信号与系统

Lecture 11

第七章:离散时间系统的时域分析（续）

§7.2 抽样信号与抽样定理

复习

- 离散时间信号的描述及有关概念
  - 离散时间信号
  - 序列的分类
  - 离散信号的变换与运算
- 离散时间系统的描述和有关概念
  - 离散时间系统的线性、移不变、因果性
  - 数学描述--差分方程
  - 离散时间系统的模拟

本讲内容

- 抽样定理
  - 理想抽样
  - 自然抽样
  - 抽样定理

涉及的知识点：

1、周期信号的傅里叶级数

2、非周期信号的傅里叶变换

3、周期信号的傅里叶变换

4、卷积定理

5、冲激函数的卷积特性

周期信号的傅里叶变换

设 $f(t)$ 为周期信号，其周期为 T，其复指数形式的傅里叶级数为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

式中，Ω 为基波角频率（$\Omega=2\pi/T$），F_n 为复振幅，

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt$$

对周期信号 $f(t)$ 求傅里叶变换，从而有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\cdot\mathscr{F}[e^{jn\Omega t}]$$

据傅里叶变换的频移性质，可知

$$e^{jn\Omega t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-n\Omega)$$

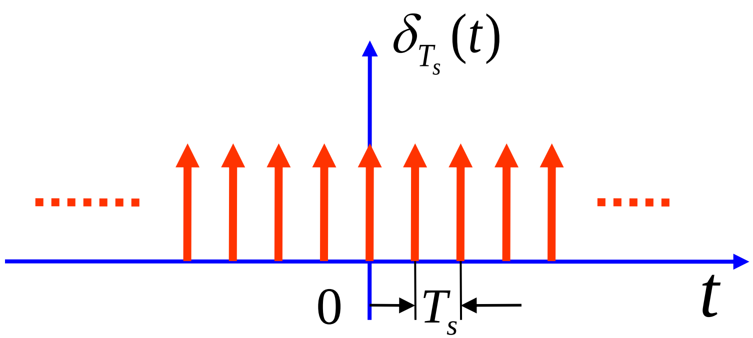
所以得到

$$\mathscr{F}[f(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\Omega) \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

举例：

冲激函数序列

$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$



展开成指数形式傅里叶级数：

$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega_s t}$$

其中

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

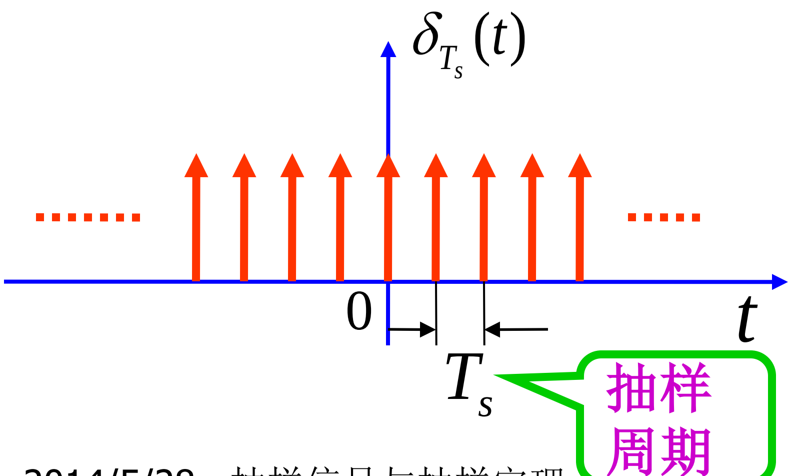
$$c_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta_{T_s}(t)e^{-jn\omega_s t}dt$$

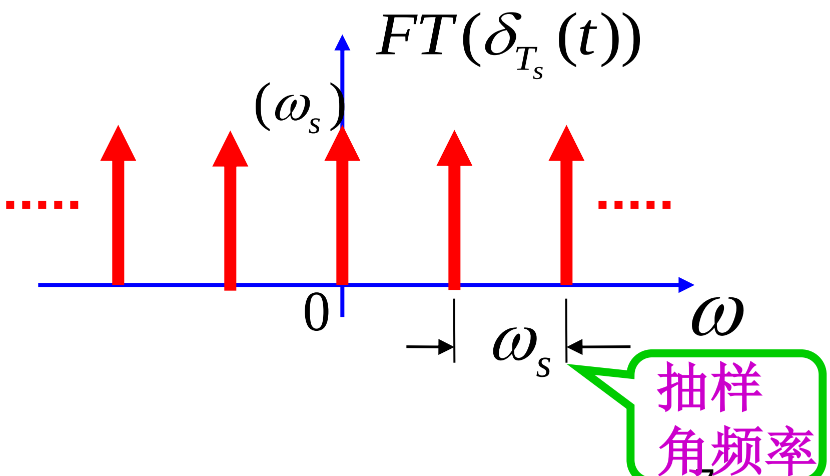
$$=\frac{1}{T_s}$$

因此，冲激函数序列的频谱：

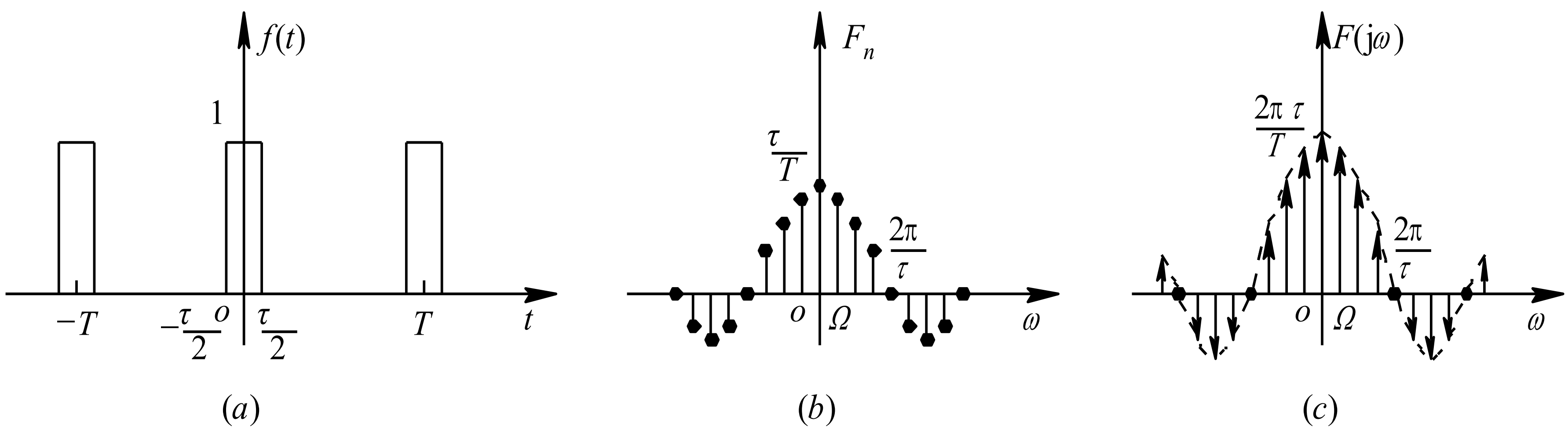
$$FT(\delta_{T_s}(t)) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$





