



信号与系统

Lecture 10

第七章：离散时间系统的时域分析

§ 7.1 引言

§ 7.3 离散时间系统的描述和模拟



内容:

典型离散信号（序列） (1)

抽样定理：连接连续与离散的桥梁 (2)

离散系统的描述方法：差分方程、模拟框图 (1)

离散系统的时域分析法：经典法，卷积法

零输入响应、单位函数响应和零状态响应 (3)

重点与难点：

常用序列之间的关系

抽样定理

离散信号的卷积和

单位函数响应



本讲内容

- 离散时间信号的描述及有关概念
 - 离散时间信号
 - 序列的分类
 - 离散信号的变换与运算
- 离散时间系统的描述和有关概念
 - 离散时间系统的线性、移不变、因果性
 - 数学描述—差分方程
 - 离散时间系统的模拟

§ 7.1 引言

一. 信号的分类

时间	{	连续	幅度	{	连续
		离散			量化

模拟信号：时间、幅度均连续	}	连续时间信号
量化信号：时间连续、幅度量化		
抽样信号：时间离散、幅度连续	}	离散时间信号
数字信号：时间离散、幅度量化		

连续时间信号是连续变量 t 的函数。

离散时间信号是离散变量 t_k （或 k ）的函数（或称序列）。



系统：



连续时间系统：系统的输入与输出**都是**连续时间信号。

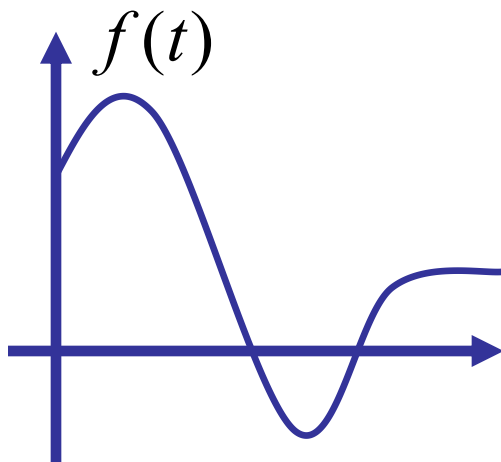
离散时间系统：系统的输入与输出**都是**离散时间信号。

比较：

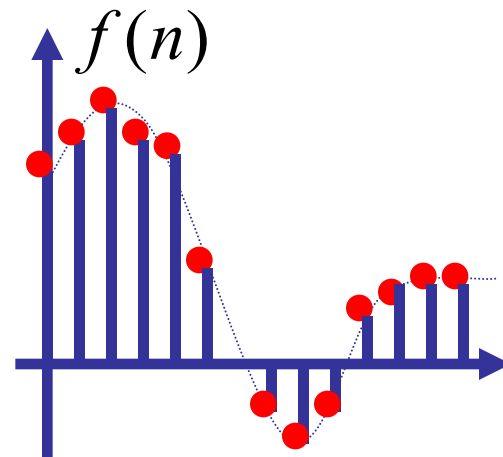
- 连续系统
- 微分方程
- 零输入/状态响应
- 单位冲激响应
- 拉氏变换
- 连续傅立叶变换
- 卷积定理
- 系统函数

- 离散系统
- 差分方程
- 零输入/状态响应
- 单位函数响应
- z 变换
- 离散傅立叶变换
- 卷积定理
- 系统函数

二. 离散时间信号（序列）



- 单位冲激函数
- 单位阶跃信号
- 门函数
- ...
- 奇偶对称、周期性

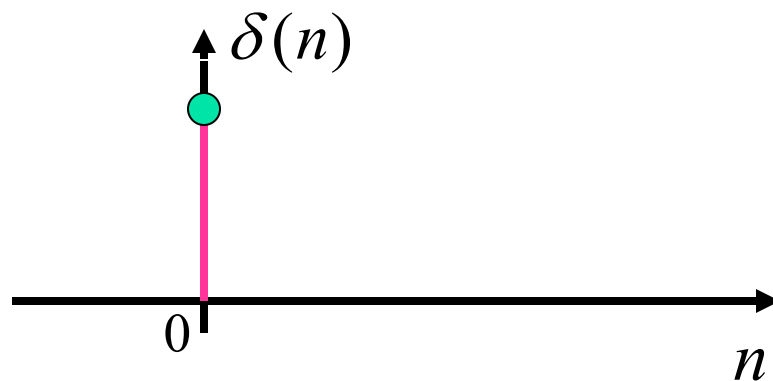


- 单位函数
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- ...
- 奇偶对称、周期性

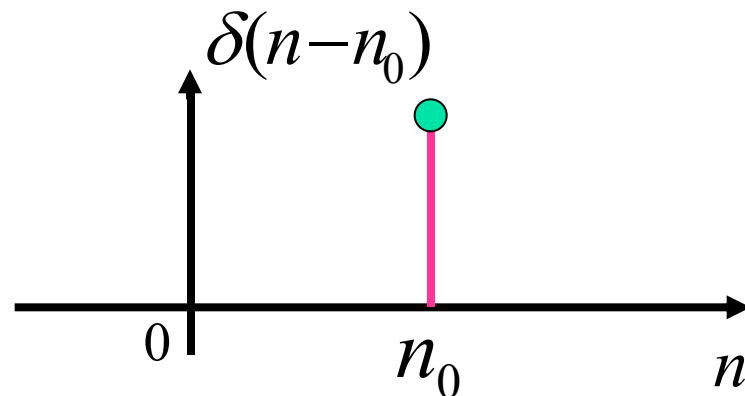
1. 几种常用的离散信号

■ 单位函数

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$



$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1 & (n = n_0) \\ 0 & (n \neq n_0) \end{cases}$$





