信号与系统

Lecture 13

第八章: 离散时间系统的变换域分析

§8.1 引言

§8.2 z变换定义，收敛区

§8.3 z变换的基本性质

第八章主要内容:

- 序列的z变换，z变换的收敛区 (1)
- z变换的性质 (1)
- 反z变换 (2)
- s平面与z平面的映射关系 (2)
- 离散时间系统的z变换分析法 (3)
- 系统函数的极点分布对系统时域特性的影响 (3)
- 离散序列傅里叶变换与频率响应 (4)

复习

- 线性差分方程的解法
- 零输入响应
- 单位函数响应
- 卷积和
- 零状态响应

§8.2 z变换定义及其收敛区

一、z变换的定义

考虑理想抽样信号的单边拉氏变换:

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$\int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

即 $LT\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$

令 $z = e^{sT}$，再令 $T = 1$，得到序列x(n)的

单边z变换公式:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$

记为:

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

双边z变换公式:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$

关于单边z变换与双边z变换:

(1) 对因果序列: $x(n) = x(n)u(n)$

双边z变换 = 单边z变换

(2) 因果序列 $x(n)$ 右移后仍是因果序列

双边z变换 = 单边z变换

(3) 因果序列 $x(n)$ 左移后不再是因果序列

双边z变换 ≠ 单边z变换

(4) 对一般序列 $x(n)$ 而言:

其单边z变换就是 $x(n)u(n)$ 的双边z变换

二、z变换的收敛区(ROC)

回忆拉普拉斯变换收敛区：

(1) 为什么存在拉普拉斯变换收敛区的问题?

(2) 单边拉普拉斯变换收敛区在s平面上是怎样的?

和拉普拉斯变换一样，z变换也有收敛区间。例如：

$$ZT(u(n))=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\ldots$$

当$|z|\leq 1$时，上述级数不收敛。

1. 收敛区的定义

z变换的收敛区的定义：对序列x(n)，使得下列级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

收敛的z值的集合。

序列z变换级数收敛的充分条件是绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)z^{-n}\right| < \infty$$

绝对可和的判别方法

(1) 比值判别法（达朗贝尔准则）

$$设\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\text{，则}\begin{cases}\rho<1, & 级数收敛\\ \rho>1, & 级数发散\\ \rho=1, & 不能确定\end{cases}$$

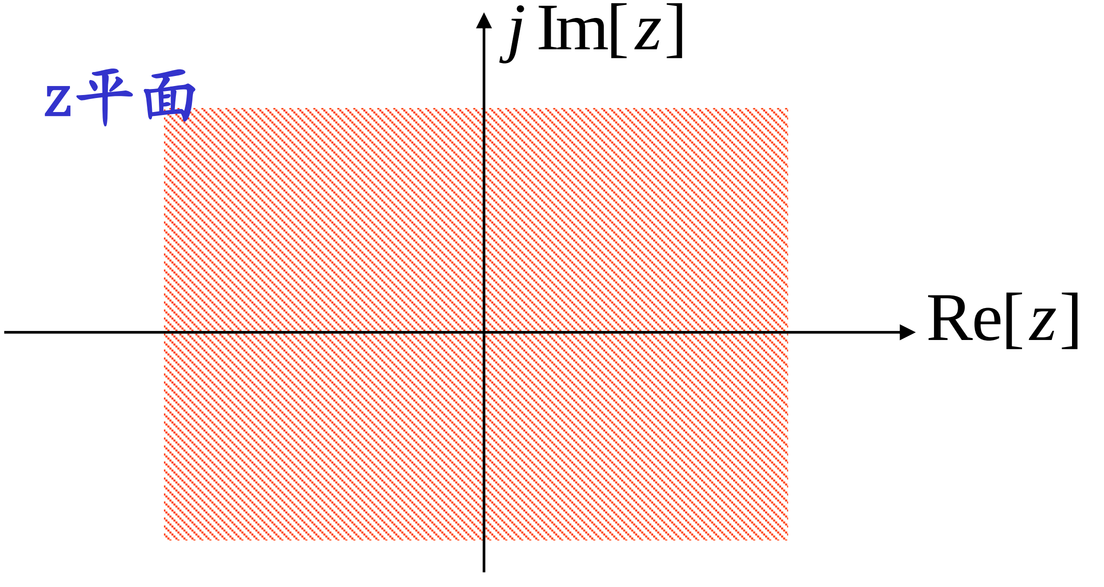
(2) 根式判别法（柯西准则）

$$设\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho\text{，则}\begin{cases}\rho<1, & 级数收敛\\ \rho>1, & 级数发散\\ \rho=1, & 不能确定\end{cases}$$

