РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 4

дисциплина: Вычислительные методы

Студент: Турсунов Баходурхон Азимджонович

Группа: НФИбд-03-19

МОСКВА

2021 г.

Постановка задачи:

Задача Коши

1. Реализовать в программе метод Эйлера для численного решения задачи Коши, приведенной ниже:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

где функция $f(x,y)$, концы отрезка a, b и начальное значение y_0 заданы в индивидуальном варианте.

2. В программе вывести таблицу данных следующего вида:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & \tilde{y}(x_0) & y(x_0) & \delta(x_0) \\ x_1 & \tilde{y}(x_1) & y(x_1) & \delta(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & \tilde{y}(x_N) & y(x_N) & \delta(x_N) \end{array}$$

где целое число $N = 32$ определяет равномерное разбиение отрезка $[a,b]$, $\tilde{y}(x_j)$ – значение численного решения задачи Коши, полученного методом Эйлера, в узлах разбиения отрезка; $y(x_j)$ – значение аналитического решения задачи Коши в узлах разбиения отрезка; $\delta(x_j) = |\tilde{y}(x_j) - y(x_j)|$ – погрешность.

3. Определить значение N, при котором $\delta(x_j) < 10^{-2}$, $j = \overline{0,N}$.

Индивидуальный вариант:

$$y' = 2xy, y_0 = 1, a = 0, b = 1$$

Выполнение работы:

Исторически первым и наиболее простым способом численного решения задачи Коши для ОДУ первого порядка является метод Эйлера. В его основе лежит аппроксимация производной отношением конечных приращений зависимой (y) и независимой (x) переменных между узлами равномерной сетки:

$$y' = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = F(x_i, y_i)$$

где yi+1 это искомое значение функции в точке xi+1.

Если теперь преобразовать это уравнение, и учесть равномерность сетки интегрирования, то получится итерационная формула, по которой можно вычислить yi+1 , если известно yi в точке xi:

$$y_{i+1} = y_i + F(x_i, y_i)h \quad (1)$$

Сравнивая формулу Эйлера с общим выражением, полученным ранее, видно, что для приближенного вычисления интеграла в (1) в методе Эйлера используется простейшая формула интегрирования - формула прямоугольников по левому краю отрезка.

Графическая интерпретация метода Эйлера также не представляет затруднений (см. рисунок 1). Действительно, исходя из вида решаемого уравнения $y' = \frac{dy}{dx} = F(x,y)$)следует, что значение $F(x_i, y_i)$ есть значение производной функции y(x) в точке x=xi - $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}$, и, таким образом, равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции y(x) в точке x=xi.

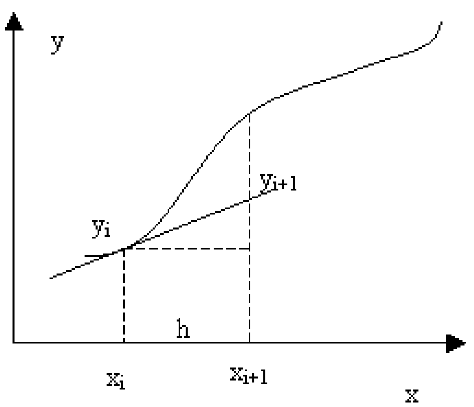


Рисунок 1. Графическая интерпретация метода Эйлера

Из прямоугольного треугольника на рисунке можно найти

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) = hF(x_i, y_i),$$

откуда и получается формула Эйлера. Таким образом, суть метода Эйлера заключается в замене функции y(x) на отрезке интегрирования прямой линией, касательной к графику в точке x=xi. Если искомая функция сильно отличается от линейной на отрезке интегрирования, то погрешность вычисления будет значительной. Ошибка метода Эйлера прямо пропорциональна шагу интегрирования. Процесс вычислений строится следующим образом. При заданных начальных условиях x0 и y0 можно вычислить

$$y_1 = y_0 + F(x_0, y_0)h \qquad x_1 = x_0 + h$$
$$y_2 = y_1 + F(x_1, y_1)h \qquad x_2 = x_1 + h$$
$$y_3 = y_2 + F(x_2, y_2)h \qquad x_3 = x_2 + h$$
……………………………………………….
$$y_N = y_{N-1} + F(x_{N-1}, y_{N-1})h \qquad x_N = x_{N-1} + h$$

Таким образом, строится таблица значений функции y(x) с определенным шагом (h) по x на отрезке [x0, xN]. Ошибка в определении значения y(xi) при этом будет тем меньше, чем меньше выбрана длина шага h (что определяется точностью формулы интегрирования).

