Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №6

Численные методы решения краевой задачи для ОДУ второго порядка

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

Санкт - Петербург
2021

1 Предисловие

Математическое моделирование задач механики, физики и других отраслей науки и техники сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. Для таких задач граничные условия задаются в двух точках, а дифференциальные уравнения часто нелинейны, так что получить аналитическое решение не удается. Поэтому для отыскания решения необходимо использовать численные методы.

2 Постановка задачи

Будем решать ОДУ второго порядка сеточным методом. Для определённости возьмём уравнение струны

$$u_{xx}(x) + q(x) \cdot u_x(x) + r(x) \cdot u(x) = f(x) \tag{1}$$

и следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u(a) - \alpha_2 \cdot u'(a) = \alpha_3, \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 \cdot u(b) + \beta_2 \cdot u'(b) = \beta_3, \ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \ \beta_1 \cdot \beta_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Имеется ряд дополнительных условий: $q, r, f \in C^2[a, b], \ r(x) \geq m > 0, \ h \cdot \underset{x\in[a,b]}{max} |q(x)| \leqslant 2$
Эти ограничения обеспечивают существование разностного решения и малую отличимость его от точного решения. Такие условия не являются необходимыми, и разностное решение может существовать и сходится к точному даже при нарушении этих условий.

3 Сеточный метод

Рассмотрим равномерную сетку $x_n = a + n \cdot h, 0 \leq n \leq N$. Заменяем производные в исходном уравнении с помощью симметричных разностных схем и получаем следующий вид

$$\frac{1}{h^2}(u_{n+1} - 2 \cdot u_n + u_{n-1}) + \frac{q_n}{2 \cdot h}(u_{n+1} - u_{n-1}) - r_n \cdot u_n = f_n, \ n = 1, \ ..., \ N-1 \tag{3}$$

Здесь q_n, r_n, f_n — значения соответствующих функций в точке x_n.

Так как данные соотношения можно записать только для внутренних узлов сетки, имеем $N-1$ уравнение с $N+1$ неизвестной. Дополним эту систему граничными условиями (2), в которых первую производную будем заменять следующими разностными формулами:

$$\begin{aligned} u'_0 &\approx (-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{1}{2}u_2)/h \\ u'_N &\approx (\frac{3}{2}u_N - 2u_{N-1} + \frac{1}{2}u_{N-2})/h \end{aligned} \tag{4}$$

После этого составим матрицу A с помощью (3) и проведенные через краевые условия (4). Компоненты полученной матрицы – коэффициенты перед соответствующим u_i. Тогда для нахождения решения нужно решить систему $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = (\alpha_3, f_1, ...f_{N-1}, \beta_3)^T$.

4 Описание численного эксперимента

Начнём вычисление на грубой сетке из 10 интервалов, затем методом Ричардсона будем сгущать сетку до необходимой точности. Будем отслеживать количество итераций и посмотрим на графики точного и численного решения. А так же посмотрим на погрешность решений.

Для всех тестов зададим единую точность 1e-6.

5 Тесты

5.1 Тест 1

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}\, u(t) - \left(\frac{t}{2} + 1\right)(t-3)\,\frac{d}{dt}\, u(t) - \mathrm{e}^{t/2}\, u(t)\,(t-3) = (t-2)(t-3)$$