2. 几类序列双边z变换的收敛区

- 有限长序列
- 右边序列
- 左边序列
- 双边无限序列

$$z = e^{sT}$$

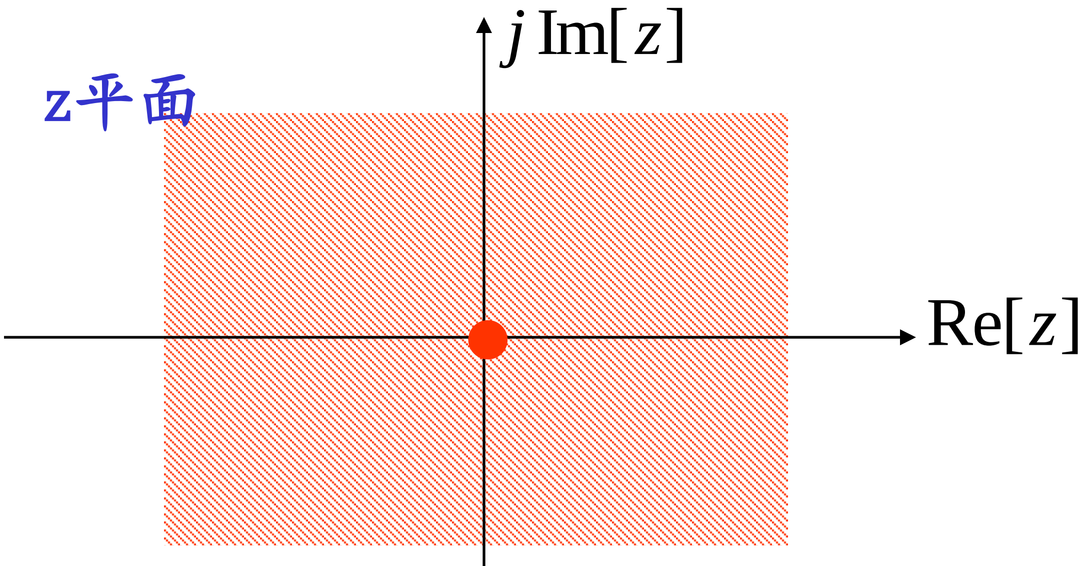


（1）有限长序列： $x(n)=\begin{cases} x(n) & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & n<n_1, n>n_2 \end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} = x(n_1)z^{-n_1}+x(n_1+1)z^{-(n_1+1)}+\ldots+x(n_2)z^{-n_2}$$

$n_1 \le 0$时，$z=\infty$和$n_2>0$时$z=0$外，所有z值都收敛

z平面



不包含0和∞的z平面称为**有限z平面**。

有限长序列在有限z平面上收敛。

收敛区是否还可包含0或∞，则具体情况具体分析。

（2）右边序列：$x(n)=\begin{cases} x(n) & n \ge n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases}$

