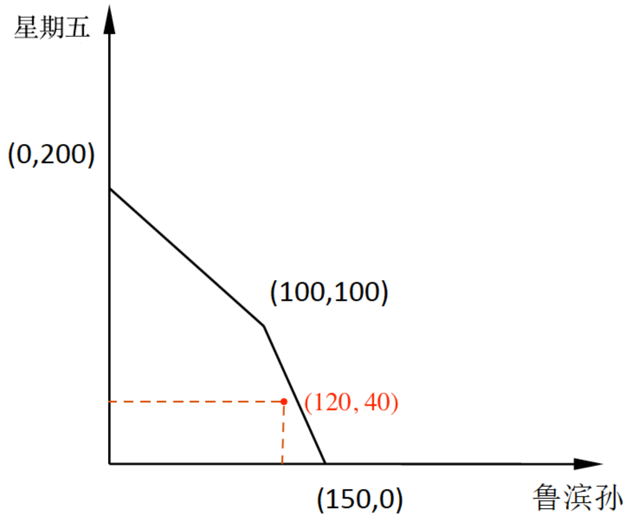
《博弈与社会》第二次作业参考答案

1. 荒岛谈判

1) 如果平均分配，则两人各得50公斤玉米和50公斤土豆。此时，鲁滨孙和星期五的效用分别为75和100。考虑另外一种分配，鲁滨孙得100公斤玉米，星期五得100公斤土豆，则两人的效用都为100。相对于平均分配，这种配置方法在不损害星期五效用的前提下让鲁滨孙的效用得到了改进，实现了帕累托改进。因此简单平均分配并不是帕累托最优。

2) 如果不谈判，鲁滨孙的期望效用为$0.8\times(100+50)+0.2\times0=120$，星期五的期望效用为$0.8\times0+0.2\times(100+100)=40$，此即为两人的威胁点。

3) 效用可行性前沿如下：




**（注意，如果所有物资都归星期五，鲁滨孙的效用为150；如果所有物资都归星期五，星期五的效用为200。这样我们可以得到可行性前沿和横轴、纵轴的交点分别为（150，0），（0，200）。考虑从（150，0）开始，考虑鲁滨孙和星期五之间效用的替代关系。由于相对来说星期五对土豆的评价更高，鲁滨孙每让给星期五1 单位土豆，他自己减少0.5单位效用，但星期五可以获得1单位效用。直到星期五拥有所有的土豆，此时两人的效用组合为（100，100）。此后，鲁滨孙只能减少玉米了，由此他和星期五的效用替代关系是1：1。因此帕累托可行边界如上所示。）**

**帕累托边界（Pareto Frontier）对应的方程为：**

$$u_2=\begin{cases}300\text{-}2u_1, 100<u_1\le150\\ 200\text{-}u_1, u_1\le100\end{cases}$$

4) 纳什谈判问题为：

$$\max_{u_1,u_2}(u_1\text{-}120)(u_2\text{-}40)$$

$$u_2=\begin{cases}300\text{-}2u_1, 100<u_1\le150\\ 200\text{-}u_1, u_1\le100\end{cases}$$

**解得：**$u_1=125, u_2=50$.

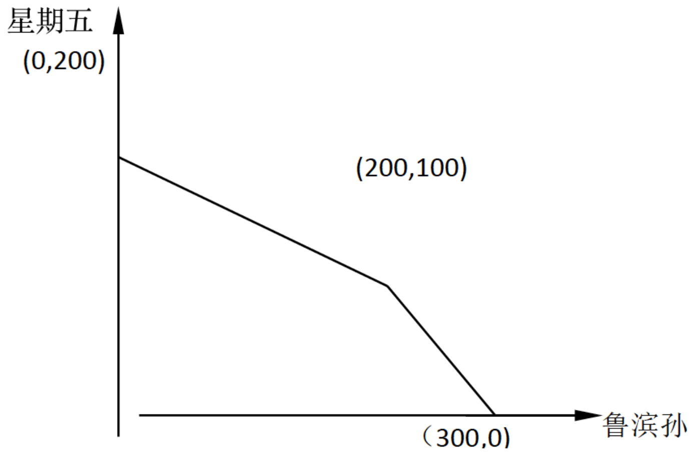
**进一步的，求解：**

$$\begin{cases} C_1 + P_1/2 = 125 \\ C_2 + P_2 = 50 \\ C_1 + C_2 = 100 \\ P_1 + P_2 = 100 \end{cases}$$

