Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №8

Сеточные методы для задачи теплопроводности

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

Санкт - Петербург
2021

1 Предисловие

Для решения задач теплопроводности существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов. Это позволяет решать многие практические задачи. Появление высокопроизводительной вычислительной техники поспособствовало решению нестационарные пространственные задач.

2 Постановка задачи

Рассмотрим простейший случай уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

где k — положительная константа, а $x \in (0,a), t \in (0,T)$.

В качестве дополнительных условий зададим одно начальное и два граничных

$$u(x,0) = \mu(x),\ x \in [0,a]; \qquad \begin{matrix} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(a,t) = \mu_2(t) \end{matrix} \quad t \in [0,T].$$

Решать эту задачу будем двумя сеточными методами явным и неявным.

2.1 Преобразование для применения двухслойных схем

Преобразуем исследуемое уравнение теплопроводности в $\frac{du}{dt} = \Lambda u + f$, где Λ — трёхдиагональная матрица с элементами: $a_{ii} = -\frac{2k}{h^2}, a_{i,i\pm1} = \frac{k}{h^2},\ i = 1,..n-1,\ n$ — количество узлов координатной сетки.

Решение $\hat{u}$ на следующем узле временной сетки можно найти через известное решение на текущем узле u с помощью одностадийной схемы Розенброка.

$$(E - \sigma\tau\Lambda)w = \Lambda u + f \tag{2}$$

Решая относительно w, получаем $\hat{u} = u + \tau Re(w)$.

2.2 Явная схема

Один из примеров явной схемы — это схема Розенброка с $\sigma = 0$. Традиционная формула записи имеет следующий вид

$$\frac{\hat{u_n} - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(x_n, \hat{t}); \tag{3}$$

Данная схема является лишь условно устойчивой, для устойчивости должно выполняться условие $2k\tau \leq h^2$. Явная схема непригодна для вычислений на больших временных интервалах.

2.3 Неявная схема

Для получения неявной схемы нужно положить $\sigma = \frac{1+i}{2}$. Такая схема называется комплексной схемой Розенброка. Мы уже с ней сталкивались, разбирали принцип её работы, поэтому остановимся на её свойствах. Эта схема

- Безусловно устойчива по начальным данным
- Устойчива равномерно
- Устойчива по правой части
- Имеет полную погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$
- Асимптотически безусловно устойчива

3 Описание численного эксперимента

Будем брать решение $u(x,t)$ подставлять его в исходное уравнение, а так же в начальное и краевые условия, чтобы получить функции f, μ, μ_1, μ_2. Будем засекать время работы программ. Дополнительно посмотрим, что будет выдавать явный метод при не соблюдении условия устойчивости (для этого возьмем $\tau = 0.001$).

Во всех тестах берем а = номеру теста + 1, $T = 0.5, h = 0.01$.

Введем обозначения для времени работы явного и неявного (t_r, t_c, измеряемые в секундах) методов, и максимальное отклонение для этих методов (d_r, d_c).

4 Тесты

4.1 Тест 1

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = sin(x) + cos(t)$. Тогда

$$f(x,t) = -sin(t) + 3sin(x);\ \mu(x) = sin(x) + 1;\ \mu_1(t) = cos(t);\ \mu_2(t) = sin(1) + cos(t);$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.48$, $t_c = 6.6$, $d_r = 2.03e-07$, $d_c = 2.1e-05$
При $\tau > \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.01$, $t_c = 0.13$, $d_r = \infty$, $d_c = 0.0019$

4.2 Тест 2

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = cos(x)e^{-t}$. Тогда

$$f(x,t) = 3cos(x)e^{-t};\ \mu(x) = cos(x);\ \mu_1(t) = e^{-t};\ \mu_2(t) = cos(1)e^{-t};$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.47$, $t_c = 8.1$, $d_r = 2.5e-07$, $d_c = 1.4e-05$
При $\tau > \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.012$, $t_c = 0.14$, $d_r = \infty$, $d_c = 1.4$

4.3 Тест 3

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = (sin(t) - x)e^x$. Тогда

$$f(x,t) = (cos(t) + 5x - 5sin(t) + 10)e^x;\ \mu(x) = -xe^x;\ \mu_1(t) = sin(t);\ \mu_2(t) = esin(t) - e;$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.53$, $t_c = 10.19$, $d_r = 9.9e-06$, $d_c = 3.1e-05$
При $\tau > \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.014$, $t_c = 0.12$, $d_r = \infty$, $d_c = 4.5$

4.4 Тест 4

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = e^{x+t}$. Тогда

$$f(x,t) = -e^{x+t};\ \mu(x) = e^x;\ \mu_1(t) = e^t;\ \mu_2(t) = e^{t+1};$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.28$, $t_c = 3.96$, $d_r = 3.4e-06$, $d_c = 6.9e-07$
При $\tau > \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.013$, $t_c = 0.15$, $d_r = \infty$, $d_c = 2.7$

4.5 Тест 5

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = \frac{t+1}{x+1}$. Тогда

$$f(x,t) = \frac{1}{x+1} - 12\frac{t+1}{(x+1)^3};\ \mu(x) = \frac{1}{x+1};\ \mu_1(t) = t+1;\ \mu_2(t) = \frac{t+1}{2};$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 1.43$, $t_c = 13.14$, $d_r = 6.4e-06$, $d_c = 8.4e-06$
При $\tau > \frac{h^2}{2k}$: $t_r = 0.023$, $t_c = 0.16$, $d_r = \infty$, $d_c = 1.3$

5 Вывод

По полученным результатам можно сделать заключение о том, что в случае выполнения условия устойчивости явный метод срабатывает быстрее, однако с меньшей точностью. К тому же, если это условие не выполняется, то явный метод расходится, а неявный все еще выдает близкие к точному результаты решения.