冲激信号的性质：

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

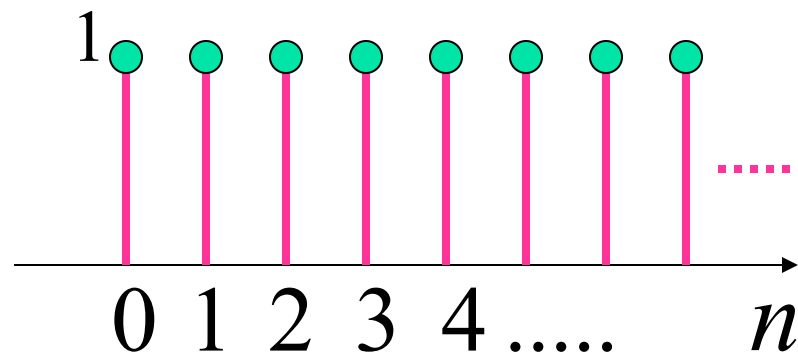
$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$f(n)\delta(n) = f(0)\delta(n)$$

$$f(n)\delta(n - n_0) = f(n_0)\delta(n - n_0)$$

■ 单位阶跃序列

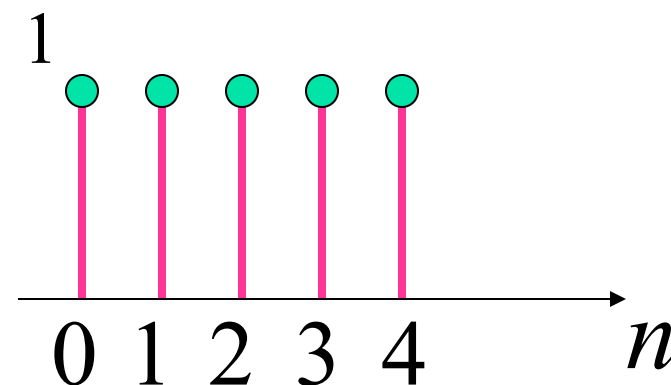
$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$



■ 矩形序列

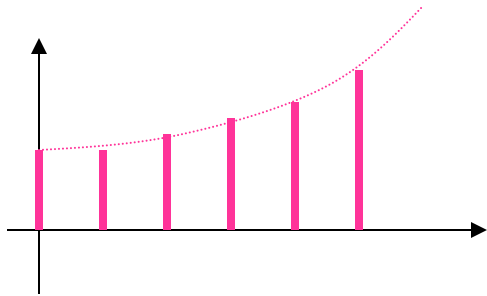
$$G_N(n) = \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (n < 0 \text{ 或 } n \geq N) \end{cases}$$

$$= u(n) - u(n - N)$$

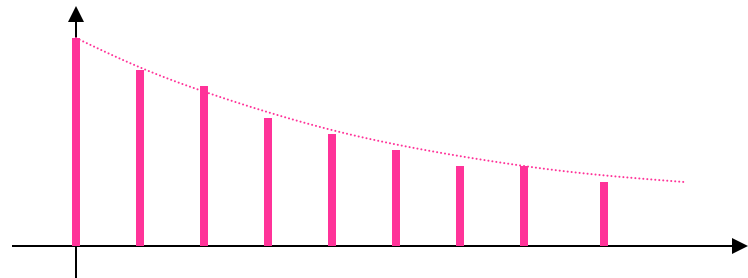


■ 指数序列 $f(n) = a^n u(n)$

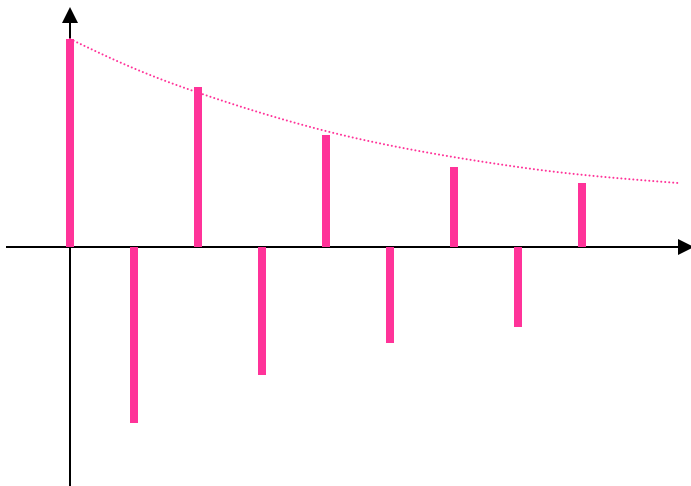
$a > 1$



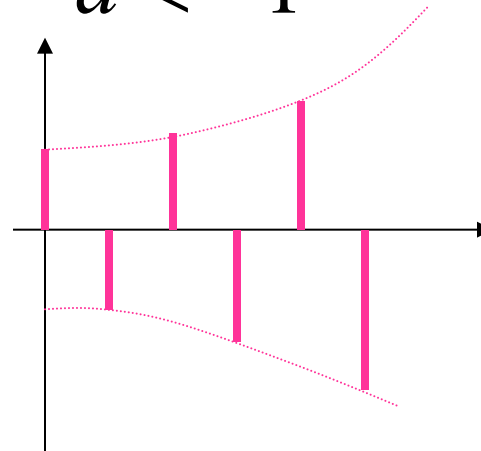
$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$



