

Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №3

Решение СЛАУ приближенными методами

Выполнил: Розыков Б.
451 группа

1 Предисловие

Пользоваться прямыми методами не всегда удобно, так как имеется ряд недостатков: необходимость хранения в оперативной памяти значительных объемов данных, а так же накапливание погрешностей в процессе решения, что особенно опасно для больших и плохо обусловленных систем, весьма чувствительных к погрешностям. В таких случаях используют приближенные методы. Их удобство заключается в том, что они требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с n компонентами, что значительно разгружает память, к тому же погрешности окончательных результатов не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется результатами предыдущей итерации и практически не зависит от ранее выполненных вычислений.

2 Постановка задачи

Решаем СЛАУ $Ax = b$. Для этого воспользуемся методом простой итерации и методом Зейделя.

Для начала необходимо свести исходную систему к эквивалентному виду $x = Hx + g$ и выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

2.1 Метод простой итерации

Расчетная формула имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \quad (1)$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: спектральный радиус матрицы H (максимальный из модулей собственных чисел) меньше единицы.

2.2 Метод Зейделя

Матрицу H представим в виде $H = H_L + H_R$, где

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда имеем расчетную формулу метода Зейделя

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g \quad (3)$$

Здесь достаточным условием сходимости является $\|H\|_\infty < 1$, где $\|H\|_\infty$ — максимальный элемент матрицы H .

Заметим, что Метод Зейделя сходится быстрее и может сходиться даже в том случае, если расходится метод простых итераций.

3 Описание численного эксперимента

Зададим СЛАУ и будем выяснять, сколько итераций потребуется методам для достижения заданной точности.

4 Тесты

4.1 Тест 1

Рассмотрим матрицу с диагональным преобладанием

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 50 & 0 & -4 \\ -9 & 4 & 64 & 0 \\ 0 & -14 & 7 & 80 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ -5 \\ 14 \\ 29 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Выберем точность $1e^{-10}$. Метод простой итерации достигает точности за 18 итераций. Метод Зейделя – за 10.

4.2 Тест 2

Возьмем матрицу Гильберта размерностью 13×13 . Такая матрица в общем виде выглядит следующим образом

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$b = He$, где e единичный вектор длины 13.

Метод простой итерации не работает, так как не выполняется условие сходимости.

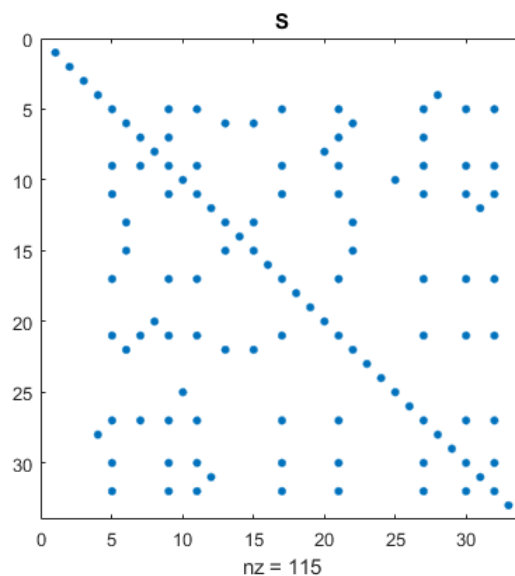
Метод Зейделя же сходится за 45551597 итераций.

4.3 Тест 3

Теперь возьмем разреженную матрицу A размерностью 33×33 , матрица симметрична и заполнена случайными значениями из промежутка $(0, 1)$. Непосредственно матрица, на которой проводилось тестирование, выглядит так

b – единичный вектор длины 33.

Точность поставим $1e^{-11}$. Результаты: метод простой итерации достигает точности за 75 шагов, метод Зейделя – за 39.



5 Вывод

По полученным данным тестов можно сделать заключение, что у метода Зейделя сходимость происходит за меньшее число шагов. К тому же, как показал тест с матрицей Гильберта, метод простой итерации охватывает меньший диапазон систем из-за более строгого необходимого условия сходимости.