

Санкт - Петербургский государственный университет  
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №1

**Решение дифференциальных уравнений жестких систем с  
контролем точности**

Выполнил: Розыков Б.  
451 группа

# 1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = AY, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$ , они различны, и им соответствуют собственные векторы  $U_1, \dots, U_n$ . В таком случае общее решение системы имеет следующий вид

$$Y(t) = C_1 U_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n U_n e^{\lambda_n t}. \quad (2)$$

Система называется жёсткой, если выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (-\operatorname{Re}(\lambda_i))}{\min_{1 \leq i \leq n} (-\operatorname{Re}(\lambda_i))} \gg 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Решим задачу, используя некоторые рассмотренные ниже методы.

## 1.1 Обратный метод Эйлера

Расчетная формула метода

$$Y_{i+1}(E - hA)^{-1} Y_i \quad (4)$$

Если обозначить  $W = (E - hA)^{-1}$ , то

$$\lambda_i(W) = \frac{1}{(1 - h\lambda_i(A))} \quad (5)$$

$|\lambda_i(W)| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то есть метод устойчив при любых  $h$ . Теоретический порядок точности 2.

## 1.2 Метод Адамса

Экстраполяционный метод Адамса второго порядка

$$Y_{i+1} = \left(1 + \frac{3hA}{2}\right) Y_i - \frac{hA}{2} Y_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для нахождения  $Y_1$  будем использовать обратный метод Эйлера. Сам метод Адамса в используемой форме является устойчивым при  $h < \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}$ .

## 1.3 Метод Рунге – Кутты

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ где}$$
$$\begin{aligned} k_1 &= hAY_i & k_2 &= hA(Y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hA(Y_i + \frac{k_2}{2}) & k_4 &= hA(Y_i + k_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Функция устойчивости:  $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$ , где  $z = h \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ . Метод является устойчивым при  $h < \frac{2.78}{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}$ . Теоретический порядок точности 4.

## 2 Описание численного эксперимента

Будем решать поставленную задачу, делая глобальное сгущение сетки для гарантий оценки погрешности расчета. Пользуемся методом Рунге-Кутты.

- Строим последовательность равномерных сеток с шагами  $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \dots$
- Решаем задачу Коши по выбранной схеме на каждой сетке
- Рассматриваем решение на двух соседних сетках  $v_1(t), v_2(t)$

Оценка погрешности по правилу Рунге-Кутты:  $\Delta(t) = \frac{v_2(t) - v_1(t)}{2^p - 1}$ ,  $p$  — теоретический порядок точности численного метода. Однако проведение анализа погрешности в каждом узле нецелесообразно. Возьмем норму погрешности для  $N$  узлов сетки.

$$\|\Delta\|_C = \max_{1 \leq n \leq N} |\Delta(t_n)| \quad (8)$$

Итоговая погрешность  $d$  относится к неуточненному решению, поэтому уточняем последнее решение, уменьшив сетку еще раз, и получаем ответ с полученной до этого погрешностью  $d$ .

## 3 Тесты

### 3.1 Тест 1

Первый пример возьмем из книги Пакулиной:

$$A = \begin{pmatrix} -125 & 123.3 \\ 123.3 & -123 \end{pmatrix}, \quad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

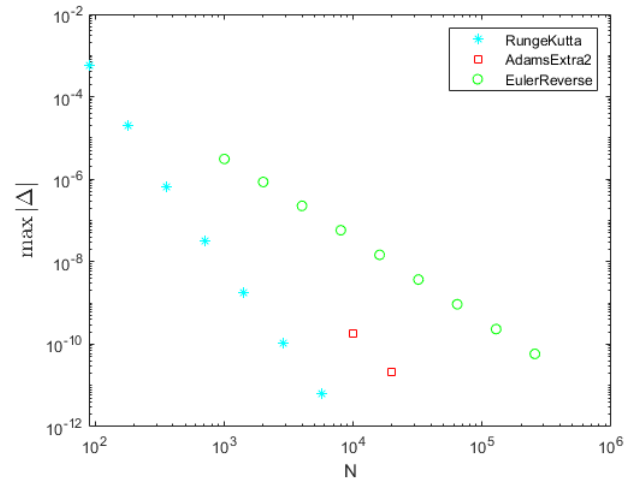


Рис. 1: Зависимость  $\|\Delta\|_C$  от  $N$  в масштабе  $\log_{10}$

## 3.2 Тест 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -28 & 0 \\ 28 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

