

Санкт - Петербургский государственный университет  
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №7

**Проекционные методы решения краевой задачи для ОДУ  
второго порядка**

Выполнил: Розыков Б.  
451 группа

# 1 Предисловие

Иногда при постановке краевых задач математической физики бывает удобнее использовать не дифференциальные, а интегральные уравнения, и формулировать задачу как задачу о поиске минимума некоторого функционала. Такой подход, в частности, позволяет формулировать обобщенные постановки задач, в которых от решения требуется меньшая гладкость, чем при использовании дифференциальных уравнений. В соответствие краевым задачам математической физики можно ставить задачи о поиске минимума функционала. Этот минимум можно приближенно найти на некотором конечномерном множестве функций.

## 2 Постановка задачи

Будем решать проекционными методами Ритца и методом коллокаций ОДУ второго порядка с однородными граничными условиями. Общий вид рассматриваемой задачи

$$Lu = f(x) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u(a) - \alpha_2 \cdot u'(a) = \alpha_3, & |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 \cdot u(b) + \beta_2 \cdot u'(b) = \beta_3, & |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \cdot \beta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Применение любого проекционного метода заключается в выборе л.н.з. система функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ . Такая система называется координатной, а приближенное решение ищется в виде линейной комбинации этих функций

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \quad (3)$$

Коэффициенты разложения  $c_i$  являются решением линейной системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Компоненты  $a_{ij}$  матрицы  $A$  и  $f_i$  вектора  $F$  задаются непосредственно используемым проекционным методом.

## 3 Метод Ритца

Основная идея заключается в переходе от решения краевой задачи к решению вариационной задачи приближенными методами. Как было заявлено выше: решение будем искать в виде линейной комбинации конечного числа координатных функций

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \quad (5)$$

Не забываем про краевые условия. Рассмотрим их в следующем виде

$$u(a) = u_a, u(b) = u_b \quad (6)$$

Поэтому положим, что

$$\varphi_0(a) = 1, \varphi_i(a) = 0, i \geq 1 \quad \varphi_n(b) = 1, \varphi_i(b) = 0, i \leq n-1 \quad (7)$$

В таком случае  $c_0 = u_a$ ,  $c_n = u_b$ . Теперь задача заключается в том, чтобы из множества допустимых экстремалей выбрать те, что удовлетворяют заявленным краевым условиям, а так же условиям минимума. Поставленная задача решается при помощи первой вариации функционала (необходимое условие экстремума)

$$\frac{\partial}{\partial c_i} L \left( \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (8)$$

Таким образом, если, например, рассмотреть следующий функционал

$$L(u) = \frac{1}{2} \int_a^b (k(u')^2 + qu^2) dx - \int_a^b f u dx \quad (9)$$

то система принимает вид

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j(x) = d_i, i = 1, \dots, n-1 \quad c_0 = u_a, c_n = u_b, \quad (10)$$

где

$$a_{ij} = \int_a^b (k \varphi'_i \varphi'_j + q \varphi_i \varphi_j) dx, \quad d_i = \int_a^b f \varphi_i dx \quad (11)$$

Стоит отметить, что в этом методе получаемая функция  $u^n$  определена на всем промежутке  $[a, b]$  (в сеточных методах определяли только в узлах сетки). Но за это есть своя плата – матрица в общем случае будет плотной и может быть плохо обусловленной.

## 4 Метод коллокаций

Метод требует, чтобы невязка  $L(u) - f(x)$  обращалась в ноль в некоторых точках исследуемого промежутка  $[a, b]$ , так же естественное требование – координатные функции удовлетворяют краевым условиям.

Выбираем узлы коллокаций

$$a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b \quad (12)$$

Тогда система принимает вид

$$\sum_{j=1}^n L(\varphi_j)|_{x=t_i} c_j = f(t_i), i = 0, 1, \dots, n \quad (13)$$

В качестве узлов коллокации удобно брать узлы многочлена Чебышева первого рода. В качестве координатной системы – ортогональные многочлены Якоби.

## 5 Описание численного эксперимента

Рассмотрим краевую задачу ОДУ. Будем строить решения точным методом, а затем сравнивать с решениями, полученными проекционными методами. Оценим полученные погрешности (максимальные) для методов Рунге и коллокаций (обозначим их через  $d_r$  и  $d_c$ ).