$a < -1$



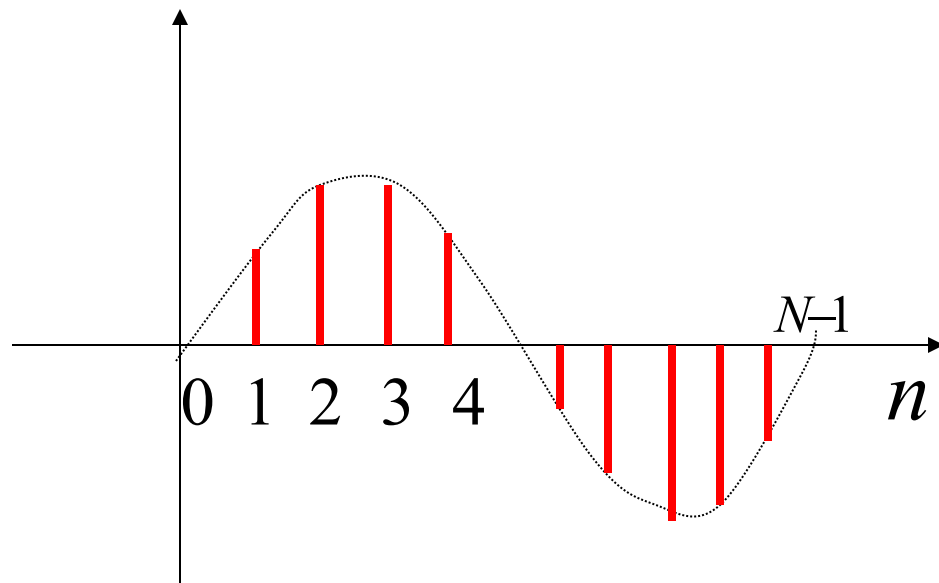
■ 正弦序列

$$f(t) = A \sin \Omega_0 t$$

$$t = nT_s$$

$$\begin{aligned} f(n) &= A \sin(\Omega_0 n T_s) \\ &= A \sin(n \omega_0) \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \Omega_0 T_s = \frac{\Omega_0}{f_s}$$

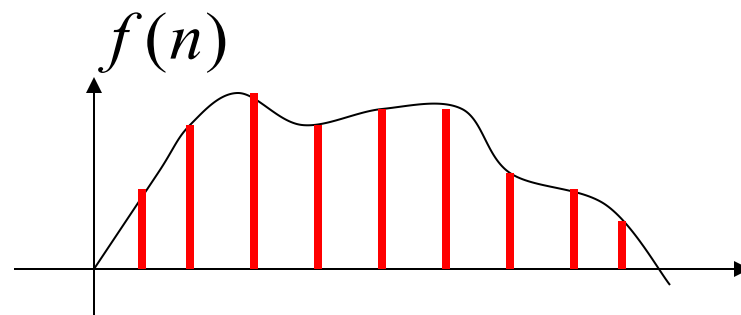
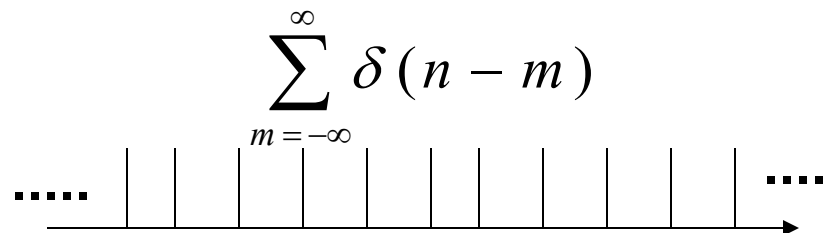
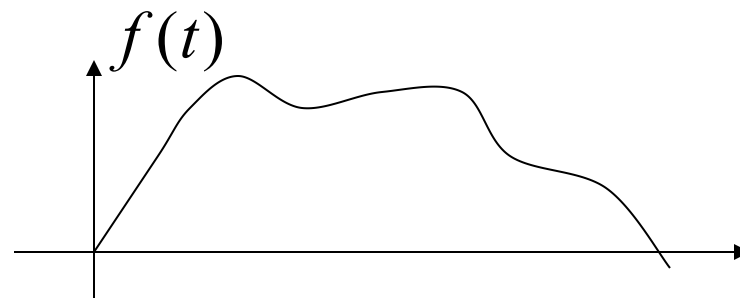


