Sygnały i obrazy cyfrowe

Egzamin, 5 lutego, AD MMXXIV

Numer indeksu: □□□□□□

***Abstract*—Egzamin ma formę testu n-krotnego wyboru (dzisiaj $n = 2$).**
1) Prawidłowa odpowiedź to `'+1'`, a nieprawidłowa (w tym brak prawidłowej) `'-1'` punkt. Uzyskanie `4`÷`6` punktów daje ocenę `'dst'`, liczba `7`÷`9` punktów oznacza oznacza ocenę `'db'`.
2) Ocena `'bdb'` zaczyna się od `10` punktów. Uzyskanie minimalnej liczby punktów skutkuje oceną `'cel'`.
3) Egzamin trwa 24 minuty.
4) W trakcie egzaminu wolno korzystać z dowolnych NIEBIAŁKOWYCH zewnętrznych źródeł.

***Index Terms*—próbkowanie, interpolacja, aproksymacja, estymacja, entropia, kodowanie, kompresja**

I. Próbkowanie

1. Splatając funkcję ciągłą $f(x)$ z deltą Diraca $\delta(x)$

$$(f * \delta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\delta(\xi - x)\,d\xi$$

otrzymamy:
A. Wartość (próbkę) funkcji f w punkcie x.
B. Wartość średnią f w przedziale $[x-\xi, x+\xi]$.

2. Próbkowanie (*sampling*) dla argumentów całkowitych, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, z wykorzystaniem delty Diraca $\delta(x-n)$, przekształca ciągłą funkcję $f(x)$ w:
A. Ciąg, $\{f(n)\}$, wartości funkcji dla tych argumentów.
B. Funkcję $\{f(\lfloor x \rfloor) - f(\lceil x \rceil)\}$.

II. Interpolacja

3. Funkcję $\varphi(x)$ nazywamy interpolującą jeśli, m.in., $\varphi(0) = 1$ oraz $\varphi(n) = 0$ dla $|n| = 1, 2, \ldots$. Funkcją interpolującą jest[1]:
A. $2 \cdot \mathbf{1}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)$.
B. $\mathbf{1}_{[-1,1)}(x) \cdot (1 - |x|)$.

4. Aliasing przy próbkowaniu impulsowym (splocie sygnału $f(x)$ z deltą Diraca $\delta(x-n)$) wynika ze:
A. Zbyt małej częstości próbkowania względem widma sygnału.
B. Obecności nieciągłości w sygnale.

5. Dla danego zbioru punktów $\{n, f(n)\}$, $n = -N, \ldots, N$, krzywa łącząca je kolejno będzie najkrótsza, gdy zastosujemy interpolację opartą o funkcję:
A. $\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$.
B. $(1 - |x|) \cdot \mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$.

III. Aproksymacja

6. Funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ nazywami ortogonalnymi, jeśli ich iloczyn skalarny

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_D \varphi(x)\,\phi(x)\,dx$$

jest równy zero. Które z par, dla $D = [-1, 1]$**,** są ortogonalne:

[1]Symbol `'*'` nadal oznacza splot.

A. $\varphi(x) = 1$ i $\psi(x) = x$.
B. $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ i $\psi(x) = \cos(\pi x)$.

7. Dla funkcji $f(x)$ o ograniczonej i niezerowej energii w D i dla wybranej bazy ortogonalnej $\{\varphi_m(x)\}$, $m \in 0, 1, \ldots$, zachodzi twierdzenie (tożsamość) Parsevala

$$\int_D f^2(x)\,dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m^2, \text{ gdzie } \alpha = \langle \varphi_m, f \rangle.$$

Które nierówności są prawdziwe dla każdego M:
A. $\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m^2 \le \int_D f^2(x)\,dx$.
B. $\sum_{m=M}^{\infty} \alpha_m^2 = \int_D f^2(x)\,dx$.

IV. Filtrowanie i estymacja

8. Filtr splotowy dany jest wzorem na splot (por. zad. 1)

$$g(x) = (f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - x)\,h(\xi)\,d\xi.$$

Jeśli $f(x)$ i $h(x)$ są ujemne, to $g(x)$:
A. jest dodatnia.
B. może przyjmować wartości ujemne jeśli $f(x)$ jest nieciągła.

9. Szum śrutowy ma rozkład Poissona

$$P(X = k \,|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Jeśli jego wartości oczekiwana λ jest równa 1, to wówczas:
A. X może przyjmować ujemne.
B. Wariancja wynosi $\left|e^{-2\pi i}\right|$.

V. Entropia

10. Entropię bezpamięciowego źródła informacji o Q symbolach pojawiających się z prawdopodobieństwami $\{p_q\}$, $\sum_{q=1}^{Q} p_q = 1$, definiujemy jako wartość oczekiwaną informacji

$$H(X) = -\sum_{q=1}^{Q} p_q \log_2 p_q.$$

Dla źródła binarnego, tj. dla $Q = 2$:
A. $H(x)$ jest największa, gdy $p_1/p_2 = 1$.
B. $H(x)$ może być dowolnie bliska zeru.

11. Niech $\{c_q\}$ oznacza kod, za pomocą którego kodujemy symbole ze źródła o Q symbolach. Średnią długość kodu definiujemy jako

$$C(X) = \sum_{q=1}^{Q} p_q\,|c_q|,$$

gdzie $|c_q|$ to długość q-tej litery kodu. Prawdziwe są relacje:
A. $C(X) - H(x) \ge 0$.
B. $C(X) - H(x) = 1$.

VI. Kodowanie

12. W kodowaniu Huffmana wykorzystuje się rekurencyjnie spostrzeżenie, że w kodach optymalnych dwa najmniej prawdopodobne symbole różnią się jedynie ostatnim bitem. Które z poniższych przykładów mogą być kodami Huffmana dla źródła o trzech symbolach:
A. 1, 01, 00.
B. 0, 10, 11.

VII. Odpowiedzi. . .

	A	B
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Numer indeksu
