

## 博弈与社会第一次作业

1、(战争与和平) 假设两个博弈参与人生活在“丛林法则”之下，每一个参与人都可以选择“战争”与“和平”，并且其支付矩阵如下所示：

		参与人 2	
		和平	战争
参与人 1	和平	3, 3	1, 4
	战争	4, 1	2, 2

(1) 请问，这个博弈类似于教材中提到的哪类博弈？

(2) 这个博弈有几个纳什均衡？它是帕累托最优的吗？

(3) 出于对“战争”状况下人民福祉的忧虑，霍布斯建议采用“利维坦”来终结战争状态，即“把大家所有的权利和力量托付给某一个人或一个能通过多数人的意见把大家的意志化为一个意志的多人组成的集体。”由于“利维坦”拥有惩罚“战争”的力量，因此可以协调人们走出战争，迎来和平。我们假设，如果在上述博弈中，参与人们通过契约建立了“利维坦”。如果某人发动战争，“利维坦”会对其施加惩罚，且惩罚力度为  $P$  ( $P > 0$ )。因此，博弈变成了如下形式：

		参与人 2	
		和平	战争
参与人 1	和平	3, 3	1, $4 - P$
	战争	$4 - P$ , 1	2, 2

请问， $P$  值需要怎样取值，才能让人们走出“战争”状态？

(4) 尽管“利维坦”可能帮助人们走出战争状态，但人们为建立“利维坦”，需要放弃大量权利、付出高昂成本。因此并不是在所有情况下，人们都有激励建立“利维坦”。我们可以考虑如下情况，假设每个参与人需要为建立“利维坦”支付成本  $T$  ( $T > 0$ )，因此博弈变成了如下形式：

		参与人 2	
		和平	战争
参与人 1	和平	$3 - T$ , $3 - T$	$1 - T$ , $4 - T - P$
	战争	$4 - T - P$ , $1 - T$	$2 - T$ , $2 - T$

在参数  $T$  满足什么条件时，人们会选择建立“利维坦”；而在什么条件下，人们宁愿选择生活在“自然状态”？

**2、（罪与罚）** 诺贝尔经济学奖得主、芝加哥大学教授 Gary Becker 教授曾研究过对犯罪的“最优惩罚水平”，本题将用一个简化的模型介绍 Becker 的研究。

考虑一个博弈，博弈的参与双方是政府 (G) 和罪犯 (C)，双方同时决策。对于政府来说，可以选择执法力度  $x$  ( $x > 0$ ) 来控制犯罪的发生，而罪犯则可以选择自己的犯罪频率  $y$  ( $y > 0$ )。政府的效用函数是  $u_G = -cx - y^2/x$ ，其中  $c$  是刻画执法力度成本的参数，而  $-y^2/x$  刻画了犯罪对社会的危害程度；。罪犯的效用函数是： $u_C = y^{0.5}/(1 + xy)$ ，其中  $y^{0.5}$  刻画当犯罪而未被逮捕时的收益， $1/(1 + xy)$  则表示犯罪未被抓的概率。

(1) 请问，对于博弈双方来说，各自的最优反应曲线是什么？博弈的纳什均衡是什么？

(2) 随着参数  $c$  的变动，均衡时的执法力度和犯罪频率会发生什么变化？请给出一个直观的解释。

**3、（38 个目击者）** 在美国的法制史上，有个被称为“38 个目击者”的著名案例：1964 年 3 月 13 日夜，在美国纽约郊外某公寓前，一位叫朱诺比的女子在回家途中遇刺。其间，尽管她大声求救，并且至少有 38 位目击者看到了犯罪经过或听到了呼救，但竟没有一人拨打电话。

本题将通过一个博弈模型来对这个案例进行分析。假设朱诺比在街道上遭遇劫匪并大声呼救，周围至少有  $n$  个目击者听到了呼救。当听到呼救后，目击者可以选择报警或漠视。如果选择报警，他需要支付的成本为  $c$ 。只要有一个人报警，朱诺比就会得救，所有目击者会因此而获得效用  $v$ 。而如果没有人报警，则所有目击者都只能获得效用 0。