■ 复指数序列

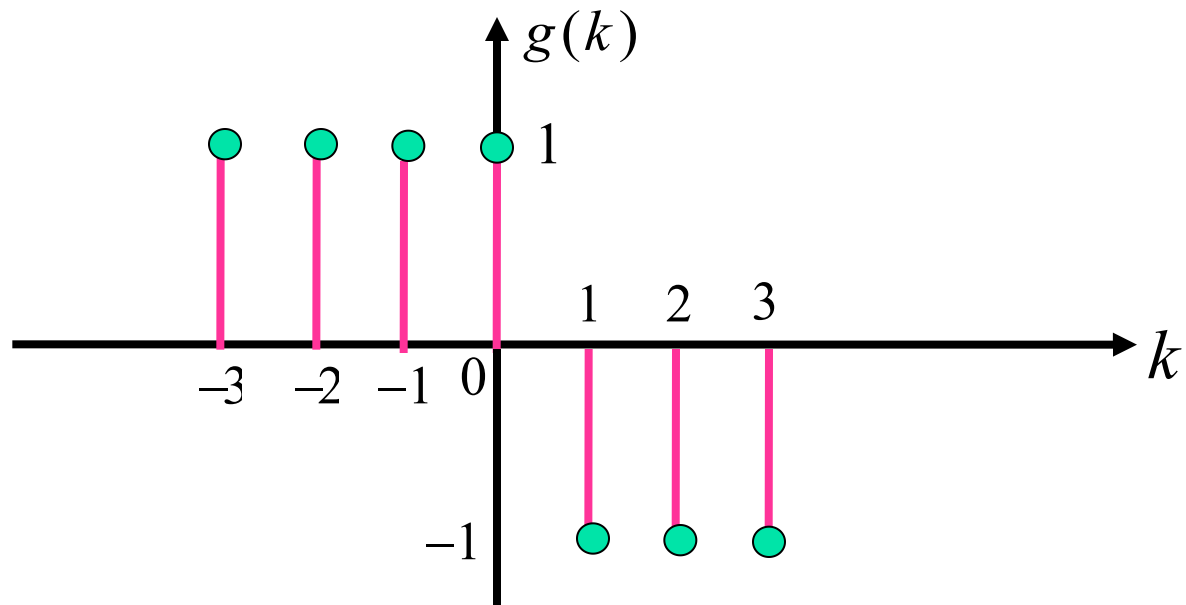
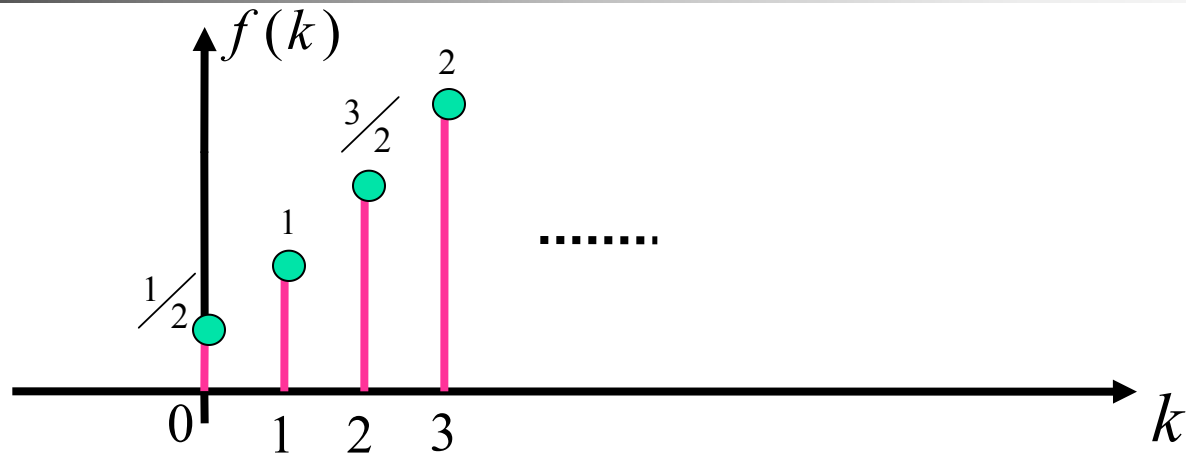
$$\begin{aligned} f(n) &= A \cos n \omega_0 + jB \sin n \omega_0 \\ &= |f(n)| e^{j \arg[f(n)]} = |f(n)| e^{j(n \omega_0 + \varphi)} \end{aligned}$$

对任何序列

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$$



练习：写出图示序列的函数表达式。





2. 序列的分类

(1) 双边无限序列： $f(k)$ 对所有的 k 取值。

若 $f(k) = f(-k)$ —— 偶对称

$f(k) = -f(-k)$ —— 奇对称

$f(k) = f(k+N)$ —— 周期序列

(2) 有限序列： $f(k)$ 只在 $N_1 \leq k \leq N_2$ 时有值。

(3) 单边序列： 右边序列、左边序列

(4) 有始序列 (因果序列, 右边序列)： 若当 $k < 0$ 时, $f(k) = 0$ 。



例1 判断下列序列是否为周期序列。

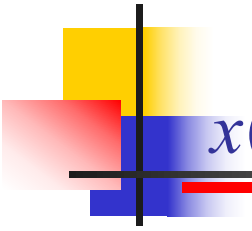
$$1. x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$2. x(n) = e^{j\left(\frac{n}{8} - \pi\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } 1. \because x(n+N) &= A \cos\left[\frac{3\pi}{7}(n+N) - \frac{\pi}{8}\right] \\ &= A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{3\pi}{7}N - \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

若 $\frac{3\pi}{7}N$ 是 2π 的整数倍, 则 $x(n+N) = x(n)$.

