



温州大學
WENZHOU UNIVERSITY

机器学习-高等数学回顾

黄海广 副教授

2021年07月

1.导数定义:

导数和微分的概念

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

$$\text{或者: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

2.左右导数导数的几何意义和物理意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为：

$$\text{左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, (x = x_0 + \Delta x)$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3.函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导。

Th2: 若函数在点 x_0 处可导, 则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 反之则不成立。即函数连续不一定可导。

Th3: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

4.平面曲线的切线和法线

切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程： $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$

5.四则运算法则

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在点 x 可导, 则:

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (uv)' = uv' + vu' \qquad d(uv) = u dv + v du$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0) \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

6.基本导数与微分表

(1) $y = c$ (常数) 则: $y' = 0$ $dy = 0$

(2) $y = x^\alpha$ (α 为实数) 则: $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ $dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$

(3) $y = a^x$ 则: $y' = a^x \ln a$ $dy = a^x \ln a dx$ 特例: $(e^x)' = e^x$ $d(e^x) = e^x dx$

(4) $y = \log_a x$ 则:

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \quad dy = \frac{1}{x \ln a} dx \quad \text{特例: } y = \ln x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$(5) y = \sin x \quad \text{则: } y' = \cos x \quad d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(6) y = \cos x \quad \text{则: } y' = -\sin x \quad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$(7) y = \tan x \quad \text{则: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$(8) y = \cot x \quad \text{则: } y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$(9) y = \sec x \quad \text{则: } y' = \sec x \tan x \quad d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$(10) y = \csc x \quad \text{则: } y' = -\csc x \cot x \quad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$(11) y = \arcsin x \text{ 则: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(12) y = \arccos x \text{ 则: } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(13) y = \arctan x \text{ 则: } y' = \frac{1}{1+x^2} \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(14) y = \operatorname{arccot} x \text{ 则: } y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(15) y = \operatorname{sh} x \text{ 则: } y' = \operatorname{ch} x \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$$

$$(16) y = \operatorname{ch} x \text{ 则: } y' = \operatorname{sh} x \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$$

7. 复合函数, 反函数, 隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则: 设 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续, 在点 x 处可导且 $f'(x) \neq 0$, 则

其反函数在点 x 所对应的 y 处可导, 并且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则: 若 $\mu = \varphi(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(\mu)$ 在对应点 $\mu (\mu = \varphi(x))$ 可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导, 且 $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$

(3) 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法:

1) 方程两边对 x 求导, 要记住 y 是 x 的函数, 则 y 的函数是 x 的复合函数. 例如 $\frac{1}{y}$, y^2 , $\ln y$, e^y 等

均是 x 的复合函数. 对 x 求导应按复合函数连锁法则做。

2) 公式法. 由 $F(x, y) = 0$ 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, 其中, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

3) 利用微分形式不变性

8.常用高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(6) 莱布尼兹公式: 若 $u(x), v(x)$ 均 n 阶可导, 则:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \text{ 其中 } u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$$

9.微分中值定理, 泰勒公式

Th1:(费马定理)

若函数 $f(x)$ 满足条件:

(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 并且在此邻域内恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$,

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导,则有 $f'(x_0) = 0$

Th3: (拉格朗日中值定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导;

则在 (a, b) 内存在一个 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Th4: (柯西中值定理)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足条件:

(1) 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$, $g'(x)$ 均存在, 且 $g'(x) \neq 0$

则在 (a, b) 内存在一个 ξ , 使
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

10.洛必达法则

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型不定式极限)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$; $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导
(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

法则I' ($\frac{0}{0}$ 型不定式极限)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$; 存在一个 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$; $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导(在 x_0 处可除外)

且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

同理法则II'($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限)仿法则I'可写出

11. 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n + 1$ 阶导数, 则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x , 在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ , 使得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒余项。

令 $x_0 = 0$, 则 n 阶泰勒公式: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \dots$

其中(1) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ξ 在0与 x 之间。(1)式称为麦克劳林公式

常用五种函数在 $x_0 = 0$ 处的泰勒公式：

$$1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\text{或} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin \left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi \right)$$

$$\text{或} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$\text{或} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$5) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$$

$$\text{或} (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

12.函数单调性的判断

Th1: 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 区间内可导, 如果对 $\forall x \in (a, b)$, 都有 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) , 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的 (或单调减少) 。

Th2: (取极值的必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

Th3: (取极值的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $f'(x_0)$ 不存在.) 。

(1)若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由 “+” 变 “-” , 则 $f(x_0)$ 为极大值;

(2)若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由 “-” 变 “+” , 则 $f(x_0)$ 为极小值;

(3)若 $f'(x)$ 经过 $x = x_0$ 的两侧不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值。

Th4: (取极值的第二充分条件)设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x) \neq 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则:

当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值; 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值. 注: 如果 $f''(x_0) = 0$, 此方法失效。

13.渐近线的求法

(1)水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 则 $y = b$ 称为函数 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

(2)铅直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则 $x = x_0$ 称为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。

(3)斜渐近线 若 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, 则 $y = ax + b$ 称为 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

14.函数凹凸性的判断

Th1: (凹凸性的判别定理) 若在 I 上 $f''(x) < 0$ (或 $f''(x) > 0$) , 则 $f(x)$ 在 I 上是凸的 (或凹的)。

Th2: (拐点的判别定理1)若在 x_0 处 $f''(x) = 0$, (或 $f''(x)$ 不存在) , 当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

Th3: (拐点的判别定理2)设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数, 且 $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

15.弧微分

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

16.曲率

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

对于参数方程: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}$

17.曲率半径

曲线在点 M 处的曲率 k ($k \neq 0$)与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系: $\rho = \frac{1}{k}$

1. <https://github.com/fengdu78/WZU-machine-learning-course>
《高等数学》（上、下），同济大学

谢谢!