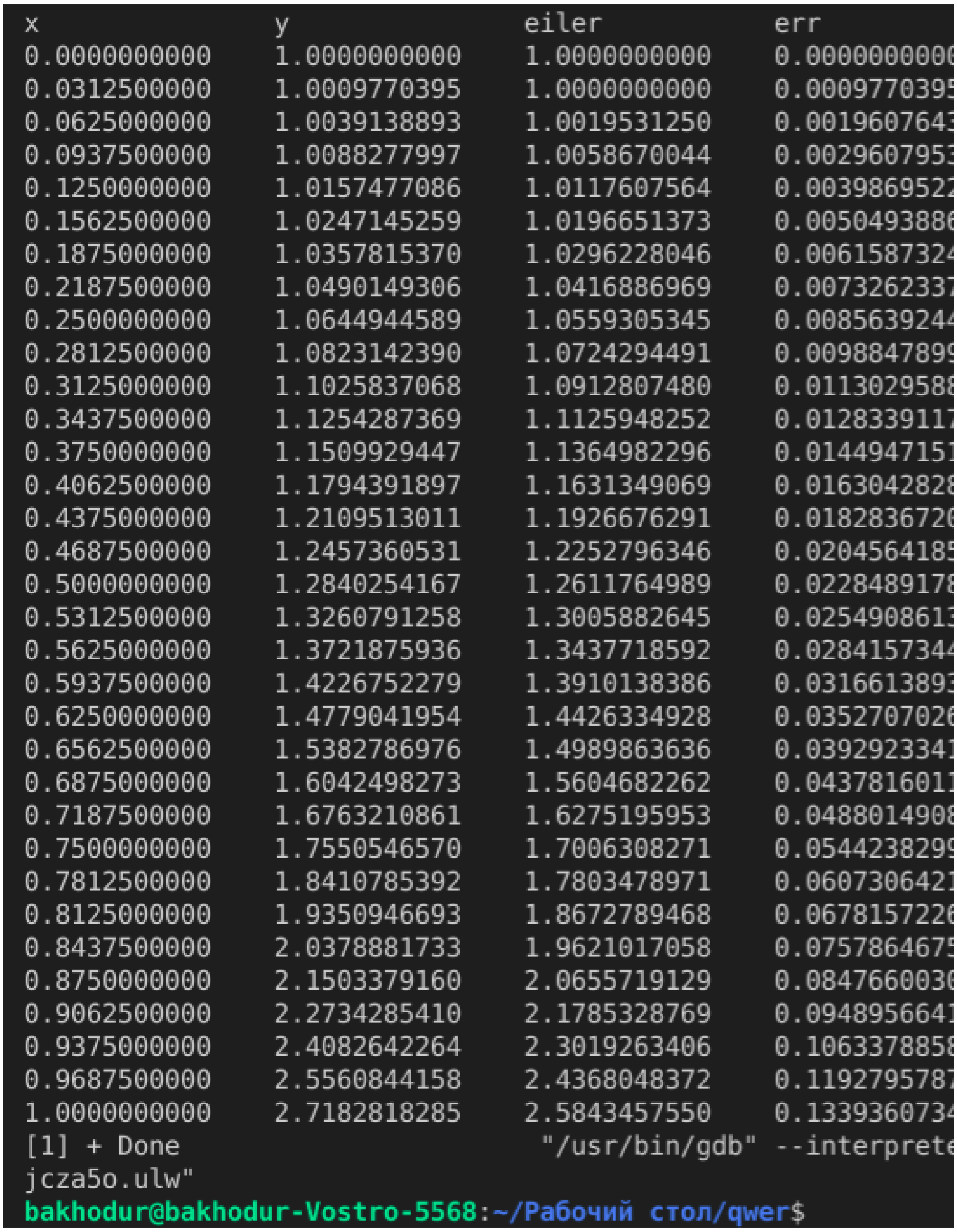
При больших h метод Эйлера весьма неточен. Он дает все более точное приближение при уменьшении шага интегрирования. Если отрезок [xi, xi+1] слишком велик, то каждый участок [xi, xi+1] разбивается на N отрезков интегрирования и к каждому их них применяется формула Эйлера с шагом $h = \frac{x_{i+1} - x_i}{N}$, то есть шаг интегрирования h берется меньше шага сетки, на которой определяется решение.

