Objemy a povrchy těles

June 16, 2024

1. **Povrch krychle je $520\ dm^2$. Vypočítejte objem krychle.**

   Krychle má šest stěn a každá stěna je čtverec. Pokud označíme délku hrany krychle jako a, pak plocha jedné stěny je obsah čtverce, neboli $a \cdot a = a^2$e. Povrch krychle je pak součet všech ploch krychle. Krychle má šest stěn, tudíž to je šest obsahů čtverce.

   $$P = 6 \cdot a^2 \tag{1}$$

   Úloha se nás ptá na objem. Objem krychle vypočítáme jako obsah podstavy, který je vynásobený výškou krychle. Prakticky to znamená, že vezmeme podstavu (spodní stranu), a a-krát ji položíme na sebe tak, aby vyplnila celý prostor krychle.

   $$V = a \cdot a^2 \tag{2}$$

   Co mají tyto vzorečky společné? Stranu a a práci s obsahem podstavy. Pojďme se tedy nejdříve dostat k té podstavě a straně a. Jediné, co známe ze zadání, je velikost povrchu P, takže dosadíme do rovnice.

   $$\begin{aligned} 520 &= 6 \cdot a^2 && \text{(Dosadíme)} \\ \frac{520}{6} &= a^2 && \text{(Vydělíme šesti)} \\ \sqrt{\frac{520}{6}} &= a && \text{(Odmocníme)} \end{aligned}$$

   Předpokládám, že nemáme k dispozici kalkulačku, musíme si tedy čísla upravit tak, aby se s tím dalo lépe pracovat. Nejdříve si čísla rozložíme na součin prvočísel, které pak následně pokrátíme a co půjde odmocnit tak odmocníme. Zbytek upravíme tak, aby se na to dalo dívat.

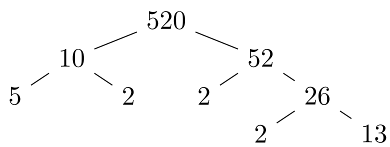

Figure 1: Rozklad čísla 520

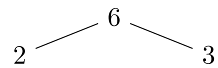

Figure 2: Rozklad čísla 6

Teď si za ty čísla v původní rovnici dosadíme jejich rozklady a pokrátíme, co jde.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{520}{6}} &= a \\
\sqrt{\frac{2^3 \cdot 5 \cdot 13}{2 \cdot 3}} &= a \\
\sqrt{\frac{2^{\cancel{3}} \cdot 5 \cdot 13}{\cancel{2} \cdot 3}} &= a \\
\sqrt{\frac{2^2 \cdot 5 \cdot 13}{3}} &= a \\
\frac{\sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 13}}{\sqrt{3}} &= a \\
\frac{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 13}}{\sqrt{3}} &= a \\
\frac{2 \cdot \sqrt{5 \cdot 13}}{\sqrt{3}} &= a \\
2 \cdot \sqrt{\frac{65}{3}} &= a \\
2 \cdot \sqrt{\frac{60}{3} + \frac{5}{3}} &= a \\
\boxed{2 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}}} &= a
\end{aligned}
$$

Máme nyní vyjádřenou stranu a - nyní můžeme dopočítat objem.

$$V = a \cdot a^2$$
$$V = a^3$$
$$V = \left(2 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}}\right)^3$$
$$V = 8 \cdot \left(\sqrt{20 + \frac{5}{3}}\right)^3$$
$$V = 8 \cdot \left(\sqrt{20 + \frac{5}{3}}\right)^3$$
$$V = 8 \cdot \left(\left(20 + \frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{1}}$$
$$V = 8 \cdot \left(20 + \frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$V = 8 \cdot \left(\left(20 + \frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{2}} \cdot \left(20 + \frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$V = 8 \cdot \left(20 + \frac{5}{3}\right) \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}}$$
$$V = \left(160 + \frac{40}{3}\right) \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}}$$
$$V = 160 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}} + \frac{40}{3}\sqrt{20 + \frac{5}{3}}$$
$$V = 160 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}} + \left(13 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}}$$
$$V = 160 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}} + 13 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{20 + \frac{5}{3}}$$
$$V = \boxed{173 \cdot \sqrt{20 + \frac{5}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{20 + \frac{5}{3}} \text{ dm}^2} \qquad \text{(Výsledek bez kalkulačky)}$$

$$V = 173 \cdot 4.655 + \frac{1}{3} \cdot 4.655 \qquad \text{(Vyčíslení s kalkulačkou)}$$
$$V = 805.315 + 1.552$$
$$V = \boxed{806,867 \text{ dm}^2}$$

2. **Vypočítekjte objem a povrch pravidelného šestibokého kolmého jehlanu ABCDEFV, znáte-li, že velikost podstavné hrany AB je 8 cm a boční hrana DV má velikost 16 cm.**

Na začátku by to chtělo vyloupat ze zadání, co vlastně za předpoklady máme a co můžeme použít při výpočtu. Takže:

- **Pravidelný** znamená, že všechny hrany podstavy jsou stejně dlouhé
- **Šestiboký** znamená, že hran v podstavě je šest.
- **Kolmý** znamená, že jeho výška je kolmá na podstavu (jehlan není zkosený do nějaké strany)
- **Jehlan** je takové těleso, u kterého se body z podstavy se sbíhají do jednoho bodu, který je od ní vzdálený o nějaké výšce.