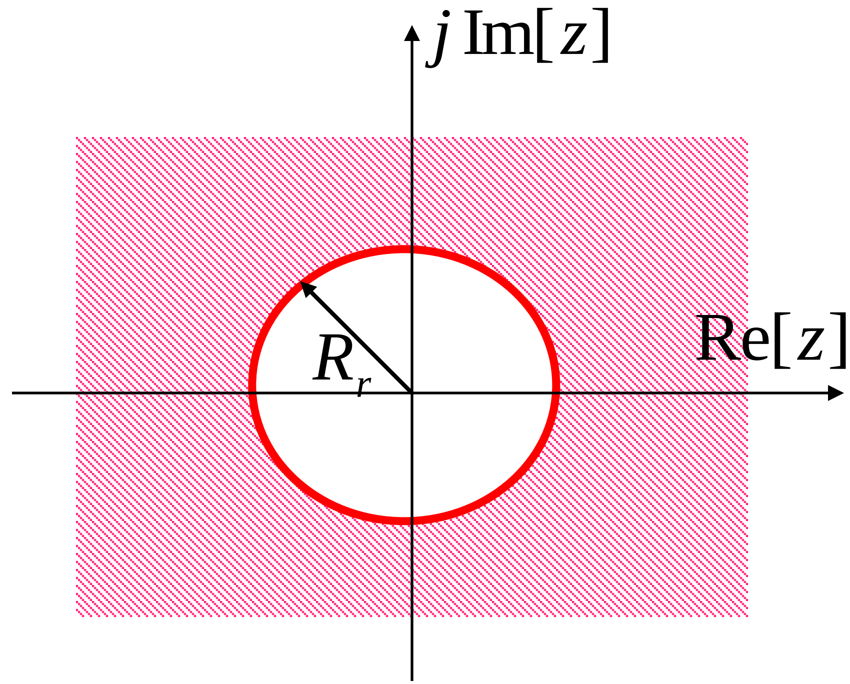
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n) z^{-n}\right|}<1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}<|z|$$

$$|z|>\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}=R_r$$

收敛半径



$n_1<0$时，$R_r<|z|<\infty$

否则，$R_r<|z| \le \infty$

右边序列的收敛区在某个圆的圆外。

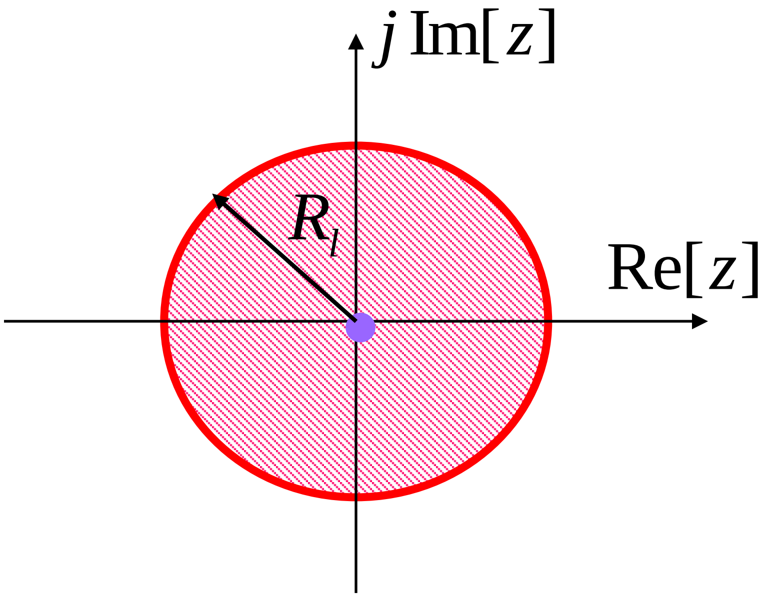
（3）左边序列： $x(n)=\begin{cases} x(n) & n\le n_2 \\ 0 & n>n_2 \end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \Rightarrow X(z) \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^{m} \overset{n=m}{=} \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(-n)z^n\right|}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}<\left|z\right|^{-1}$$

$$\left|z\right|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}}=R_l$$



$n_2>0$时，$0<\left|z\right|<R_l$

否则，$0\le\left|z\right|<R_l$

左边序列的收敛区在某个圆的圆内。

（4）双边无限序列：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad -\infty\le n\le\infty$$