## 6 Тест

### 6.1 Тест 1

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$x \sin(x) u'' + x \cos(x) u' - \cos(x) u = -\log(x+2) + \frac{3x^2 + 7x + 2(x+2)\log(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$u(-1) = u(1) = 0$$

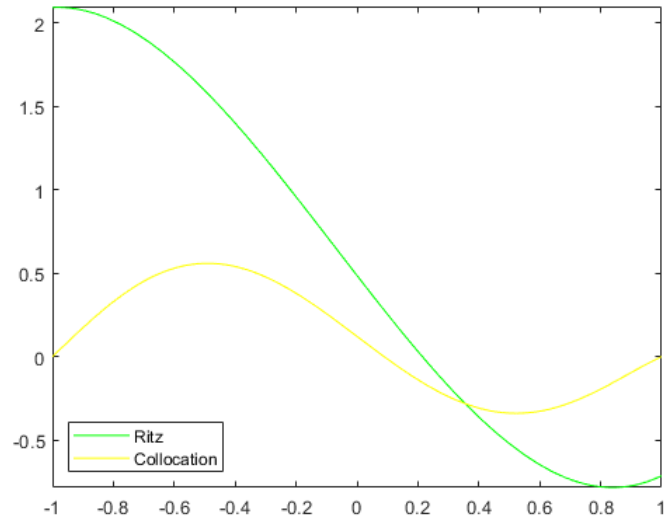


Рис. 1: Графики численного решения

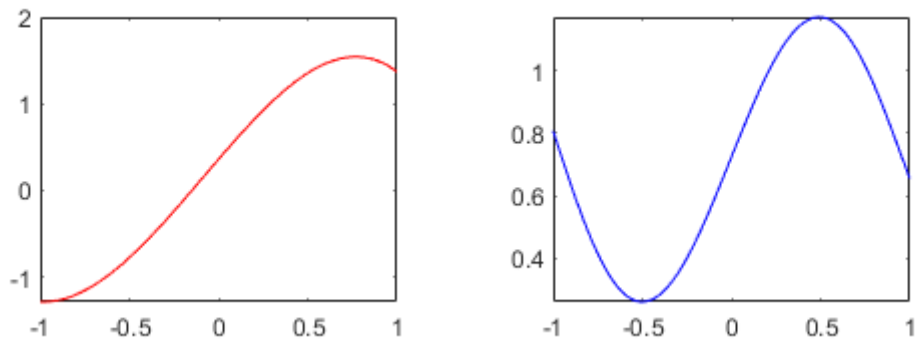


Рис. 2: Графики для погрешностей

Имеем  $d_r = 1.5$  и  $d_c = 1.1$

## 6.2 Тест 2

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-(e^{x^2} \frac{x-5}{x+4} u')' + (x^3 - 1) \sin(x) u = x^3 - x^2 \sin(x) + x$$