满足此条件的最小的 $N = 14$.

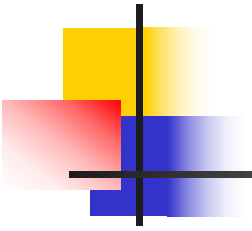

$$x(n) = A \sin(n\omega_0 + N\omega_0 + \varphi), \text{ 周期为 } N = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

a. 当 $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 为实整数时, 如 $N = 10$, 该序列是周期为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的周期序列。

b. 若 $N = \frac{2\pi}{\omega_0} \neq \text{整数} = \text{有理数}$, 如 $N = 7.5$

$N' = N \times 2 = 15$, 则正弦序列仍是周期序列, 但周期大于 $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

c. 若 $N = \text{无理数}$, 如 $N = 6\sqrt{2}$, 此时为非周期序列.


$$\begin{aligned} 2.x(n+N) &= e^{j(\frac{n}{8} + \frac{N}{8} - \pi)} = e^{j(\frac{n}{8} - \pi)} e^{j\frac{N}{8}} \\ &= x(n) e^{j\frac{N}{8}} \end{aligned}$$

若 $x(n+N) = x(n)$, 则 $e^{j\frac{N}{8}} = 1, \frac{N}{8} = 2k\pi$

不是周期序列。



3. 离散信号的变换和运算

变换和运算

表达式

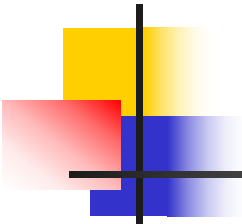
信号左移 $y(k) = f(k + n)$

信号右移 $y(k) = f(k - n)$

信号反转 $y(k) = y(-k)$

信号相加 $y(k) = f_1(k) + f_2(k)$

信号相乘 $y(k) = f_1(k) f_2(k)$



信号累加 $y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)$

向前差分 $y(k) = \Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

向后差分 $y(k) = \nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

信号卷积 $y(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$



§ 7.3 离散时间系统的描述与模拟

- 线性移不变离散时间系统
- 离散时间系统的数学模型—差分方程
- 离散时间系统的模拟框图

一. 线性移不变离散时间系统

1. **定义**: 一个系统, 若输入是离散时间信号, 输出也是离散时间信号, 则此系统为离散时间系统。

2. **线性**: 若 $T[x_1(n)] = y_1(n)$, $T[x_2(n)] = y_2(n)$

则 $T[ax_1(n) + bx_2(n)]$

$$= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

当初始条件不为零时, 如果满足(1)分解性; (2)零输入线性, 零状态线性。则也称此系统是线性的。

3. **移不变 (时不变)** :

若 $T[x(n)] = y(n)$, 则 $T[x(n-k)] = y(n-k)$



例2 判断下列系统是否为线性，移不变。

1. $y(n) = 2x(n) + 3$

2. $y(n] = x(n) \sin(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{6})$

答案：

1. 非线性，移不变
2. 线性，移变



例3 判断下列系统是否为线性，移不变的。

1. $y(n) = 0.5x(n) + 0.25nx(n-1)$

2. $y(n) = 0.5x(n) + 0.25x(n-1)$

3. $y(n) = 0.5x^2(n) + 0.25nx(n-1)$

4. $y(n) = 0.5x^2(n) + 0.25x(n-1)$



二. 离散时间系统的数学描述—差分方程

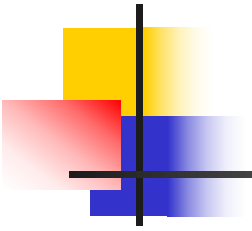
离散时间系统用差分方程来描述。

差分方程表示了离散序列中相邻几个数据点之间的数学关系。

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n+k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n+r)$$

差分方程的阶: 为响应的自变量的序号最高值与最低值之差。

差分方程中序列的自变量n不一定表示时间。



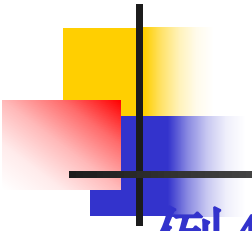
在描述实际的连续时间系统的微分方程中，激励函数导数的阶数 m 一般常小于响应函数导数的阶数 n 。

在描述实际的离散时间系统的差分方程中，不可能出现 $m > n$ 的情况。例如若有

$$i(k) = e(k + 1) + e(k)$$

则说明现在的响应决定于未来的激励。

在描述**因果**离散时间系统的差分方程中，激励函数的最高序号不能大于响应函数的最高序号。



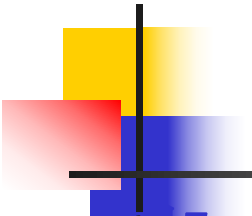
例4 如果在第 n 个月初向银行存款 $x(n)$ 元，月息为 a ，每月利息不取出，试用差分方程写出第 n 月初的本利和。

解：设第 n 个月初的本利 $y(n)$ 包括下列三个方面：

- (1) 第 $(n-1)$ 个月的本金 $y(n-1)$
- (2) 第 $(n-1)$ 个月的利息 $ay(n-1)$
- (3) 第 n 个月的存款 $x(n)$