从而解得：$C_1 = 100$，$C_2 = 0$，$P_1 = 50$，$P_2 = 50$。

5) 当鲁滨孙悟出新的烹调方法后，效用函数变成了$U_1 = 2C + P$。新的威胁点为（240，40）。这时对应的帕累托效用前沿是将之前的帕累托前沿横向拉升，宽度变成原来的2倍。容易知道对应的方程为：

$$u_2 = \begin{cases} 300\text{-}u_1, 200 < u_1 \le 300 \\ 200\text{-}0.5u_1, u_1 \le 200 \end{cases}$$




**纳什谈判问题为：**

$$\max_{u_1,u_2}(u_1\text{-}240)(u_2\text{-}40)$$

$$u_2 = \begin{cases} 300\text{-}u_1, 200 < u_1 \le 300 \\ 200\text{-}0.5u_1, u_1 \le 200 \end{cases}$$

解得：$u_1 = 250$，　$u_2 = 50$。

$$\begin{cases} 2C_1 + P_1 = 250 \\ C_2 + P_2 = 50 \\ C_1 + C_2 = 100 \\ P_1 + P_2 = 100 \end{cases}$$

从而解得：$C_1 = 100$，$C_2 = 0$，$P_1 = 50$，$P_2 = 50$。

**该结果和之前是一样的。这说明了那是谈判的一个特性，即谈判结果不随效用函数的线性变换而变化。**

2. 西线无战事

1) （真打，真打）。

2) 触发战略：

$$4+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+\cdots \ge 6+2\delta+2\delta^2+2\delta^3+\cdots$$

**解得：**$\delta \ge 1/2$。

**针锋相对战略：**

**可能有两种针锋相对战略——“总是真打”或者“真打假打交替”。**

**对于“总是真打”：**$4+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+\cdots \ge 6+2\delta+2\delta^2+2\delta^3+\cdots$，**解得**$\delta \ge 1/2$；

**对于“真打假打交替”：**$4+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+\cdots \ge 6+0\delta+6\delta^2+0\delta^3+\cdots$，**解得**$\delta \ge 1/2$。

**两种条件下解得都是**$\delta \ge 1/2$。

**（注：如果两种条件下解得的临界值不同，应该取较大的临界值。）**

3) 如果博弈进行有限期，并且信息是完全的，该博弈的子博弈精炼纳什均衡是：双方都一直真打。

4) 假设英军（e）是“理性”的，但德军（g）可能有两种类型：“非理性”和“理性”，其概率分别为 p 和 1-p。

a) 博弈重复两次

（注：“理性”德军两期都真打。）

假设“非理性”的参与者在第一期一定选择“假打”策略。（如果“非理性”的参与者在第一期选择真打，其与“理性”的参与者策略一致，最终结果都是大家一直真打。）

若博弈重复两期，英军在第二期一定会选择“真打”。因此，英军若在第一期选择“假打”，其期望收益为：

$$u_e = p(4+6)+(1\text{-}p)(0+2) = 2+8p;$$

**因此，英军若在第一期选择“真打”，其期望收益为：**

$$u_e' = p(6+2)+(1\text{-}p)(2+2) = 4+4p。$$

**第一期有动机选择假打，要求**$u_e \ge u_e'$，**解得**$p \ge 1/2$。

b) 博弈重复三次

**若英军选择“假-假-真”，而理性的德军选择“假-真-真”是均衡路径，则**

第一步 **英军选择均衡路径的期望收益为：**

$$u_e = p(4+4+6)+(1\text{-}p)(4+0+2) = 6+8p;$$

**选择“假-真-真”，则“非理性”的参与者在第三期一定选择“真打”，从而英军的期望收益为：**

$$u_e' = p(4+6+2)+(1\text{-}p)(4+2+2) = 8+4p;$$

**选择“真-真-真”，则“非理性”的参与者在第二期和第三期都会选择“真打”，此时英军的期望收益为：**

$$u_e'' = p(6+2+2)+(1\text{-}p)(6+2+2) = 10。$$

第二步 **而“理性”德军选择均衡路径的收益为：**

$$u_g = 4+6+2 = 12;$$

若“理性”德军选择“真-真-真”，则英军即知道德军的类型为“理性”，从而在第二期第三期均会选择“真打”，此时德军的收益为：

$$u_g^{'} = 6 + 2 + 2 = 10。$$

双方均有动机选择均衡路径，要求$u_e \geq \max\{u_e^{'}, u_e^{''}\}$以及$u_g \geq u_g^{'}$，解得$p \geq 1/2$。

