博弈与社会第一次作业

甲组-8 号 张煌昭 1400017707

1. （战争与和平）

(1) 该博弈的支付矩阵如下。丛林法则下，两个参与人均为绝对的利己主义。无论对方怎么选，选择战争都是对自己有利的。

		参与人 2			
		和平		战争	
参与人 1	和平	T=3	T=3	S=1	R=4
	战争	R=4	S=1	P=2	P=2

类似于囚徒困境博弈。该博弈满足囚徒困境的一般表示，满足$\mathrm{R}=4>\mathrm{T}=3>\mathrm{P}=2>\mathrm{S}=1$且$\mathrm{R}+\mathrm{S}=1+4<\mathrm{T}+\mathrm{T}=3+3$的要求。

(2) 该博弈有一个纳什均衡点，为（战争，战争），在支付矩阵中用灰色背景标出，该状态下，若参与人 1 选择战争，则参与人 2 也只能选择战争，反之亦然。

(和平，战争)状态不是纳什均衡点，因为参与人 2 选择战争时，参与人 1 选择战争更优（$2>1$）；(战争，和平)状态不是纳什均衡点，因为参与人 1 选择战争时，参与人 2 选择战争更优（$2>1$）；(和平，和平)状态也不是纳什均衡点，因为参与人 1 选择和平时，参与人 2 选择战争更优（$4>3$），反之亦然。

(战争，战争)不是帕累托最优的。(和平，和平)是它的帕累托改进，因为双方受益均从2提升至3。

(3) 为了让两个参与人走出(战争，战争)状态，需要使得(和平，和平)状态成为纳什均衡点。当任何参与人选择和平时，另一参与人选择战争的收益为$4-\mathrm{P}$，选择和平的收益为3。为了使得(和平，和平)状态成为纳什均衡点，需要满足$4-\mathrm{P}\le 3$，解得$\mathrm{P}\ge 1$，即P至少为1。建立利维坦之后的博弈的支付矩阵如下：

		参与人 2			
		和平		战争	
参与人 1	和平	3	3	1	3
	战争	3	1	2	2

(4) 在自然状态下，两个参与人都会选择战争，他们的收益都为2；而建立利维坦时，两个参与人选择和平，他们的收益都为$3-\mathrm{T}$。只有在建立利维坦时的和平的收益大于自然状态下的战争的收益，人们才会选择建立利维坦，即$3-\mathrm{T}\ge 2$时，人们选择建立利维坦，解得$\mathrm{T}\le 1$。

因此在$\mathrm{T}\in(0,1]$时，人们选择建立利维坦；在$\mathrm{T}\in(1,+\infty)$时，人们选择生活在自然状态。这符合常理，当建立利维坦的成本过高时，人们会选择放弃建立利维坦。

2. （罪与罚）

(1) 对于政府来说，求最优反应曲线，即为求解最大值问题：

$$\mathrm{x}=\mathrm{R}_x(y)=\max_x u_G(x,y)=\max_{\mathrm{x}}\{-cx-\frac{y^2}{x}\}$$

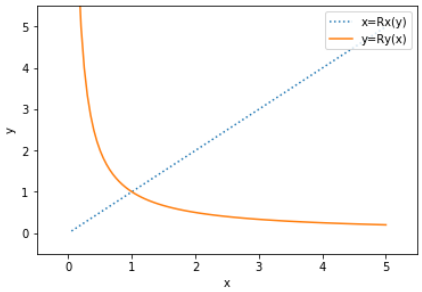
解出$\mathrm{x}=\mathrm{R}_x(y)=\frac{y}{\sqrt{c}}$。

对于罪犯来说，求解最优反应曲线，即为求解最大值问题：

$$\mathrm{y}=\mathrm{R}_y(x)=\max_{\mathrm{y}} u_C(x,y)=\max_{\mathrm{y}}\frac{\sqrt{y}}{1+xy}$$

