

Санкт - Петербургский государственный университет  
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №8

**Сеточные методы для задачи теплопроводности**

Выполнил: Розыков Б.  
451 группа

# 1 Предисловие

Для решения задач теплопроводности существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов. Это позволяет решать многие практические задачи. Появление высокопроизводительной вычислительной техники поспособствовало решению нестационарных пространственных задач.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим простейший случай уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

где  $k$  — положительная константа, а  $x \in (0, a), t \in (0, T)$ .

В качестве дополнительных условий зададим одно начальное и два граничных

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad x \in [0, a]; \quad \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t) \\ u(a, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad t \in [0, T].$$

Решать эту задачу будем двумя сеточными методами явным и неявным.

### 2.1 Преобразование для применения двухслойных схем

Преобразуем исследуемое уравнение теплопроводности в  $\frac{du}{dt} = \Lambda u + f$ , где  $\Lambda$  — трёхдиагональная матрица с элементами:  $a_{ii} = -\frac{2k}{h^2}, a_{i,i\pm 1} = \frac{k}{h^2}, i = 1, \dots, n-1, n$  — количество узлов координатной сетки.

Решение  $\hat{u}$  на следующем узле временной сетки можно найти через известное решение на текущем узле  $u$  с помощью одностадийной схемы Розенброка.

$$(E - \sigma\tau\Lambda)w = \Lambda u + f \quad (2)$$

Решая относительно  $w$ , получаем  $\hat{u} = u + \tau Re(w)$ .

### 2.2 Явная схема

Один из примеров явной схемы — это схема Розенброка с  $\sigma = 0$ . Традиционная формула записи имеет следующий вид

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(x_n, \hat{t}); \quad (3)$$

Данная схема является лишь условно устойчивой, для устойчивости должно выполняться условие  $2k\tau \leq h^2$ . Явная схема непригодна для вычислений на больших временных интервалах.

## 2.3 Неявная схема

Для получения неявной схемы нужно положить  $\sigma = \frac{1+i}{2}$ . Такая схема называется комплексной схемой Розенброка. Мы уже с ней сталкивались, разбирали принцип её работы, поэтому остановимся на её свойствах. Эта схема

- Безусловно устойчива по начальным данным
- Устойчива равномерно
- Устойчива по правой части
- Имеет полную погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$
- Асимптотически безусловно устойчива

## 3 Описание численного эксперимента

Будем брать решение  $u(x, t)$  подставлять его в исходное уравнение, а так же в начальное и краевые условия, чтобы получить функции  $f, \mu, \mu_1, \mu_2$ . Будем засекают время работы программ и выводить графики отклонения от точного решения. Дополнительно посмотрим, что будет выдавать явный метод при не соблюдении условия устойчивости. Во всех тестах берем  $a = 1, T = 0.5, h = 0.01$ .

## 4 Тесты

### 4.1 Тест 1

В этом тесте возьмём решение  $u(x, t) = x^3 + t^2$ . Тогда

$$f(x, t) = -2x^2 + 3t^3 + xt; \mu(x) = x^3; \mu_1(x) = t^2; \mu_2(x) = 1 + t^2; \quad (4)$$

При  $\tau = \frac{h^2}{2k}$  явный метод срывает за 0.021 секунды, неявный метод – за 0.287 секунды.

Макимальное отклонение для неявного метода составляет 0.260.