5) 考虑策略如下：

博弈进行 **n** 期，在前 **n-2** 期，“理性”参与者均选择“假打”，最后两期选择“真打”（因为将第 **n** 期设定为“非理性”对于前一期理性选择“真打”的惩罚，所以最后两期“理性”都是“真打”）。“非理性”的参与者在对方选择“假打”的后一期选择“假打”，而一旦对方选择“真打”，则此后“非理性”的参与者将一直选择“真打”。

（注：如果考虑策略——前 **n-t** 期**(t>2)**“假打”，后 **t** 期“真打”，与上述策略中令 **n'=n-(t-2)**是一致的，因为后 **t** 期的“真打”对“理性”参与者的效用没有改善，只有积累前期“假打”带来的收益对“理性”参与者才有意义。）

则在均衡路径上，参与人的期望收益为：

$$\begin{aligned} u &= p(4 + 4\delta + \cdots + 4\delta^{n-3} + 6\delta^{n-2} + 2\delta^{n-1}) \\ &+ (1-p)(4 + 4\delta + \cdots + 4\delta^{n-3} + 2\delta^{n-2} + 2\delta^{n-1}) \\ &= \frac{1}{1-\delta}(4 - 2\delta^{n-2} + 4p\delta^{n-2} - 4p\delta^{n-1} - 2\delta^{n})。 \end{aligned}$$

给定上述策略，若某个“理性”参与者偏离选择不合作，则期望收益为：

$$u^{'} = 6 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots + 2\delta^{n\text{-}1} = \frac{1}{1\text{-}\delta}(6\text{-}4\delta\text{-}2\delta^{n})。$$

当$u \geq u^{'}$时，双方才有动机选择均衡策略要求，即$4p\text{-}2 \geq (2 + 4p\delta\text{-}4p)\,\delta^{n\text{-}2}$。（为使得上述不等式成立，隐含假设$\delta \geq 1/2$。

当 **p=0.1** 时。解得

$$n \geq \left\lceil \log_{\delta}\left(\frac{10\delta\text{-}5}{4+\delta}\right) + 2 \right\rceil$$

其中，$\lceil\cdot\rceil$为向上取整符号。当 **n** 满足上述条件时，双方在博弈初期会选择“假打”。

若按照$\delta = 1$做：

$$u = p(4(n\text{-}2) + 6 + 2) + (1\text{-}p)(4(n\text{-}2) + 2 + 2) = 4(n\text{-}1) + 4p;$$

$$u^{'} = 6 + 2(n\text{-}1)。$$

由$u \geq u^{'}$，解得$n \geq \lceil 3.8 \rceil = 4$。

3. 工人与企业

**注 1**：题干写成“假设有一个企业和一群工人”更不容易产生误导。

**注 2**：补充条件$r_H > r_L$。

1) 企业的利润为$\pi = p(qy_H + (1-q)y_L)\text{-}w$，其中 w 为工资。

当$\pi \geq 0$，即$w \leq p(qy_H + (1-q)y_L)$时，企业会为工人提供工作。

因为工人不知道自己的类型，当$w \geq r$时，工人会接受工作。

因此，当$r \leq p(qy_H + (1-q)y_L)$时，存在工资 w 使得企业愿意为工人提供工作，工人会接受工作。

2) 当工人知道自己的类型时，

**注：这里的均衡有效是与完全信息，即企业知道工人类型的时候的均衡对比。**

a) $r_H \geq py_H$，$r_L \geq py_L$

此时$r \geq p(qy_H + (1-q)y_L)$，企业不会雇佣工人。完全信息的情况下，企业也不会雇佣工人。因此，该均衡有效。

b) $r_H \geq py_H$，$r_L < py_L$

当$\mathrm{w} \geq r_H$时，两类工人都会来参加工作。不妨令$\mathrm{w} = r_H$，$\pi_1 = p(qy_H + (1-q)y_L) - r_H = \mathrm{q}(py_H - r_H) + (1-q)(py_L - r_H)$；

