2 (U^TU)^{-1}U^T + \left(-(U^TU)^{-1}U^T\sigma^2 \times 2U\right)$$
$$+ \sigma^2 I \longrightarrow$$

$$Cov(e) = \sigma^2 I - U(U^TU)^{-1}U^T\sigma^2 = \sigma^2\left(I - U(U^TU)^{-1}U^T\right)$$

می‌خواهیم تا حد امکان $Cov(e)$ به $Cov(n)$ نزدیک شود ← آیا با $N \to \infty$

و $U(U^TU)^{-1}U^T \longrightarrow 0$ نزدیک می‌شود؟

N تعداد مشاهدات

n تعداد رگرسورها،

$$U^TU = \begin{pmatrix} U_1^TU_1 & \cdots & U_1^TU_2 & \cdots & U_1^TU_n \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ U_n^TU_1 & - & - & - & U_n^TU_n \end{pmatrix}$$

$$U_i^TU_j = \sum_{q=1}^{N} U_i^q U_j^q = N \times \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} U_i^q U_j^q \xrightarrow{N \to \infty}$$
$$N \times E(U_i, U_j)$$

اگر $N \to \infty$ میانگین به امید ریاضی تبدیل می‌شود ←

$$U^TU = N \cdot \begin{pmatrix} E(U_1, U_1) & - & - & E(U_1, U_n) \\ E(U_2, U_1) & - & - & \cdots \\ \vdots & & & \\ E(U_n, U_1) & - & - & E(U_n, U_n) \end{pmatrix} =$$

$N \cdot E(\underline{U}\,\underline{U}^T) \longrightarrow$ autocorrelation vector

2

$$\mathrm{Cov}(e) = \sigma^2\left(I - U(U^TU)^{-1}U^T\right) =$$

$$\sigma^2\left(I - U \times \underbrace{\frac{1}{N}\left(E(UU^T)\right)^{-1}U^T}_{\text{if } N \to 0 \text{ this term is } \boxed{\text{zero}}}\right)$$

وقتی $N \to \infty$ برود $\frac{1}{N} \to 0$ پس با بزرگ‌شدن نمونه‌ها

$$\mathrm{Cov}(e) = \sigma^2(\underline{I} - 0) = \sigma^2\underline{I}$$

سوال ۲ هماهنگ نشده

سوال 2 هماهنگ نشده:

از ARX شروع می‌کنیم:

$$y(t) = \underline{x}^T \underline{\theta} + n$$

$$y(t) = \underline{\underline{X}}\ \underline{\theta} + \underline{n}$$

در رابطه‌ی زیر $y(t)$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\hat{\theta}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{\theta}_{LS} = \underline{\theta} + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{n}$$

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} = \underline{\theta} + \underbrace{\left(\frac{1}{N} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}\right)^{-1}}_{\sim E^{-1}\{\underline{\underline{X}}\,\underline{X}^T\}} \underbrace{\left(\frac{1}{N} \underline{X}^T \underline{n}\right)}_{\sim E\{\underline{X}\,n\}}$$

$$\hat{\theta}_{LS} = \theta + E^{-1}\{x x^T\} E\{\underline{x}\, n\}$$

سازگاری در صورتی برقرار می‌شود که $N \to \infty$

$$as \quad N \to \infty \qquad \hat{\underline{\theta}}_{LS} = \underline{\theta}$$

پس اگر $E\{\underline{x}\, n\} = 0$ باشد آنگاه در تخمین LS سازگاری قابل احراز است. یعنی اگر نویز و ورودی ناهمبسته باشند، می‌توان با تخمین LS پارامترهای مدل ARX را به دست آورد. در حضور نویز رنگی نیز شرط $E\{\underline{x}\, n\}$ برقرار نمی‌شود و سراغ IV می‌رویم.