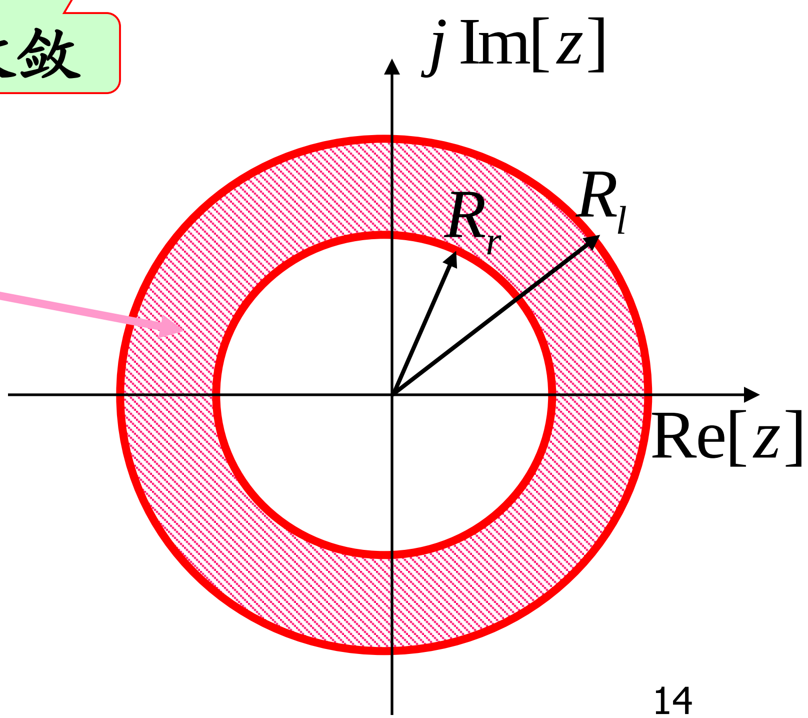
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

圆内收敛　　　　圆外收敛

$R_l > R_r \Rightarrow$ 有环状收敛区

$R_l < R_r \Rightarrow$ 不收敛

双边无限序列的收敛区为某个圆环内。



小结：

(1) 有限长双边序列的双边z变换的收敛区一般为$0<|z|<\infty$；有限长因果序列双边z变换的收敛区为$|z|>0$；有限长非因果序列双边z变换的收敛区为$|z|<\infty$。

(2) 无限长右边序列双边z变换的收敛区为$|z|>|z_0|$，即收敛区为以$|z_0|$为半径的圆外区域。

(3) 无限长左边序列双边z变换的收敛区为$|z|<|z_0|$，即收敛区为以$|z_0|$为半径的圆内区域。

(4) 无限长双边序列双边z变换的收敛区为$|z_1|<|z|<|z_2|$，即收敛区位于以$|z_1|$为半径和以$|z_2|$为半径的两个圆之间的环状区域。

注意：不同序列的双边z变换可能相同，即序列与其双边z变换不是一一对应的。序列的双边z变换连同收敛域一起与序列才是一一对应的。

三、典型序列的z变换（P387表8－1）

(1) $f(k)=\delta(k)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$$

（2）$f_1(k)=\delta(k-m),\ f_2(k)=\delta(k+m), m$为正整数.

$$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-m)z^{-k}=z^{-m}\qquad |z|>0$$

$$F_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k+m)z^{-k}=z^{m}\qquad |z|<\infty$$

(3) $f(k)=\varepsilon(k)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varepsilon(k)z^{-k}=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

(4) $f(k)=-\varepsilon(-k-1)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[-\varepsilon(-k-1)]z^{-k}=\frac{z}{z-1} \qquad |z|<1$$

验证：不同序列的双边z变换可能相同，即序列与其双边z变换不是一一对应的。序列的双边z变换连同收敛域一起与序列才是一一对应的。

(5) $f(k)=a^k\varepsilon(k)(a$为实数、虚数、复数).

