1、 (战争与和平) (1)&(2) 这是一个典型的“囚徒困境”博弈。根据纳什均衡的定义，知 (战争，战争) 是唯一纳什均衡，它并不是帕累托最优的，(和平，和平) 是它的帕累托改进。

		参与人 2	
		和平	战争
参与人 1	和平	3，3	1，4
	战争	4，1	2，2

(3) 当惩罚力度为 $P > 1$ 时，$3 > 4 - P$。因此有：

		参与人 2	
		和平	战争
参与人 1	和平	3，3	1，$4 - P$
	战争	$4 - P$，1	2，2

此时存在两个纯策略纳什均衡：(和平，和平)，(战争，战争)。从而人们有可能走出战争状态。

(4) 当每个参与人需要为建立“利维坦”支付成本 T 时，(和平，和平)，(战争，战争) 仍为两个纯策略纳什均衡。但此时能获得的最大收益为 $3 - T$；若不建立“利维坦”，则能获得的最小收益为 2。因此，当支付成本 $T > 1$ 时，人们没有动机建立“利维坦”。□

2、 (罪与罚) (1) 根据最优反应函数的定义，对政府效用关于执法力度 x 求导，并令其为零，得

$$\frac{\partial u_G}{\partial x} = -c + \frac{y^2}{x^2} = 0,$$

即政府的最优反应函数为

$$BR_G(y) = x^*(y) = \frac{y}{c^{0.5}}。$$

这意味着，随着罪犯的犯罪频率逐渐提升，政府应加大执法力度。

同理，对罪犯效用关于犯罪频率 y 求导，并令其为零，得

$$\frac{\partial u_C}{\partial x} = -\frac{0.5y^{-0.5}(1 - xy)}{(1 + xy)^2} = 0,$$

罪犯的最优反应函数为

$$BR_C = y^*(x) = \frac{1}{x}。$$

这意味着随着政府执法力度不断加大，罪犯的犯罪意愿会逐渐降低。

联立两个最优反应函数，可得该博弈的唯一纳什均衡为：

$$(x^*, y^*) = (c^{-0.25}, c^{0.25})。$$

(2) 注意到

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}c} = -0.25c^{-1.25} < 0，\ \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}c} = 0.25c^{-0.75} > 0。$$

事实上，随着执法成本的加大，对政府而言，从而使得成本加大，首先会使得政府的效用下降，这是收入效应；另一方面，加大处罚力度，有可能会使罪犯的犯罪频率下降，间接提升政府的效用，这是替代效应。而对罪犯而言，并没有直接的收入效应，只有通过影响政府行为间接影响罪犯的效用。

在本例中，在纳什均衡解处，政府的收入效应是大于替代效应的，因此当执法成本上升是，政府的执法意愿会下降，即 x^* 会下降。由于执法力度下降，罪犯的犯罪频率会上升，即 y^* 会上升。□

3、 (38 个目击者) (1) 先假设 $n = 2$。(在此我们不讨论 $v = c$ 的特殊情形，感兴趣的同学可以进一步讨论) 若 $v > c$，根据纳什均衡求解方法，有

		参与人 2	
		报警	不报警
参与人 1	报警	$v-c$，$v-c$	$v-c$，v
	不报警	v，$v-c$	0，0

此时，有两个纯策略纳什均衡：(报警，不报警)，(不报警，报警)。

若 $v < c$，根据纳什均衡求解方法，有

		参与人 2	
		报警	不报警
参与人 1	报警	$v-c$，$v-c$	$v-c$，v
	不报警	v，$v-c$	0，0

这是一个囚徒困境博弈，有唯一纳什均衡：(不报警，不报警)。

当不限制 $n = 2$ 时，可以证明，若 $v < c$，存在唯一纳什均衡，在此均衡中所有参与人均选择不报警；若 $v > c$，则存在 n 个纳什均衡，在每个纳什均衡中，有一个参与人选择报警，其余的 $n-1$ 个参与人均选择不报警。

(2) 根据如上分析，只有可能在 $v > c$ 时，存在纳什均衡。只考虑对称的纳什均衡，即所有参与人选择报警的概率相等，设为 μ。根据混合策略均衡的定义，在给定其他人的策略下，某个参与人选择报警和不报警得到的期望收益是相等的。即

$$v - c = v \cdot (1 - (1-\mu)^{n-1}),$$

即

$$\mu = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}。$$

(3) 根据 (2) 中的分析，可知，至少有一个人报警的概率为

$$p(n) = 1 - (1-\mu)^n = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p(n)}{\mathrm{d}n} = \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot \log\frac{c}{v} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} < 0,$$

这意味着，随着人数的增多，至少有一个人报警的概率下降。这和“38 个目击者”案例的结果是一致的。□

4、 (Braess 悖论) (1) 纳什均衡为有 2000 名司机选择路线 A-C-B，另 2000 名司机选择路线 A-D-B。证明如下：考虑司机 i 的决策。给定其他 3999 名司机中，2000 人选择 A-C-B，1999

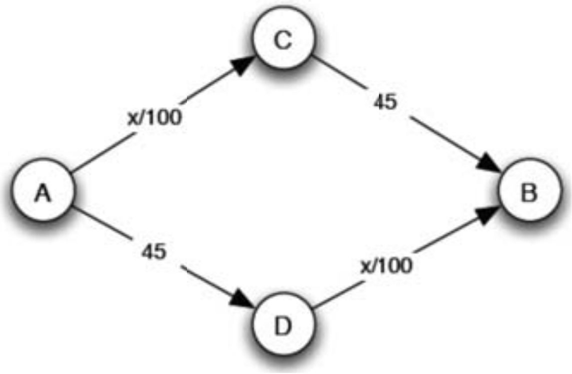

图 1: Braess 悖论

人选择 A-D-B，则 i 选择 A-C-B 路线的成本为 65.01，选择 A-D-B 的成本为 65，从而选择 A-D-B 优于 A-C-B。因此这是一个纳什均衡。

(2) 在此博弈中，由于有两期决策，所以我们考虑子博弈精炼均衡。此时，所有人都选择 A-C-D-B 的路线为唯一子博弈精炼均衡。用逆向归纳法证明。当司机在 C 或 D 处时，注意到此时每

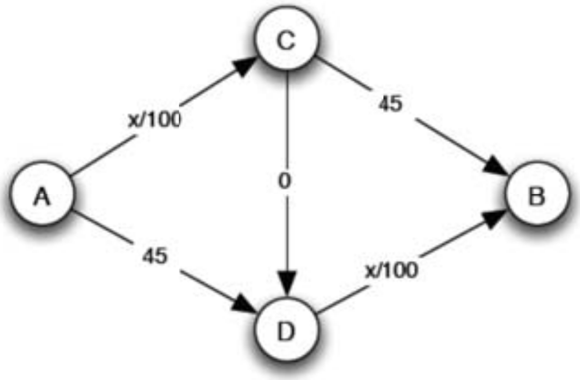

图 2: Braess 悖论

个司机都有占有策略，即选择 D-B 的路线。回到 A 处，此时司机仍有占优策略，即选择 A-C 的路线。因此，此时唯一的子博弈精炼均衡是所有人都选择 A-C-D-B 的路线。此时所有人的成本均为 80，所以交通拥堵加剧了。根据证明过程可知，此子博弈精炼均衡也是此博弈的唯一纳什均衡。□

5、 (囚徒困境？) 写清收益矩阵，言之有理即可。□