$\hat{\theta}_{iv} = (\underline{Z}^T \underline{X})^{-1} \underline{Z}^T \underline{y}$; $\underline{y} = \underline{X}\,\theta + \underline{n}$

با جایگذاری $\underline{y}$ در رابطه‌ی $\hat{\theta}_{IV}$ داریم $\longleftarrow$

$$\hat{\theta}_{IV} = \underline{\theta} + (\underline{Z}^T \underline{X})^{-1} \underline{Z}^T \underline{n}$$

اگر در عبارت $(\underline{Z}^T \underline{X})^{-1}$ یک N در صورت و مخرج ضرب کنیم،

$$\hat{\theta}_{IV} = \underline{\theta} + \left(\frac{1}{N} \underline{\underline{Z}}^T X^{-1}\right)\left(\frac{1}{N} Z^T \underline{n}\right)$$

$$= \theta + E^{-1}\{Z X^T\} E\{\underline{Z} n\}$$

اگر $E\{Zn\}=0$ باشد، آنگاه تخمین IV یک تخمین سازگار خواهد شد، یعنی:

$N \longrightarrow \infty \Longrightarrow \hat{\theta}_{IV} \longrightarrow \theta$. مقدار نای پارامتر

و هدف در روش IV این است که Z به گونه‌ای باشد که این متغیرها با نویز ناهمبسته باشند. پس اگر Z به درستی انتخاب شود، خواهیم داشت

$E\{\underline{Z} n\} \simeq 0 \qquad as \quad N \to \infty$

$\hat{\theta}_{IV} \to \infty \qquad as \quad N \to \infty$

سوال ۳ هماهنگ نشده

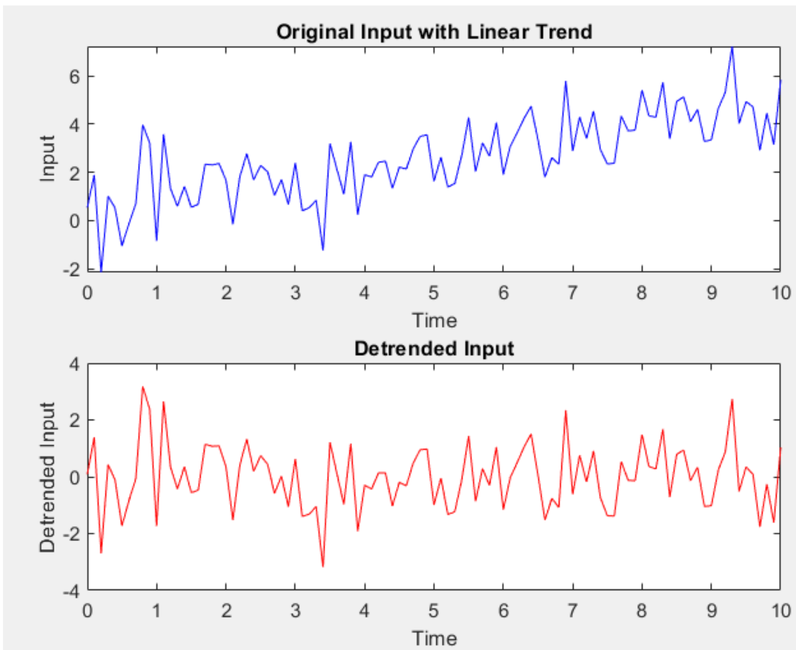
۳- دســـتورات *detrend* و *feedback* و *impulseest* و *spa* و *delayest* و *advice* و *lsqlin* در نرم افزار *MATLAB* در حوزه شـــناســـایی را توضـــیح دهید! نحوه محاســـبات در *MATLAB* برای این دســـتورات چگونه است؟ (۳۰ نمره)

در شناسایی سیستم ها دستورات lsqlin ,detrend, feedback, impulseest, spa, arx, delayest دارای کاربرد های زیر هستند.

1. detrend:

برای حذف کردن trend یا linear offset یا بایاس و مقدار حالت ماندگار از روی دیتا(ورودی یا خروجی) به کار می‌رود.

detrended_data = detrend(original_data);



شکل حاصل از شبیه سازی و استفاده از دستور deternd (موجود در فولدر امتحان)

2. feedback:

برای بستن فیدبک بر روی سیستم حلقه باز استفاده میشود. تابع تبدیل می‌تواند هم گسسته باشد هم پیوسته.

sys_cl = feedback(sys_open, sys_controller);

اگر **فیدبک واحد** باشد در سینتکس بالا به جای sys_controller کافی است عدد ۱ قرار گیرد.

