信号与系统

Lecture 7

第四章:连续时间系统的频域分析

§4.1 引言

§4.2 信号通过系统的频域分析方法

§4.3 理想低通滤波器

复习

- 连续时间系统的时域分析
  - 零输入响应
  - 单位冲激响应与卷积积分
  - 零状态响应

- 连续信号的正交分解
  - 周期信号的傅里叶级数
  - 非周期信号的傅里叶变换
  - 周期信号/非周期信号的频谱
  - 傅里叶变换的基本性质

练习题：

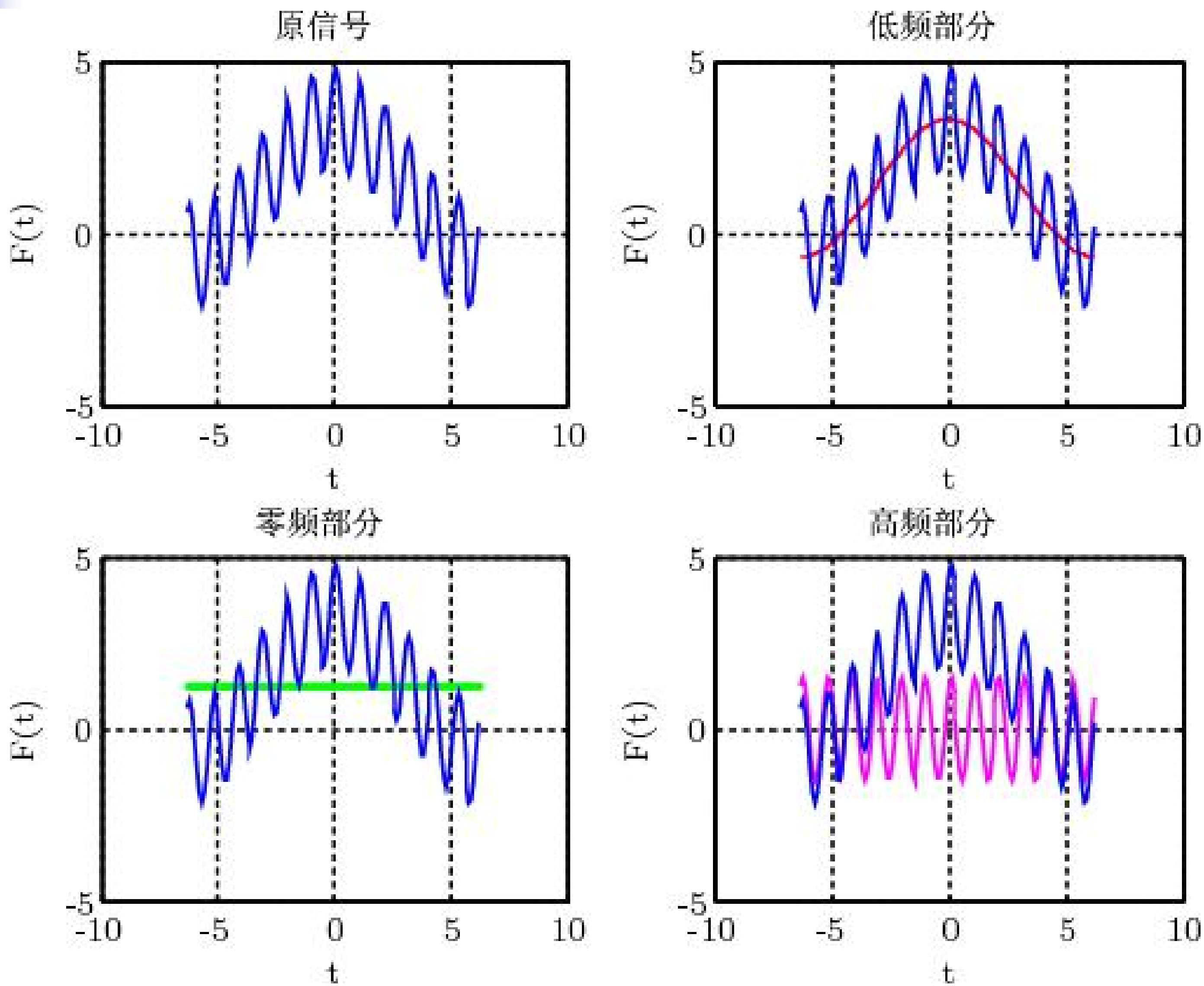
1、单位冲激函数的性质。

2、零状态响应的求解公式。

