

Санкт - Петербургский государственный университет  
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №2

**Решение СЛАУ точными методами**

Выполнил: Розыков Б.  
451 группа

# 1 Предисловие

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многочисленные практические задачи (по некоторым оценкам более 75 процентов всех задач). Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики.

Все методы решения линейных алгебраических задач можно разбить на два класса: прямые (точные) и итерационные (приближенные).

К прямым методам относятся те, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить точные значения неизвестных. Они просты, универсальны и используются для широкого класса систем. Однако они не применимы к системам больших порядков и к плохо обусловленным системам из-за возникновения больших погрешностей.

## 2 Постановка задачи

Решаем плохо обусловленную СЛАУ  $Ax = b$  точными методами: LU – разложением и QR – разложением. Вводим параметр регуляризации  $\alpha$  для повышения устойчивости системы. Хотим найти наиболее близкое к заданному решение. Система принимает вид

$$(A + \alpha E)x = b \quad (1)$$

$E$  — единичная матрица,  $x_0$  — заданное решение.

Такая система обусловлена лучше.

### 2.1 LU – разложение

Метод заключается в разложении  $A = LU$ , где  $L$  — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а  $U$  — верхняя треугольная матрица.

Задаём дополнительную матрицу  $M_i$ , в которой  $i$ -ый столбец содержит единицу на  $i$ -ой строке и выглядит так:  $(0, \dots, 1, -\mu_{i+1,i}, \dots, -\mu_{n,i})^T$ ,  $\mu_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$ . После вычислений всех  $M_i$  можем найти

$$U = M_{n-1} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot A; \quad L = M_1^{-1} \cdot \dots \cdot M_{n-1}^{-1} \quad (2)$$

Теорема гласит, что такое разложение матрицы  $A$  единственное, если все главные миноры  $A$  отличны от нуля.

Проблема такого разложения заключается в том, что число обусловленности может увеличиваться. Чтобы этого избежать, рассмотрим QR – разложение с ортогональной матрицей.

## 2.2 QR – разложение

Метод заключается в разложении  $A = QR$ , где  $Q$  — ортогональная матрица, а  $R$  — верхняя треугольная. Разложение осуществляем методом вращений.

Используем матрицу поворотов

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos \varphi_{i,j} & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & \sin \varphi_{i,j} & & & & & \cos \varphi_{i,j} & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Здесь угол  $\varphi_{i,j} = \arctg\left(\frac{-A_{i,j}^{(k)}}{A_{j,j}^{(k)}}\right)$ .  $A^{(k)}$  — матрица, повернутая  $k$  раз.

Получаем выражения для  $Q$  и  $R$

$$Q = T_{12}^{-1} \cdot \dots \cdot T_{1n}^{-1} \cdot T_{23}^{-1} \cdot \dots \cdot T_{2n}^{-1} \cdot \dots \cdot T_{n-2,n-1}^{-1} \cdot T_{n-2,n-1}^{-1} \cdot T_{n-1,n}^{-1} \quad R = Q^T \cdot A. \quad (4)$$

Теорема гласит, что любая невырожденная матрица  $A$  единственным образом раскладывается ортогональную и верхнетреугольную матрицы.

## 3 Описание численного эксперимента

Берем матрицу Гильберта, которая является плохо обусловленной.

Пусть  $e = (1, \dots, 1)^T$ . Вычисляем  $b = He$  и будем решать систему  $Hx = b$  с помощью LU и QR разложений.

LU – разложение: сначала решаем  $Ly = b$ , после чего решаем  $Ux = y$ .

QR – разложение: решаем  $Rx = Q^T b$ .

По итогу рассматриваем погрешность между решением системы и заранее заданным решением  $e$ .

Подбирать параметр регуляризации  $\alpha$  будем, начиная с малых значений, увеличивая до тех пор, пока обусловленность системы не станет приемлемой.

Так же берем в учет, что с увеличением  $\alpha$  решение системы будет сильнее расходиться с исходным. Однако при этом само решение будет вычисляться устойчивее.

## 4 Тесты

### 4.1 Тест 1

Матрица Гильберта размерностью  $13 \times 13$ . Норма погрешности для LU 25.37 , для QR 68.84 (пока еще не ввели  $\alpha$ ).