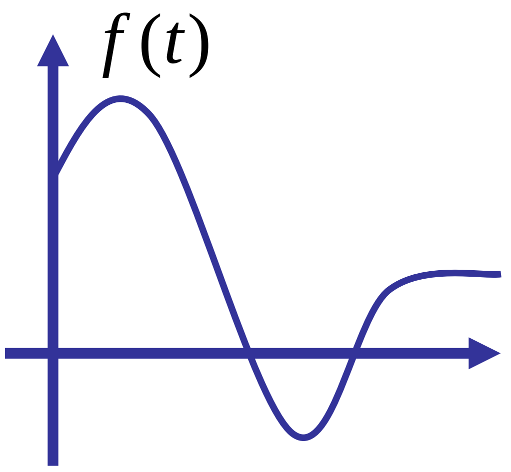
举例：

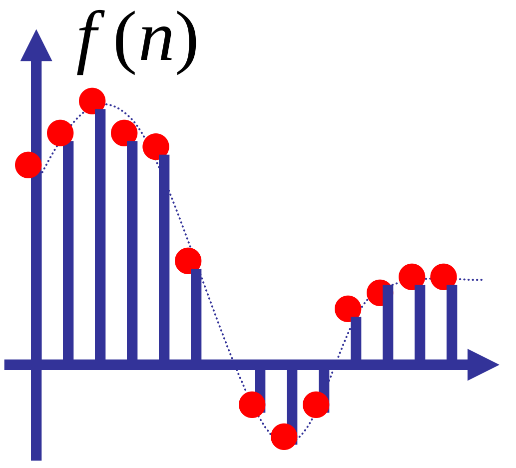


周期矩形脉冲信号及其频谱

(*a*) f(t)的波形； (*b*) 复振幅F_n; (*c*) 频谱函数F(jω)

§7.2 抽样信号与抽样定理





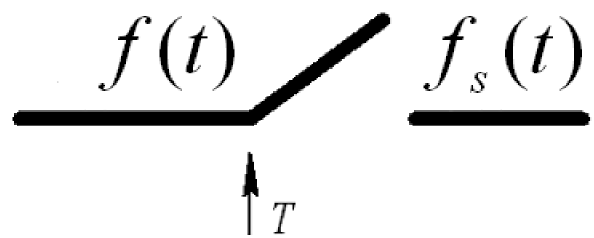
(1)抽样是怎么实现的？

(2)抽样后信号发生怎样的变化？

(3)什么条件下可以从抽样后的信号还原出原始信号？

一、信号抽样（时域）

对连续时间信号进行数字处理，必须首先对信号进行取样。进行取样的取样器一般由电子开关组成，其工作原理如下图所示。



取样过程可以看成由原信号f(t)和一个开关函数p(t)的乘积。

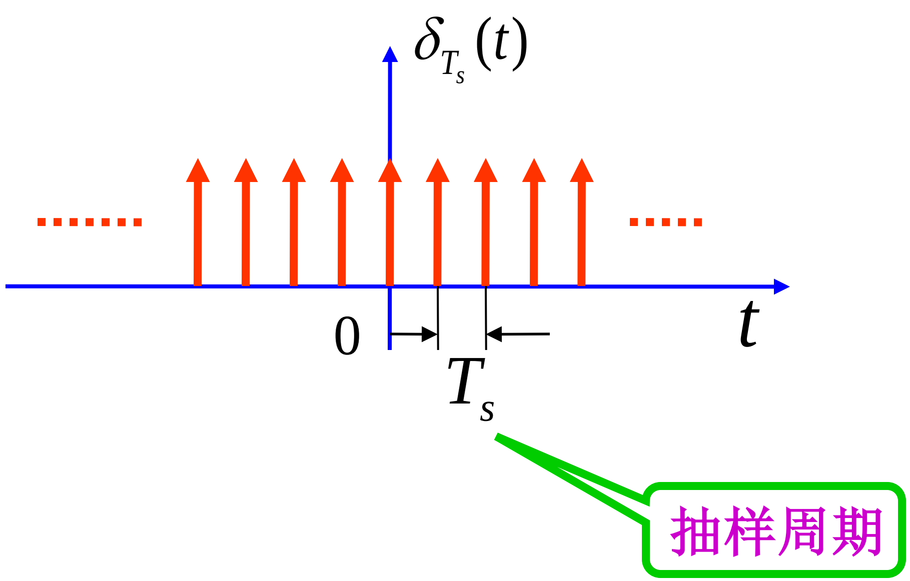
$$\boxed{f_s(t) = f(t)\,p(t)}$$

根据开关函数p(t)的不同，讨论理想抽样和自然抽样。

1. 理想抽样

开关函数p(t)是冲激函数序列，即

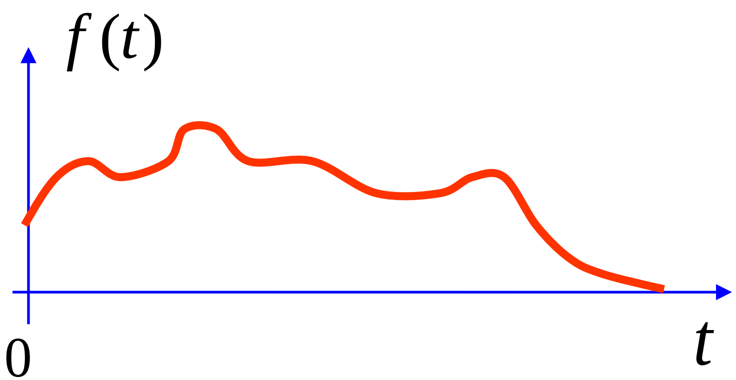
$$p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



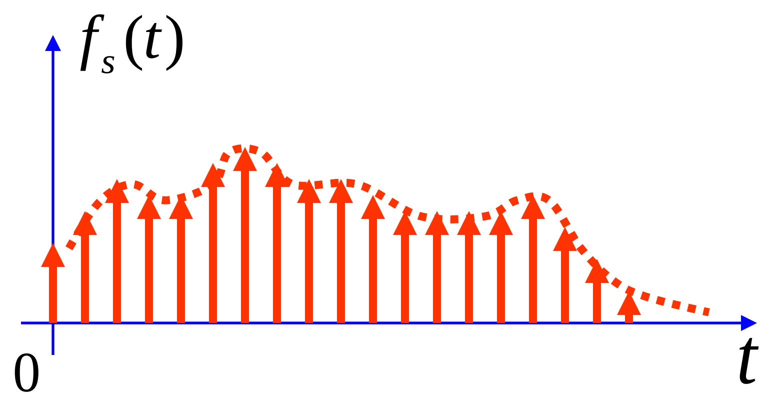
$$f_s(t) = f(t)p(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