3、傅里叶正反变换公式。

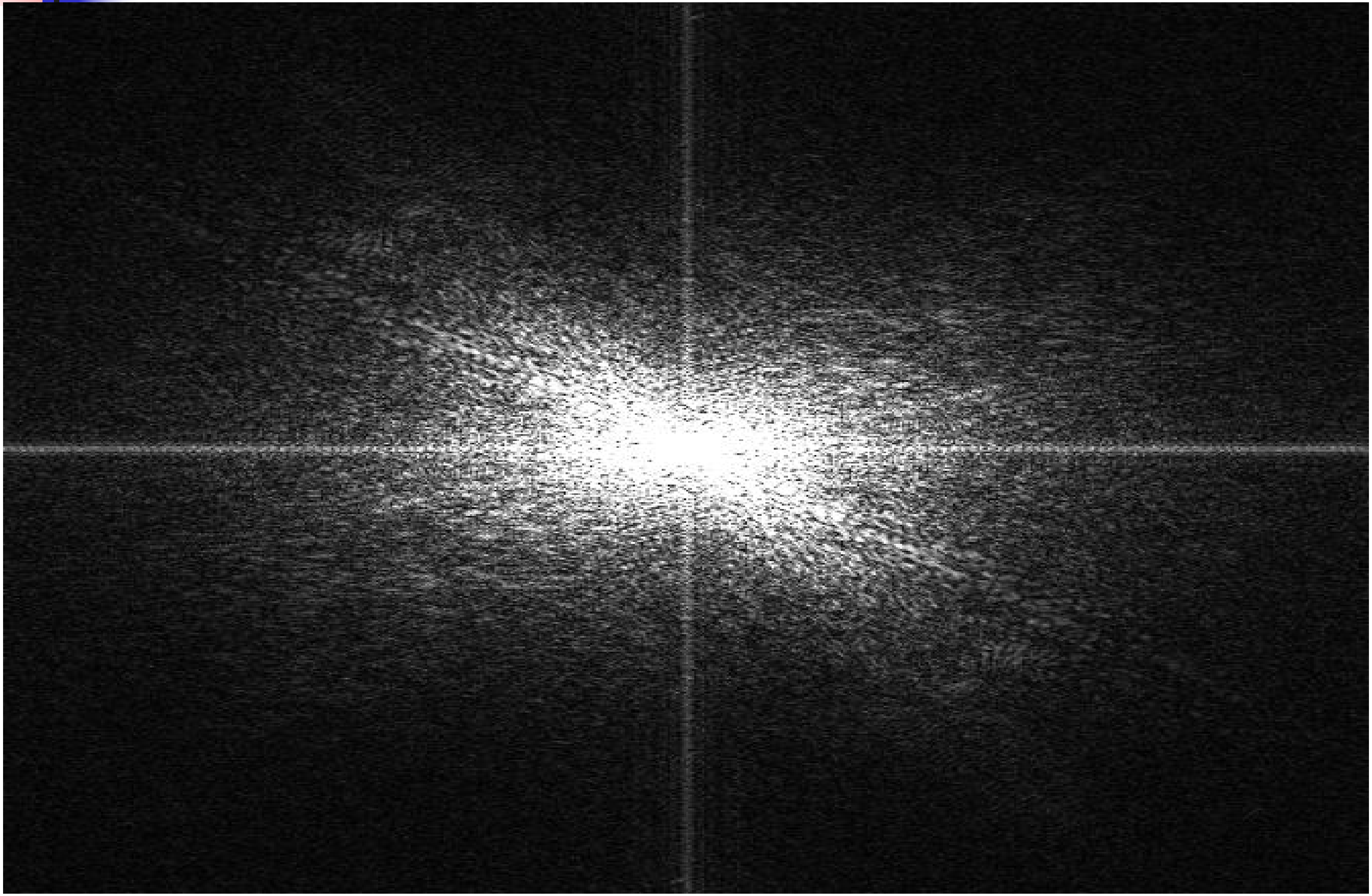
4、傅里叶变换的性质。

关于频谱



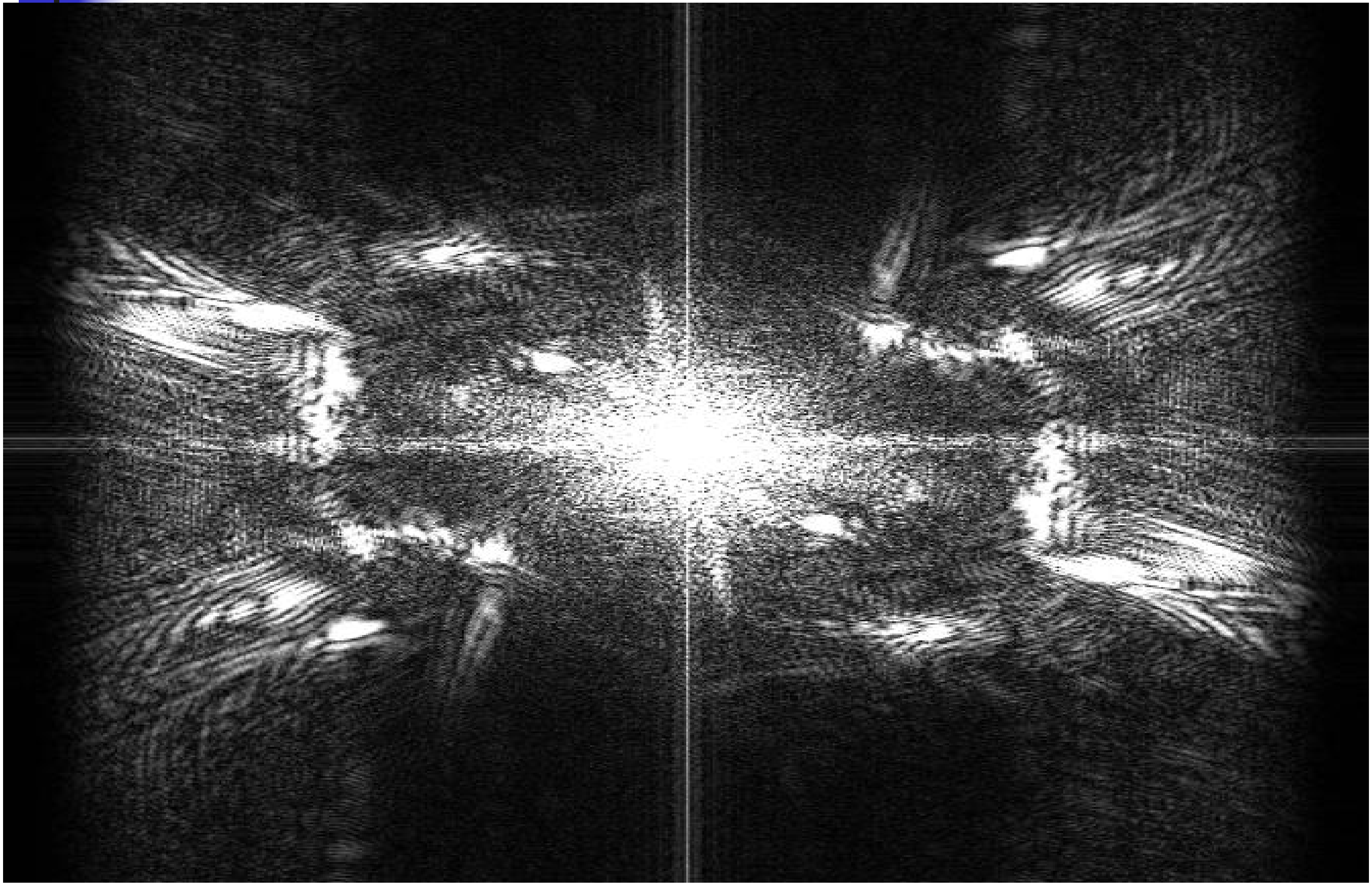
Lena灰度图像

