Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №6

Численные методы решения краевой задачи для ОДУ второго порядка

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

Санкт - Петербург
2021

1 Предисловие

Математическое моделирование задач механики, физики и других отраслей науки и техники сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. Для таких задач граничные условия задаются в двух точках, а дифференциальные уравнения часто нелинейны, так что получить аналитическое решение не удается. Поэтому для отыскания решения необходимо использовать численные методы.

2 Постановка задачи

Будем решать ОДУ второго порядка сеточным методом. Для определённости возьмём уравнение струны

$$u_{xx}(x) + q(x) \cdot u_x(x) + r(x) \cdot u(x) = f(x) \tag{1}$$

и следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u(a) - \alpha_2 \cdot u'(a) = \alpha_3, \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 \cdot u(b) + \beta_2 \cdot u'(b) = \beta_3, \ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \ \beta_1 \cdot \beta_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Имеется ряд дополнительных условий: $q, r, f \in C^2[a, b], \ r(x) \geq m > 0, \ h \cdot \underset{x \in [a,b]}{max} |q(x)| \leqslant 2$
Эти ограничения обеспечивают существование разностного решения и малую отличимость его от точного решения. Такие условия не являются необходимыми, и разностное решение может существовать и сходится к точному даже при нарушении этих условий.

3 Сеточный метод

Рассмотрим равномерную сетку $x_n = a + n \cdot h, 0 \leq n \leq N$. Заменяем производные в исходном уравнении с помощью симметричных разностных схем и получаем следующий вид

$$\frac{1}{h^2}(u_{n+1} - 2 \cdot u_n + u_{n-1}) + \frac{q_n}{2 \cdot h}(u_{n+1} - u_{n-1}) - r_n \cdot u_n = f_n, \ n = 1, \ ..., \ N - 1 \tag{3}$$

Здесь q_n, r_n, f_n — значения соответствующих функций в точке x_n.

Так как данные соотношения можно записать только для внутренних узлов сетки, имеем $N - 1$ уравнение с $N + 1$ неизвестной. Дополним эту систему граничными условиями (2), в которых первую производную будем заменять следующими разностными формулами:

$$\begin{aligned} u'_0 &\approx (-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{1}{2}u_2)/h \\ u'_N &\approx (\frac{3}{2}u_N - 2u_{N-1} + \frac{1}{2}u_{N-2})/h \end{aligned} \tag{4}$$

После этого составим матрицу A с помощью (3) и проведенные через краевые условия (4). Компоненты полученной матрицы – коэффициенты перед соответствующим u_i. Тогда для нахождения решения нужно решить систему $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = (\alpha_3, f_1, ...f_{N-1}, \beta_3)^T$.

4 Описание численного эксперимента

Начнём вычисление на грубой сетке из 10 интервалов, затем методом Ричардсона будем сгущать сетку до необходимой точности. Будем отслеживать количество итераций (далее iter для краткости) и посмотрим на графики численного (и в последнем тесте - на график точного) решения. А так же посмотрим на погрешность (далее - d) решений.

Для всех тестов зададим единую точность 1e-6.