$$u'(-1) = u(1) = 0$$

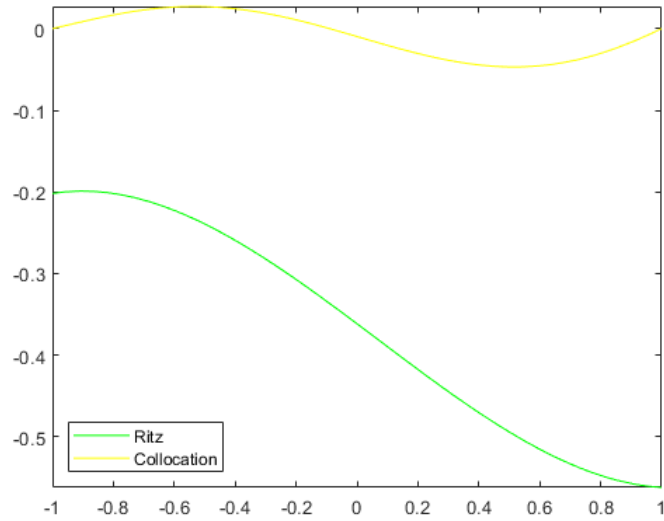


Рис. 3: Графики численного решения

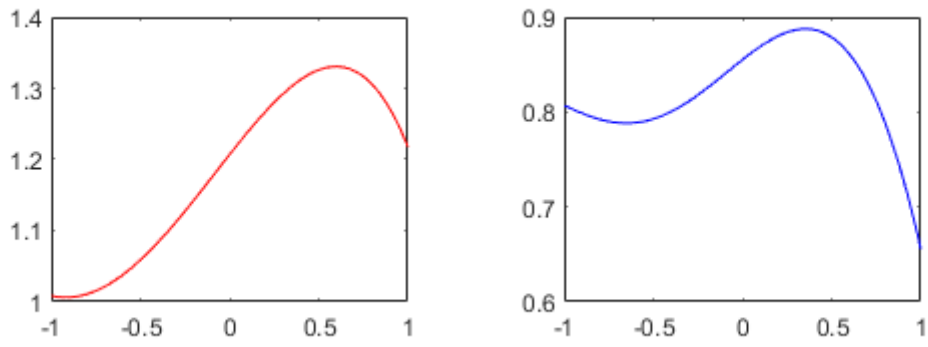


Рис. 4: Графики для погрешностей

Имеем  $d_r = 1.3$  и  $d_c = 0.8$

### 6.3 Тест 3

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-\left(\frac{2}{2+x}u'\right)' + \cos\left(\frac{x}{2}\right)u = \frac{1}{2}x + 1$$

$$u(-1) + u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0$$

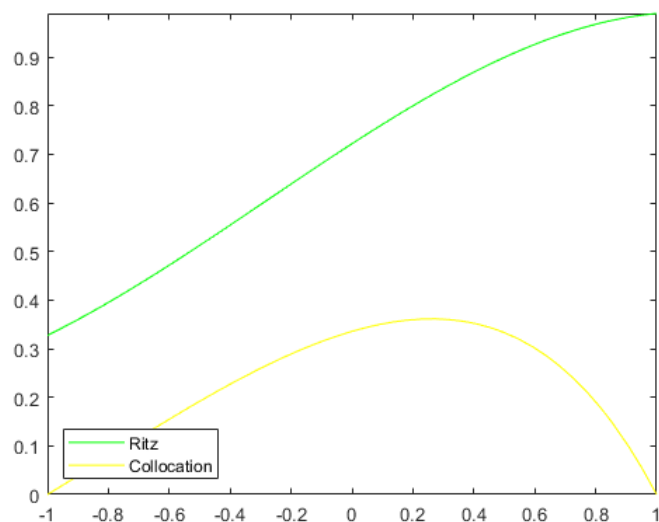


Рис. 5: Графики численного решения

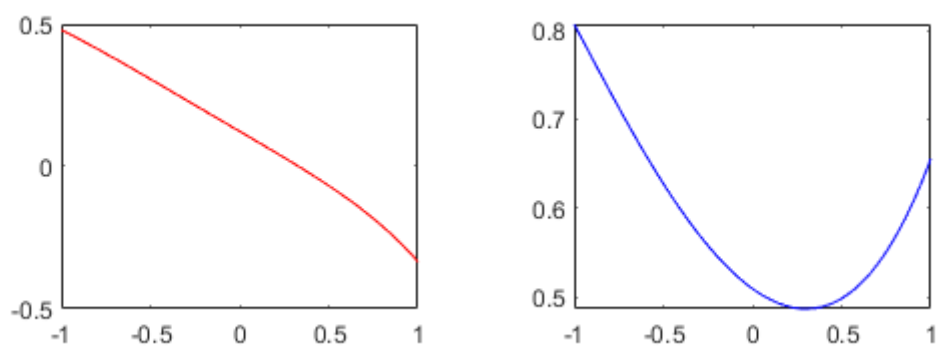


Рис. 6: Графики для погрешностей

Имеем  $d_r = 0.4$  и  $d_c = 0.8$

## 6.4 Тест 4

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-\left(\frac{x}{(x^2 + 1)^2}u'\right)' + \frac{e^{-x}}{(x + 1)^{3/2}}u = \frac{\log(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0$$