کد متلب زیر را درنظر بگیرید:

```
sys=filt([0 0.48 -0.48],[1 -1.72 0.9],Ts);
```

```
csys = feedback(sys,1);
cnoise = feedback(1,sys);
```

در سیستم بالا از فیدبک برای بستن حلقه بر روی سیستم حلقه باز sys استفاده شده است به این صورت که سیستم حلقه بسته دارای نویز خروجی است پس دو تابع تبدیل csys و cnoise (تابع تبدیل نویز به خروجی) را تشکیل میدهیم تا با جمع آثار و ضرب ورودی ها در تابع تبدیل بتوانیم خروجی را به دست آوریم.

3. impulseest:

sys_impulse = impulseest(data)**;**

این دستور از داده ورودی خروجی پاسخ ضربه را استخراج میکند.

```
% Generate input signal (example: random input)
Ts = 0.1;  % Sampling time
t = 0:Ts:10;  % Time vector
u = randn(size(t));  % Example: random input signal

% Define a system with a known impulse response (example)
sys_true = tf([1 0.5], [1 -0.8 0.2], Ts);  % Example: a second-order system

% Generate output signal using the true system
y_true = lsim(sys_true, u, t);

% Add white noise to the output signal
noise_std = 0.1;
y_noisy = y_true + noise_std * randn(size(t));

% Ensure that u and y_noisy have the same number of rows
min_length = min(length(u), length(y_noisy));
u = u(1:min_length);
y_noisy = y_noisy(1:min_length);

% Create iddata object for system identification
data = iddata(y_noisy, u, Ts);

% Use impulseest to estimate an impulse response model
na = 2;  % Number of poles in the model
nb = 2;  % Number of zeros in the model
nk = 1;  % Delay in the model
sys_est = impulseest(data, [na, nb, nk]);
```

این کد نمونه ای است از استفاده دستور impulseest برای به دست آوردن پاسخ ضربه سیستم.

4. spa:

[Pxx, F] = spa(data);

از سیگنال زمانی داده شده برای آنالیز دامنه فرکانسی داده استفاده می‌شود.

```
% Generate input signal (example: random input)
Ts = 0.1;   % Sampling time
```

```
t = 0:Ts:10;  % Time vector
u = randn(size(t));  % Example: random input signal

% Define a system with a known frequency response (example)
sys_true = tf([1 0.5], [1 -0.8 0.2], Ts);  % Example: a second-order
system

% Generate output signal using the true system
y_true = lsim(sys_true, u, t);
y_true = y_true';
% Add white noise to the output signal
noise_std = 0.1;
y_noisy = y_true + noise_std * randn(size(t));

% Create iddata object for system identification
data = iddata(y_noisy, u, Ts);

% Use spa to estimate the frequency response
% Choose appropriate options for your specific case
opts = spaOptions('FrequencyVector', logspace(-2, 2, 100), 'SID',
'periodogram');
sys_est = spa(data, opts);

% Plot the true and estimated frequency responses
bode(sys_true, '-r', sys_est, '--b');
legend('True System', 'Estimated System');
title('True and Estimated Frequency Responses');
```

این هم نمنه ای از استفاده از دستور spa فراموش نشود که ورودی به spa باید iddata object باشد.

5. delayest:

delay = delayest(data);

برای تخمین میزان تاخیر سیستم از داده های خروجی ورودی به کار می‌رود.

6. lsqlin:

x = lsqlin(A, b, Aeq, beq);

این دستور تخمین LS خطی را انجام میدهد و برای تخمین پارامتر در مدل های خطی استفاده می‌شود.

7. advice:

```
advice(data)
```

data باید iddata object باشد.

