РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 5

дисциплина: Вычислительные методы

Студент: Турсунов Баходурхон Азимджонович

Группа: НФИбд-03-19

МОСКВА

2021 г.

Постановка задачи:

Задача Коши

1. Реализовать в программе метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности для численного решения задачи Коши, приведенной ниже:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

где функция $f(x,y)$, концы отрезка a, b и начальное значение y_0 заданы в индивидуальном варианте (использовать тот же вариант, что и в лабораторной работе № 4).

2. В программе вывести таблицу данных следующего вида:

$$\begin{matrix} x_0 & \tilde{y}(x_0) & y(x_0) & \delta(x_0) \\ x_1 & \tilde{y}(x_1) & y(x_1) & \delta(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & \tilde{y}(x_N) & y(x_N) & \delta(x_N) \end{matrix}$$

где целое число $N = 32$ определяет равномерное разбиение отрезка $[a,b]$, $\tilde{y}(x_j)$ – значение численного решения задачи Коши, полученного методом Рунге-Кутты 2-го порядка точности, в узлах разбиения отрезка; $y(x_j)$ – значение аналитического решения задачи Коши в узлах разбиения отрезка; $\delta(x_j) = |\tilde{y}(x_j) - y(x_j)|$ – погрешность.

3. Определить минимальное значение N, при котором $\delta(x_j) < 10^{-2}$, $j = \overline{0,N}$.

4. Сравнить полученное в п.3 значение N с аналогичным значением, полученным для метода Эйлера. Проанализировать результат.

Индивидуальный вариант:

$$y' = xy, y_0 = 1, a = 0, b = 1$$

Выполнение работы:

Точность метода Эйлера можно повысить, если воспользоваться для аппроксимации интеграла более точной формулой интегрирования – формулой трапеций.

$$y_{k+1} = y_k + h/2[F(x_k, y_k) + F(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Данная формула оказывается неявной относительно y_{k+1} (это значение есть и в левой и в правой части выражения), то есть является уравнением относительно y_{k+1}. Однако, можно поступить иначе и приблизительно вычислить значение функции в узле $k+1$ с помощью обычной формулы Эйлера:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + F(x_k, y_k)h,$$

которое можно использовать при вычислении (4).

Таким образом, метод Рунге-Кутта 2-го порядка (метод Гюна) получается с пересчетом, т.е. как бы усовершенствованием метода Эйлера. Для каждого узла интегрирования производится следующая цепочка вычислений:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + F(x_k, y_k)h$$

$$y_{k+1} = y_k + h/2[F(x_k, y_k) + F(x_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$$

Код программы

```
#include <iostream>
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <cmath>

using namespace std;

double calculate_y(double x) //analyticheskoe reshenie
{
   return  exp(x*x);
                         }


double calculate_f(double x, double y) //funkcia iz zadania
{
  return  2*x*y;
  }

int main()
{
        double a=0; // левая граница
        double b=1.0; // правая граница
        double y0=1.0; // условие задачи коши из задания

        int n=32; // мелкость разбиения

        double h=(b-a)/n;  // шаг алгоритма
        double x[n+1]; // массив значений x
        double y[n+1]; //массив значений y

        x[0]=a;
   y[0]=y0;// условие задачи коши из задания

   for (int i=1; i<=n; i++) // метод эйлера
   {
      x[i]=x[i-1]+h;
      y[i]=y[i-1]+(h/2.0)*(calculate_f(x[i-1], y[i-1]) + calculate_f(x[i-1]+h, y[i-
1]+h*calculate_f(x[i-1], y[i-1])) );
```

```
    }
    cout.precision(10);
    cout.setf(ios::fixed);
        cout<<"x\t\t"<<"y\t\t"<<"runge\t\t"<<"err"<< endl;
    for (int i=0; i<=n; i++)
    {
      double error=abs(y[i]-calculate_y(x[i])); // вычисление отклонений

      cout<<x[i]<<'\t'<<calculate_y(x[i])<<'\t'<<y[i]<<'\t'<<error<< endl;

    }
}
```

x	y	runge	err
0.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	0.0000000000
0.0312500000	1.0009770395	1.0009765625	0.0000004770
0.0625000000	1.0039138893	1.0039129294	0.0000009599
0.0937500000	1.0088277997	1.0088263369	0.0000014628
0.1250000000	1.0157477086	1.0157457009	0.0000020077
0.1562500000	1.0247145259	1.0247119010	0.0000026249
0.1875000000	1.0357815370	1.0357781828	0.0000033542
0.2187500000	1.0490149306	1.0490106853	0.0000042453
0.2500000000	1.0644944589	1.0644890992	0.0000053597
0.2812500000	1.0823142390	1.0823074669	0.0000067722
0.3125000000	1.1025837068	1.1025751341	0.0000085727
0.3437500000	1.1254287369	1.1254178677	0.0000108692
0.3750000000	1.1509929447	1.1509791545	0.0000137902
0.4062500000	1.1794391897	1.1794217012	0.0000174884
0.4375000000	1.2109513011	1.2109291558	0.0000221453
0.4687500000	1.2457360531	1.2457080774	0.0000279757
0.5000000000	1.2840254167	1.2839901829	0.0000352338
0.5312500000	1.3260791258	1.3260349054	0.0000442204
0.5625000000	1.3721875936	1.3721323026	0.0000552910
0.5937500000	1.4226752279	1.4226063619	0.0000688660
0.6250000000	1.4779041954	1.4778187533	0.0000854422
0.6562500000	1.5382786976	1.5381730912	0.0001056064
0.6875000000	1.6042498273	1.6041197746	0.0001300527
0.7187500000	1.6763210861	1.6761614849	0.0001596011
0.7500000000	1.7550546570	1.7548594355	0.0001952215
0.7812500000	1.8410785392	1.8408404787	0.0002380605
0.8125000000	1.9350946693	1.9348051945	0.0002894749
0.8437500000	2.0378881733	2.0375371033	0.0003510701
0.8750000000	2.1503379160	2.1499131692	0.0004247467
0.9062500000	2.2734285410	2.2729157850	0.0005127559
0.9375000000	2.4082642264	2.4076464612	0.0006177652
0.9687500000	2.5560844158	2.5553414790	0.0007429368
1.0000000000	2.7182818285	2.7173898064	0.0008920220

Нужная точность достигается при N= 10 (в случае метода Эйлера при N =

350)

x	y	runge	err
0.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	0.0000000000
0.1000000000	1.0100501671	1.0100000000	0.0000501671
0.2000000000	1.0408107742	1.0407040000	0.0001067742
0.3000000000	1.0941742837	1.0939880448	0.0001862389
0.4000000000	1.1735108710	1.1731927792	0.0003180917
0.5000000000	1.2840254167	1.2834729005	0.0005525162
0.6000000000	1.4333294146	1.4323557569	0.0009736576
0.7000000000	1.6323162200	1.6305937937	0.0017224262
0.8000000000	1.8964808793	1.8934455133	0.0030353660
0.9000000000	2.2479079867	2.2425968659	0.0053111208
1.0000000000	2.7182818285	2.7090570140	0.0092248144

Вывод – Познакомились с задачей нахождения частного решения диф уравнения методом Рунге-Кутты 2го порядка