抽样
样本值



原信号



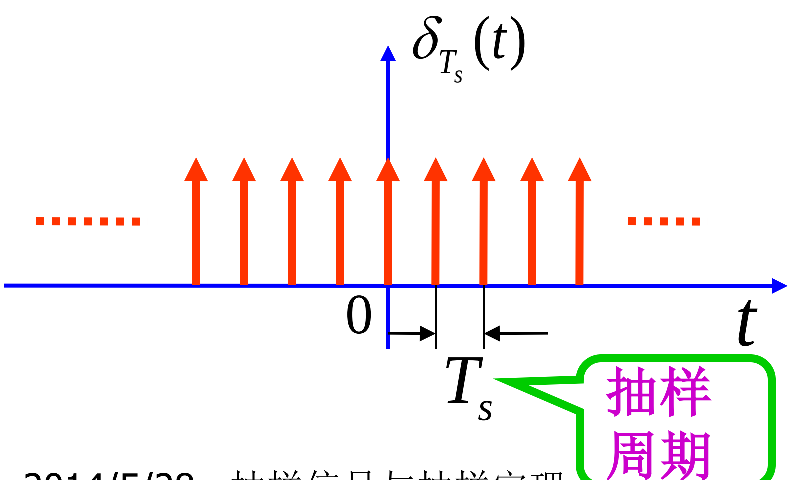
抽样后的信号

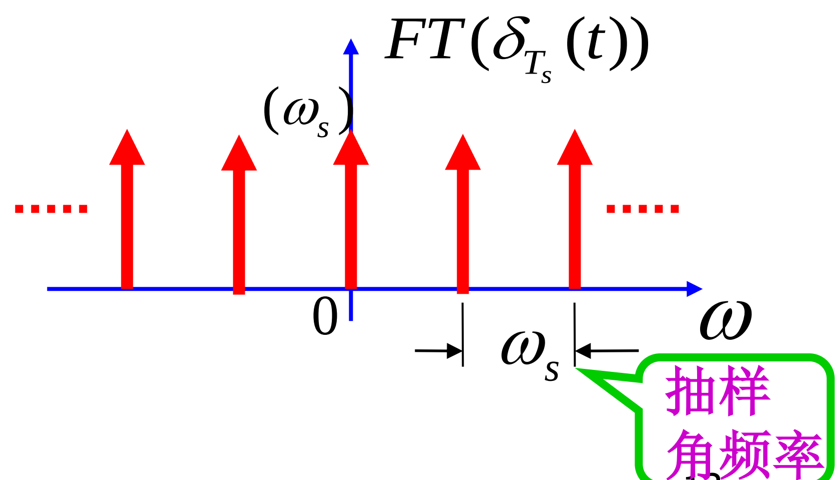
从频域来看：

$$FT(\delta_{T_s}(t)) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

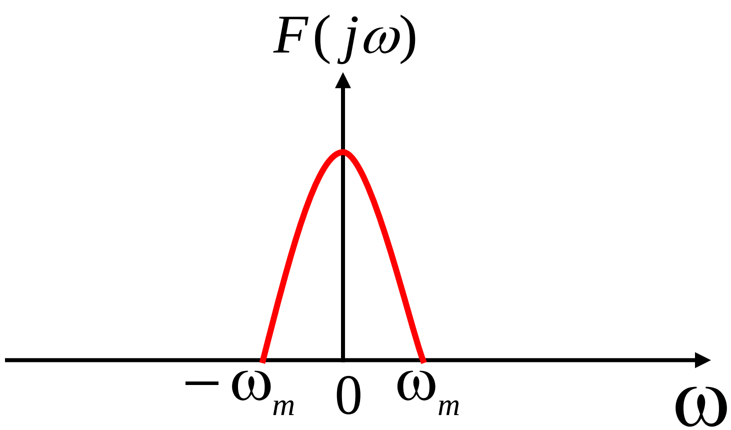




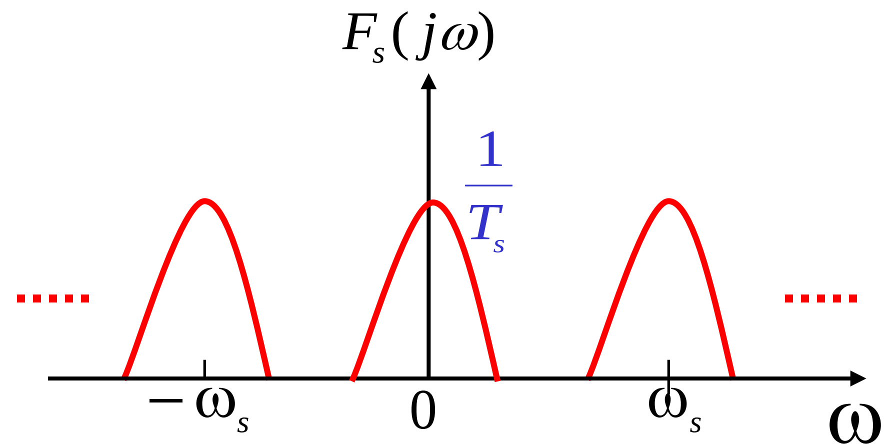
理想抽样后信号的频谱：

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j(\omega - n\omega_s))$$



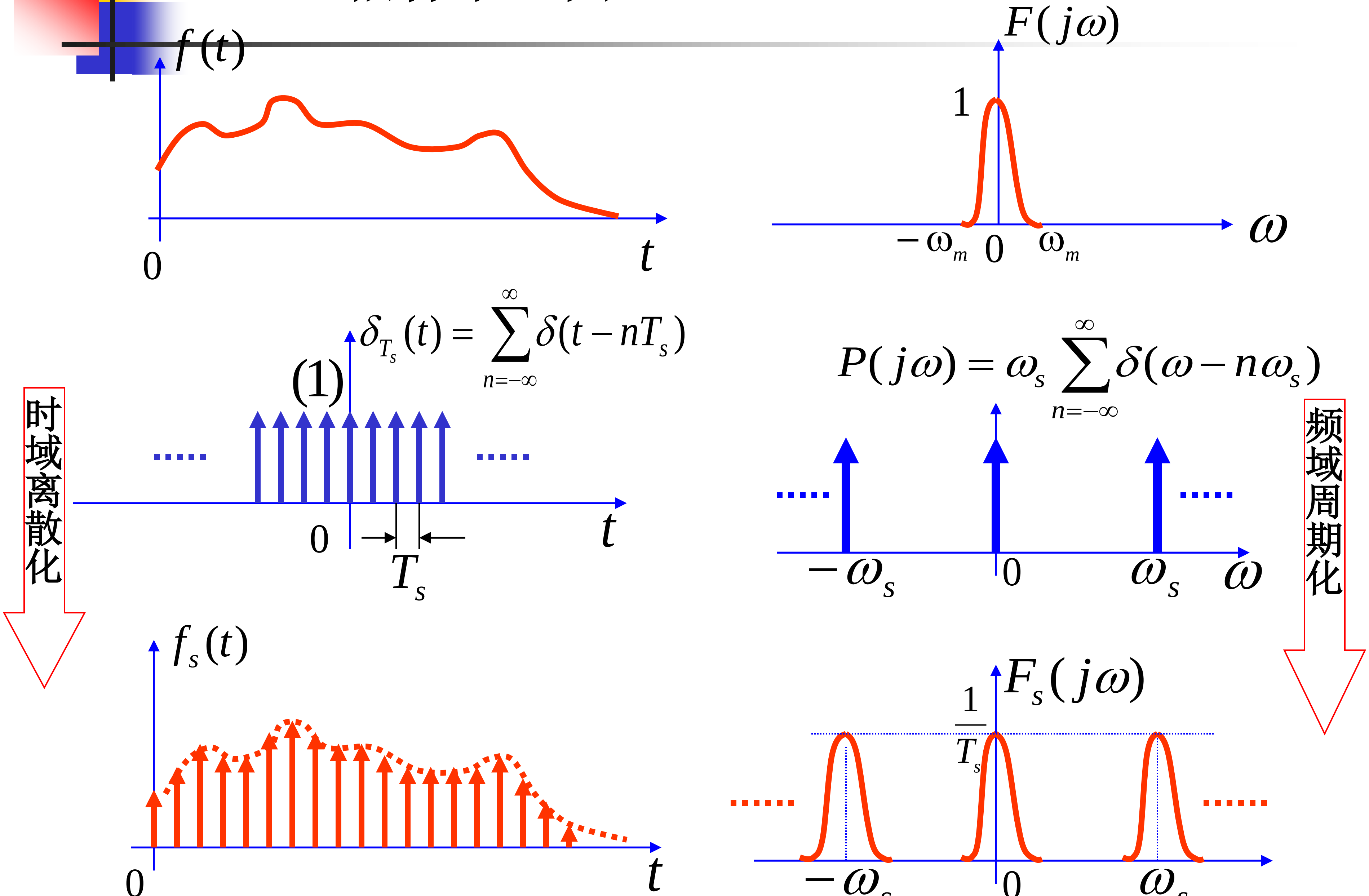
原信号频谱



抽样后信号频谱

从 $F_s(j\omega)$频谱图可见抽样后的信号频谱包括有原信号的频谱以及无限个经过平移的原信号的频谱，平移的频率为抽样频率及其各次谐波频率。

理想抽样示意图

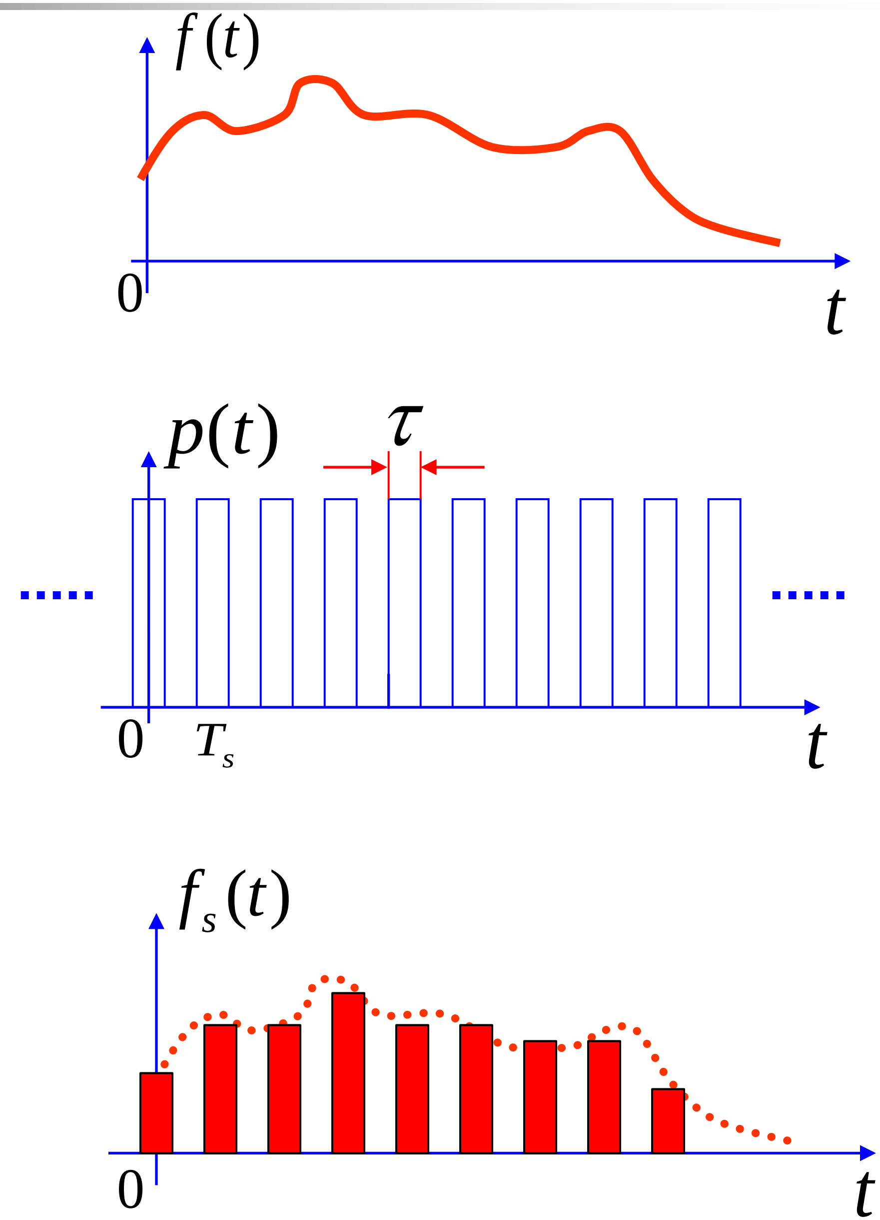


$f(t)$
0
t
$F(j\omega)$
1
$-\omega_m$ 0 ω_m
ω
$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
(1)
0
T_s
t
$P(j\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$
$-\omega_s$ 0 ω_s ω
时域离散化
频域周期化
$f_s(t)$
0
t
$F_s(j\omega)$
$\frac{1}{T_s}$
$-\omega_s$ 0 ω_s

此时的抽样脉冲p(t)是矩形脉冲序列，即

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_{\tau}(t-nT_s)$$

由于$f_s(t)=f(t)p(t)$，抽样信号在抽样期间脉冲顶部随f(t)变化，故这种抽样也称为“自然抽样”。