دستور advice برای آنالیز داده های حوزه زمانی یا فرکانسی قبل از عمل مدلسازی است.. این دستور در مورد محدودیت های داده، پیش پردازش های احتمالی و محدودیت های دقت مدل گزارش میدهد. بهتر است از این دستور در کنار plot برای درک بهتر داده استفاده شود

سوال ۴

$$
\begin{cases}
\theta(t+1) = \theta(t) - P(t+1)\,x(t+1)\,\varepsilon(t+1) \\
P(t+1) = P(t)\left(I - \dfrac{x(t+1)x^T(t+1)P(t)}{1 + x^T(t+1)P(t)x(t+1)}\right) \\
\varepsilon(t+1) = y(t+1) - x^T(t+1)\,\theta(t)
\end{cases}
$$

$$e(t+1) = y(t+1) - x^T(t+1)\,\theta(t+1) = y(t+1) - x^T(t+1)\left[e(t) + P(t+1)x(t+1)\varepsilon(t+1)\right)$$

$$= y(t+1) - x^T(t+1)\,e(t) - x^T(t+1)P(t+1)x(t+1)\varepsilon(t+1)$$

$$e(t+1) = \varepsilon(t+1)\left[1 - x^T(t+1)P(t+1)x(t+1)\right]$$

$$t \to \infty \Longrightarrow P(t+1) \to 0 \Longrightarrow e(t+1) \to \varepsilon(t+1)$$

در $FRLS \Longrightarrow P(t+1) = \dfrac{P(t)}{\lambda}\left[I - \dfrac{x(t+1)x^T(t+1)P(t)}{\lambda + x^T(t+1)P(t)x(t+1)}\right]$

تنها ضریب λ به P اضافه می‌شود و بقیه روابط مانند بالاست.

با اضافه شدن λ کل عبارت $P(t+1)$ بزرگ می‌شود و سرعت همگرایی آن افزایش پیدا می‌کند.

سوال ۵ شبیه سازی

با توجه به فایل توضیحات دیتاست داریم.

Ts= 1228.8

```
5. Inputs:
        1. gas flow
        2. turbine valves opening
        3. super heater spray flow
        4. gas dampers
        5. air flow
6. Outputs:
        1. steam pressure
        2. main stem temperature
        3. reheat steam temperature
```

ابتدا دیتا را داخل متلب لود میکنیم.

```
load powerplant.dat
```

ورودی حروجی را از هم جدا میکنیم

```
U=powerplant(:,1:5);
Y=powerplant(:,6:8);
```

فقط داده مربوط به خروجی ۲ رو انتخاب میکنیم.

```
Y = Y(:,2);
```

دیتا را به فرم iddata در میاوریم:

```
data = iddata(Y,U,Ts);
```

با استفاده از قانون سر انگشتی که استاد سر کلاس آمزش دادند پارامترهای:

Na, nb nc, nf, nd را به دست می‌اوریم

nb=na-1;

nc<nd;

na~=nf;

nd=na;

nd>nf

مقدار دهی به صورت زیر در متلب انجام گرفته است:

```
na=4;nb=3; nc=2; nf=3; nd=4;
```

با این مقادیر ابتدایی شبیه سازی را انجام میدهیم تا ببینیم نتیجه چگونه میشود.

لازم به ذکر است که سیستم احتمالا حلقه بسته است(به این دلیل که فرایند صنعتی مربوط به نیروگاه است) پس باید از مدل های حلقه بسته برای شناسایی استفاده کنیم

مدل هایی که برای سیستم استفاده می‌شود باید حلقه بسته باشند.

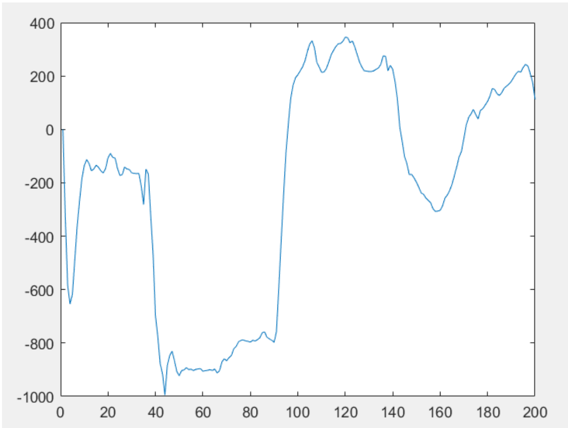
برای حلقه بسته از مدل های زیر استفاده میشود:

ARX, ARMAX, ARARX

برای حلقه باز از:

FIR, OE استفاده میشود

و مدل BJ برای هر دو حالت حلقه باز و بسته استفاده میشود.



شکل بالا خروجی الگوریتم ARMAX است.