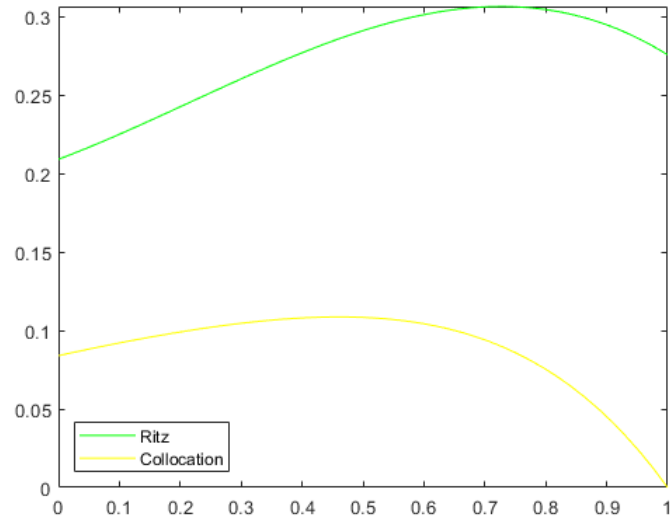


Рис. 7: Графики численного решения

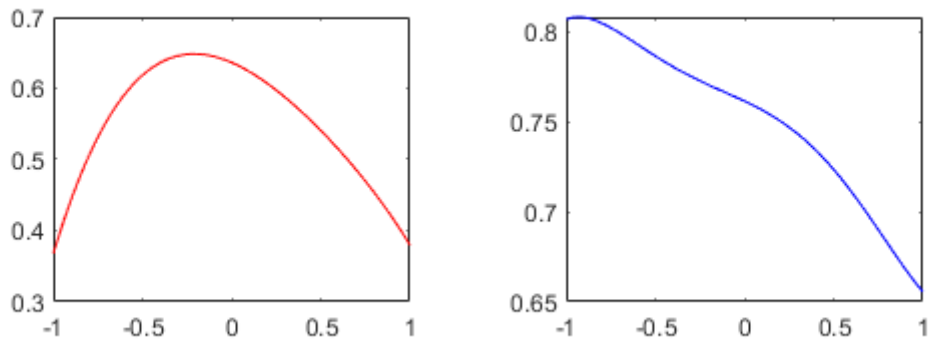


Рис. 8: Графики для погрешностей

Имеем  $d_r = 0.6$  и  $d_c = 0.8$

## 6.5 Тест 5

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-\left(\frac{1}{1+x}u'\right)' + e^x u = \frac{3x^2 - 6x - 1}{(x+1)^2} + (x^3 + x + 2)e^x$$

$$10u(1) + u'(1) = 0, \quad 2u(5) + u'(5) = 0$$



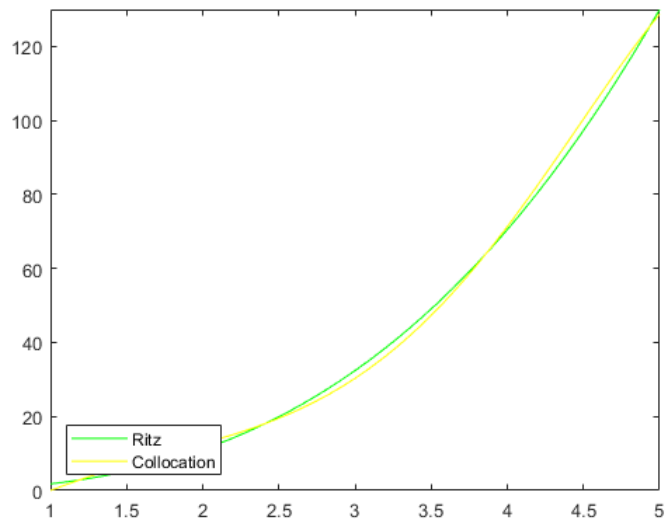


Рис. 9: Графики численного решения

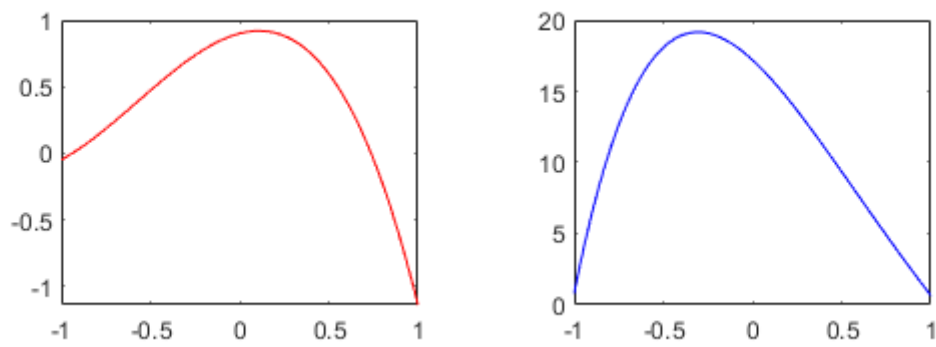


Рис. 10: Графики для погрешностей

Имеем  $d_r = 1.1$  и  $d_c = 19.1$

## 7 Вывод

По полученным графическим результатам можно заключить, что решение, полученное проекционными методами, оказывается достаточно близким к точному решению.