当$r_L \leq \mathrm{w} < r_H$时，只有低生产水平的工人来参加工作。不妨令$\mathrm{w} = r_L$，$\pi_2 = (1\text{-}q)(py_L\text{-}r_L)$。

因此，$\pi_2 > \pi_1$，企业会支付$r_L$的工资，只有低生产水平的工人来参加工作。

完全信息的情况下，企业只会雇佣低生产水平的工人，该均衡有效。

c) $r_H < py_H$，$r_L \geq py_L$

当$\mathrm{w} \geq r_H$时，两类工人都会来参加工作。不妨令$\mathrm{w} = r_H$，$\pi_1 = p(qy_H + (1-q)y_L) - r_H$；

当$r_L \leq \mathrm{w} < r_H$时，只有低生产水平的工人来参加工作。不妨令$\mathrm{w} = r_L$，$\pi_2 = (1\text{-}q)(py_L\text{-}r_L) < 0$。

因此，企业肯定不会选择$\mathrm{w} = r_L$。当且仅当$\pi_1 \geq 0$时，即$p(qy_H + (1-q)y_L) \geq r_H$，企业会提供$r_H$的工资，此时两类工人都来参加工作。但是完全信息下，企业只会雇佣高生产水平的工人，因此均衡无效。

若$p(qy_H + (1-q)y_L) < r_H$，则企业不会雇佣工人。此时均衡也无效。

d) $r_H < py_H$，$r_L < py_L$

当$\mathrm{w} \geq r_H$时，两类工人都会来参加工作。不妨令$\mathrm{w} = r_H$，$\pi_1 = p(qy_H + (1-q)y_L) - r_H = \mathrm{q}(py_H - r_H) + (1-q)(py_L - r_H)$；

当$r_L \leq \mathrm{w} < r_H$时，只有低生产水平的工人来参加工作。不妨令$\mathrm{w} = r_L$，$\pi_2 = (1\text{-}q)(py_L\text{-}r_L)$。

当$\mathrm{q}(py_H - r_H) \geq (1\text{-}q)(r_H\text{-}r_L)$时，即如果雇佣高生产水平工人的期望利润高于付给低生产水平工人的信息租金，$\pi_1 \geq \pi_2$，企业提供$r_H$工资，两类工人都来工作。均衡有效。

但是，当$\mathrm{q}(py_H - r_H) < (1\text{-}q)(r_H\text{-}r_L)$时，企业只提供$r_L$工资，只有低生产水平的人来工作。均衡无效。

4. 青蛙变王子

**此类题目的做题方式：**

- 猜测信号发出者可能采取的分离策略（或混同策略）；
- 给定上一步骤中信号发出者的分离策略，求解信号接收者的最优策略；
- 给定上一步骤中信号接收者的策略，检验第一步中信号发出者的策略是否仍然成立。
- 完整的均衡包括如下元素：信号发出者的策略，信号接收者的信念，信号接收者的策略。

1) 公主正确接收信号。

a) 分离均衡：

- 可能的分离均衡 1：真王子发出“王子”信号，真青蛙发出“青蛙”信号
    - 给定该信号策略，公主看到“王子”信号后知道是真王子，于是选择“亲”（100>5，树状图右上角）；公主看到“青蛙”信号后知道是真青蛙，于是选择“吃”（5>-10，树状图左下角）；
    - 给定公主看到“王子”信号选择“亲”，看到“青蛙”信号选择“吃”，王子没有动机偏离到“青蛙”信号（10>-10，树状图上半部分），但是青蛙有动机偏离到“王子”信号（5>0，树状图下半部分）。