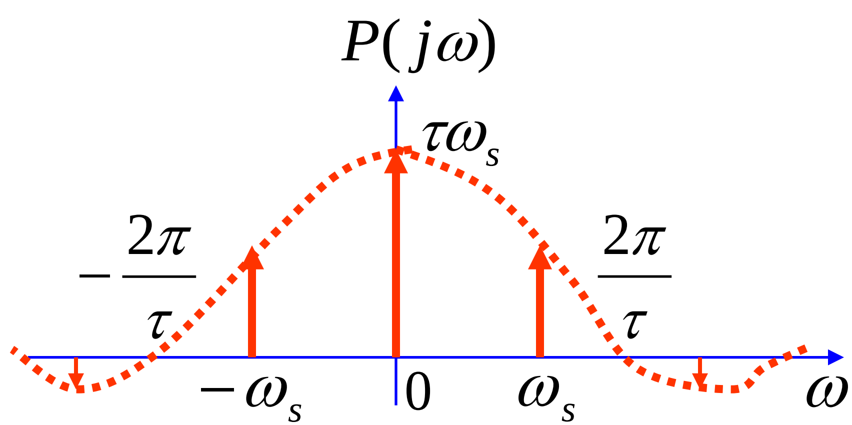


矩形脉冲序列p(t)的傅立叶变换为:

$$P(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_s)$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{T_s}\displaystyle\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}p(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\dfrac{\tau}{T_s}Sa\left(\dfrac{n\omega_s\tau}{2}\right)$

$$\therefore P(j\omega)=\tau\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s)$$



$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

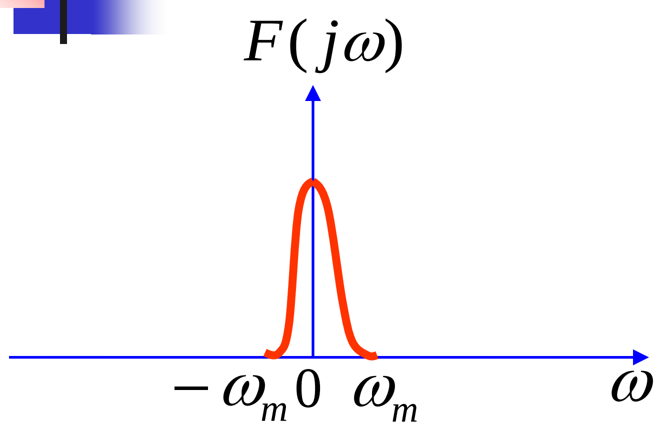
由频域卷积定理:

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * P(j\omega)$$

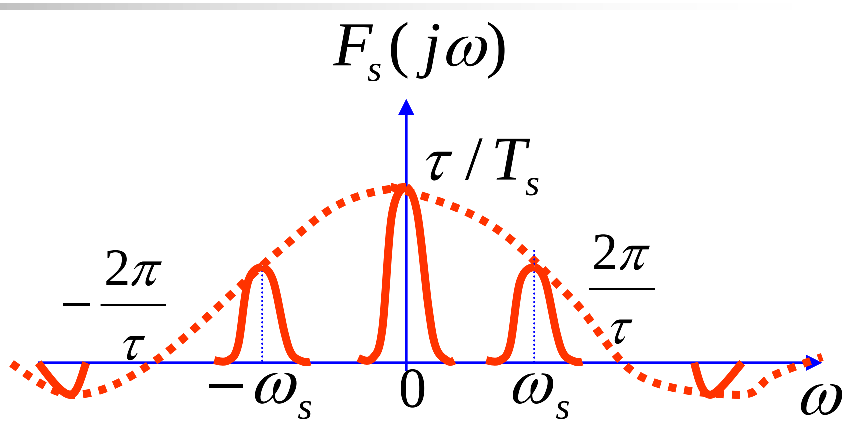
把计算出的$P(j\omega)$代入上式得:

$$F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega) * \left[Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})\delta(\omega - n\omega_s) \right]$$

$$= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2}) F(j(\omega - n\omega_s))$$