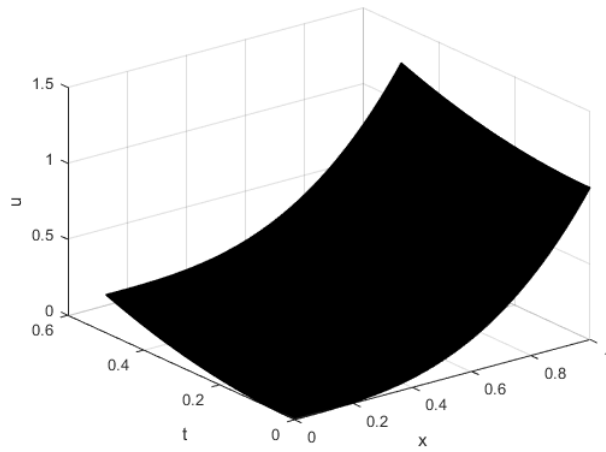


Рис. 1: График точного решения

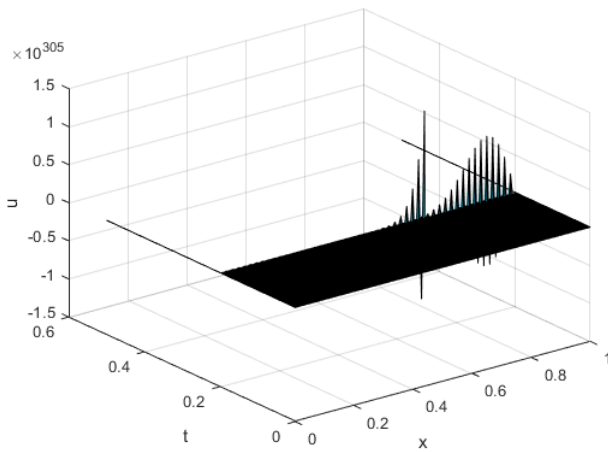


Рис. 2: График численного решения явным методом

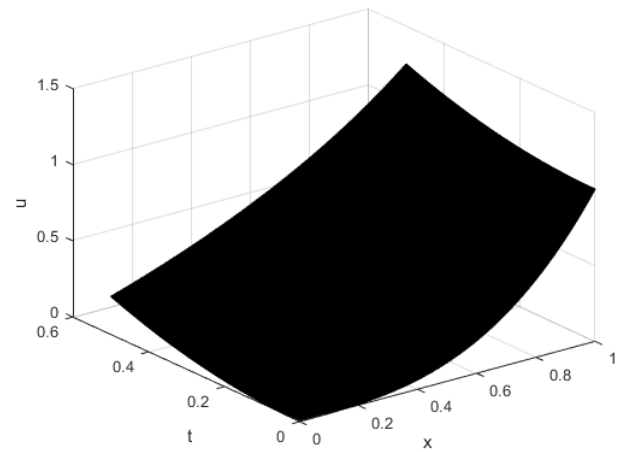


Рис. 3: График численного решения неявным методом

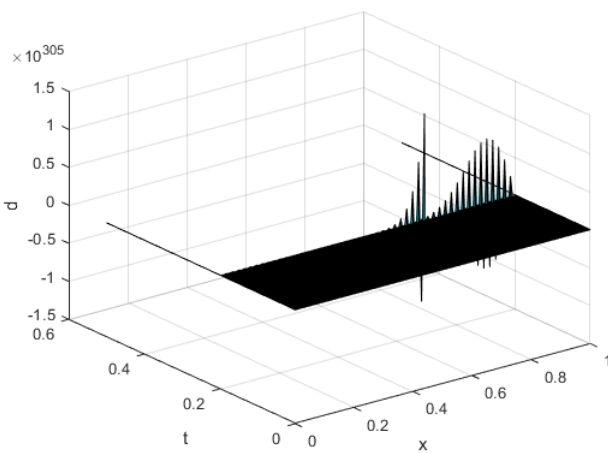


Рис. 4: График отклонения для явного метода

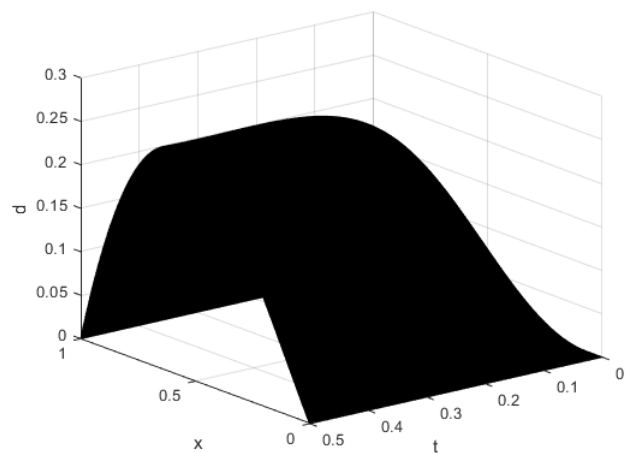


Рис. 5: График отклонения для неявного метода

## 4.2 Тест 2

В этом тесте возьмём решение  $u(x, t) = \sin(t - 3) \cos(x/2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 1/4 \cos(x/2)(\cos(t - 3) + 2 \sin(t - 3)); \\ \mu(x) &= \sin(-3) \cos(x/2); \mu_1(x) = \sin(t - 3); \mu_2(x) = \sin(t - 3) \cos(a/2); \end{aligned} \quad (5)$$

При  $\tau = \frac{h^2}{2k}$  явный метод срабатывает за 0.018 секунды, неявный метод – за 0.670 секунды.

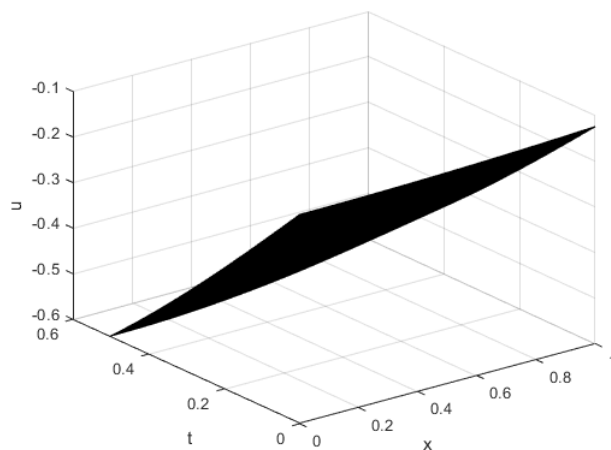


Рис. 6: График точного решения

Макимальное отклонение для неявного метода составляет 0.070.