因此，该分离策略不是分离均衡。
- 可能的分离均衡 2：真王子发出“青蛙”信号，真青蛙发出“王子”信号
    - 给定该信号策略，公主看到“青蛙”信号后知道是真王子，于是选择“亲”（100>5，树状图左上角）；公主看到“王子”信号后知道是真青蛙，于是选择“吃”（5>-10，树状图右下角）；
    - 给定公主看到“青蛙”信号选择“亲”，看到“王子”信号选择“吃”，王子没有动机偏离到“王子”信号（10>-10，树状图上半部分），但是青蛙有动机偏离到“青蛙”信号（10>-10，树状图下半部分）。

因此，该分离策略不是分离均衡。
- 可能的混同均衡 1：真王子和真青蛙都发出“王子”信号
    - 给定该信号策略，公主看到“王子”信号后不知道是真王子还是真青蛙，且关于真王子和真青蛙概率的信念没有更新，即真王子的概率为 0.1，真青蛙的概率为 0.9。
      （接下来看树状图的右半部分）公主如果选择“亲”，期望收益为 100*0.1+（-10）*0.9=1；如果选择“吃”，期望收益为 5*0.1+5*0.9=5。因为 1<5，所以公主会选择“吃”。
    - 给定公主看到“王子”信号选择“吃”，青蛙有动机偏离到“青蛙”信号，因为看到“青蛙”信号后无论公主的策略是什么，真青蛙的收益都严格优于选择“王子”信号的结果（10>0>-10，树状图下半部分）。
- 因此，该分离策略不是混同均衡。
- 可能的混同均衡 2：真王子和真青蛙都发出“青蛙”信号
    - 给定该信号策略，公主看到“青蛙”信号后不知道是真王子还是真青蛙，且关于真王子和真青蛙概率的信念没有更新，即真王子的概率为 0.1，真青蛙的概率为 0.9。
      （接下来看树状图的左半部分）公主如果选择“亲”，期望收益为 100*0.1+（-10）*0.9=1；如果选择“吃”，期望收益为 5*0.1+5*0.9=5。因为 1<5，所以公主会选择“吃”。
    - 给定公主看到“青蛙”信号选择“吃”，为了保证王子没有动机偏离到“青蛙”信号，需要有公主在看到“王子”信号后选择“吃”（若公主在看到“王子”信号后选择“亲”，王子有动机偏离到“王子”信号，10>-10）。且若主在看到“王子”信号后选择“吃”，青蛙也不会偏离到“王子”信号（0>-10）。
    - 如何保证公主在看到“王子”信号后选择“吃”？
      这涉及到“非均衡路径”的讨论。假设公主看到“青蛙”信号后，对于真王子的后验概率更新为 q，对于真青蛙的后验概率更新为 1-q。（接下来看树状图的右半部分）公主如果选择“亲”，期望收益为 100*q+（-10）*(1-q)=110q-10；如果选择“吃”，期望收益为 5*q+5*(1-q)=5。

当$q \le 3/22$时，公主看到“青蛙”信号后选择“吃”；
当$q > 3/22$时，公主看到“青蛙”信号后选择“亲”。
当非均衡路径上的后验概率满足$q \le 3/22$时，上述混同均衡成立。
（此处内容略微复杂，考试不会涉及，从严谨角度考虑，答案附上关于分均衡路径的讨论。）

（关于分均衡路径的补充：在不完全信息动态博弈中，弱精炼贝叶斯均衡（weak perfect Bayesian Nash equilibrium）只对均衡路径上的信念体系有通过贝叶斯法则形成的要求。对于非均衡路径上的信息集不能通过贝叶斯法则形成信念。对于非均衡路径上的信息集的信念（概率）可以任意指定只要不和均衡战略相冲突即可。）

因此，混同均衡为

{真王子选择“青蛙”信号，真青蛙选择“青蛙”信号（信号发出者的策略）；
公主看到“青蛙”信号后，认为真王子的概率为 0.1，认为真青蛙概率为 0.9，公主看到“王子”信号后，认为真王子的概率为 q，认为真青蛙概率为 1-q，其中$q \le 3/22$（信号接收者的信念）；
公主看到“青蛙”信号后选择“吃”，看到“王子”信号后选择“吃”（信号接收者的策略）}。