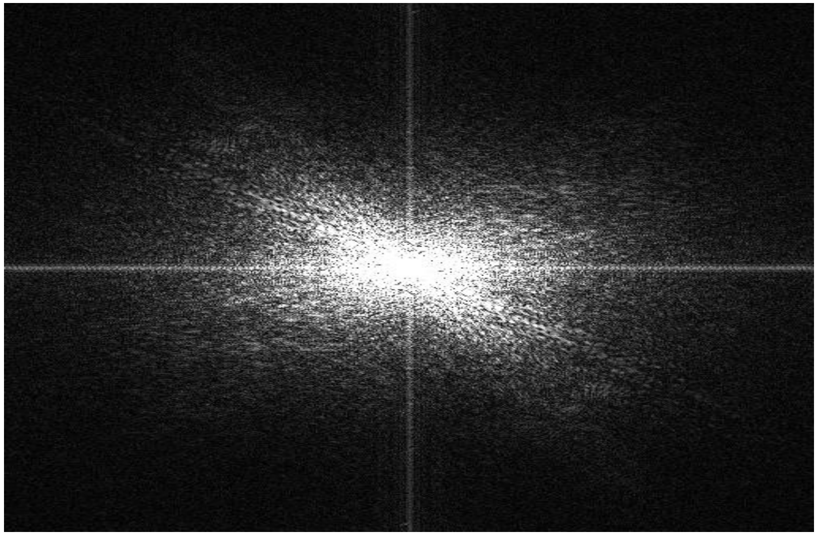
Lena灰度图像的频谱图

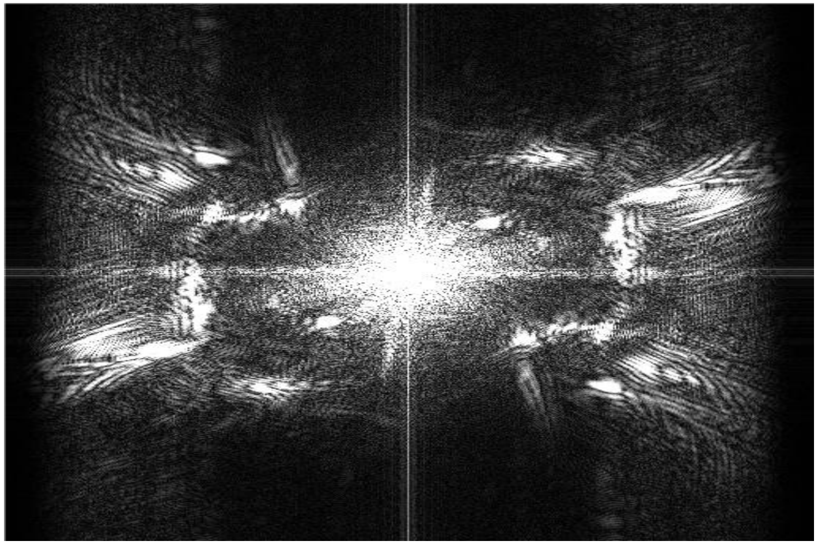


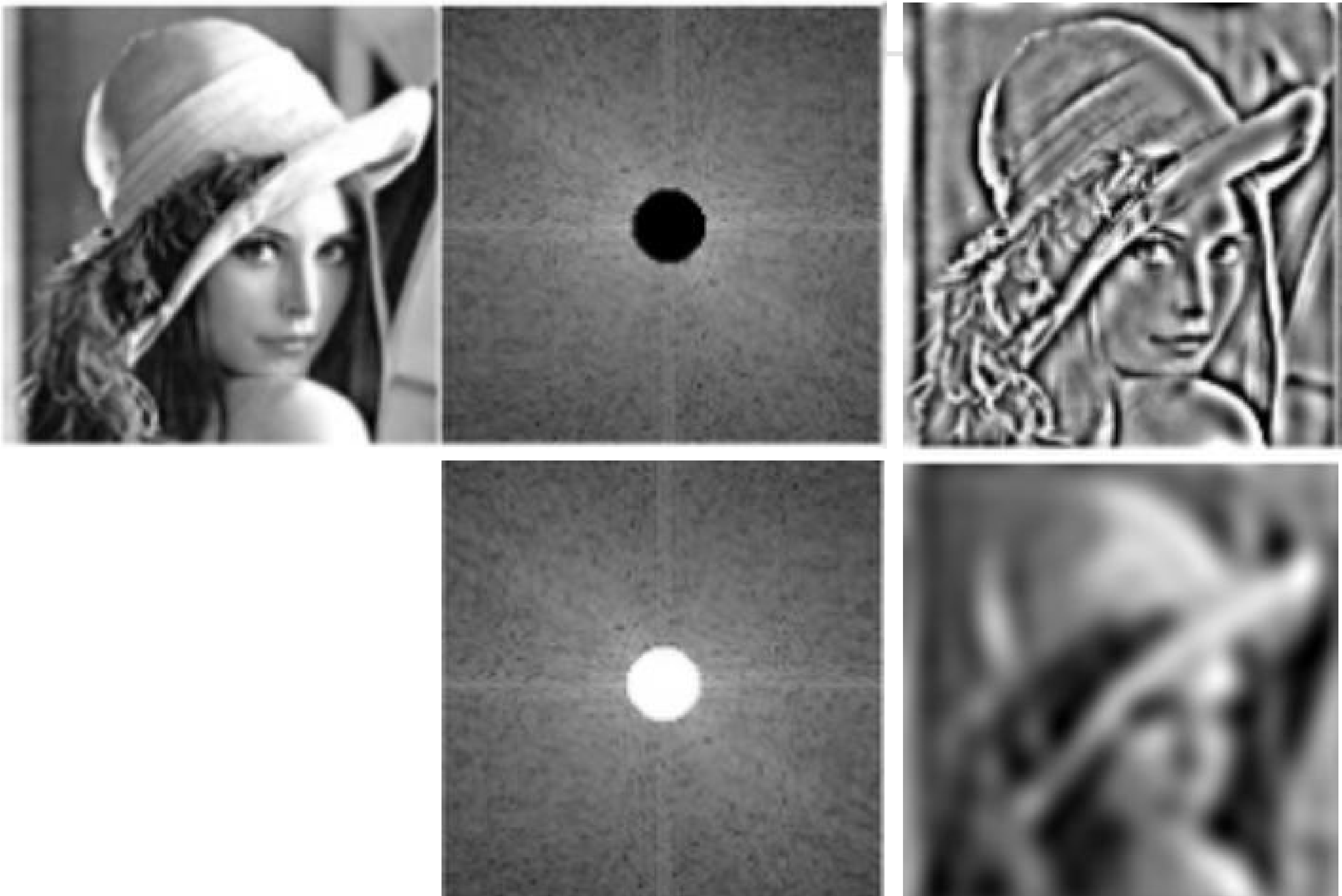