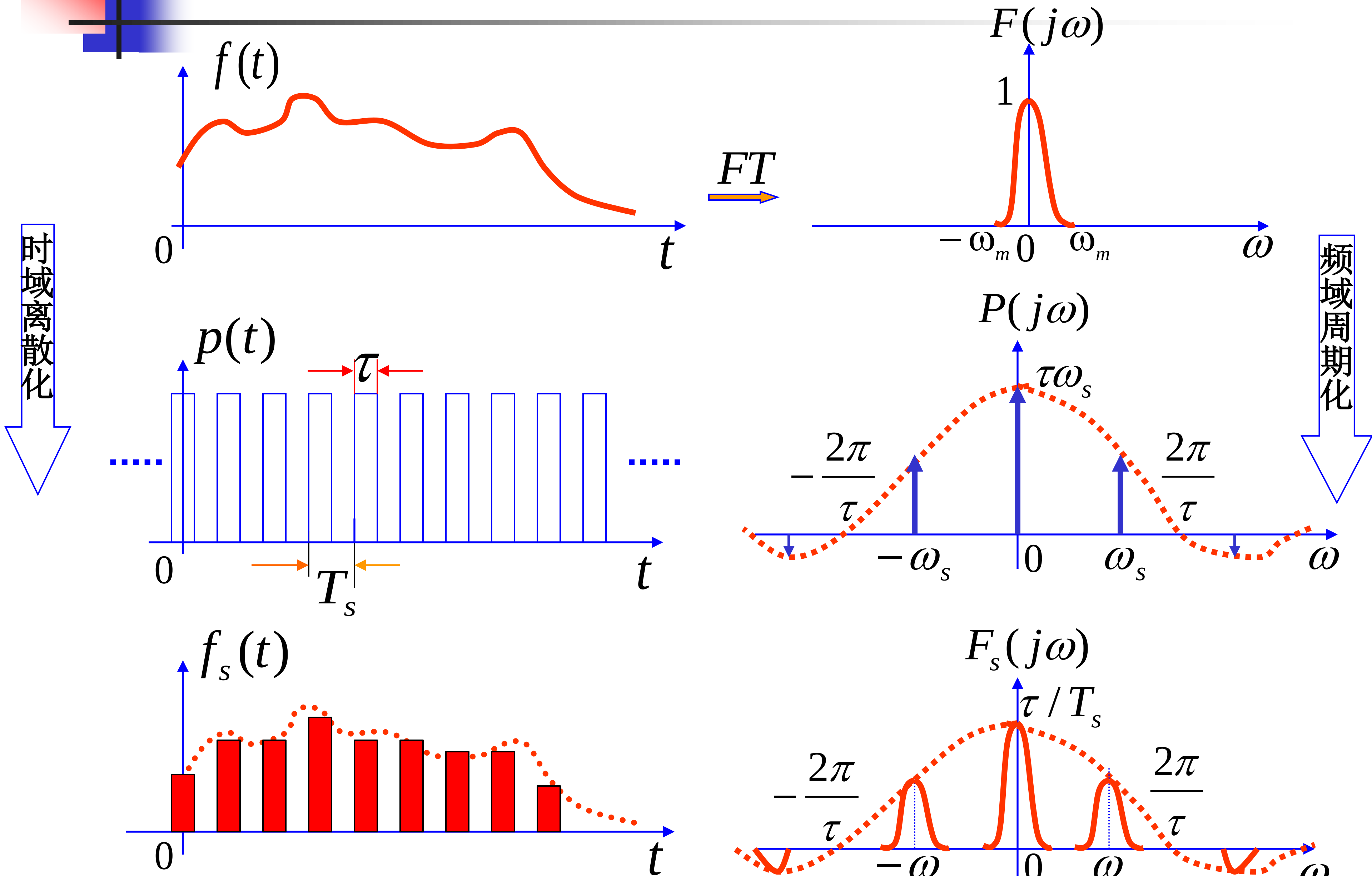
抽样前信号频谱



抽样后信号频谱

从 $F_s(j\omega)$频谱图可见抽样后的信号频谱包括有原信号的频谱以及无限个经过平移的原信号的频谱，平移的频率为抽样频率及其各次谐波频率；平移后的频谱幅值随频率变化呈Sa函数分布。

矩形脉冲抽样示意图



$f(t)$
0
t
FT
$F(j\omega)$
1
$-\omega_m$ 0 ω_m
ω
时域离散化
频域周期化
$p(t)$
τ
0
T_s
t
$P(j\omega)$
$\tau\omega_s$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\omega_s$ 0 ω_s
ω
$f_s(t)$
0
t
$F_s(j\omega)$
τ / T_s
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\omega_s$ 0 ω_s
ω

理想抽样

$$p(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$P(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$P_n=\frac{1}{T_s}$$

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*P(j\omega)$$

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j(\omega-n\omega_s))$$

自然抽样

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_\tau(t-nT_s)$$

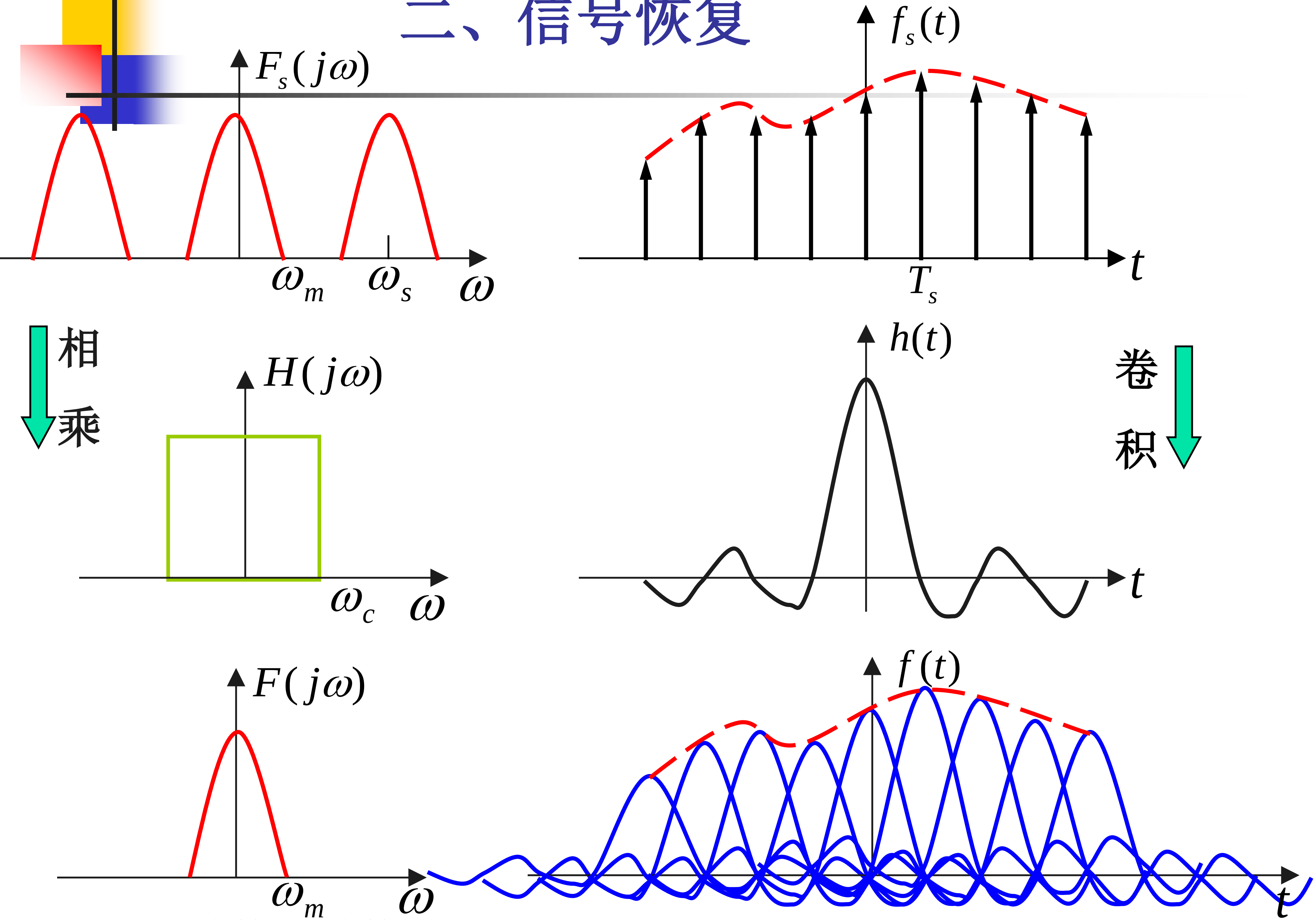
$$P(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$P_n=\frac{\tau}{T_s}Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*P(j\omega)$$

