



温州大學
WENZHOU UNIVERSITY

机器学习-线性代数回顾

黄海广 副教授

2021年07月

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

1.行列式

3

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

1.行列式

4

1.行列式按行（列）展开定理

$$(1) \text{ 设 } A = (a_{ij})_{n \times n}, \text{ 则: } a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$\text{或 } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$\text{即 } AA^* = A^*A = |A|E, \text{ 其中: } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji}) = (A_{ij})^T$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

1.行列式

5

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$, 但 $|A \pm B| = |A| \pm |B|$ 不一定成立。

(3) $|kA| = k^n |A|$, A 为 n 阶方阵。

(4) 设 A 为 n 阶方阵, $|A^T| = |A|$; $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (若 A 可逆), $|A^*| = |A|^{n-1}$, $n \geq 2$

(5) $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$, A, B 为方阵, 但 $\begin{vmatrix} O & A_{m \times m} \\ B_{n \times n} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \cdot |A||B|$ 。

(6) 范德蒙行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

设 A 是 n 阶方阵, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 A 的 n 个特征值, 则 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

2.矩阵

6

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

2.矩阵

7

矩阵

$m \times n$ 个数 a_{ij} 排成 m 行 n 列的表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵,

简记为 A , 或者 $(a_{ij})_{m \times n}$ 。若 $m = n$, 则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

2.矩阵

8

矩阵的线性运算

1.矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记为 $A + B = C$ 。

2.矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记为 kA 。

3.矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 称为 AB 的乘积, 记为 $C = AB$ 。

2.矩阵

9

4. A^T 、 A^{-1} 、 A^* 三者之间的关系

$$(1) (A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (kA)^T = kA^T, (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$(2) (A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},$$

但 $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$ 不一定成立。

$$(3) (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (n \geq 3), \quad (AB)^* = B^* A^*, \quad (kA)^* = k^{n-1} A^* \quad (n \geq 2)$$

但 $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$ 不一定成立。

$$(4) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^{-1})^* = (AA^*)^{-1}, (A^*)^T = (A^T)^*$$

2.矩阵

10

5.有关 A^* 的结论

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E$$

$$(2) |A^*| = |A|^{n-1} \ (n \geq 2), \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A \ (n \geq 3)$$

$$(3) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则 } A^* = |A|A^{-1}, \quad (A^*)^* = \frac{1}{|A|}A$$

$$(4) \text{ 若 } A \text{ 为 } n \text{ 阶方阵, 则: } r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

2.矩阵

11

6.有关 A^{-1} 的结论

A 可逆 $\Leftrightarrow AB = E; \Leftrightarrow |A| \neq 0; \Leftrightarrow r(A) = n;$

$\Leftrightarrow A$ 可以表示为初等矩阵的乘积;

$\Leftrightarrow A$ 无零特征值;

$\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。

2.矩阵

12

7.有关矩阵秩的结论

(1) 秩 $r(A)$ =行秩=列秩;

(2) $r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$;

(3) $A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1$;

(4) $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$;

(5) 初等变换不改变矩阵的秩

(6) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$,

若 $AB = 0$

则: $r(A) + r(B) \leq n$

(7) 若 A^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB) = r(B)$;

若 B^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB) = r(A)$;

若 $r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow r(AB) = r(B)$;

若 $r(A_{m \times s}) = n \Rightarrow r(AB) = r(A)$ 。

(8) $r(A_{m \times s}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解

2.矩阵

13

8.分块求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

这里 A, B 均为可逆方阵。

2.矩阵

14

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

3.向量

15

1.有关向量组的线性表示

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

\Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关

$\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示。

(3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$ 。

3.向量

16

2.有关向量组的线性相关性

(1)部分相关，整体相关；整体无关，部分无关.

(2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n]| \neq 0$, n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]| = 0$.

② $n + 1$ 个 n 维向量线性相关。

③ 若 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性无关，则添加分量后仍线性无关；或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关。

3.向量

17

3.有关向量组的线性表示

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

\Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关

$\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示。

(3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$

3.向量

18

4.向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

设 $r(A_{m \times n}) = r$ ，则 A 的秩 $r(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为：

- (1) 若 $r(A_{m \times n}) = r = m$ ，则 A 的行向量组线性无关。
- (2) 若 $r(A_{m \times n}) = r < m$ ，则 A 的行向量组线性相关。
- (3) 若 $r(A_{m \times n}) = r = n$ ，则 A 的列向量组线性无关。
- (4) 若 $r(A_{m \times n}) = r < n$ ，则 A 的列向量组线性相关。

3.向量

19

5. n 维向量空间的基变换公式及过渡矩阵

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是向量空间 V 的两组基, 则基变换公式为:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

其中 C 是可逆矩阵, 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

3.向量

20

6.坐标变换公式

若向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 即: $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_n\beta_n$, 则向量坐标变换

公式为 $X = CY$ 或 $Y = C^{-1}X$, 其中 C 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

7.向量的内积

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha$$

3.向量

21

8.Schmidt正交化

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则可构造 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 使其两两正交, 且 β_i 仅是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ 的线性组合($i = 1, 2, \dots, n$), 再把 β_i 单位化, 记 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}$, 则 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ 是规范正交向量组。

$$\text{其中 } \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \quad \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2,$$

.....