解出$\mathrm{y} = \mathrm{R}_{\mathrm{y}}(x) = \frac{1}{x}$。

政府和罪犯的最优反应曲线如下图所示。

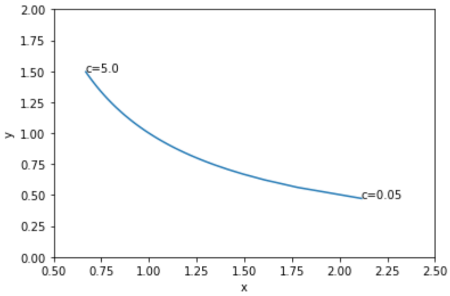


根据曲线可知，存在唯一的纳什均衡：

$$\mathrm{y} = \mathrm{R}_{\mathrm{y}}\left(R_x(y)\right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{c}}{y}$$

解出纳什均衡点为，$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left(c^{-\frac{1}{4}}, c^{\frac{1}{4}}\right)$。

(2) $\mathrm{c} \in [0.05, 5.0]$的纳什均衡点如下图所示。当c增大时，x减小而y增大；反之，当c减小时，x增大而y减小。



这意味着执法成本升高时，会使得执法力度降低，犯罪率升高；而执法成本降低时，会使得执法力度升高，犯罪率降低。这符合实际社会规律。

3. （38 个目击者）

(1) 对v和c分情况讨论如下：

a. 当$\mathrm{v} < \mathrm{c}$时。对各个目击者而言，报警收益为负，而不报警收益非负，因此，不论别人的选择是什么，选择不报警都是最优的。唯一的纯纳什均衡是所有目击者都不报警。

b. 当$\mathrm{v} > \mathrm{c}$时。存在n个纳什均衡，且都是只有一个目击者报警，其余目击者不报警。通过反证法进行证明：

b-1. 假设存在纳什均衡，其中有$\mathrm{k}\ (\mathrm{k} > 1)$目击者报警。k个报警的目击者记为$\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_{\mathrm{k}}$，他们的收益为$\mathrm{u}_{\mathrm{i}_1} = u_{i_2} = \cdots = u_{i_k} = v - c$。在$\mathrm{i}_1, \cdots, i_{k-1}$报警而其余目击者不报警的前提下，$\mathrm{i}_{\mathrm{k}}$选择报警的收益为$\mathrm{v} - \mathrm{c}$，而选择不报警的收益为v，因此$\mathrm{i}_{\mathrm{k}}$的最优选择是不报警。出现矛盾，假设不成立，不可能有多个目击者报警。

b-2. 假设存在纳什均衡，没有任何目击者报警。n个目击者记为$\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \cdots, \mathrm{j}_{\mathrm{n}}$。在$\mathrm{j}_1, \cdots, \mathrm{j}_{\mathrm{n}-1}$均没有报警的前提下，$\mathrm{j}_{\mathrm{n}}$选择不报警的收益为0，选择报警的收益为$\mathrm{v} - \mathrm{c}$，因此$\mathrm{j}_{\mathrm{n}}$的最优选择是报警。出现矛盾，假设不成立，不可能没有目击者报警

b-3. 证明仅有一个目击者报警的状态是纳什均衡。假设$\mathrm{j}_1, \cdots, \mathrm{j}_{\mathrm{n}-1}$没有报警，$\mathrm{j}_n$报警。对于没有报警的$\mathrm{j}_i (1 \leq i < n)$来说，其报警的收益为$\mathrm{v} - \mathrm{c}$，不报警的收益为v，因此不报警是其最优决策；对于报警的j_{n}来说，其报警的收益为$\mathrm{v} - \mathrm{c}$，不报警的收益为0，因此报警是其