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k\varepsilon(k)z^{-k}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

(6) $f(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[-a^k\varepsilon(-k-1)]z^{-k}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|<|a|$$

启示：序列双边z变换的收敛区，一般是某个圆的圆外/内。“某个圆”的半径可以通过z变换的表达式来确定。

例1 求下列序列的z变换及其收敛区。

$$1.x(n)=(\frac{1}{3})^{n}u(n)$$

$$2.x(n)=-(\frac{1}{3})^{n}u(-n-1)$$

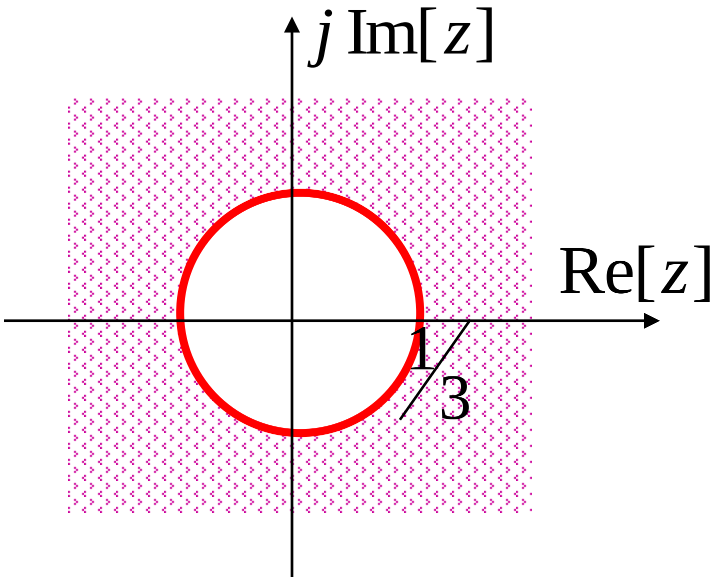
$$3.x(n)=(\frac{1}{3})^{n}[u(n)-u(n-8)]$$

$$4.x(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^{n} & n\geq 0\\ 2^{n} & n<0\end{cases}$$

解： 1. $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ 右边序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$R_r=\frac{1}{3} \qquad \therefore |z|>\frac{1}{3}$$



2. $x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$

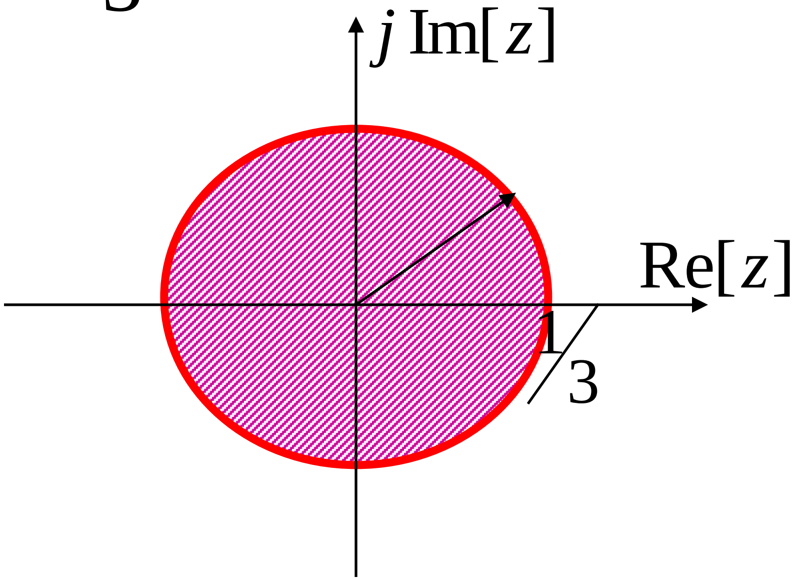
左边序列

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \overset{n=-m}{=} -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$=1-\sum_{m=0}^{\infty}(3z)^m = 1-\frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(3z)^n\right|}<1$$

