РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 2

дисциплина: Вычислительные методы

Студент: Турсунов Баходурхон Азимджонович

Группа: НФИбд-03-19

МОСКВА

2021 г.

Оглавление

Постановка задачи:

1. Построить равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ из задания на $N = 10$ частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$

   * параметр N должен задаваться в одном месте в программе.

2. Рассчитать значения функции $f(x)$ из задания в узлах интерполяции: $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_N = f(x_N)$.

3. Построить интерполяционный полином Лагранжа $L_N(x)$ согласно значениям из п.1, 2.

   *полином должен быть оформлен в виде отдельной функции (или отдельного метода класса)

4. Построить равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ из задания на $M = 3N$ частей точками $a = \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_M = b$

   * параметр M должен задаваться в одном месте в программе.

5. Посчитать значения исходной функции $f(x)$ из задания и построенного в п.3 полинома Лагранжа $L_N(x)$ в точках $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_M$, полученных в п.4

   * в программе вывести таблицу данных следующего вида:

$$\begin{array}{cccc} \bar{x}_0 & f(\bar{x}_0) & L_N(\bar{x}_0) & \delta(\bar{x}_0) \\ \bar{x}_1 & f(\bar{x}_1) & L_N(\bar{x}_1) & \delta(\bar{x}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_M & f(\bar{x}_M) & L_N(\bar{x}_M) & \delta(\bar{x}_M) \end{array}$$

   где $\delta(\bar{x}_j) = \left|L_N(\bar{x}_j) - f(\bar{x}_j)\right|$ – погрешность интерполяции в точке $\bar{x}_j$.

6. Подобрать такое значение N, при котором $\max\{\delta(\bar{x}_j)\} \le 10^{-2}$, $j = \overline{0, M}$.

Индивидуальный вариант:

$$sin(2x^2 + 3x + 10) x \in [-3,3]$$

Выполнение работы:

Рассмотрим случай равностоящих значений аргумента, т.е. Величина называется шагом.

Введем также понятие конечных разностей. Пусть известны значения функций в узлах

Составим разности значений функции:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0),$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h).$$

Эти значения называются первыми разностями (или разностями первого порядка) функции.

Можно составить вторые разности функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots$$

Аналогично составляются разности порядка

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции. Например,

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \cdots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Аналогично для любого можно записать

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \cdots + (-1)^k y_0.$$

Эту формулу можно записать и для значения разности в узле

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - k y_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \cdots + (-1)^k y_i.$$

Используя конечные разности, можно определить

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^k y_0.$$

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен будем искать в следующем виде:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, т.е. . Эти условия используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N(x_0) = a_0 = y_0,$$
$$N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1,$$
$$N(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Найдем отсюда коэффициенты

$$a_0 = y_0, \ \ a_0 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Аналогично можно найти и другие коэффициенты. Общая формула имеет вид

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Подставляя эти выражения в формулу (9), получаем следующий вид интерполяционного многочлена Ньютона:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Конечные разности могут быть вычислены по формуле (7).

Формулу (10) часто записывают в другом виде. Для этого вводится переменная тогда

$$x = x_0 + th_1 \frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$
$$\frac{x - x_2}{h} = t - 2, \dots, \qquad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1.$$

С учетом этих соотношений формулу (10) можно переписать в виде

$$N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots$$
$$\dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Полученное выражение может аппроксимировать заданную функцию на всем отрезке изменения аргумента . Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов и уменьшения числа членов в (11) ограничиться случаем , т.е. использовать формулу (11) для Для других значений аргумента, например для вместо лучше взять значение . Таким образом, интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

$$N(x_i + th) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \ \dots$$

$$\dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i, \qquad i = 0, 1, \dots$$

Полученное значение называется первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед.