故
$$y(n) = x(n) + (1+a)y(n-1)$$

即
$$y(n) - (1+a)y(n-1) = x(n)$$



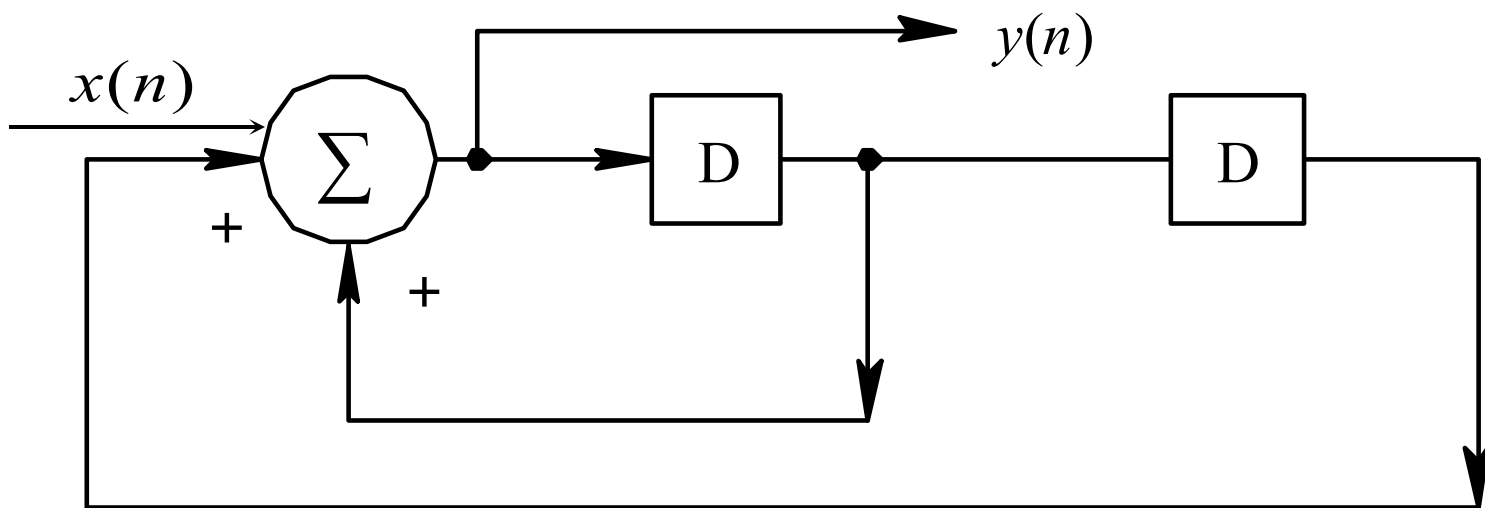
例5 假定每对大兔子每月可以生育一对小兔子，小兔子一个月后长成大兔子。若第一个月只有一对新生小兔子，问第n个月兔子对的数目是多少？（假设兔子不会死亡。）

解：令 $y(n)$ 表示第n个月兔子对的数目。已知 $y(0)=0$, $y(1)=1$, 显然： $y(2)=1$, $y(3)=2$, $y(4)=3$, $y(5)=5$, ...