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}$$

3.向量

22

9.正交基及规范正交基

向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为规范正交基。

4.线性方程组

23

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

唯一解, $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$, 其中 D_j 是把 D 中第 j 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式。

4.线性方程组

25

2. n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。 $\Leftrightarrow \forall b, Ax = b$ 总有唯一解, 一般地,
 $r(A_{m \times n}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。

3.非齐次线性方程组有解的充分必要条件, 线性方程组解的性质和解的结构

(1) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(A_{m \times n}) = m$, 则对 $Ax = b$ 而言必有 $r(A) = r(A : b) = m$, 从而 $Ax = b$ 有解。

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_s 为 $Ax = b$ 的解, 则 $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_sx_s$ 当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ 时仍为 $Ax = b$ 的解;
但当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 0$ 时, 则为 $Ax = 0$ 的解。特别 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 为 $Ax = b$ 的解; $2x_3 - (x_1 + x_2)$ 为 $Ax = 0$ 的解。

(3) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A}) \Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示。

4.线性方程组

26

4.奇次线性方程组的基础解系和通解，解空间，非奇次线性方程组的通解

(1) 齐次方程组 $Ax = 0$ 恒有解(必有零解)。当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $Ax = 0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的解空间，解空间的维数是 $n - r(A)$ ，解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系。

4.线性方程组

27

(2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 即:

1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的解;

2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关;

3) $Ax = 0$ 的任一解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_t\eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的通解, 其中 k_1, k_2, \dots, k_t 是任意常数。

5.矩阵的特征值和特征向量

28

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

5.矩阵的特征值和特征向量

29

1.矩阵的特征值和特征向量的概念及性质

(1) 设 λ 是 A 的一个特征值, 则 $kA, aA + bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*$ 有一个特征值分别为 $k\lambda, a\lambda + b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{|A|}{\lambda}$, 且对应特征向量相同 (A^T 例外)。

(2) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$, 从而 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有特征值。

(3) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值, 对应特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$,

若: $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$,

则: $A^n\alpha = k_1A^n\alpha_1 + k_2A^n\alpha_2 + \dots + k_sA^n\alpha_s = k_1\lambda_1^n\alpha_1 + k_2\lambda_2^n\alpha_2 + \dots + k_s\lambda_s^n\alpha_s$ 。

5.矩阵的特征值和特征向量

30

2.相似变换、相似矩阵的概念及性质

(1) 若 $A \sim B$, 则

1) $A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*$

2) $|A| = |B|, \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}, r(A) = r(B)$

3) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 对 $\forall \lambda$ 成立

5.矩阵的特征值和特征向量

31

3.矩阵可相似对角化的充分必要条件

(1) 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 可对角化 \Leftrightarrow 对每个 k_i 重根特征值 λ_i , 有 $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$

(2) 设 A 可对角化, 则由 $P^{-1}AP = \Lambda$, 有 $A = P\Lambda P^{-1}$, 从而 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$

(3) 重要结论

1) 若 $A \sim B, C \sim D$, 则 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$.

2) 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B), |f(A)| \sim |f(B)|$, 其中 $f(A)$ 为关于 n 阶方阵 A 的多项式。

3) 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数(重根重复计算) = 秩(A)

5.矩阵的特征值和特征向量

32

4.实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角阵

(1)相似矩阵：设 A, B 为两个 n 阶方阵，如果存在一个可逆矩阵 P ，使得 $B = P^{-1}AP$ 成立，则称矩阵 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$ 。

(2)相似矩阵的性质：如果 $A \sim B$ 则有：

1) $A^T \sim B^T$ 2) $A^{-1} \sim B^{-1}$ (若 A, B 均可逆)

3) $A^k \sim B^k$ (k 为正整数) 4) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ ，从而 A, B 有相同的特征值

5) $|A| = |B|$ ，从而 A, B 同时可逆或者不可逆

6) 秩(A) = 秩(B), $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ ， A, B 不一定相似

6.二次型

33

01 行列式

02 矩阵

03 向量

04 线性方程组

05 矩阵的特征值和特征向量

06 二次型

6.二次型

34

1. n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次函数

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, 其中 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 称为 n 元二次型, 简称二次型.

若令 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, 这二次型 f 可改写成矩阵向量形式 $f = x^T A x$. 其中 A 称

为二次型矩阵, 因为 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 所以二次型矩阵均为对称矩阵, 且二次型与对称矩阵一一对应, 并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩.

6.二次型

35

2.惯性定理，二次型的标准形和规范形

(1) 惯性定理

对于任一二次型，不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准型，其正负惯性指数与所选变换无关，这就是所谓的惯性定理。

(2) 标准形

二次型 $f = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ 经过合同变换 $x = C y$ 化为 $f = x^T A x = y^T C^T A C$

$y = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2$ 称为 $f (r \leq n)$ 的标准形。在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，与所作的合同变换有关，但系数不为零的平方项的个数由 $r(A)$ (秩) 唯一确定。

6.二次型

36

(3) 规范形

任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2,$$

其中 r 为 A 的秩, p 为正惯性指数, $r - p$ 为负惯性指数, 且规范型唯一。

6.二次型

37

3. 用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性

设 A 正定 $\Rightarrow kA(k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定； $|A| > 0, A$ 可逆； $a_{ii} > 0$ ，且 $|A_{ii}| > 0$

A, B 正定 $\Rightarrow A + B$ 正定，但 AB, BA 不一定正定

A 正定 $\Leftrightarrow f(x) = x^T A x > 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式全大于零 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值大于零

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 $n \Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P 使 $A = P^T P$

\Leftrightarrow 存在正交矩阵 Q ，使 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，其中 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.正定

$\Rightarrow kA(k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定； $|A| > 0, A$ 可逆； $a_{ii} > 0$ ，且 $|A_{ii}| > 0$ 。

参考文献

38

1. <https://github.com/fengdu78>
2. 《线性代数》，同济大学

谢谢!