最优决策。因此仅有一个目击者报警的状态是纯战略纳什均衡，总共存在这样的n个纯战略纳什均衡。

c. 当$\mathrm{v}=\mathrm{c}$时。存在$\mathrm{n}+1$个纳什均衡，其中n个都是只有一个目击者报警，其余目击者不报警，剩下的1个没有目击者报警。证明如下：

c-1. 假设存在纳什均衡，其中有$\mathrm{k}\ (\mathrm{k}>1)$目击者报警。k个报警的目击者记为$\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2,\cdots,\mathrm{i}_\mathrm{k}$，他们的收益为$\mathrm{u}_{\mathrm{i}_1}=u_{i_2}=\cdots=u_{i_k}=v-c$。在$\mathrm{i}_1,\cdots,i_{k-1}$报警而其余目击者不报警的前提下，$\mathrm{i}_\mathrm{k}$选择报警的收益为$\mathrm{v}-\mathrm{c}=0$，而选择不报警的收益为v，因此$\mathrm{i}_\mathrm{k}$的最优选择是不报警。出现矛盾，假设不成立，不可能有多个目击者报警。因此纳什均衡中，至多有一个目击者报警。

c-2. 在$\mathrm{j}_1,\cdots,\mathrm{j}_{\mathrm{n}-1}$均没有报警的前提下，$\mathrm{j}_\mathrm{n}$选择报警的收益为$\mathrm{v}-\mathrm{c}=0$，选择不报警的收益为0，因此$\mathrm{j}_\mathrm{n}$不论选择报不报警，都是最优选择。即所有目击者都不报警或仅有一个目击者报警都是纯战略纳什均衡，共有$\mathrm{n}+1$个纯战略纳什均衡。

(2) 对v和c分情况讨论如下：

a. 当$\mathrm{v}<\mathrm{c}$时。所有目击者都会以概率1选择不报警，因此该唯一的混合战略纳什均衡退化成为纯战略纳什均衡。

b. 当$\mathrm{v}>\mathrm{c}$时。设任何一个目击者选择报警的概率为p，选择不报警的概率为$1-\mathrm{p}$。对某个目击者而言，其余目击者都不报警的概率为$(1-\mathrm{p})^{n-1}$，而其余目击者中至少一人选择报警的概率为$1-(1-p)^{n-1}$。此时该目击者选择报警的期望收益为$\mathrm{v}-\mathrm{c}$，选择不报警的期望收益为$(1-(1-\mathrm{p})^{n-1})\cdot v$，纳什均衡下两个期望收益相等，则有：

$$\mathrm{v}-\mathrm{c}=(1-(1-\mathrm{p})^{n-1})\cdot v$$

解出$\mathrm{p}=1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$。这是一个该混合战略纳什均衡，该均衡下每个目击者以概率$1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$选择报警。

c. 当$\mathrm{v}=\mathrm{c}$时。目击者选择报警的期望收益为$\mathrm{v}-\mathrm{c}=0$，选择不报警的期望收益为$(1-(1-p)^{n-1})\cdot\mathrm{v}$，纳什均衡下两个期望收益相等，则有：

$$0=(1-(1-p)^{n-1})\cdot v$$

解出$\mathrm{p}=0$。这是一个退化为纯战略纳什均衡的混合战略纳什均衡，所有目击者都会以概率1选择不报警。

(3) 对v和c分情况讨论如下：

a. 当$\mathrm{v}\le\mathrm{c}$时。所有目击者以概率1选择不报警，因此至少一个人报警的概率为0。

b. 当$\mathrm{v}>\mathrm{c}$时。每个目击者以概率$1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$选择报警，以$\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$概率选择不报警。因此n个目击者都选择不报警的概率为$\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}}$，至少一个目击者选择报警的概率为$1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}}$。

综上，至少一人报警的概率为：

$$\mathrm{P}=\begin{cases}0, & v\le c\\ 1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}}, & v>c\end{cases}$$