在第n个月时，应有 $y(n-1)$ 对大兔子，还有 $y(n-2)$ 对小兔子，于是可以得到如下的方程：

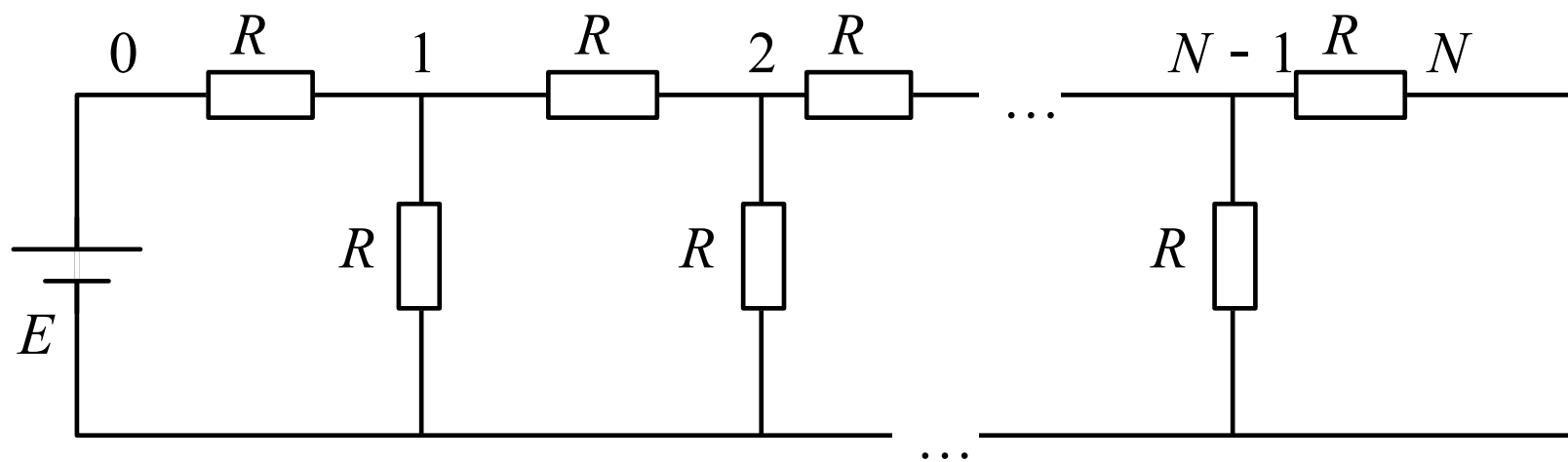
$$y(n) = y(n-1) + y(n-2)$$

$$y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0$$



例4的系统模拟图

例6 下图为一电阻梯形网络，其各支路的电阻都是 R ，每个节点对公共节点的电压为 $u(n)$ ， $n=0, 1, 2, 3, 4, \dots, N$ 。试写出这个系统的差分方程。

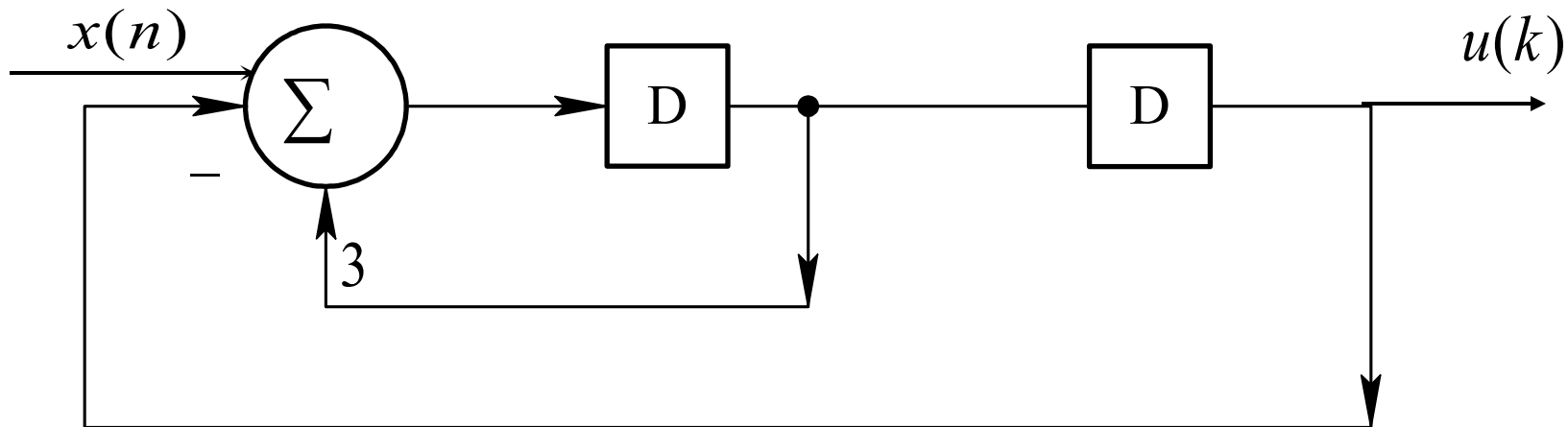


电阻梯形网络

解： 对于任一节点 $k+1$ ，运用节点电流定律不难写出

$$\frac{u(k) - u(k+1)}{R} = \frac{u(k+1) - u(k+2)}{R} + \frac{u(k+1)}{R}$$

经整理后得 $u(k+2) - 3u(k+1) + u(k) = 0$





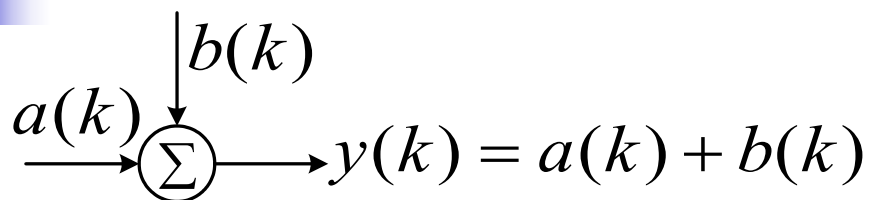
三. 离散时间系统的模拟

离散系统的数学模型

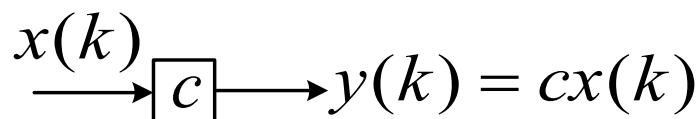
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n+k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n+r)$$