$$|z|<\frac{1}{3}=R_l$$



3. $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}[u(n)-u(n-8)]$ 有限长序列

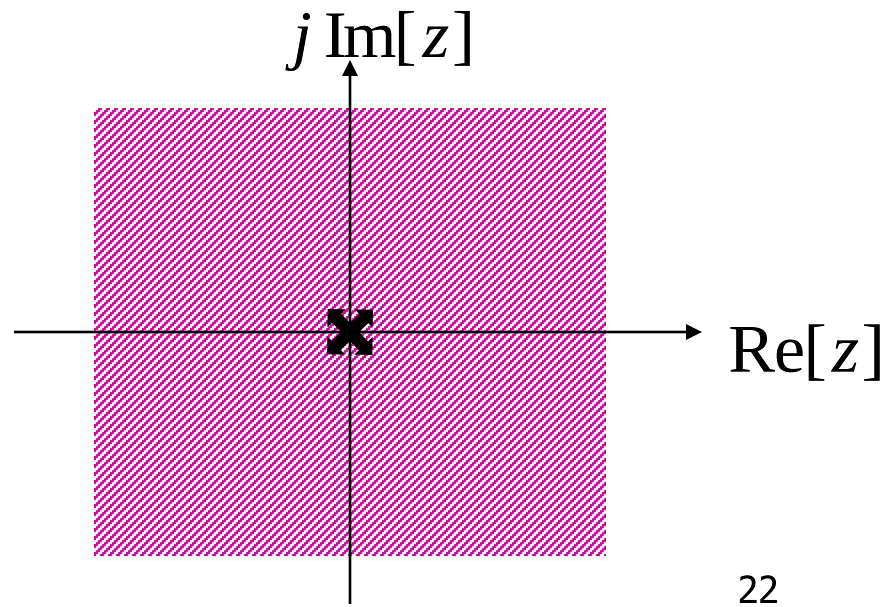
$$X(z)=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1-(\frac{1}{3}z^{-1})^{8}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z^{8}-(\frac{1}{3})^{8}}{z^{7}(z-\frac{1}{3})}$$

收敛域为除了0的整个Z平面

$$z^{8}=(\tfrac{1}{3})^{8}e^{j2k\pi}\Rightarrow z=\tfrac{1}{3}e^{j\frac{2K\pi}{8}}$$

→ 8个零点

$z=0$ → 7阶极点

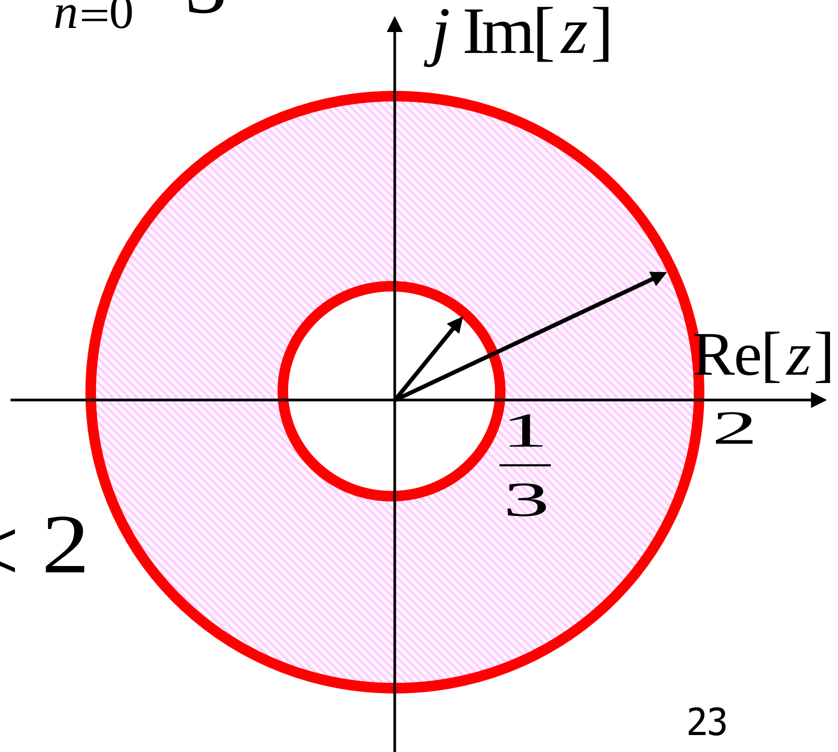


4. $x(n)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^n & n\ge 0\\ 2^n & n<0\end{cases}$ 双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n z^{-n}$$

$$=-\frac{z}{z-2}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$\therefore X(z)$的收敛域为$\frac{1}{3}<|z|<2$



