博弈与社会第二次作业

甲组-8 号 张煌昭 1400017707

1. （荒岛谈判）

(1) 两人都获得 50 公斤玉米和土豆。

鲁滨孙的效用为$\mathrm{U}_1=C_1+\frac{P_1}{2}=50+\frac{50}{2}=75$。

星期五的效用为$\mathrm{U}_2=C_2+P_2=50+50=100$。

这种分配方式不是帕累托最优的。当鲁滨孙获得 100 公斤玉米，星期五获得 100 公斤土豆时，鲁滨孙的效用为$\mathrm{U}_1=100$，星期五的效用为$\mathrm{U}_2=100$，此时鲁滨孙的效用提升而星期五的效用不变。

(2) 不达成合作时，两人通过决斗决定给养的归属，考虑两人的期望效用。

鲁滨孙的期望效用是$\mathrm{U}_1=\left(100+\frac{100}{2}\right)\times 80\%+0\times 20\%=120$。

星期五的期望效用是$\mathrm{U}_2=0\times 80\%+(100+100)\times 20\%=40$。

两人的威胁点是$(120,40)$。

(3) 鲁滨孙的边际贡献为$\mathrm{V}-120-40=\mathrm{V}-160$，星期五的边际贡献为$\mathrm{V}-40-120=\mathrm{V}-160$。两人的边际贡献相等，因此$\mathrm{h}=\mathrm{k}=\frac{1}{2}$。

假设鲁滨孙分配到c公斤的玉米和p公斤的土豆（$\mathrm{c,p}\in[0,100]$），在合作时鲁滨孙的效用为$\mathrm{x}=\mathrm{c}+\frac{\mathrm{p}}{2}$，星期五的效用为$\mathrm{y}=200-\mathrm{c}-\mathrm{p}$，总效用为$\mathrm{V}=200-\frac{\mathrm{p}}{2}$；在非合作时鲁滨孙的期望效用为$\mathrm{a}=120$，星期五的期望效用为$\mathrm{b}=40$。则问题变为：

$$\max(x-a)^{\frac{1}{2}}(y-b)^{\frac{1}{2}}, s.t. x+y=V$$

经过如下求解：

$$\frac{x-a}{y-b}=1\Rightarrow\frac{c+\frac{p}{2}-120}{200-c-p-40}=1\Rightarrow 4c+3p=560$$

得到$\mathrm{p}=\frac{560-4c}{3}, c\in[65,100]$。

最终鲁滨孙获得c（$\mathrm{c}\in[65,100]$）公斤的玉米和$\frac{560-4c}{3}$公斤的土豆，效用为$\mathrm{U}_1=\frac{280+c}{3}$，星期五获得$100-\mathrm{c}$公斤的玉米和$\frac{4c-260}{3}$公斤的土豆，效用为$\mathrm{U}_2=\frac{560-c}{3}$。

(4) 在新的效用函数下，不达成合作时，鲁滨孙的期望效用是$\mathrm{U}_1=240$，星期五的期望效用是$\mathrm{U}_2=40$。因此威胁点是$(240,40)$。

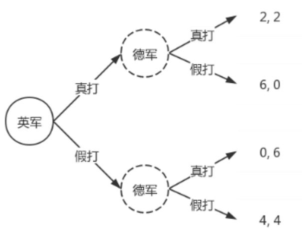
按(3)中同样的过程求解，$\mathrm{x}=2\mathrm{c}+\mathrm{p}$，$\mathrm{y}=200-\mathrm{c}-\mathrm{p}$，$\mathrm{V}=200+\mathrm{c}$，$\mathrm{a}=240$，$\mathrm{b}=40$。

求解得到$\mathrm{p}=200-\frac{3\mathrm{c}}{2}, \mathrm{c}\in\left[\frac{200}{3},100\right]$。

最终鲁滨孙获得c（$\mathrm{c}\in\left[\frac{200}{3},100\right]$）公斤玉米和$200-\frac{3\mathrm{c}}{2}$公斤土豆，效用为$\mathrm{U}_1=200+\frac{\mathrm{c}}{2}$，星期五获得$100-\mathrm{c}$公斤玉米和$\frac{3\mathrm{c}}{2}-100$公斤土豆，效用为$\mathrm{U}_2=\frac{c}{2}$。

2. （西线无战事）

(1) 假定英军先动，德军后动（由于双方对称，因此先后顺序并没有影响）。只进行一期的博弈树如下：



进行逆向归纳。若英军选择真打，则此子博弈下德军的最优选择是真打；若英军选择假打，则此子博弈下德军的最优选择是真打。在此基础之上，英军的最优选择是真打。因此精炼纳什均衡为（真打，真打）。