Вводим параметр регуляризации  $\alpha$

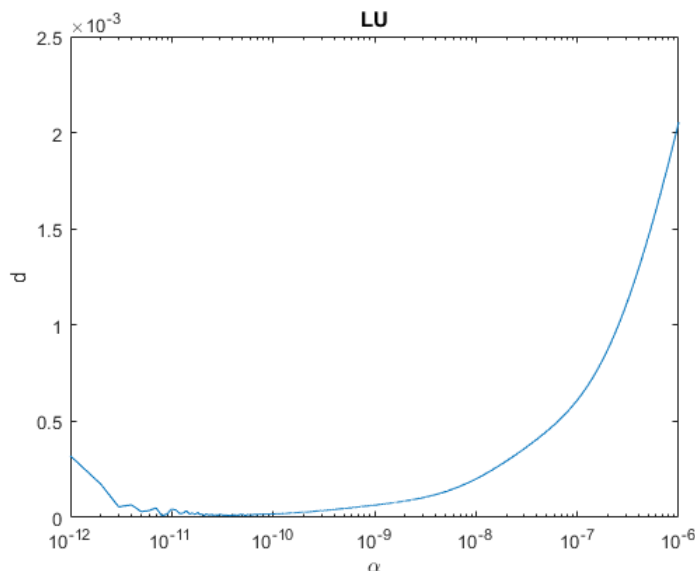


Рис. 1: Зависимость погрешности от  $\alpha$

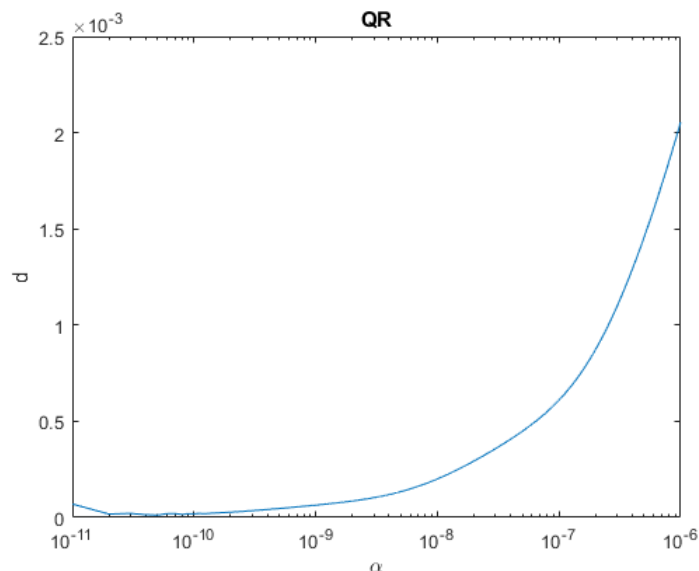


Рис. 2: Зависимость погрешности от  $\alpha$

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением  $d = 5e-11$  достигается при  $\alpha = 1.25e-05$  . При решении LU – разложением наименьшая погрешность  $d = 3.8e-11$  достигается при  $\alpha = 8.7e-06$ .

### 4.2 Тест 2

Матрица Гильберта размерностью  $17 \times 17$ . Норма погрешности для LU 10.16 , для QR 34.75 (пока еще не ввели  $\alpha$ ).

Вводим параметр регуляризации  $\alpha$

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением  $d = 2.53e-11$  достигается при  $\alpha = 8.63e-06$  . При решении LU – разложением наименьшая погрешность  $d = 2.33e-11$  достигается при  $\alpha = 9.45e-06$ .

### 4.3 Тест 3

Матрица Гильберта размерностью  $23 \times 23$ . Норма погрешности для LU 1.66 , для QR 2.10 (пока еще не ввели  $\alpha$ ).

Вводим параметр регуляризации  $\alpha$

(см. следующую страницу)