例2（例题8-2） 求序列 $f(k)=v^{|k|}$ 的z变换。

解: $$f(k)=v^{|k|}=v^{k}u(k)+v^{-k}u(-k-1)$$

记 $$f_1(k)=v^{k}u(k),\ f_2(k)=v^{-k}u(-k-1)$$

则 $$F_1(z)=\frac{z}{z-v},\qquad |z|>|v|$$

$$F_2(z)=-\frac{z}{z-v^{-1}},\qquad |z|<|v|^{-1}$$

当|v|大于或等于1时，左边序列与右边序列的z变换没有公共的收敛域，故f (k) 的双边z变换不存在；
当|v|<1时， f (k) 的双边z变换存在：

$$F(z)=\frac{z}{z-v}-\frac{z}{z-v^{-1}},\quad |v|<|z|<|v|^{-1}$$

Z变换的基本性质

序号	性质	信号	Z 变换	收敛域
0	定义	$x(n)$	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$	R
1	线性	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_1$
2	移序	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	R，但在原点或无穷远点可能加上或删除
3	频移	$e^{j\omega n}x(n)$	$X(e^{j\omega}z)$	R
4	尺度变换	$z_0^n x(n)$	$X(z_0^{-1}z)$	$\lvert z_0 \rvert R$
5	z 域微分	$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R
6	卷积	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_1$
7	时间反转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	R 的倒置
8	求和	$\sum_{n=-\infty}^{n} x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \cap (\lvert z \rvert > 1)$
9	初值定理	$x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$		
10	终值定理	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$		

1. 线性

在离散时间系统中，若有：

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z),\ f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$$

则

$$af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z)$$

正弦序列的单边z变换:

$$ZT[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\sin\omega_0 n] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2j]$$

$$= \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}\right)/2j$$

$$= \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$$

余弦序列的单边z变换:

$$ZT[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\cos\omega_0 n] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2]$$

$$= (\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}})/2$$

$$= \frac{z(z - \cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$$

2. 时移(位移/移序)性

(1) 有始序列 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

单边z变换

左移
$$\begin{cases} f(k+1) \leftrightarrow z(F(z)-f(0)) \\ f(k+n) \leftrightarrow z^{n}(F(z)-\sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i}), n>0 \end{cases}$$

单边z变换

右移
$$\begin{cases} f(k-1) \leftrightarrow z^{-1}F(z) \\ f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z), n>0 \end{cases}$$

(2) 双边序列－单边z变换

左移

$$\begin{cases} f(k+1) \leftrightarrow z(F(z)-f(0)) \\ f(k+n) \leftrightarrow z^{n}(F(z)-\sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i}), n>0 \end{cases}$$

右移

$$\begin{cases} f(k-1) \leftrightarrow z^{-1}[F(z)+f(-1)z] \\ f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}[F(z)+\sum_{i=1}^{n} f(-i)z^{i}], n>0 \end{cases}$$

(3) 双边序列－双边z变换

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z), n>0 \text{或} n<0$$

3. z域尺度变换特性

在离散时间系统中，若有：

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

则

$$a^k f(k) \leftrightarrow F(\frac{z}{a})$$

4. z域微分特性

在离散时间系统中，若有:

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

则

$$kf(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

5. 卷积定理

若 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z),\ f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$

则 $f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

6. 初值和终值定理

有始序列

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$\lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$$

例3 用卷积定理，由单位阶跃序列的z变换求单位斜变序列 $ku(k)$ 的z变换。

解: $$ku(k) = u(k) * u(k-1)$$

$$ZT[ku(k)] = ZT[u(k)] \cdot ZT[u(k-1)]$$

$$u(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$u(k-1) \leftrightarrow z^{-1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}, |z| > 1$$

$$ku(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

小结

(1) z变换与拉普拉斯变换的关系。

(2) 双、单边z变换的定义与收敛区。

(3) z变换的性质类似于其它变换，但时移特性，单、双边变换明显不同。

课外作业

阅读:8.1－8.3；预习:8.4－8.5

作业:8.2　8.3(6)