(2) 考虑无限期重复博弈。

触发战略下，第1期博弈双方选择（假打，假打）;某方一旦选择真打，则此后将一直选择真打；一旦对方选择真打，则本方将在下一期博弈及此后一直选择真打。

假设在第T期博弈之前（$\mathrm{T}>1$），双方的选择始终为（假打，假打）。若此后双方一直选择假打，则双方的效用均为$\mathrm{U_E}=U_G=4+4\delta+4\delta^2+\cdots=\frac{4}{1-\delta}$；若德军在当轮及以后一直选择真打（或英军首先选择真打），效用为$\mathrm{U_G}=6+2\delta+2\delta^2+\cdots=6+\frac{2\delta}{1-\delta}$，而英军当轮选择假打，之后一直选择真打，效用为$\mathrm{U_E}=0+2\delta+2\delta^2+\cdots=\frac{2\delta}{1-\delta}$。双方在第T期选择（假打，假打），需要满足如下不等式：

$$\begin{cases}\dfrac{4}{1-\delta}\geq 6+\dfrac{2\delta}{1-\delta}\\ \dfrac{4}{1-\delta}\geq\dfrac{2\delta}{1-\delta}\end{cases}$$

解得$\delta\geq\frac{1}{2}$。此时双方会在每一期选择（假打，假打）。

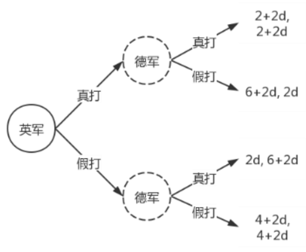
针锋相对战略下，第1期双方选择·（假打，假打）；某一方一旦选择真打，则对方将在下一期选择真打。

假设在第T期博弈之前（$\mathrm{T}>1$），双方的选择始终为（假打，假打）。若在当轮德军选择真打，英军选择假打（或英军首先选择真打），则此后双方会轮流选择真打，那么英军的效用为 $\mathrm{U_E}=6\delta+6\delta^3+6\delta^5+\cdots=\frac{6\delta}{1-\delta^2}$，德军的效用为$\mathrm{U_G}=6+6\delta^2+6\delta^4+\cdots=\frac{6}{1-\delta^2}$。双方在第T期选择（假打，假打），需要满足如下不等式：

$$\begin{cases}\dfrac{4}{1-\delta}\geq\dfrac{6}{1-\delta^2}\\ \dfrac{4}{1-\delta}\geq\dfrac{6\delta}{1-\delta^2}\end{cases}\Rightarrow 2\delta^2-3\delta+1\leq 0$$

解得$\delta\geq\frac{1}{2}$。此时双方会在每一期选择（假打，假打）。

(3) 进行逆向归纳。在最后一期博弈，根据(1)，双方会选择（真打，真打）。在倒数第二期博弈中，博弈树如下：



此时相当于最后一期的博弈中所有效用加上常数值，纳什均衡仍为（真打，真打）。以此类推，递推至任何一期博弈，纳什均衡都是（真打，真打）。因此该博弈的子博弈精炼纳什均衡是（真打，真打）。

(4)

a) 该博弈可以表示为下表：

		$t = 1$	$t = 2$
德军	非理性（p）	假打	X
	理性（$1 - p$）	真打	真打
英军	理性	X	真打

英军在第1期真打的期望效用为$8p + 4(1 - p)$，假打的期望效用为$10p + 2(1 - p)$。英军在第1期选择假打，需要满足如下不等式：

$$2 + 8p \geq 4 + 4p$$

解得$p \geq \frac{1}{2}$，此时英军会在第一期选择假打。然而只有在德军是非理性的情况下，才会有"西线无战事"，即在$p \geq \frac{1}{2}$时，以概率p在第1期出现"西线无战事"。

b) 该博弈可以表示为下表：

		$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
德军	非理性（p）	假打	X	Y
	理性（$1 - p$）	?	真打	真打
英军	理性	X	Y	真打

理性的德军需要权衡第1期的选择。若选择当期"最优"的真打会暴露自己是理性的，从而使得第2期陷入囚徒困境之中。理性的德军会在相信X = 假打时，在第1期选择假打，以掩盖自己的理性类型，使得第2期获得更高的效用。因此只要X = Y = 假打，理性的德军选择? = 假打就是最优的。

将X和Y的不同组合展开如下表，英军的期望效用标注在表中。

		$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
德军	非理性（p）	假打	真打	真打
	理性（$1 - p$）	假打	真打	真打
英军	理性	真打	真打	真打
$6 + 2 + 2 = 10$				