2) 公主不能正确接收信号。

- 可能的分离均衡 1：真王子发出“王子”信号，真青蛙发出“青蛙”信号
  - 给定该信号策略，公主看到“王子”信号（说明公主正确的接收到了信号）后知道是真王子，于是选择“亲”（100>5，树状图右上角）；
  - 公主看到“青蛙”信号后，该信号可能来自王子（信号接收错误）或者来自青蛙。信念更新：

$$P(\text{真王子}|\text{青蛙}) = \frac{0.1\times\frac{2}{5}}{0.1\times\frac{2}{5}+0.9\times1} = \frac{2}{47};$$

$$P(\text{真青蛙}|\text{青蛙}) = \frac{0.9\times1}{0.1\times\frac{2}{5}+0.9\times1} = \frac{45}{47}。$$

  - 公主看到“青蛙”信号后，选择“亲”的期望收益$100\times\frac{2}{47}+(-10)\times\frac{45}{47} = -\frac{250}{47}$，选择“吃”的期望收益为 5，因此公主选择“吃”。
  - 给定公主的上述策略，真王子选择“王子”信号的期望收益为$10\times\frac{3}{5}+(-10)\times\frac{2}{5} = 2$，真王子选择“青蛙”信号的收益为-10，因此真王子选择“王子”信号不会偏离；真青蛙选择“青蛙”信号的收益为 0，真青蛙选择“王子”信号的期望收益为$5\times\frac{3}{5}+(-10)\times\frac{2}{5} = -1$，因此青蛙选择“青蛙”信号不会偏离。

因此，该分离策略是分离均衡：

{真王子选择“王子”信号，真青蛙选择“青蛙”信号；公主看到“青蛙”信号后，认为真王子的概率为$\frac{2}{47}$，认为真青蛙概率为$\frac{45}{47}$，公主看到“王子”信号后，认为真王子的概率为 1；公主看到“青蛙”信号后选择“吃”，看到“王子”信号后选择“亲”}。

- 可能的分离均衡 2：真王子发出“青蛙”信号，真青蛙发出“王子”信号
  - 给定该信号策略，公主看到“王子”信号（说明公主正确的接收到了信号）后知道是真青蛙，于是选择“吃”（5>-10，树状图右下角）；
  - 公主看到“青蛙”信号后，该信号可能来自青蛙（信号接收错误）或者来自王子。信念更新：

$$P(真王子|青蛙)=\frac{0.1\times 1}{0.1\times 1+0.9\times\frac{2}{5}}=\frac{5}{23};$$

$$P(真青蛙|青蛙)=\frac{0.9\times\frac{2}{5}}{0.1\times 1+0.9\times\frac{2}{5}}=\frac{18}{23}。$$

  - 公主看到“青蛙”信号后，选择“亲”的期望收益$100\times\frac{5}{23}+(-10)\times\frac{18}{23}=\frac{320}{23}$，选择“吃”的期望收益为 5，因此公主选择“亲”。
  - 给定公主的上述策略，真王子选择“王子”信号的收益为$(-10)\times\frac{3}{5}+10\times\frac{2}{5}=-2$，真王子选择“青蛙”信号的收益为 10，因此真王子选择“青蛙”信号不会偏离；真青蛙选择“青蛙”信号的收益为 10，真青蛙选择“王子”信号的期望收益为$(-10)\times\frac{3}{5}+5\times\frac{2}{5}=-4$，因此真青蛙会偏离到“青蛙”的信号。

因此，该分离策略不是分离均衡。

5. 次贷危机

1) 次贷危机很大程度上源于一种逆向选择。相对于一般贷款，次级贷款的风险更大，因此要求的利息也更高。对于信用记录良好、拥有足够的抵押品的人，很少会愿意去寻求类似贷款。因此，美国银行大规模地发放次贷，本身就埋下了很大的违约风险。更为严重的是，在金融创新的推动下，次级贷款被打包成为不同的金融产品流入了市场，这更一部让风险扩展到了全社会。最终，随着房产价值的下跌，风险终于被引发，次贷危机由此产生。
2) 在次贷危机的产生过程中，政府并没有消减风险，反而起到了推波助澜的作用。正是由于政府通过降息、鼓励居民拥有住房等手段，让房价泡沫不断膨胀。这使得银行降低了对房产泡沫破灭、次级贷款违约风险爆发的可能性的预测，因此进一步增加了次级贷款的发放。从这个角度讲，是政府助推了次贷危机的出现。