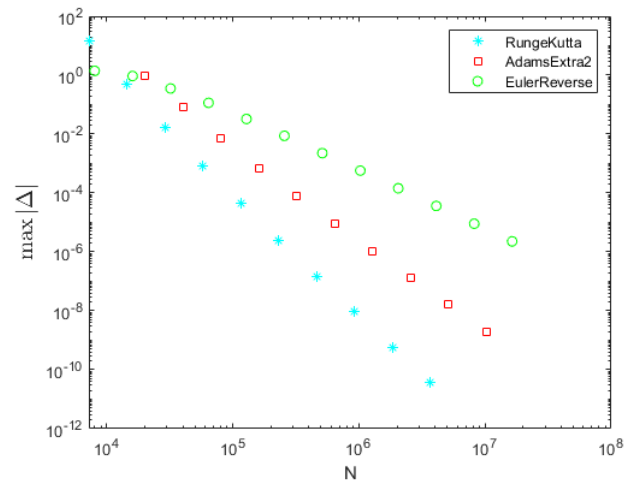


Рис. 2: Зависимость  $\|\Delta\|_C$  от  $N$  в масштабе  $\log_{10}$

## 3.3 Тест 3

Этот пример был взят из учебника Калиткина:

$$A = \begin{pmatrix} -10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10001 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -10002 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -10002 & 2 & 100 & 900 & 1000 \\ -10002 & 2 & -900 & 2000 & -1100 \end{pmatrix}, \quad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \\ 101 \\ 201 \\ 201 \end{pmatrix}$$

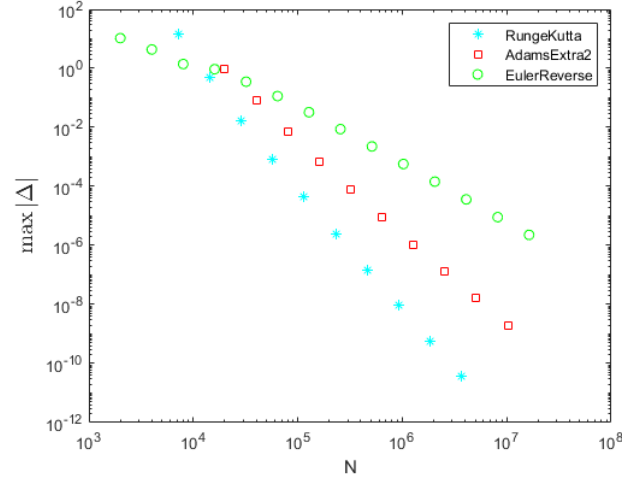


Рис. 3: Зависимость  $||\Delta||_C$  от  $N$  в масштабе  $\log_{10}$

Это жесткоосциллирующая система ( $\lambda_{min} = -10000$ ) и явный метод (метод Рунге-Кутты) перестает на ней работать (получаются слишком большие числа).

### 3.4 Тест 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -10000 \end{pmatrix}, \quad Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

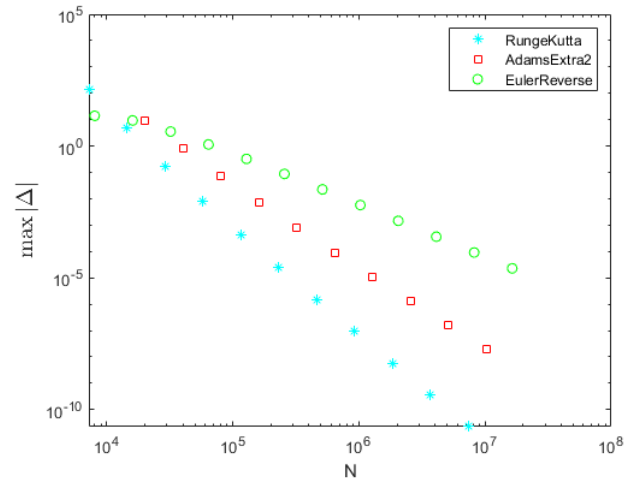


Рис. 4: Зависимость  $\|\Delta\|_C$  от  $N$  в масштабе  $\log_{10}$

## Вывод

При углублении сеток во всех тестах погрешность становится меньше. Явные методы (м.Р–К) плохо работают на жестких задачах – либо резко увеличивается ошибка, либо увеличивается сложность вычислений, поэтому для таких задач рационально использовать неявные методы (Адамса и Эйлера). Помимо того, что метод Рунге-Кутты достигает наименьшей погрешности, выполнение метода происходит значительно быстрее.