德军	非理性（p）	假打	真打	假打
	理性（$1-p$）	假打	真打	真打
英军	理性	真打	假打	真打

$$6+6\mathrm{p}+2(1-p)=8+4p$$

德军	非理性（p）	假打	假打	真打
	理性（$1-p$）	假打	真打	真打
英军	理性	假打	真打	真打

$$4+6\mathrm{p}+2(1-p)+2=8+4p$$

德军	非理性（p）	假打	假打	假打
	理性（$1-p$）	假打	真打	真打
英军	理性	假打	假打	真打

$$4+4\mathrm{p}+6p+2(1-p)=6+8p$$

理性的德军在第1期假打，英军在前2期假打，需要满足如下不等式：

$$\begin{cases} 6+8p\geq 10 \\ 6+8p\geq 8+4p \end{cases}$$

解得$\mathrm{p}\geq\frac{1}{2}$，此时会出现理性的德军在第1期假打，英军在前2期假打。

(5) 非理性的一方采取冷酷战略，第1期选择假打；一旦选择真打，则此后将一直选择真打；一旦对方选择真打，则本方将在下一期博弈及此后一直选择真打。这使得理性的一方一旦选择真打，则不论对方是否理性，双方将一直选择（真打，真打）。假设博弈预期进行T期。

理性的一方从第1期就选择真打的最优情况下的效用为$6+2+2+\cdots=6+2(T-1)$。

理性的一方选择假打，若对方为非理性的，则双方一直选择（假打，假打）；反之，最坏情况下，对方从第1期就选择真打，则双方从第2期起一直选择（真打，真打）。最坏情况下的期望效用为$4\mathrm{T}\cdot\mathrm{p}+(0+2+2+\cdots)(1-\mathrm{p})=4T\cdot p+2(T-1)(1-p)$。

为了使得假打合作出现，需要满足如下不等式：

$$4\mathrm{T}\cdot\mathrm{p}+2(\mathrm{T}-1)(1-\mathrm{p})\geq 2\mathrm{T}+4$$

解得$\mathrm{T}\geq\frac{3-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}=29$，此时出现假打合作。

短期战争的预期博弈轮数很少，不足以出现假打合作；而一战持续时间很长，预期博弈轮数很大，因此会出现西线无战事等现象。

3. （工人与企业）

(1) 工人无法选择高产出还是低产出，而是以概率q为高产出，以概率$1-\mathrm{q}$为低产出。企业选择雇佣或者不雇佣，工人选择应聘或者不应聘，支付矩阵如下：

			企业	
			雇佣	不雇佣
工人	高产出(q)	应聘	$(r_H, y_H\cdot p-r_H)$	(0,0)
		不应聘	(0,0)	(0,0)
	低产出$(1-\mathrm{q})$	应聘	$(r_L, y_L\cdot p-r_L)$	(0,0)
		不应聘	(0,0)	(0,0)

达到企业雇佣工人，工人接受工作的纳什均衡，需要满足如下条件：

$$\begin{cases} q(y_H\cdot p-r_H)+(1-q)(y_L\cdot p-r_L)\geq 0 \\ q\cdot r_H+(1-q)\cdot r_L\geq 0 \end{cases}$$

解得企业雇佣工人，工人接受工作的条件为$\mathrm{q}\cdot\mathrm{y_H}+(1-q)\cdot y_L\geq\frac{r}{p}$。

(2) 企业无法知道工人是高产出还是低产出，而工人自己知道，因此考虑企业的期望效用和工人的效用。企业雇佣工人的期望效用为$\mathrm{U_{company}}$，工人的接受工作的效用为$\mathrm{U_{worker}}$，如下：

$$\mathrm{U_{company}} = q(y_H \cdot p - r_H) + (1-q)(y_L \cdot p - r_L)$$

$$\mathrm{U_{worker}} = \begin{cases} r_H, & high\,efficiency \\ r_L, & low\,efficiency \end{cases}$$

可以发现，工人的最优选择总是应聘并接受工作，而企业需要根据参数考虑最优选择。

a) 在该参数条件下，$\mathrm{U_{company}} \le 0$且$\mathrm{U_{worker}} > 0$，因此企业选择不雇佣工人，而工人选择应聘。最终的结果为企业不雇佣工人，工人得不到工作。不是纳什均衡。

b) 在该参数条件下，

1. $(y_H \cdot p - r_H) \ge (1-q)(y_L \cdot p - r_L)$时，$\mathrm{U_{company}} \le 0$且$\mathrm{U_{worker}} > 0$，此时与 a)相同；

2. 否则，$\mathrm{U_{company}} > 0$且$\mathrm{U_{worker}} > 0$，企业选择雇佣工人，工人选择应聘并接受工作。最终的结果为企业雇佣工人，供热接受工作。是纳什均衡。

c) 在该参数条件下，

1. $(y_H \cdot p - r_H) \le (1-q)(y_L \cdot p - r_L)$时，$\mathrm{U_{company}} \le 0$且$\mathrm{U_{worker}} > 0$，此时与 a)相同；