Код программы

```
#include <iostream>
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <cmath>

using namespace std;

double calculate_y(double x) //аналитическое решение
{
   return exp(x*x);
}



double calculate_f(double x, double y) //фунцкия из задания
{
  return  2 * x * y;
}

int main()
{

        double a = 0; // левая граница
        double b = 1; // правая границы
        double y0 = 1.0; // условия задачи Коши из задания
        int n = 32; // мелкость разбиения
        double h = (b - a)/n;  // шаг алгоритма
        double x[n + 1]; // массив значений x
        double y[n + 1]; //массив значений y

        x[0] = a;
   y[0] = y0;// условие задачи Коши из задания

   for (int i = 1; i <= n; i++) // метод Эйлера
   {
      x[i]=x[i - 1] + h;
      y[i]=y[i - 1] + h * calculate_f(x[i - 1], y[i - 1]);
   }
   cout.precision(10); // вывод на экран
   cout.setf(ios::fixed);
        cout<<"x\t\t"<<"y\t\t"<<"eiler\t\t"<<"err"<< endl;
   for (int i = 0; i <= n; i++)
   {
      double error = abs(y[i] - calculate_y(x[i])); // вычисление отклонений
```

```
cout<<x[i]<<'\t'<<calculate_y(x[i])<<'\t'<<y[i]<<'\t'<<error<< endl;

    }
}
```

Запуск при N=32



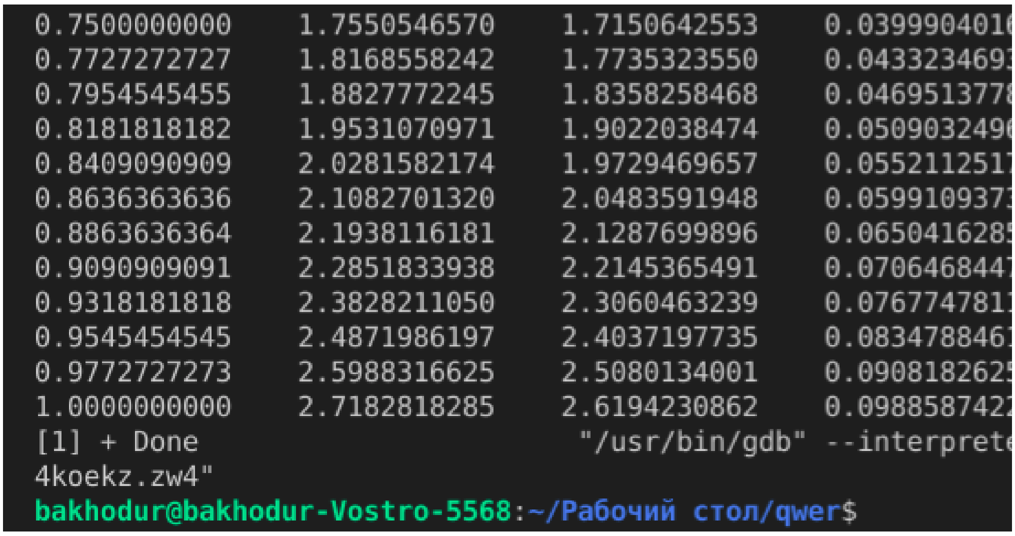
```
x               y               eiler           err
0.0000000000    1.0000000000    1.0000000000    0.000000000
0.0312500000    1.0009770395    1.0000000000    0.000977039
0.0625000000    1.0039138893    1.0019531250    0.001960764
0.0937500000    1.0088277997    1.0058670044    0.002960795
0.1250000000    1.0157477086    1.0117607564    0.003986952
0.1562500000    1.0247145259    1.0196651373    0.005049388
0.1875000000    1.0357815370    1.0296228046    0.006158732
0.2187500000    1.0490149306    1.0416886969    0.007326233
0.2500000000    1.0644944589    1.0559305345    0.008563924
0.2812500000    1.0823142390    1.0724294491    0.009884789
0.3125000000    1.1025837068    1.0912807480    0.011302958
0.3437500000    1.1254287369    1.1125948252    0.012833911
0.3750000000    1.1509929447    1.1364982296    0.014494715
0.4062500000    1.1794391897    1.1631349069    0.016304282
0.4375000000    1.2109513011    1.1926676291    0.018283672
0.4687500000    1.2457360531    1.2252796346    0.020456418
0.5000000000    1.2840254167    1.2611764989    0.022848917
0.5312500000    1.3260791258    1.3005882645    0.025490861
0.5625000000    1.3721875936    1.3437718592    0.028415734
0.5937500000    1.4226752279    1.3910138386    0.031661389
0.6250000000    1.4779041954    1.4426334928    0.035270702
0.6562500000    1.5382786976    1.4989863636    0.039292334
0.6875000000    1.6042498273    1.5604682262    0.043781601
0.7187500000    1.6763210861    1.6275195953    0.048801490
0.7500000000    1.7550546570    1.7006308271    0.054423829
0.7812500000    1.8410785392    1.7803478971    0.060730642
0.8125000000    1.9350946693    1.8672789468    0.067815722
0.8437500000    2.0378881733    1.9621017058    0.075786467
0.8750000000    2.1503379160    2.0655719129    0.084766003
0.9062500000    2.2734285410    2.1785328769    0.094895664
0.9375000000    2.4082642264    2.3019263406    0.106337885
0.9687500000    2.5560844158    2.4368048372    0.119279578
1.0000000000    2.7182818285    2.5843457550    0.133936073
[1] + Done                       "/usr/bin/gdb" --interprete
jcza5o.ulw"
bakhodur@bakhodur-Vostro-5568:~/Рабочий стол/qwer$
```

