Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №5

Частичная проблема собственных значений

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

Санкт - Петербург
2021

1 Предисловие

Метод Якоби является самым медленным из имеющихся алгоритмов вычисления собственных значений симметричной матрицы. Кроме того, метод не охватывает случай больших плохо обусловленных систем.

Степенной метод используется в основном для вычисления доминирующего собственного значения и соответствующего ему собственного вектора. Он не является универсальным методом, но может быть полезен в ряде ситуаций, например, в случае больших разреженных матриц.

Метод скалярных произведений является методом ускорения сходимости степенного метода, так как сокращает число шагов итерации.

2 Постановка задачи

Исследуем задачу поиска собственных чисел матрицы A. Если нас интересует максимальное по модулю с.ч., то удобно воспользоваться степенным и скалярным методами поиска.

3 Степенной метод

Пусть наша матрица A имеет полную о.н.с. собственных векторов $e_i, i = 1, \dots, n$

$$Ae_i = \lambda_i e_i \tag{1}$$

причем $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$

Любой вектор $x^{(0)}$ представляется следующим образом

$$x^{(0)} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n \tag{2}$$

Можно постриить итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} = A^k x^{(0)} = c_1 \lambda_1^k e_1 + \dots + c_n \lambda_n^k e_n \tag{3}$$

Можем свести к виду

$$x^{(k+1)} = A^k x^{(0)} = c_1 \lambda_1^k e_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right) \tag{4}$$

Таким образом, увеличивая k, будем приближаться вектором x^{k+1} к с.вектору матрицы A, соответсвтующему наибольшему с.числу. Само же собственное число в таком случае (с учетом более точного приближения) может быть приближенно вычислено так

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{\left(x^{(k+1)}, x^{(k+1)}\right)}{\left(x^{(k)}, x^{(k)}\right)}} \tag{5}$$

4 Метод скалярных произведений

Наряду с матрицей A рассматриваем матрицу A^T с о.н.с. собственных векторов $v_i, i = 1, \ \dots \ , n$

Так же раскладываем вектор $y^{(0)}$

$$y^{(0)} = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \ \dots \ + d_n v_n \tag{6}$$

И запускаем итерационный процесс

$$y^{(k+1)} = A^T y^{(k)} = A^{Tk} y^{(0)} \tag{7}$$

Тогда имеем

$$\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) = \left(A^k x^{(0)}, A^{Tk} y^{(0)}\right) = c_1 d_1 \lambda_1^{2k} + \ \dots \ + c_n d_n \lambda_n^{2k} \tag{8}$$

В случае симметричности матрицы A при $x^{(0)} = y^{(0)}$ аналогичным способом получаем

$$|\lambda_1| \approx \frac{\left(A^k x^{(0)}, A^k x^{(0)}\right)}{\left(A^{k-1} x^{(0)}, A^k x^{(k)}\right)} \tag{9}$$

5 Описание численного эксперимента

Возьмем симметричную матрицу А. Будем искать ее с. ч. точным методом, а так же степенным методом и методом скалярных произведений, будем отслеживать число итераций. Будем сравнивать полученные результаты. К тому же возьмем данные, полученные методом вращений Якоби, описанным в прошлом отчете, и добавим к общему сравнению.

Выберем точность $1e^{-11}$ для всех тестов.

6 Тесты

6.1 Тест 1

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 3 & 4 & 0.1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0.3 & 4 & -1 & 4 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
Затрачено времени	0.013	0.007	0.0005	0.917
Кол-во итераций	-	54	27	26

6.2 Тест 2

$$A = \begin{pmatrix} 2.0044 & 0.48726 & 3.99047 \\ 0.48726 & -0.23999 & -0.52519 \\ 3.99047 & -0.52519 & 0.48660 \end{pmatrix}$$

Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
Затрачено времени	0.010	0.005	0.0008	0.005
Кол-во итераций	-	44	26	6

6.3 Тест 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -2 & 1 \\ -0.5 & 10 & 0.4 & 10 \\ -2 & 0.4 & -1.4 & 5 \\ 1 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
Затрачено времени	0.031	0.007	0.0007	0.002
Кол-во итераций	-	31	15	18

6.4 Тест 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
Затрачено времени	0.033	0.042	0.003	0.002
Кол-во итераций	-	3	18	0

6.5 Тест 5

Возьмем матрицу Гильберта размерностью 5×5, умноженное на 0.00000000005.
Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
Затрачено времени	0.480	0.014	0.005	0.033
Кол-во итераций	-	3	3	4

6.6 Тест 6

Возьмем обратную матрицу Гильберта размерностью 11×11
Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
Затрачено времени	0.003	0.006	0.004	0.033
Кол-во итераций	-	10	8	231

7 Вывод

Практические результаты сходятся с теоретическими расчетами: метод скалярных произведений сходится примерно в 2 раза быстрее степенного метода (что говорит и теория), а также видно, что скалярный метод обрабатывает данные довольно быстро. Оба метода дают достаточно точные результаты за небольшое число итераций. Метод Якоби для некоторых задач сходится сильно дольше, но все всё ещё дает хорошие результаты в плане точности.