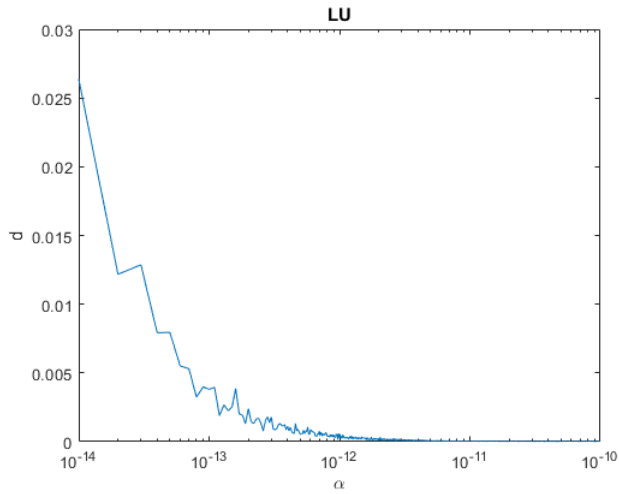


Рис. 3: Зависимость погрешности от  $\alpha$

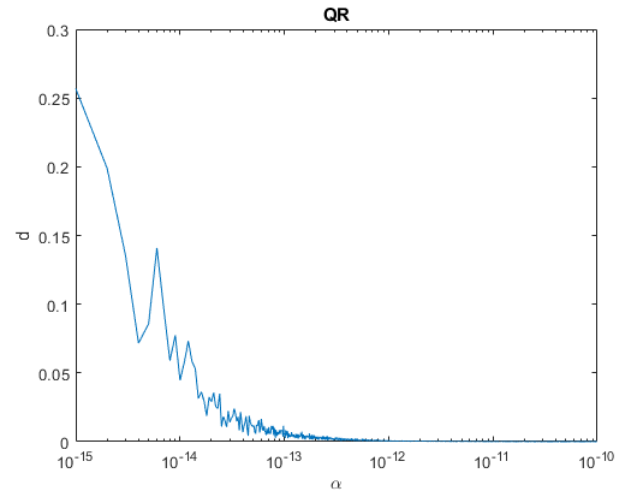


Рис. 4: Зависимость погрешности от  $\alpha$

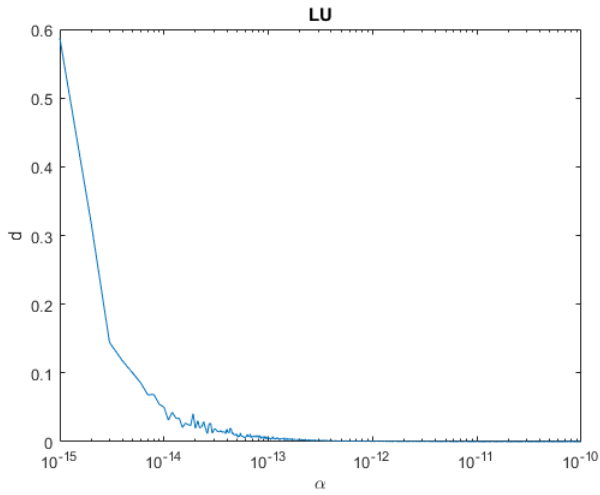


Рис. 5: Зависимость погрешности от  $\alpha$

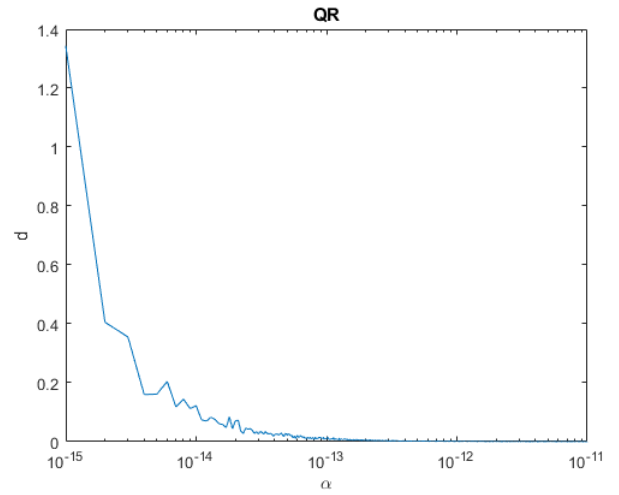


Рис. 6: Зависимость погрешности от  $\alpha$

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением  $d = 8.21e-12$  достигается при  $\alpha = 4.76e-05$ . При решении LU – разложением наименьшая погрешность  $d = 2.25e-11$  достигается при  $\alpha = 1.26e-05$ .

## 5 Вывод

По полученным данным можно заключить, что до введения параметра регуляризации погрешности сами по себе очень велики. С ростом размерности матрицы Гильберта становится заметнее, что QR – разложение расходится сильнее. После введения параметра регуляризации задача становится лучше обусловлена. LU – разложение при этом так же выдает меньшую погрешность, которая достигается при меньших значениях  $\alpha$ .