Фигура 1: Рис 1

при N = 44 получаем погрешность в пределах допустимой

```
x               y               eiler           err
0.0000000000    1.0000000000    1.0000000000    0.0000000000
0.0312500000    1.0009770395    1.0000000000    0.0009770395
0.0625000000    1.0039138893    1.0019531250    0.0019607643
0.0937500000    1.0088277997    1.0058670044    0.0029607953
0.1250000000    1.0157477086    1.0117607564    0.0039869522
0.1562500000    1.0247145259    1.0196651373    0.0050493886
0.1875000000    1.0357815370    1.0296228046    0.0061587324
0.2187500000    1.0490149306    1.0416886969    0.0073262337
0.2500000000    1.0644944589    1.0559305345    0.0085639244
0.2812500000    1.0823142390    1.0724294491    0.0098847899
0.3125000000    1.1025837068    1.0912807480    0.0113029588
0.3437500000    1.1254287369    1.1125948252    0.0128339117
0.3750000000    1.1509929447    1.1364982296    0.0144947151
0.4062500000    1.1794391897    1.1631349069    0.0163042828
0.4375000000    1.2109513011    1.1926676291    0.0182836720
0.4687500000    1.2457360531    1.2252796346    0.0204564185
0.5000000000    1.2840254167    1.2611764989    0.0228489178
0.5312500000    1.3260791258    1.3005882645    0.0254908613
0.5625000000    1.3721875936    1.3437718592    0.0284157344
0.5937500000    1.4226752279    1.3910138386    0.0316613893
0.6250000000    1.4779041954    1.4426334928    0.0352707026
0.6562500000    1.5382786976    1.4989863636    0.0392923341
0.6875000000    1.6042498273    1.5604682262    0.0437816011
0.7187500000    1.6763210861    1.6275195953    0.0488014908
0.7500000000    1.7550546570    1.7006308271    0.0544238299
0.7812500000    1.8410785392    1.7803478971    0.0607306421
0.8125000000    1.9350946693    1.8672789468    0.0678157226
0.8437500000    2.0378881733    1.9621017058    0.0757864675
0.8750000000    2.1503379160    2.0655719129    0.0847660030
0.9062500000    2.2734285410    2.1785328769    0.0948956641
0.9375000000    2.4082642264    2.3019263406    0.1063378858
0.9687500000    2.5560844158    2.4368048372    0.1192795787
1.0000000000    2.7182818285    2.5843457550    0.1339360734
[1] + Done                        "/usr/bin/gdb" --interprete
jcza5o.ulw"
bakhodur@bakhodur-Vostro-5568:~/Рабочий стол/qwer$
```

Фигура 2: Рис2



```
0.7500000000    1.7550546570    1.7150642553    0.0399904016
0.7727272727    1.8168558242    1.7735323550    0.0433234693
0.7954545455    1.8827772245    1.8358258468    0.0469513778
0.8181818182    1.9531070971    1.9022038474    0.0509032496
0.8409090909    2.0281582174    1.9729469657    0.0552112517
0.8636363636    2.1082701320    2.0483591948    0.0599109373
0.8863636364    2.1938116181    2.1287699896    0.0650416285
0.9090909091    2.2851833938    2.2145365491    0.0706468447
0.9318181818    2.3828211050    2.3060463239    0.0767747811
0.9545454545    2.4871986197    2.4037197735    0.0834788461
0.9772727273    2.5988316625    2.5080134001    0.0908182625
1.0000000000    2.7182818285    2.6194230862    0.0988587422
[1] + Done                       "/usr/bin/gdb" --interprete
4koekz.zw4"
bakhodur@bakhodur-Vostro-5568:~/Рабочий стол/qwer$
```

Фигура 2: Рис 3

Вывод – Познакомились с задачей нахождения частного решения дифференциальных уравнения методом Эйлера