$$F_s(j\omega)=\frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)F(j(\omega-n\omega_s))$$

二、信号恢复



$F_s(j\omega)$
ω_m
ω_s
ω
$f_s(t)$
t
T_s
相乘
$H(j\omega)$
ω_c
ω
$h(t)$
t
卷积
$F(j\omega)$
ω_m
ω
$f(t)$
t

推导过程：

设 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$, $f_s(t)\leftrightarrow F_s(j\omega)$, 当 $F_s(j\omega)$ 通过截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器，滤波器的频率响应为 $H(j\omega)$，显然滤波器的作用等效于一个开关函数 $G_{2\omega_c}(j\omega)$ 同$F_s(j\omega)$相乘：

$$F(j\omega)=G_{2\omega_c}(j\omega)F_s(j\omega)$$

由时域卷积定理知：

$$f(t)=g(t)*f_s(t)$$

由傅立叶变换的对称性可知：

$$g(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)\leftrightarrow G_{2\omega_c}(j\omega)$$

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$f(t)=g(t)*f_s(t)$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa[\omega_c(t-nT_s)]$$

时域内插公式

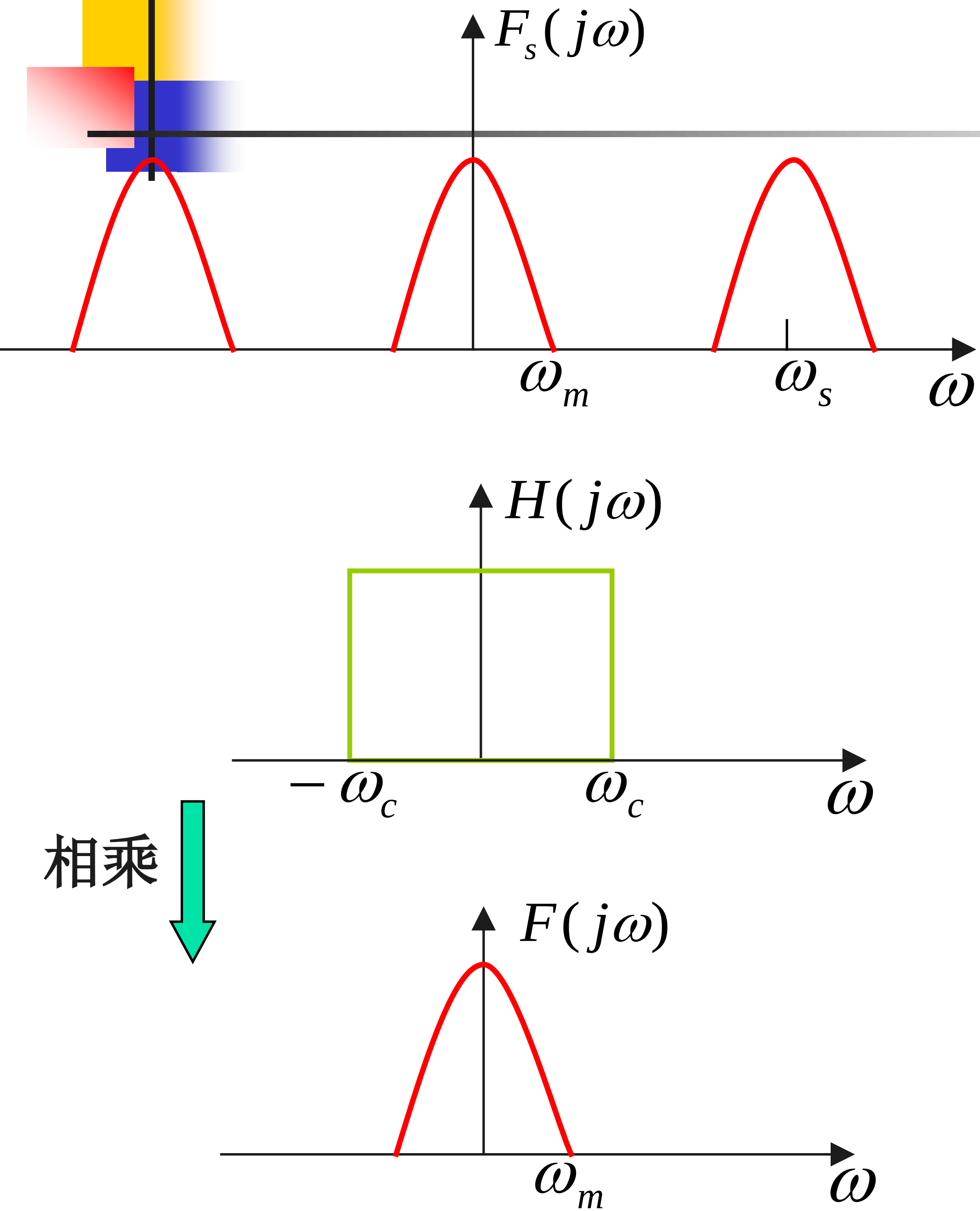
与书上P344公式(7-9)比较

三、抽样定理

要想从抽样后的信号恢复出原信号，信号本身、抽样间隔（或频率）以及滤波器截止频率必须满足一定的条件，这就是抽样定理。

以抽样间隔为例：是不是所有时间间隔的抽样都能反映原连续信号的基本特征呢？

答案是否定的。



对原信号有何要求？

对抽样频率 ω_s 有何要求？

对低通滤波器截止频率 ω_c 有何要求？

要重建原来信号的一个必要条件是：
抽样信号频谱中两相邻的组成部分不能互相重叠。

要使周期化后的相邻频谱不产生重叠，必须同时满足：
(1) 原来信号频谱的频带是有限的，即 $|\omega| \le \omega_m$；
(2) 抽样频率大于或等于信号最高频率的两倍，即