当$\mathrm{n}\to+\infty$时，$\mathrm{P}\to 0$，即当目击者的人数越来越多时，至少一人报警的概率反而下降，最终收敛至0！

4. （Braess 悖论）

(1) 整个行驶过程中，司机有 A-C-B 和 A-D-B 两种路径的选择。

纳什均衡之下，任何司机都无法因为选择另一条路而使得行驶时间缩短。假设 A-C-B 路径上的车辆为x，则 A-D-B 路径上的车辆为$4000-\mathrm{x}$，那么根据纳什均衡有：

$$\frac{x}{100}+45=\frac{4000-x}{100}+45$$

解出$x=2000$，行驶时间为 65 分钟。

(2) 新建道路后，行驶过程中，司机的选择变为两步。第一步，需要选择 A-C 还是 A-D 子路径，由于$\frac{x}{100}\le\frac{4000}{100}<45$，不论别的司机怎么选择，选择 A-C 路径都是最优的。第二步，选择 C-D-B 还是 C-B 子路径，理由同上，选择 C-D-B 路径是最优的。

将两步合起来，纳什均衡时，需要的行驶时间为 80 分钟，超出了原先的 65 分钟。因此新建的道路并没有缓解交通拥堵问题。

5. （囚徒困境？）

(1) 学生具有“努力学习”和“不学习”两种选择。如果学生的决策是独立做出的，那么学生x的收益u(x)如下：

$$u(x)=\begin{cases} g(x), & study\ hard \\ g'(x), & not\ sdudy\ at\ all \\ 0, & quit\ exam \end{cases},\text{where } \mathrm{g}(x)\gg g'(x)$$

其中$g(\mathrm{x})$和$g'(\mathrm{x})$为学生努力学习后或直接靠天资最终获得的分数，并且努力学习获得的分数$g(\mathrm{x})$显然远大于不学习靠天资获得的分数$g'(\mathrm{x})$。

在这种情况下，不论别的同学怎么决策，该学生的最优选择都是努力学习。因而在独立决策的条件之下。纳什均衡点是所有人都努力学习，并且该纳什均衡点唯一。

但是对于不同的学生而言，不管努力学习还是不学习获得的分数（$g(\mathrm{x})$和$g'(\mathrm{x})$）都是和自己的天分等等相关的。所有人都努力学习，最终的成绩分布大致是会和所有人都不学习依靠天资的成绩分布是相同的。因此学生会陷入囚徒困境之中。

(2) 囚徒困境的条件之一是“独立决策”，而在本问题的现实场景之中，学生可以相互沟通。通过沟通，学生可以达成合作，甚至可以形成惩罚机制来对不遵守“弃考规则”的同学进行惩罚，因此整个博弈的条件发生改变。假设学生建立了惩罚机制和奖励机制，收益u(x)发生改变如下：

$$u(x)=\begin{cases} g(x)-P, & study\ hard\ and\ take\ exam \\ g'(x)-P, & not\ sdudy\ at\ all\ and\ take\ exam \\ 0+V, & not\ take\ exam \end{cases},\text{where } \mathrm{P}\gg \mathrm{g}(x)\gg g'(x)$$

其中P为对不遵守弃考规则的惩罚（例如被孤立等），并且该惩罚极大；而V为合作的奖励（例如被允许加入小团体等）。

在这种情况下，最优的策略变为不学习并且弃考。囚徒困境被突破了。

(3) 可以修改给分机制。缺考学生不参与该给分制度，而直接给 0 分。这样的话，收益u(x)变为：

$$u(x)=\begin{cases} g(x)-P, & study\ hard\ and\ take\ exam \\ g'(x)-P, & not\ sdudy\ at\ all\ and\ take\ exam \\ -\infty+V=-\infty, & not\ take\ exam \end{cases},\text{where } \mathrm{P}\gg \mathrm{g}(x)\gg g'(x)$$

其中弃考的收益为负无穷。这样使得弃考永远不会成为备选决策。学生重新陷入到囚徒困境之中。