Код программы

```
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>

using namespace std;

double f(double x)
{
return (x*x+2) + sin(sqrt(x*x+2));
}

double Newton(double *x,double *y,int N, double x0) //реализация полинома
ньютона
{

// *x значения аргумента
// *y значения функции
// N глубина разбиения
// x0 точка для вычисления значения полинома

double P, om, result = y[0];
for (int i=1; i<=N; i++)
{
P=0;
for (int j=0; j<=i; j++)
{
om=1;
for (int k=0; k<=i; k++)
{
if (k!=j)
om=om*(x[j]-x[k]);
}
P=P+y[j]/om;
}
for (int k=0; k<i; k++)
P=P*(x0 - x[k]);
```

```
result=result+P;
}
return result;
}

int main()
{
setlocale(LC_ALL, "RUS");
int N;//начальное разбиение
double x1=-1, x2=1; // границы интервала
cout<<"Введите мелкость разбиения N";
cin>>N;
double step=(x2-x1)/N; // находим шаг для разбиения
double *x=new double[N+1]; //массив значений аргумента
double *y=new double[N+1]; //массив значений функции

for(int i=0; i<=N; i++) //заполнение массивов точными значенияи
{
x[i]=x1+i*step;
y[i]=f(x[i]);
}
int M=3*N; // новое разбиение
step=(x2-x1)/M; // вычисление нового шага
cout<<endl<<"Интерполяция по ньютону"<<endl;
cout<<endl<<" x\t\t"<<" F(x)\t\t"<<" N(x)\t\t"<<" Delta\t\t"<<endl;
for(int i=0; i<=M; i++) //вычисление полинома и вывод результатов
{
cout<<fixed<<setprecision(5)<<x1<<" \t "<<f(x1)<<" \t "<<Newton(x, y, N,
x1)<<" \t "<< abs(f(x1) - Newton(x, y, N, x1))<<endl;
x1=x1+step; //сдвиг на следующий шаг
}
return 0;
}
```

Результаты

При N=10 получаем основу для последующей интерполяции

```
Введите мелкость разбиения N10

Интерполяция по ньютону

 x               F(x)            N(x)            Delta
-1.00000         3.98703         3.98703         0.00000
-0.80000         3.63854         3.63854         0.00000
-0.60000         3.35940         3.35940         0.00000
-0.40000         3.15489         3.15489         0.00000
-0.20000         3.02986         3.02986         0.00000
-0.00000         2.98777         2.98777         0.00000
0.20000          3.02986         3.02986         0.00000
0.40000          3.15489         3.15489         0.00000
0.60000          3.35940         3.35940         0.00000
0.80000          3.63854         3.63854         0.00000
1.00000          3.98703         3.98703         0.00000
[1] + Done                       "/usr/bin/gdb" --interpreter
kgibke.fbb"
bakhodur@bakhodur-Vostro-5568:~/Рабочий стол$
```

На более мелком разбиении при M=3*N, N=10. Видим что функция очень хорошо интерполируется и получаем точное совпадение полинома с истинным значением во всех точках разбиения.

```
Введите мелкость разбиения N10

Интерполяция по ньютону

 x                F(x)             N(x)             Delta
-3.00000          0.14988          0.14988          0.00000
-2.80000          -1.00000         -2.30527         1.30527
-2.60000          -0.01204         -0.20421         0.19217
-2.40000          0.98333          0.98333          0.00000
-2.20000          0.49134          0.64120          0.14985
-2.00000          -0.53657         -0.31662         0.21995
-1.80000          -0.99644         -0.99644         0.00000
-1.60000          -0.78035         -1.02784         0.24749
-1.40000          -0.29095         -0.52720         0.23625
-1.20000          0.14427          0.14427          0.00000
-1.00000          0.41212          0.62991          0.21779
-0.80000          0.51823          0.73744          0.21921
-0.60000          0.48361          0.48361          0.00000
-0.40000          0.30008          0.04293          0.25715
-0.20000          -0.05519         -0.35689         0.30170
0.00000           -0.54402         -0.54402         0.00000
0.20000           -0.95062         -0.47527         0.47535
0.40000           -0.86561         -0.24775         0.61786
0.60000           -0.04635         -0.04635         0.00000
0.80000           0.89731          -0.04578         0.94309
1.00000           0.65029          -0.30440         0.95469
1.20000           -0.69760         -0.69760         0.00000
1.40000           -0.66654         -0.93703         0.27049
1.60000           0.87741          -0.70426         1.58168
1.80000           0.11092          0.11092          0.00000
2.00000           -0.90558         1.14011          2.04569
2.20000           0.91164          1.39843          0.48679
2.40000           -0.43106         -0.43106         0.00000
2.60000           -0.09578         -4.83869         4.74291
2.80000           0.45958          -8.79879         9.25836
3.00000           -0.64354         -0.64354         0.00000
[1] + Done                         "/usr/bin/gdb" --interpreter
wrs54w.gzh"
bakhodur@bakhodur-Vostro-5568:~/Рабочий стол$
```

Вывод

Познакомился с задачей интерполяции и освоил применение формулы Ньютона.