Barbara灰度图像

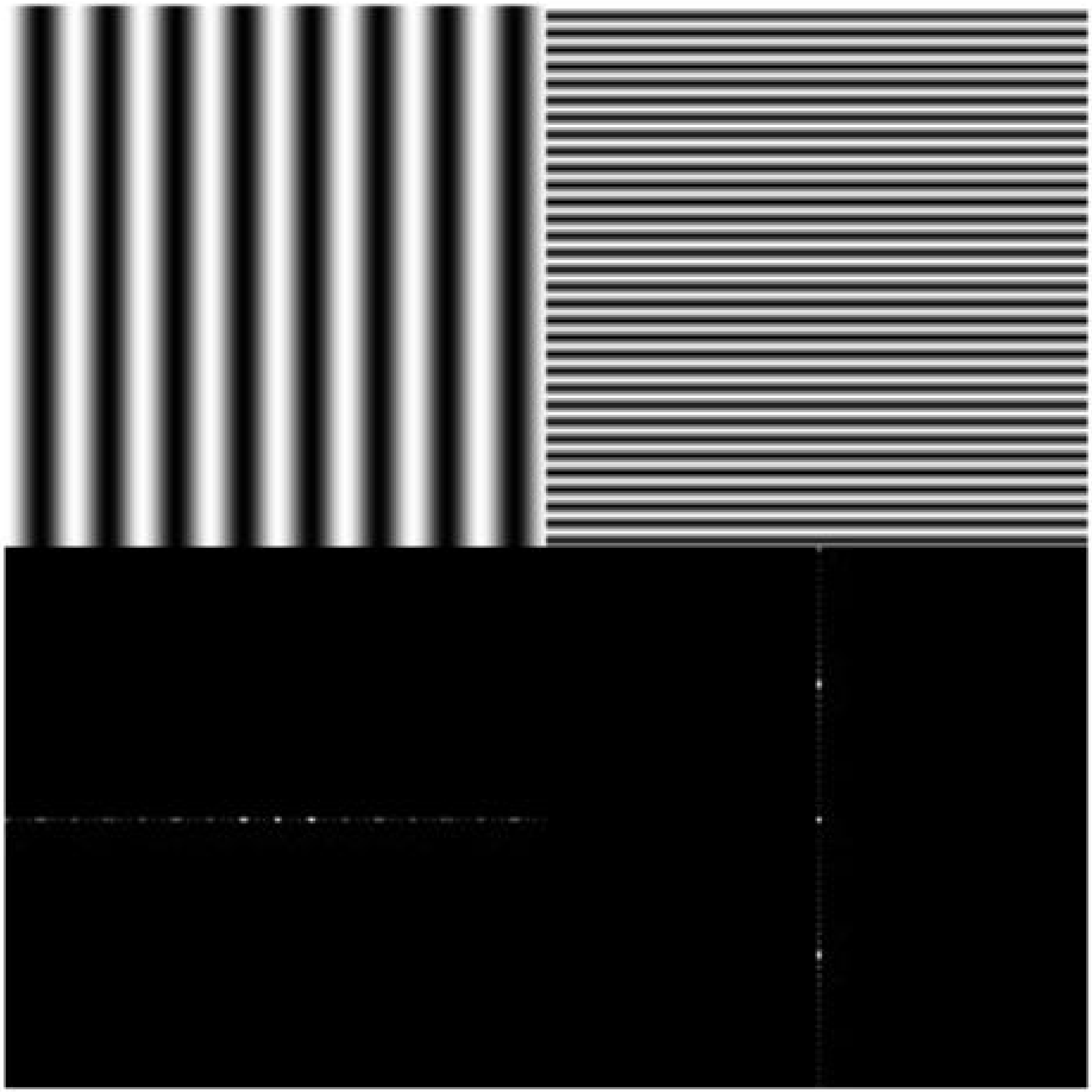
Barbara灰度图像的频谱图

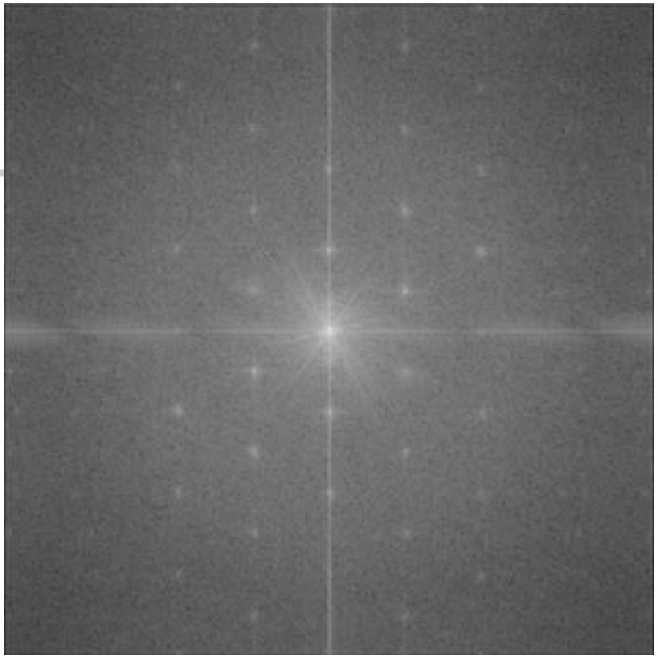


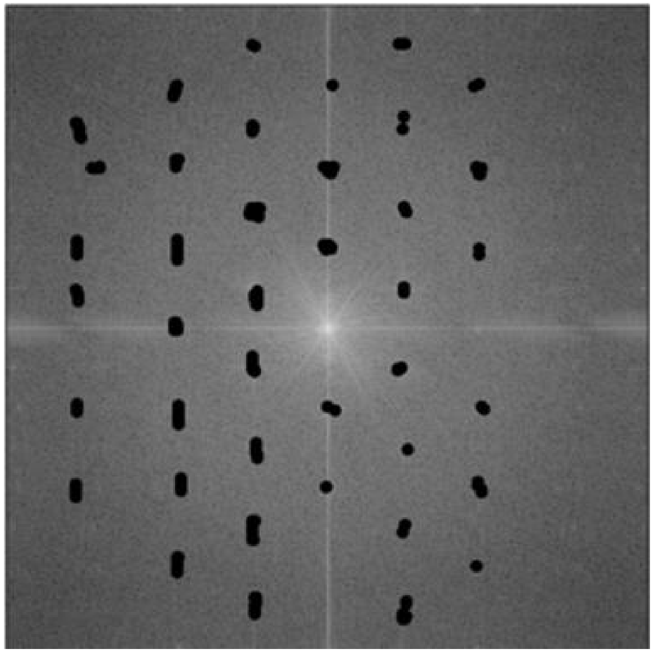