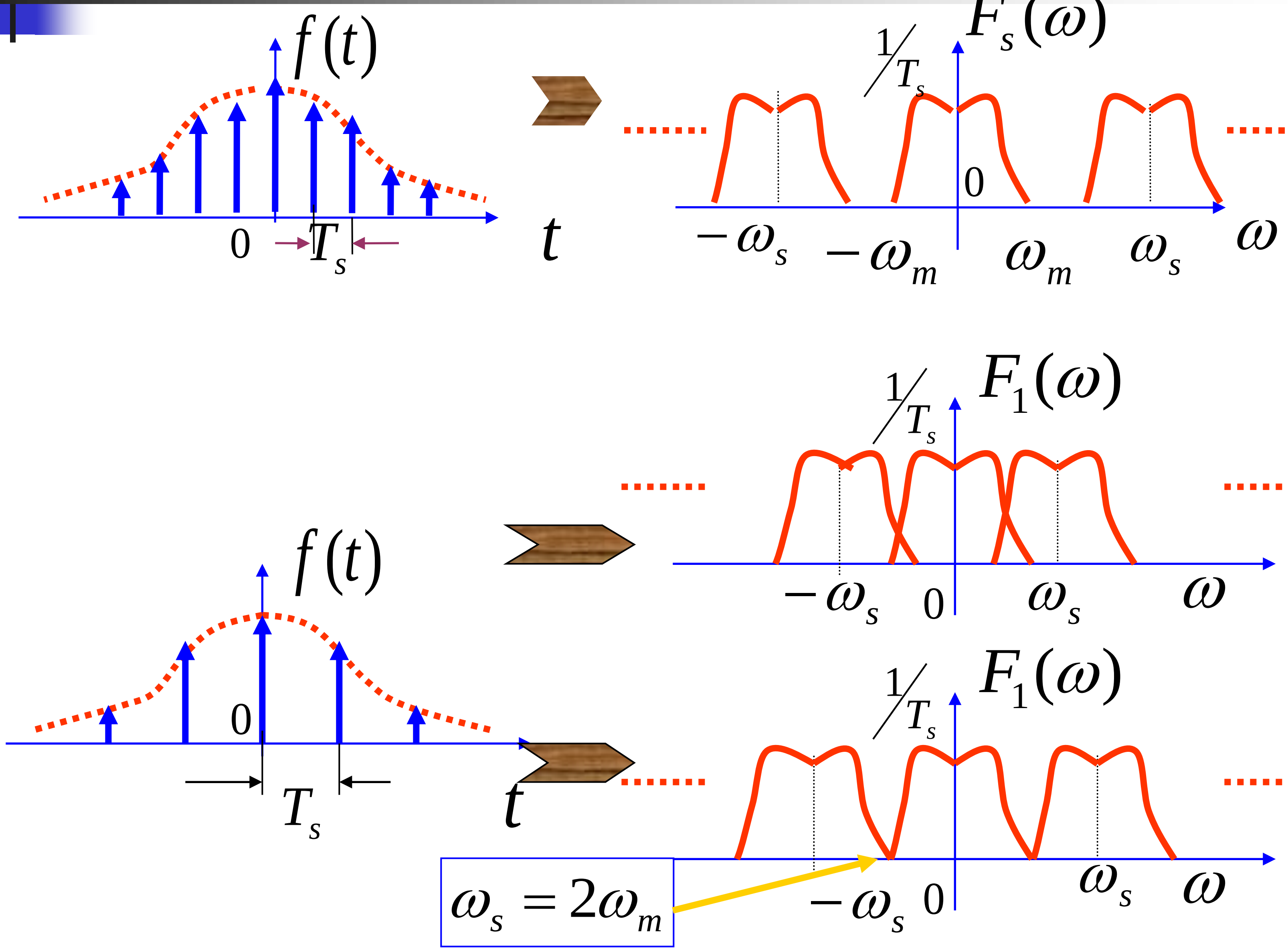
$$\boxed{\omega_s \ge 2\omega_m \quad \text{或} \quad f_s \ge 2f_m \quad \text{或} \quad T_s \le \frac{1}{2f_m}}$$

这个信号最高频率的两倍 $2f_m = \dfrac{\omega_m}{\pi}$ 是最小的抽样频率，称之为Nyquist抽样频率。

其倒数 $\dfrac{1}{2f_m}$ 称为Nyquist抽样间隔，是最大的抽样间隔。

Shannon抽样定理：一个在频谱中不包含有大于频率 f_m 的分量的有限频带的信号，由对该信号以不大于 $\frac{1}{2f_m}$ 的时间间隔进行抽样的抽样值唯一地确定。当这样的抽样信号通过截止频率 ω_c （满足 $\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$）的理想低通滤波器后，可以完全重建原信号。

不满足抽样定理时产生频率混叠现象



例1 已知周期信号

$$f(t) = \cos(\pi t + 30^\circ) + 2\sin(4\pi t + 60^\circ),$$

问当取样间隔至多为何值时，$f(t)$能由理想取样样本$f(kT)$唯一确定？

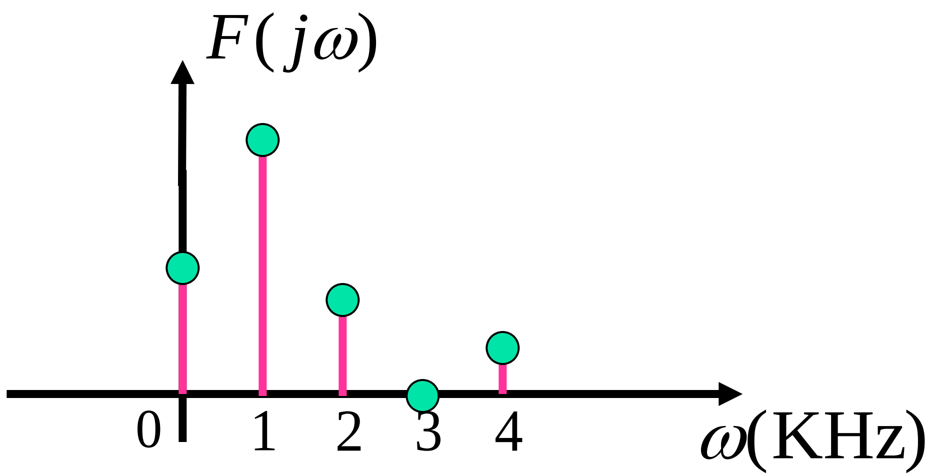
解：$f(t)$的最大频率为4π，即$\omega_m = 4\pi$.