краевые условия

$$u(-1) = 0,\ \ u(1) = 0$$

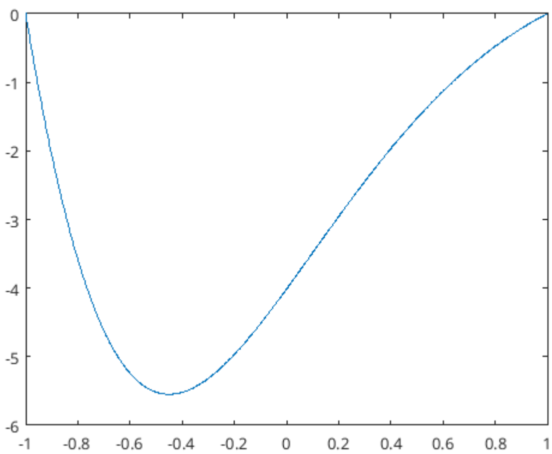

Рис. 1: Точное решение

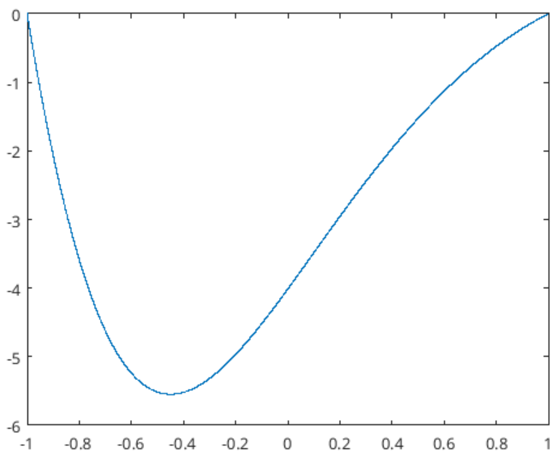

Рис. 2: Численное решение

Количество итераций равно 11, а погрешность равна 2.92e-7

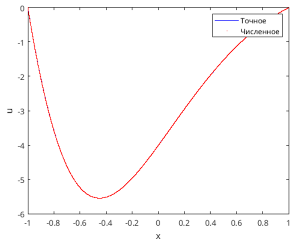

Рис. 3: На одном графике

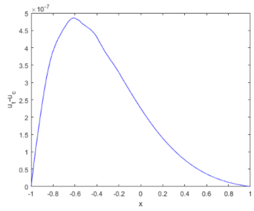

Рис. 4: Отклонение численного решения от точного

5.2 Тест 2

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,u\,(t) - \frac{u\,(t)\,\left(2\,t+5\right)\left(\mathrm{e}^{t/2}+1\right)}{t+4} - \frac{\left(\frac{t}{2}+1\right)\left(2\,t+5\right)\frac{d}{dt}\,u\,(t)}{t+4} = -\frac{\left(2\,t+5\right)\left(t+2\right)}{t+4}$$

с краевыми условиями:

$$\frac{u\,(-1)}{2} - \left(\left(\frac{d}{dt}\,u\,(t)\right)\bigg|_{t=-1}\right) = -\frac{1}{5},\ \frac{3\,u\,(1)}{10} + \left(\left(\frac{d}{dt}\,u\,(t)\right)\bigg|_{t=1}\right) = -\frac{3}{10}$$