5 Тесты

5.1 Тест 1

Рассмотрим уравнение

$$u'' + log(x+3)e^{-x/2}u' + (e^x(x+1) - 1)u = cos(x/2)(x^2+1)$$

краевые условия

$$u(0) + u'(0) = -5; \quad 2u(1) + 5u'(1) = 0$$

Итак, имеем: iter=9; $\quad d = 5.09e - 07;$

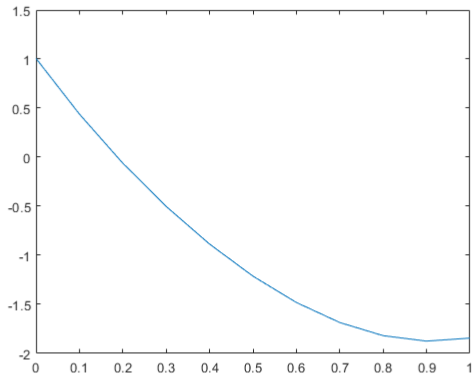

Рис. 1: График численного решения

5.2 Тест 2

Рассмотрим уравнение

$$u'' - \frac{cos(x)}{x+1}u' + (x-2)u = x+1$$

краевые условия

$$u(0) - 5u'(0) = -1; \quad 9u(1) + 10u'(1) = -1$$

Итак, имеем: iter=7; $d = 7.05e - 07$

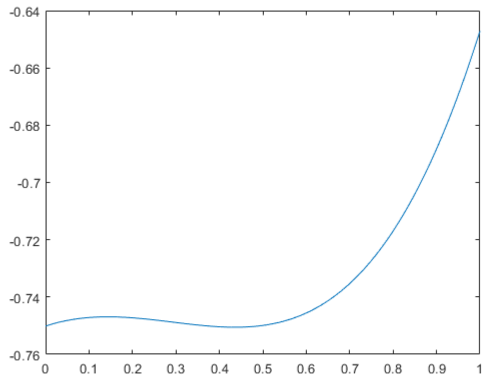

Рис. 2: График численного решения

5.3 Тест 3

Рассмотрим уравнение

$$u'' - (x+1)(x-3)u' - e^x(x-3)u = (x-2)(x-3)$$

краевые условия

$$u(-1) = u(1) = 0;$$

Итак, имеем: iter=11; $d = 4.99e - 07;$

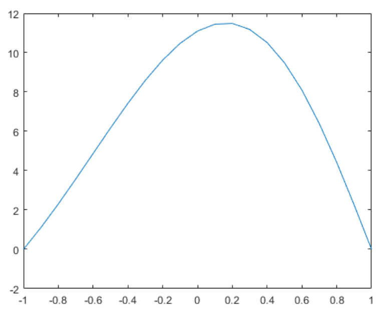

Рис. 3: График численного решения

5.4 Тест 4

Рассмотрим уравнение

$$u'' + (xsin(x) + x^2)u' - (cos(x) - xsin(x))u = (x^2 - x^3)cos(x)$$

краевые условия

$$u(0) = 1/2; \quad u'(\pi/2) = 0$$

Итак, имеем: iter=10; $d = 3.78e - 07$;

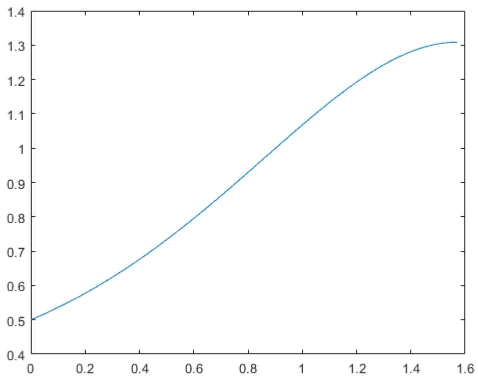

Рис. 4: График численного решения

5.5 Тест 5

Рассмотрим уравнение

$$(x+6)u'' - (\frac{1}{2}x - 1)(3x+7)u' - (3x+7)(\frac{1}{2}cos(x) + 1)u = (\frac{1}{3}x - 1)(3x+7)$$

краевые условия

$$2u(-1) - u'(-1) = 0; \quad u'(1) = 0$$

Итак, имеем: iter=8; $d = 4.15e - 07$;

Время, затраченное на точное и численное решение, составляет 5.7 и 0.8 секунд, соответственно.

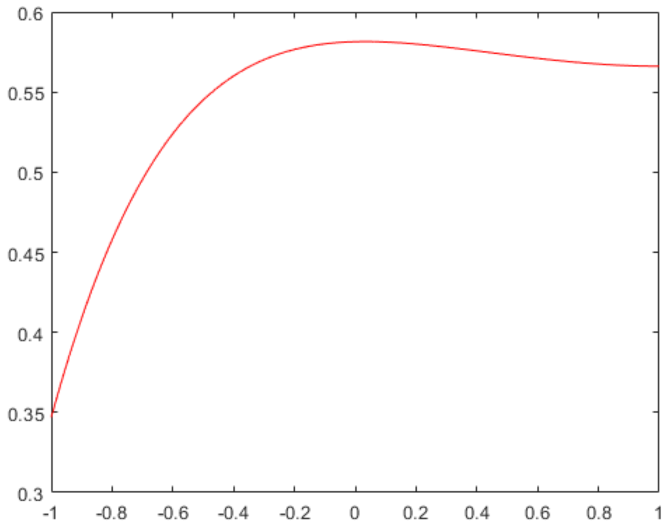

Рис. 5: График точного решения

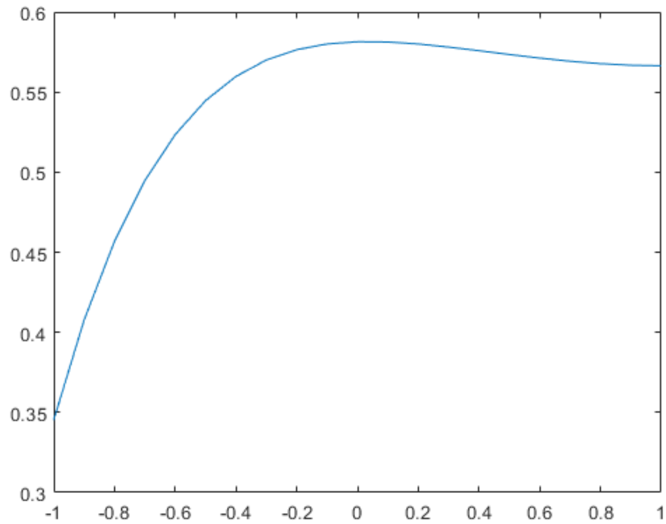

Рис. 6: График численного решения

6 Вывод

По полученным численным и графическим результатам можно заключить, что численное решение оказывается достаточно близким к точному. Следует заметить, что такая точность достигается при довольно небольших количествах итераций.