$$\therefore f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$$

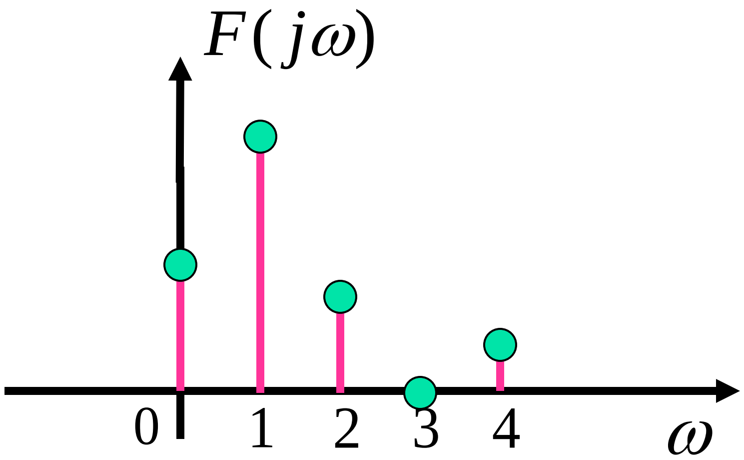
根据取样定理，可知所求的取样间隔

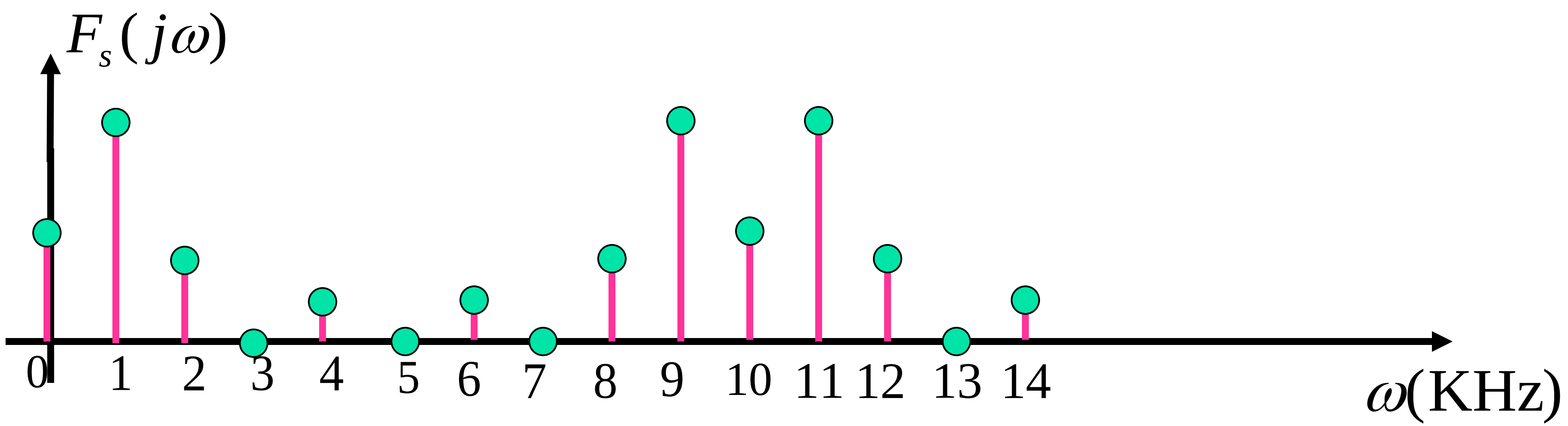
$$T_s \le \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{4} = 0.25(s)$$

例2 设某连续时间信号的频谱包含直流，1kHz，2kHz， 4kHz四个频率分量，幅度分别为0.5，1，0.4，0.2，相位谱为0，若以10kHz的频率进行理想抽样，试画出该抽样序列在0到25kHz频率范围内的频谱。

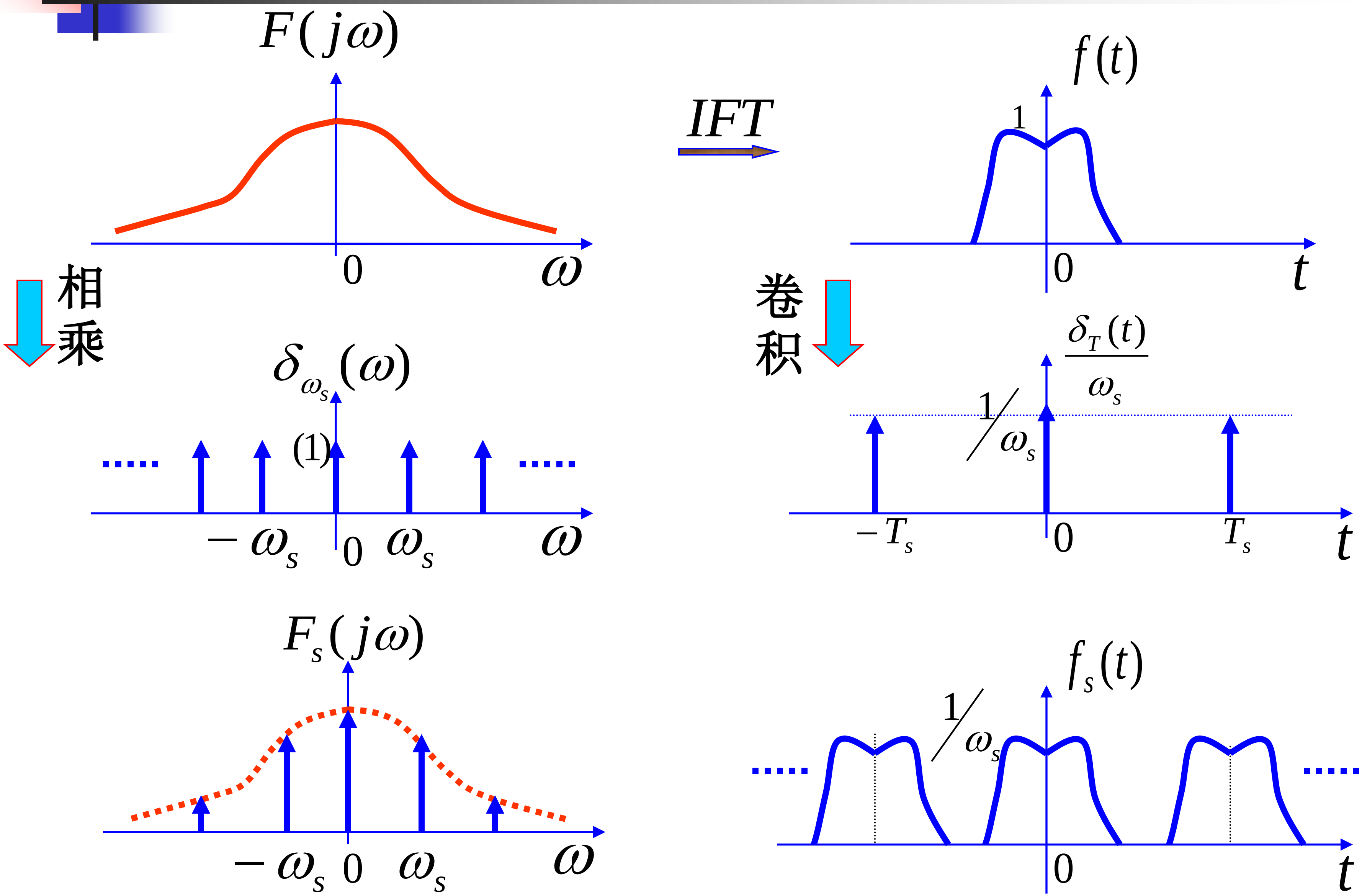


解： 信号的最高频率f_m=4kHz, 抽样频率f_s= 10kHz，满足抽样定理，抽样序列的频谱是一个周期函数，周期为f_s.





*四、频域抽样



$F(j\omega)$
0
ω
IFT
$f(t)$
1
0
t
相乘
卷积
$\delta_{\omega_s}(\omega)$
(1)
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
$\frac{\delta_T(t)}{\omega_s}$
$1/\omega_s$
$-T_s$
0
T_s
t
$F_s(j\omega)$
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
$f_s(t)$
$1/\omega_s$
0
t

$$F(j\omega)$$

$$\delta_{\omega_s}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(j\omega) = F(j\omega)\delta_{\omega_s}(j\omega)$$

IFT

IFT

IFT

$$f_s(t) = \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_s)$$

$$f(t)$$

$$f_s(t) = f(t) * \left(\frac{1}{\omega_s}\delta_{T_s}(t)\right)$$

$$p(t) = \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

根据时域和频域对称性，可推出频域抽样定理

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega_c}{\pi}f(nT_s)Sa[\omega_c(t-nT_s)]$$

变量置换

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

偶函数

$$F(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(jn\omega_s)Sa\left[\frac{T_s}{2}(\omega-n\omega_s)\right]$$

频域抽样定理

若信号 $f(t)$ 为时限信号，它集中在$(-t_m, t_m)$的时间范围内，若在频域中，以不大于$1/2t_m$的频率间隔对$f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_s(j\omega)$ 可以唯一地表示原信号。

时域抽样与频域抽样的对称性：

离散性与周期性

$$时域周期(T) \Rightarrow 频域离散(\omega = \frac{2\pi}{T})$$

$$频域周期(\omega) \Leftarrow 时域离散(T = \frac{2\pi}{\omega})$$

小结

- 信号抽样
- 信号恢复
- 抽样定理

课外作业

阅读：7.2节；预习：7.4-7.6节

作业： 7.6   7.8（选做）