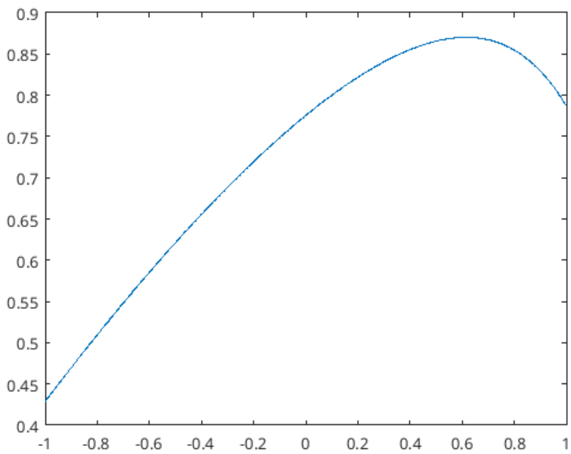

Рис. 5: Точное решение

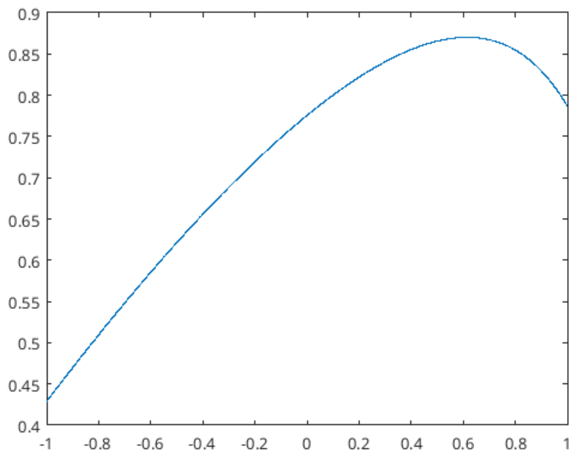

Рис. 6: Численное решение

Количество итераций равно 9, а погрешность равна 4.92e-7

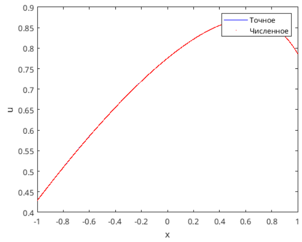

Рис. 7: На одном графике

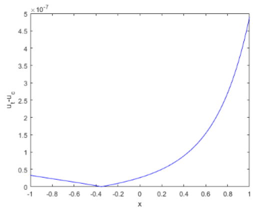

Рис. 8: Отклонение численного решения от точного

5.3 Тест 3

Решаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,u\,(t) - \frac{u\,(t)\,\left(3\,t+7\right)\left(\frac{\cos(t)}{2}+1\right)}{t+6} - \frac{\left(\frac{t}{2}-1\right)\left(3\,t+7\right)\frac{d}{dt}\,u\,(t)}{t+6} = \frac{\left(\frac{t}{3}-1\right)\left(3\,t+7\right)}{t+6}$$

с краевыми условиями:

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\,u\,(t)\right)\bigg|_{t=-1}\right) - 2\,u\,(-1) = 0,\ \left(\left(\frac{d}{dt}\,u\,(t)\right)\bigg|_{t=1}\right) = 0$$

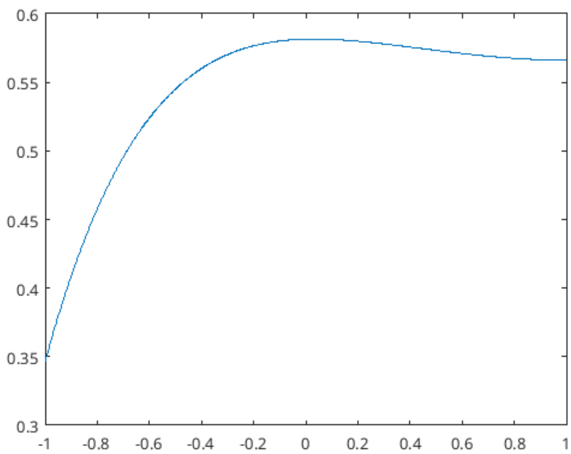

Рис. 9: Точное решение

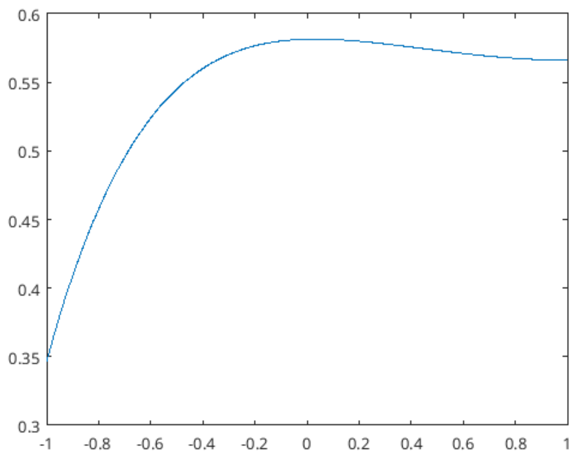

Рис. 10: Численное решение

Количество итераций равно 8, а погрешность равна 4.15e-7

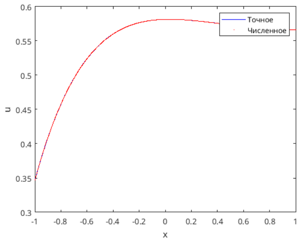

Рис. 11: На одном графике

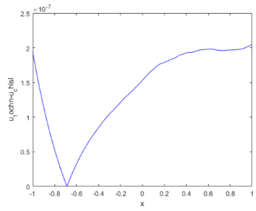

Рис. 12: Отклонение численного решения от точного

6 Вывод

По полученным численным и графическим результатам можно заключить, что численное решение оказывается достаточно близким к точному. Следует заметить, что такая точность достигается при довольно небольших количествах итераций. По результатам графиков отклонений численного решения от точного видно, что отклонения на много порядков (10^{-7}) меньше самих решений, что говорит о хорошей точности метода.