基本运算：相加，系数乘，时延

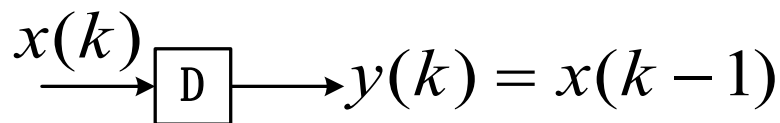
1. 离散时间系统的基本单元符号



加法器

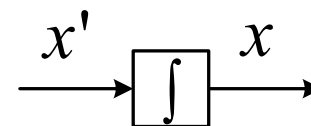


乘法器



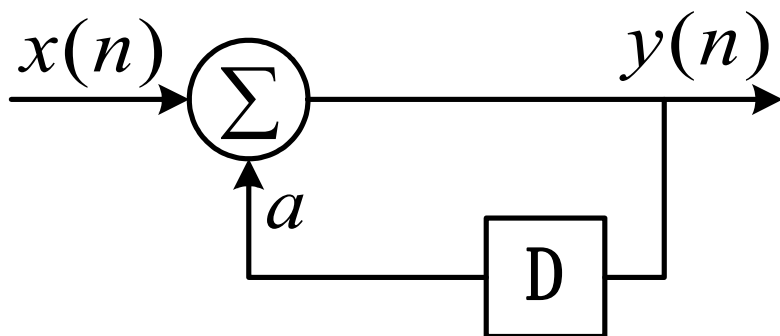
延时器

连续时间系统:

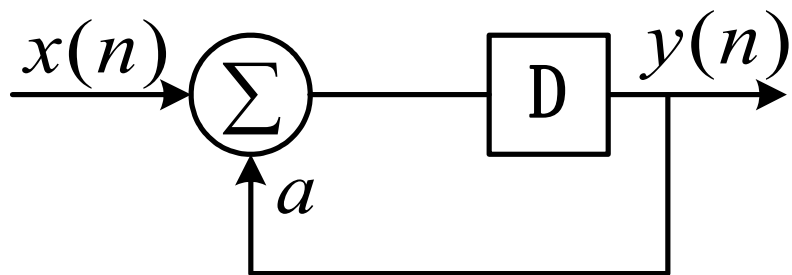


积分器

2. 一阶离散时间系统的模拟框图



$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$



$$y(n+1) - ay(n) = x(n)$$

3. n阶离散时间系统的模拟框图

n阶线性常系数差分方程可以表示为：

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0y(k) \\ = b_me(k+m) + b_{m-1}e(k+m-1) + \cdots + b_0e(k)$$

引入辅助函数 $q(k)$ ， 令

$$q(k+n) + a_{n-1}q(k+n-1) + \cdots + a_0q(k) = e(k) \\ y(k) = b_mq(k+m) + b_{m-1}q(k+m-1) + \cdots + b_0q(k)$$

与n阶微分方程类似，可以画出n阶差分方程的模拟框图。



例7 画出下列系统的模拟框图。

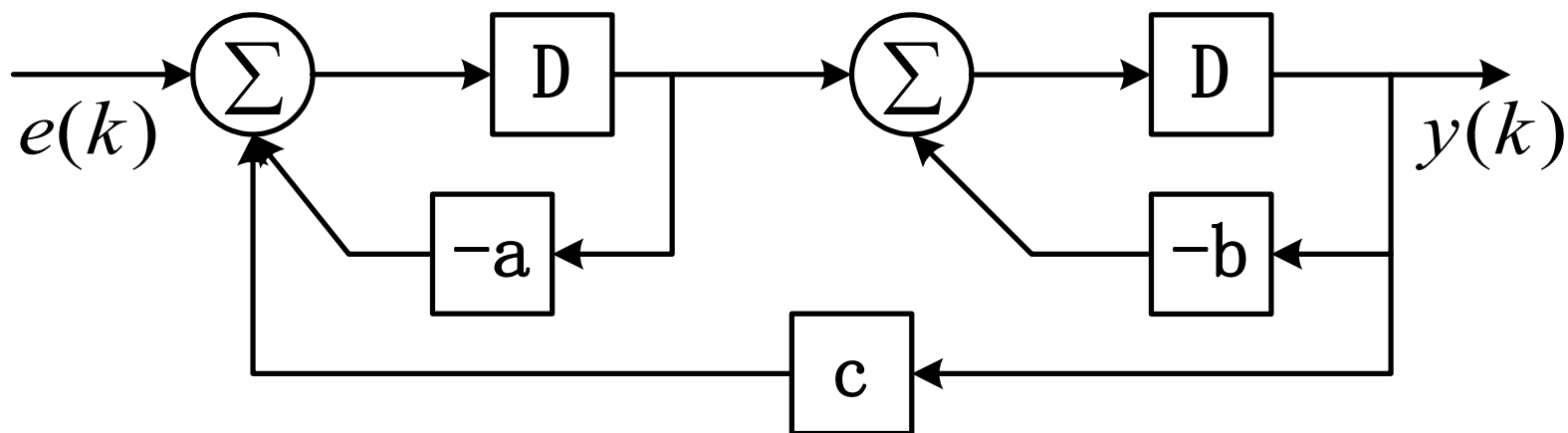
$$(1) y(k+1) + 2y(k) + 3y(k-1) = e(k)$$

$$(2) y(k+1) + 2y(k) + 3y(k-1) = e(k+1)$$

$$(3) y(k+1) + 2y(k) + 3y(k-1) = e(k-1)$$

$$(4) y(k+2) + 2y(k+1) + 3y(k) = e(k+1)$$

例8 列出图示系统的差分方程, 指出其阶次。



答案:

$$y(k+2) + (a+b)y(k+1) + (ab-c)y(k) = e(k)$$



小结

- 典型离散时间序列
- 线性移不变离散时间系统
- 差分方程
- 离散时间系统的模拟框图

课外作业

阅读：7.1, 7.3节；预习：7.2节

作业：7.13 7.15