Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №3

Решение СЛАУ приближенными методами

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

Санкт - Петербург
2021

1 Предисловие

Пользоваться прямыми методами не всегда удобно, так как имеется ряд недостатков: необходимость хранения в оперативной памяти значительных объемов данных, а так же накапливание погрешностей в процессе решения, что особенно опасно для больших и плохо обусловленных систем, весьма чувствительных к погрешностям. В таких случаях используют приближенные методы. Их удобство заключается в том, что они требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с n компонентами, что значительно разгружает память, к тому же погрешности окончательных результатов не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется результатами предыдущей итерации и практически не зависти от ранее выполненных вычислений.

2 Постановка задачи

Решаем СЛАУ $Ax = b$. Для этого воспользуемся методом простой итерации и методом Зейделя.

Для начала необходимо свести исходную систему к эквивалентному виду $x = H\,x + g$ и выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

2.1 Метод простой итерации

Расчетная формула имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \tag{1}$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: спектральный радиус матрицы H (максимальный из модулей собсвтенных чисел) меньше единицы. Простота метода простой итерации делает его привлекательным, однако не следует забывать, что и этому методу присущи недостатки, так как он не всегда обеспечивает сходимость. Поэтому для любой программы, в которой используется этот алгоритм, необходимо предусматривать контроль сходимости и прекращать счет, если сходимость не обеспечивается. Сходимость же всегда можно обеспечить выполнением условия устойчивости. Метод простой итерации обладает наибольшей экономичностью по затратам машинного времени на одну итерацию и оперативной памяти ЭВМ в сравнении с другими методами. Однако эффективность его зависит от обусловленности системы алгебраических уравнений. При плохой обусловленности необходимо применять различные способы ускорения сходимости итераций. Достоинством метода простой итерации является возможность решения с его помощью различного рода нелинейных задач, возникающих в теории резонаторов и приводящих к нелинейным интегральным уравнениям.

2.2 Метод Зейделя

Матрицу H представим в виде $H = H_L + H_R$, где

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда имеем расчетную формулу метода Зейделя

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g \tag{3}$$

Здесь достаточным условием сходимости является $||H||_\infty < 1$, где $||H||_\infty$ — максимальный элемент матрицы H.

Заметим, что Метод Зейделя сходится быстрее и может сходиться даже в том случае, если расходится метод простых итераций.

2.2.1 Переход от $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ к $\mathbf{x} = \mathbf{Hx} + \mathbf{g}$

Если матрица A имеет диагональное преобладание, то:

$$H = E - D^{-1}A, g = D^{-1}b$$

где D – диагональная матрица, у которой на диагонали стоят диагональные элементы матрицы A.

3 Описание численного эксперимента

Зададим СЛАУ и будем выяснять, сколько итераций потребуется методам для достижения заданной точности.

4 Тесты

4.1 Тест 1

Рассмотрим на матрицу с диагональным преобладанием:

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 50 & 0 & -4 \\ -9 & 4 & 64 & 0 \\ 0 & -14 & 7 & 80 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ -5 \\ 14 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Выберем точность $1e^{-9}$. Метод простой итерации достигает точности за 16 итераций. Метод Зейделя – за 9.

4.2 Тест 2

А теперь на матрицу A и вектор b вида:

$$A = \begin{pmatrix} 2000 & 0 & 0.3 \\ 1 & 400 & 0.1 \\ 0 & -1000 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Выберем точность $1e^{-9}$. Метод простой итерации достигает точности за 18 итераций. Метод Зейделя – за 11.

4.3 Тест 3

В этом тесте берем матрицу A и вектор b следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 11100 & 0.03 \\ -1 & 106000 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Выберем точность $1e^{-9}$. В этом случае и метод простой итерации, и метод Зейделя достигают точности за 2 итерации.

4.4 Тест 4

Рассмотрим на матрицу A и вектор b следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выберем точность $1e^{-9}$. Метод простой итерации достигает точности за 29 итераций. Метод Зейделя – за 15.

4.5 Тест 5

Имеем :

$$A = \begin{pmatrix} 6.001 & 4 \\ 5.99 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Здесь $\varepsilon = 0.001$. Метод простой итерации достигает точности за 20 итераций. Метод Зейделя – за 11.

4.6 Тест 6

И последний интересный пример, показывающий, что могут быть и матрицы, для которых спектральный радиус больше единицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Где $\varepsilon = 0.001$. Метод простой итерации достигает точности за 15 итераций. Для метода Зейделя не выполняется условие сходимости.

5 Вывод

Оба алгоритма в одинаковых задачах сходятся к ответу. Важное преимущество итерационных методов в отличии от точных методов - решение можно получить с заданной наперёд точностью. Важным минусом является то, что методы могут разойтись.