Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №2

Решение СЛАУ точными методами

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

Санкт - Петербург
2021

1 Предисловие

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многочисленные практические задачи (по некоторым оценкам более 75 процентов всех задач). Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики.

Все методы решения линейных алгебраических задач можно разбить на два класса: прямые (точные) и итерационные (приближенные).

К прямым методам относятся те, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить точные значения неизвестных. Они просты, универсальны и используются для широкого класса систем. Однако они не применимы к системам больших порядков и к плохо обусловленным системам из-за возникновения больших погрешностей.

2 Постановка задачи

Решаем плохо обусловленную СЛАУ $Ax = b$ точными методами: LU – разложением и QR – разложением. Вводим параметр регуляризации α для повышения устойчивости системы. Хотим найти наиболее близкое к заданному решение. Система принимает вид

$$(A + \alpha E)x = b + \alpha x_0 \tag{1}$$

E — единичная матрица, x_0 — заданное решение.

Такая система обусловлена лучше.

2.1 LU – разложение

Метод заключается в разложении $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а U — верхняя треугольная матрица.

Задаём дополнительную матрицу M_i, в которой i-ый столбец содержит единицу на i-ой строке и выглядит так: $(0, \ \dots\ , 1, -\mu_{i+1,i}, \ \dots\ , -\mu_{n,i})^T$, $\mu_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$.После вычислений всех M_i можем найти

$$U = M_{n-1} \cdot \ \dots\ \cdot M_1 \cdot A; \qquad\qquad L = M_1^{-1} \cdot \ \dots\ \cdot M_{n-1}^{-1} \tag{2}$$

Теорема гласит, что такое разложение матрицы A единственное, если все главные миноры A отличны от нуля.

Проблема такого разложения заключается в том, что число обусловленности может увеличиваться. Чтобы этого избежать, рассмотрим QR – разложение с ортогональной матрицей.

2.2 QR – разложение

Метод заключается в разложении $A = QR$, где Q — ортогональная матрица, а R — верхняя треугольная. Разложение осуществляем методом вращений.

Используем матрицу поворотов

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& \cos\varphi_{i,j} &&& -\sin\varphi_{i,j} &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& \sin\varphi_{i,j} &&& \cos\varphi_{i,j} &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Здесь угол $\varphi_{i,j} = arctg(\frac{-A^{(k)}_{i,j}}{A^{(k)}_{j,j}})$. $A^{(k)}$ — матрица, повернутая k раз.

Получаем выражения для Q и R

$$Q = T^{-1}_{12} \cdot \ ... \ \cdot T^{-1}_{1n} \cdot T^{-1}_{23} \cdot \ ... \ \cdot T^{-1}_{2n} \cdot \ ... \ \cdot T^{-1}_{n-2,n-1} \cdot T^{-1}_{n-2,n-1} \cdot T^{-1}_{n-1,n} \qquad R = Q^T \cdot A. \tag{4}$$

Теорема гласит, что любая невырожженная матрица A единственным образом раскладывается ортогональную и верхнетреугольную матрицы.

3 Описание численного эксперимента

Будем рассматривать плохо обусловленные матрицы (и для контрольной проверки посмотрим на поведение обратной матрицы Гильберта, являющаяся плохо обусловленной).

Пусть $e = (1, \ ... \ , 1)^T$. Вычисляем $b = He$ и будем решать систему $Hx = b$ с помощью LU и QR разложений.

LU – разложение: сначала решаем $Ly = b$, после чего решаем $Ux = y$.

QR – разложение: решаем $Rx = Q^T b$.

По итогу рассматриваем погрешность между решением системы и заранее заданным решением e.

Подбирать параметр регуляризации α будем, начиная с малых значений, увеличиваяя до тех пор, пока обусловленность системы не станет приемлемой.

Так же берем в учет, что с увеличением α решение системы будет сильнее расходиться с исходным. Однако при этом само решение будет вычисляться устойчивее.

4 Тесты

4.1 Тест 1

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon = 1e-20$$
$$b = (2, 1)$$

Обусловленность cond(H) $= 7.4e+16$. Норма погрешности для LU ∞ , для QR $7.1e+15$ (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением $d = 7.12e$+14 достигается при $\alpha = 9.9e$-16 . При решении LU – разложением наименьшая погрешность $d = 7.19e$+14 достигается при $\alpha = 9.9e$-16.

4.2 Тест 2

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 3+\varepsilon & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2+\varepsilon & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \varepsilon = 1e-20$$
$$b = (4, 3, 2, 1)$$

Обусловленность cond(H) $= 2.5e+16$. Норма погрешности для LU $7.8e+15$, для QR $1.8e+16$ (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением $d = 6.7e$+14 достигается при $\alpha = 9.9e$-16 . При решении LU – разложением наименьшая погрешность $d = 6.2e$+14 достигается при $\alpha = 1e$-15.

4.3 Тест 3

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{pmatrix}$$
$$b = (4, 7.999)$$

Обусловленность cond(H) $= 2.49e+05$. Норма погрешности для LU 1 , для QR тоже 1 (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением d $=$ 1 достигается при $\alpha = 2.22e$-16. При решении LU – разложением наименьшая погрешность d $=$ 1 достигается при $\alpha = 1e$-15.

4.4 Тест 4

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = (-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1)$$

Обусловленность cond(H) $= 2.8e+06$. Норма погрешности для LU $1.005e+05$, для QR тоже $1.005e+05$ (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении и QR, и LU – разложением $d = 1.005e+05$ достигается при $\alpha = 9.9e$-16.

4.5 Тест 5

Обратная матрица Гильберта размерностью 7×7 имеет число обусловленности $4.7e+08$. Норма погрешности для LU $2.5e-09$, для QR $3.2e-09$ (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α

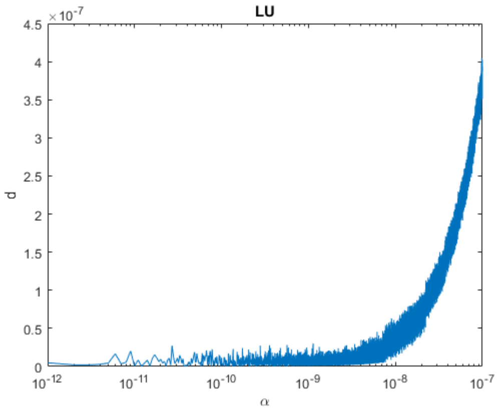

Рис. 1: Зависимость погрешности от α

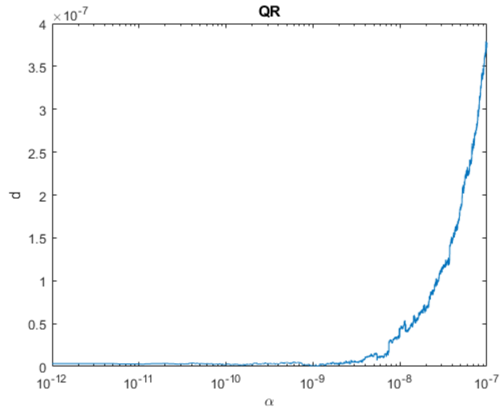

Рис. 2: Зависимость погрешности от α

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением $d = 4e$-1 достигается при $\alpha = 5.30e$-11 . При решении LU – разложением наименьшая погрешность $d =$ 1-10 достигается при $\alpha = 1.6e$-10.

5 Вывод

Первичные погрешности, полученные до введения параметра регуляризации, очень велики для LU и QR разложений. После введения параметра регуляризации задача становится лучше обусловлена и получается очень близкое решение - погрешность порядка 1e-5 при использовании LU и QR разложения.