(1) 当我们考虑所有目击者的同时决策博弈时，这个博弈有纯战略纳什均衡吗？

(2) 这个博弈有混合战略纳什均衡吗？如果有，请解出来。

(3) 请计算至少有一个人报警的概率。这个结果对你有什么启示？

**4、（Braess 悖论）** 在交通规划中，增加道路建设往往被视为缓解交通拥堵的有效方法。但在 1968 年的一篇论文中，数学家 Dietrich Braess 却提出了一个令人惊讶的观点，即：在个人独立选择路径的情况下，为某路网增加额外的通行能力，有时非但不能缓解拥堵，反而会导致路网整体运行效率的降低。

本习题将向你介绍这一著名的悖论。如图所示，假设有 4000 名司机需要从 A 地驶往 B 地。对于每位司机，都有两条行驶路径可选：A-C-B 或 A-D-B。其中，AD 路段和 CB 路段的通行速度都不受车辆总数的影响，经过这两个路段都必须耗时 45 分钟。但通过 AC 路段和 DB 路段的时间则由本路段上行驶的车辆决定。具体来说，如果路段上行驶的车辆总数为  $x$ ，则通过

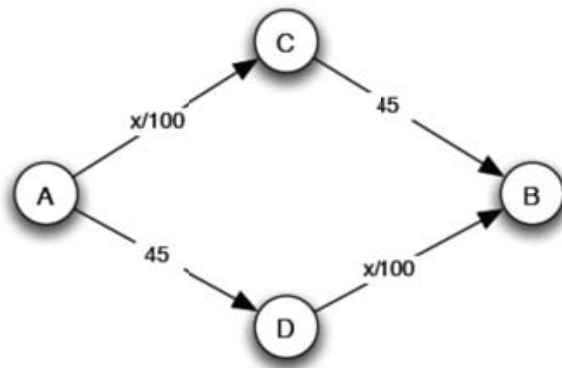


图 1: Braess 悖论

路段的时间为  $x/100$ 。

(1) 假设所有司机的目标都是通行时间最小化，他们同时选择行驶路径，则在纳什均衡下，他们的行驶时间将是多少？

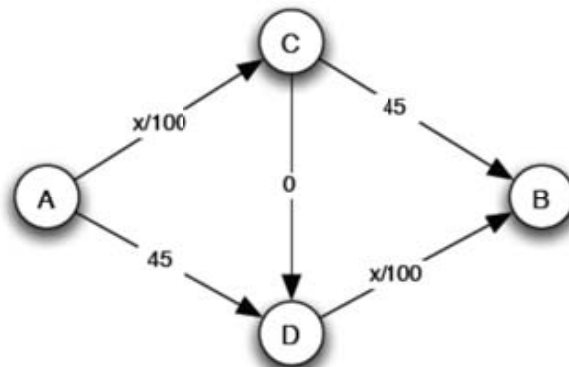


图 2: Braess 悖论

(2) 现在政府为了缓解交通拥堵，决定在 CD 之间修建一条通路。经过这条通路，司机可以从 C 点直达 D (为简化其间, 假设由 C 到 D 的时间为 0)。请问，在此条通路建成后，纳什均衡将发生怎样的改变？通路能如政府所预料的那样，缓解交通拥堵吗？

5、(囚徒困境?) 曾经，国内外有些网站都在显著位置报道了以下新闻：约翰·霍普金斯大学的计算机教授 Peter Fröhlich 一直奉行“以考试成绩最高分为 100、按分布曲线依次给出最终成绩”的政策，岂料去年秋学期，他三门课程的学生们全体在期末考试弃考，以全员零分的结果来挑战这一政策。教授思考再三，称赞了学生们的团结精神，给了所有人 A。有网友评论说，这个事例是人们通过合作成功打破“囚徒困境”的尝试。另有一些网友惊呼，这些同学对于彼此而言真是最靠谱的队友。

- (1) 请问，为什么 Peter Fröhlich 教授的给分策略会让学生陷入“囚徒困境”？
- (2) 你认为，在这个事件中，学生为什么可以打成合作，成功突破“囚徒困境”？
- (3) 如果 Peter Fröhlich 教授坚持想要用以上策略给分，那么你能否给教授支个招，让学生自愿参加考试，重回“囚徒困境”？