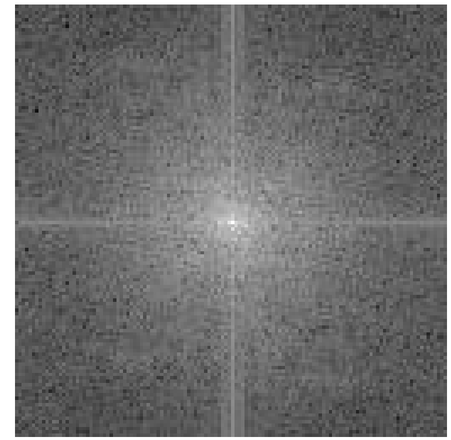
Amplitude and Phase

$$|F(x)| = \left\{ |F_R(x)|^2 + |F_I(x)|^2 \right\}^{1/2}$$

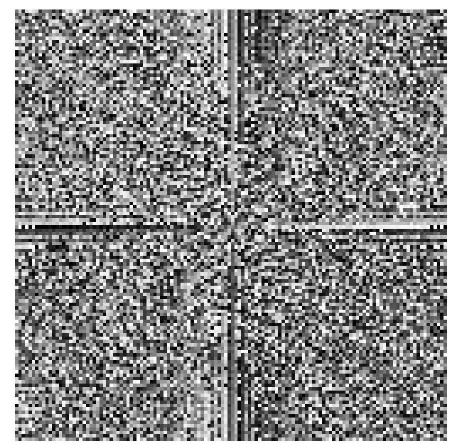
$$|F(x)|$$

original

amplitude



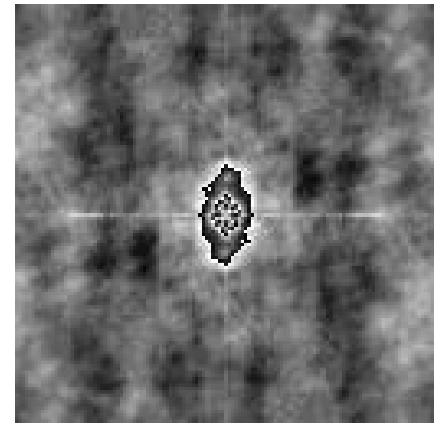
phase



$$\angle F(x)$$