Co z těhle vlastností je nám k užitku? No pomalu všechny. To, že je pravidelný, znamená, že nám stačí znát jednu délku hrany, abychom znali všechny. To tady máme, v zadání je hrana AB o velikosti 8 cm. Pak taky to, že je šestiboký, protože díky tomu můžeme spočítat obsah podstavy. Následně i to, že je kolmý, protože když je mezi výškou a podstavou pravý úhel, můžeme beztrestně používat pythagorovu větu k dopočítávání délek. To, že je to jehlan akorát znamená, že vzorečky budou stejné jako u hranolu (podstava dole i nahoře), akorát to bude pouze jeho jedna třetina.

Nejdříve si pojďme napsat vzorečky k tomu, co máme. Máme jednu hranu postavy a jednu boční hranu. Ta boční hrana, výška a podstava tvoří pravoúhlý trojúhelník, tudíž platí:

$$DV^2 = v^2 + r^2$$
$$v^2 = DV^2 - r^2$$

kde r je vzdálenost vrcholu šestiúhelníku od jeho středu. Máme dvě neznámé v jedné rovnici, takže by to chtělo se podívat, jestli třeba to r nejde vypočítat nějak jinak. Tím, že je v podstatě, tak můžeme použít délku strany $AB = 8cm$ a fakt, že šestiúhelník je tvořen šesti rovnoramennými trojúhelníky, které mají u svých vrcholů 60 stupňů. U obou ramen musí být úhel 60 stupňů, a trojúhelník má dohromady 180. To znamená, že vrchol u středu šestiúhelníku má taky 60 stupňů a trojúhelník je defacto rovnostraný.

Nejdříve si pojďme spočítat obsah podstavy. Toho docílíme tak, že sečteme obsah šesti trojúhelníků, ze kterého je ten šestiúhelník složen. K tomu musíme znát výšku trojúhelníku v_t, kterou zjistíme následovně:

$$
\begin{aligned}
v_t^2 &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right) \\
v_t^2 &= 64 - 16 \\
v_t &= \sqrt{48} \\
v_t &= \sqrt{2^4 \cdot 3} \\
v_t &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \\
v_t &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\
v_t &= \boxed{4 \cdot \sqrt{3}}\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Teď už stačí vypočítat obsah jednoho trojúhelníku, vynásobit ho šesti a tím dostaneme obsah podstavy.

$$
\begin{aligned}
S &= 6 \cdot \frac{a \cdot v_t}{2} \\
S &= 3 \cdot a \cdot v_t \\
S &= 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \\
S &= 96 \cdot \sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2
\end{aligned}
$$

Máme podstavu, teď potřebujeme už akorát výšku jehlanu a můžeme spočítat objem. Výšku jehlanu si můžeme dopočítat pomocí pythagorovy věty, protože známe délku boční hrany, vzdálenost od vrcholu podstavy k jejímu středu (strana jednoho trojúhelníku), a společně s výškou tvoří pravoúhlý trojúhelník. Budeme tedy počítat výšku jehlanu v_j:

$$
\begin{aligned}
DV^2 &= v_j^2 + a^2 \\
v_j^2 &= DV^2 - a^2 \\
v_j^2 &= 16^2 - 8^2 \\
v_j^2 &= 192 \\
v_j &= \sqrt{192} \\
v_j &= \sqrt{2^6 \cdot 3} \\
v_j &= 8 \cdot \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Nyní k objemu - ten vypočítáme jako objem hranolu s podstavou šestiúhelníku, který je vydělen třema.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot \sqrt{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{3}$$
$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{3}$$
$$V = 8^2 \cdot 4 \cdot 3$$
$$V = \boxed{768\text{cm}^3}$$

Teď povrch. Ten je součtem obsahů podstavy a povrch pláště. Podstavu máme, ale co ten plášť? Tam bude stejný postup jako u podstavy - vypočítat obsah jednoho trojúhelníku a vynásobit to šesti. K tomu budeme opět potřebovat výšku, ale tentokrát v plášti. Tu si označím jako v_p a spočítám jí zase přes pravý trojúhelník. Tentokrát je ovšem sevřen mezi výškou jehlanu a výškou trojúhelníku v základně.

$$v_p^2 = v_t^2 + v_j^2$$
$$v_p^2 = (4 \cdot \sqrt{3})^2 + (8 \cdot \sqrt{3})^2$$
$$v_p^2 = 4^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 3$$
$$v_p^2 = 16 \cdot 3 + 64 \cdot 3$$
$$v_p = \sqrt{240}$$
$$v_p = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$v_p = \boxed{4 \cdot \sqrt{15}}$$

A povrch pláště je tedy:

$$S_p = 6 \cdot \frac{a \cdot v_p}{2}$$
$$S_p = 3 \cdot a \cdot v_p$$
$$S_p = 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{15}$$
$$S_p = \boxed{96 \cdot \sqrt{15}}$$

Povrch celého jehlanu je tedy součet obsahu podstavy a povrchu pláště:

$$P = 96 \cdot \sqrt{3} + 96 \cdot \sqrt{15}$$
$$P = 96 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{15})$$
$$P = 538.08 \text{ cm}^2$$