

博弈与社会第三次作业

甲组-8号 张煌昭 1400017707

1. (咖啡店的信息甄别问题)

(1) 对咖啡店老板而言, 其效用为 $u_B(i) = T_i - 5 \cdot q_i$, 其中 $i \in \{H, L\}$ 为顾客的类型。由于咖啡店是垄断的, 因此咖啡店老板需要使得 $u_B(i)$ 尽量大并且 u_i 非负, 即:

$$\max_{q_i, T_i} T_i - 5 \cdot q_i, \text{ 且 } u_i \geq 0$$

显然, 咖啡店老板需要在 u_i 非负的前提下, 使得 T_i 尽量大而 q_i 尽量小。因此, 对不同类型的客户的优化问题可以化为:

$$\max_{q_H} 20\sqrt{q_H} - 5 \cdot q_H, \text{ 且 } T_H = 20\sqrt{q_H}$$

$$\max_{q_L} 15\sqrt{q_L} - 5 \cdot q_L, \text{ 且 } T_L = 15\sqrt{q_L}$$

解出 $q_H = 4, T_H = 40, q_L = 2, T_L = 21.21$ 。因此咖啡店老板为 H 型消费者提供4杯40元的组合, 为 L 型消费者提供2杯21.21元的组合。

(2) 在第(1)问中, H 型和 L 型顾客均选择对其最优的定制方案。由于定制方案均为咖啡店老板利益最大的方案, 因此即使老板不知道顾客的类型, 按这两种方案提供数量-价格组合即可。即咖啡店老板提供4杯40元和2杯21.21元的两种组合。

2. (拍卖问题)

(1) 由于两位竞拍者是对称的, 考虑竞拍者 1。竞拍者 1 竞拍成功的概率为:

$$P(b_1 > b_2) = \frac{b_1 - k \cdot 0}{k \cdot 1 - k \cdot 0} = \frac{b_1}{k}$$

因此, 竞拍者 1 的期望效用为:

$$E_1 = (v_1 - b_1) \cdot P(b_1 > b_2) = (v_1 - b_1) \frac{b_1}{k}$$

对其极值, 令 $\frac{dE_1}{db_1} = \frac{-b_1 + (v_1 - b_1)}{k} = 0$, 解得 $b_1 = \frac{v_1}{2}$, 即 $k = \frac{1}{2}$ 。对竞拍者 2 也能得到相同的结论。

(2) 考虑竞拍者 1。竞拍者 1 竞拍成功的概率为:

$$P(b_1 > b_2) = \frac{b_1 - k \cdot 0}{k \cdot 1 - k \cdot 0} = \frac{b_1}{k}$$

因此, 竞拍者 1 的期望效用为:

$$E_1 = (v_1 - b_2) \cdot P(b_1 > b_2) = (v_1 - b_2) \frac{b_1}{k}$$

该函数对 b_1 是单调递增的, 因此 b_1 越大, E_1 也越大。 b_1 最大为 v_1 , 否则竞拍者 1 一定效用一定非正。因此 $b_1 = v_1$, 即 $k = 1$ 。对竞拍者 2 也能得到相同的结论。

3. (团队生产中的道德风险)

(1) 总剩余的计算如下:

$$E = R - \sum_{i=1}^N c(e_i) = \sum_{i=1}^N \left(e_i - \frac{e_i^2}{2} \right)$$

对于成员 i 而言, 求导数 $\frac{dE}{de_i} = 1 - e_i$ 。 E 取极值时有 $\frac{dE}{de_i} = 0$, 解得此时 $e_i = 1$ 。因此总剩

余最大化时每个人的最有努力程度为 $e_i^* = 1$ 。

(2) 成员的效用为：

$$E_i = \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{N} - c(e_i) = \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{N} - \frac{e_i^2}{2}$$

求导数 $\frac{dE_i}{de_i} = \frac{1}{N} - e_i$ 。 E_i 取极值时有 $\frac{dE_i}{de_i} = 0$ ，解得此时 $e_i = \frac{1}{N}$ 。因此纳什均衡时每个成员

的努力水平为 $e_i^{Nash} = \frac{1}{N}$ ，其与 e_i^* 的差值为 $e_i^{Nash} - e_i^* = \frac{N-1}{N}$ 。

在这个场景中，整个团体是委托人，每个成员 i 都是代理人。团体与各个成员之间存在隐性冲突，努力程度 e_i 是由各个成员 i 自己控制的变量且无法被团体观察到。团体期望各个成员都努力，但各个成员并没有足够的激励而努力。

(3) 随着 N 不断增大， $e_i^{Nash} - e_i^*$ 递增，并不断趋于1。

(4) 在合作化的初期，各个成员都具备足够的激励，成员和团体并不存在利益冲突，其最优选择是一致的，因而会取得一定的成果；而随着时间的流逝，成员的积极性等下降，激励不足，出现第(2)问中的利益冲突，成员不再愿意努力，最终合作失败。

4. (保险市场的道德风险)

(1) 不提高警惕时，客户的期望效用为：

$$u = 0.8 \ln 100000 + 0.2 \ln 80000 \approx 11.4683$$

在提高警惕时，客户的期望效用为：

$$u = 0.85 \ln 98250 + 0.15 \ln 78250 \approx 11.4611$$

因此，在不能为损失保险时，客户不会愿意提高警惕。

(2) 保险公司向客户提供2万元的保险，索取 y 元的保费。若客户提高警惕，则保险公司的期望收益为：

$$u' = y - 0.15 \times 20000$$

客户的期望效用为：

$$u = \ln(98250 - y)$$

优化问题为 $\max_y u'$ ，且满足 $u > 11.4611$ 和 $u' > 0$ 。解得 $y = 3300.54$ 。因此保险公司提供2万元保险，并收取3300.54元的保费。

(3) 办理保险后，客户不提高警惕时的期望效用为：

$$u = \ln(10000 - 3300.54)$$

提高警惕时，客户的期望效用为：

$$u = \ln(98250 - 3300.54)$$

显然客户会选择不提高警惕。在这一情况下，保险公司的期望效用为：

$$u' = 3300.54 - 0.2 \times 20000 = -699.46$$

即保险公司出现了亏本。

(4) 假设保险公司只提供1万元的保险，收取 y 元的保费。若客户不提高警惕，则保险公司和客户的期望收益分别为 u'_1 和 u_1 ，如下：

$$u'_1 = y - 2000$$

$$u_1 = 0.8 \ln(100000 - y) + 0.2 \ln(90000 - y)$$

若客户提高警惕，则保险公司和客户的期望收益分别为 u'_2 和 u_2 ，如下：

$$u'_2 = y - 1500$$

$$u_2 = 0.85 \ln(98250 - y) + 0.15 \ln(88250 - y)$$

为了使得客户提高警惕，需要满足 $u_2 > u_1$ ，然而绘制图线发现无论在何时都无法满足

该不等式，因此该客户不可能提高警惕。因而保险公司不应当为该客户办理保险。

5.

在善人为主流的群体之中，作恶的支付远远低于行善的支付，并且同伴也会交流行善的信息，在这样的群体之中，行善是最优的。最终，会达到善人的静态演化稳定战略。

同理的，在不善人为主流的群体中，也会在最终达到不善人的静态演化稳定。