2. 否则，$\mathrm{U_{company}} > 0$且$\mathrm{U_{worker}} > 0$，此时与 b)-2 相同。

d) 在该参数条件下，$\mathrm{U_{company}} > 0$且$\mathrm{U_{worker}} > 0$，因此企业选择雇佣工人，工人选择应聘并接受工作。最终的结果为企业雇佣工人，供热接受工作。是纳什均衡。

4. （青蛙变王子）

(1) 若王子和青蛙都宣称发出 frog 信号，则公主会在接收 frog 信号时选择 eat，在接收 prince 信号时选择 kiss 或 eat。公主接收 prince 信号时选择 kiss 的情况不是精炼的，因为王子和青蛙都会反悔。

若王子和青蛙都宣称发出 prince 信号，则公主会在接收 frog 信号时选择 kiss 或 eat，在接收 prince 信号时选择 eat。公主接收 frog 信号时选择 kiss 的情况也不是精炼的，因为王子和青蛙都会反悔。

若王子宣称发出 frog 信号，青蛙宣称发出 prince 信号，则公主在接受 frog 信号时选择 kiss，在接收 prince 信号时选择 eat。这一情况不是精炼的，因为青蛙会反悔。

若王子宣称发出 prince 信号，青蛙宣称发出 frog 信号，则公主在接收 frog 信号时选择 eat，在接收 prince 信号时选择 kiss。这一情况不是精炼的，因为青蛙会反悔。

综上，该博弈具有两个混同均衡，公主接收到任何信号都选择 eat，王子和青蛙都发出 prince 或 frog 信号。

(2) 首先，有概率如下：

$$\begin{cases} p(p) = 0.1 \;\; p(f) = 0.9 \\ p(receive\ p|send\ p) = 0.6 \\ p(receive\ f|send\ p) = 0.4 \\ p(receive\ f|send\ f) = 1 \end{cases}$$

若王子宣称发出 frog 信号，青蛙宣称发出 prince 信号。则公主接收到的所有 prince 信号都来自青蛙，最优选择为 eat；接收到的 frog 信号中，$\frac{0.1}{0.1+0.9\times0.4} = \frac{5}{23}$来自王子，选择 kiss 的期望效用为$\frac{5}{23}\times100+\frac{18}{23}\times(-10)\approx 13.9$，选择 eat 的期望效用为$5$，最优选择为 kiss。青蛙在发出 frog 信号的效用为10，在发出 prince 信号的效用为$-10\times0.6+10\times0.4=-0.2$，这一情况不是精炼的，因为青蛙会反悔。

若王子宣称发出 prince 信号，青蛙宣称发出 frog 信号。则公主在接收到的所有 prince

信号都来自王子，最优选择为 kiss；接受到的 frog 信号中，$\frac{0.9}{0.9+0.1\times0.4}=\frac{45}{47}$来自青蛙，选择 kiss 的期望效用为$\frac{45}{47}\times(-10)+\frac{2}{47}\times 100\approx -5.3$, 选择 eat 的期望效用为$5$, 最优选择为 eat。青蛙在发出 frog 信号的效用为0，在发出 prince 信号的效用为$5\times 0.6+0=3$，这一情况不是精炼的，因为青蛙会反悔。

综上，不会有分离均衡。

5. （次贷危机）

(1) 银行的贷款客户有“有能力偿还”和“没有能力偿还”两种，在信息完全的条件下，银行可以甄别客户的类型，从而以较低的利率和较少的担保借贷给有能力偿还的客户，而以较高的利率和较多的担保借贷给没有能力偿还的客户。但是在现实社会中，由于信息不完全，银行不知道某个客户是有能力偿还的还是没有能力偿还的。因此只能退而求其次，使用平均利率和平均担保来进行借贷。这就导致了想贷款的用户都是没有能力偿还的客户，而有能力偿还的客户得不到银行的贷款。

这样就促使信贷机构以低利率高担保的方式进行次级借贷，这一方式的风险高于银行的放贷方式，因为借贷的普遍为没有能力偿还的客户。信贷机构收到房市价格等多方便因素的影响，必须提高利率来维持自身收益时，客户会发现选择还贷的收益越来越低。当信贷机构的利率高过阈值时，客户纷纷选择抵押房产不进行偿还。这导致信贷机构通过借贷的方式无法维持经营，必须通过别的手段。

借贷机构经过出售次级贷款给银行等方式，试图自保；而银行却相当于借贷给了没有能力偿还的客户，这与前面提到的相违背。最终借贷机构将风险扩散至整个金融市场，将危机扩大为全球性的经济危机。

(2) 我认为应当加强政府监管。首先，需要建立更强的信用评级机制。使得信息对称，从而避免银行贷款的逆向选择。其次，政府需要对信贷机构进行监管，避免这种漏洞引起市场动荡。