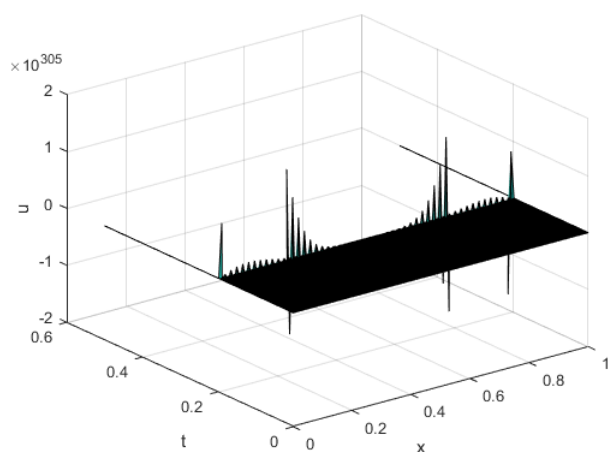


Рис. 7: График численного решения явным методом

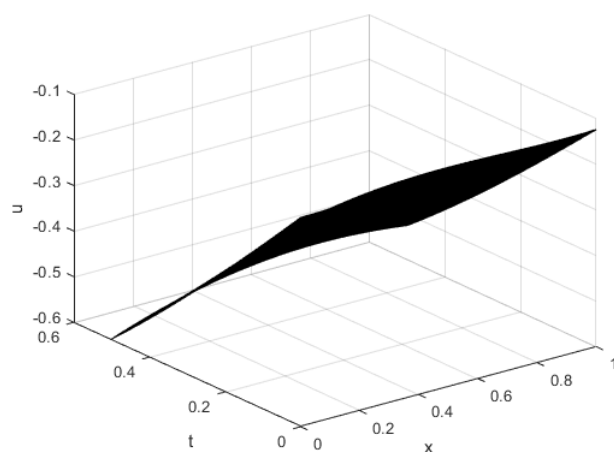


Рис. 8: График численного решения неявным методом

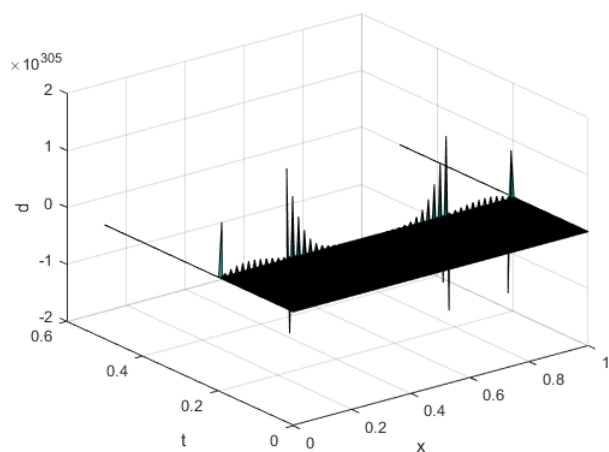


Рис. 9: График отклонения для явного метода

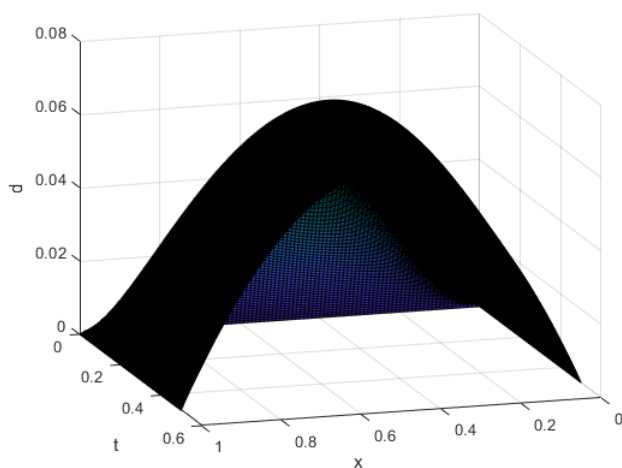


Рис. 10: График отклонения для неявного метода

## 5 Вывод

По полученным результатам можно сделать заключение о том, что в случае выполнения условия устойчивости явный метод срабатывает быстрее, однако с меньшей точностью. К тому же, если это условие не выполняется, то явный метод расходится, а неявный все еще выдает близкие к точному результаты решения.