$$\arctan\left(\frac{F_I(x)}{F_R(x)}\right)$$

$$FT^{-1}\left(\left|F(x)\right|\right)$$

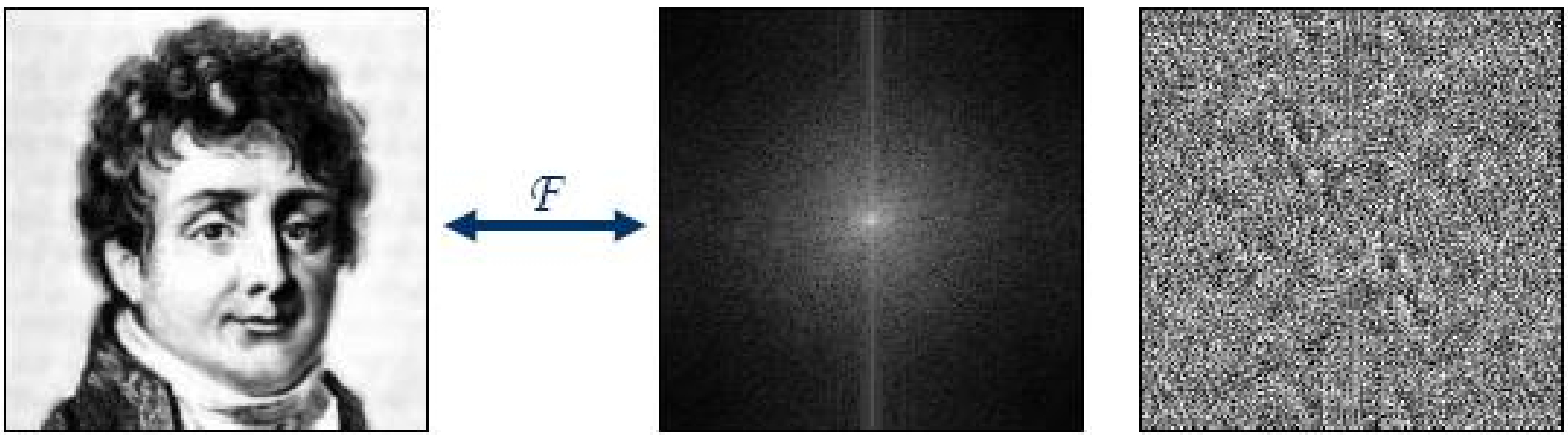


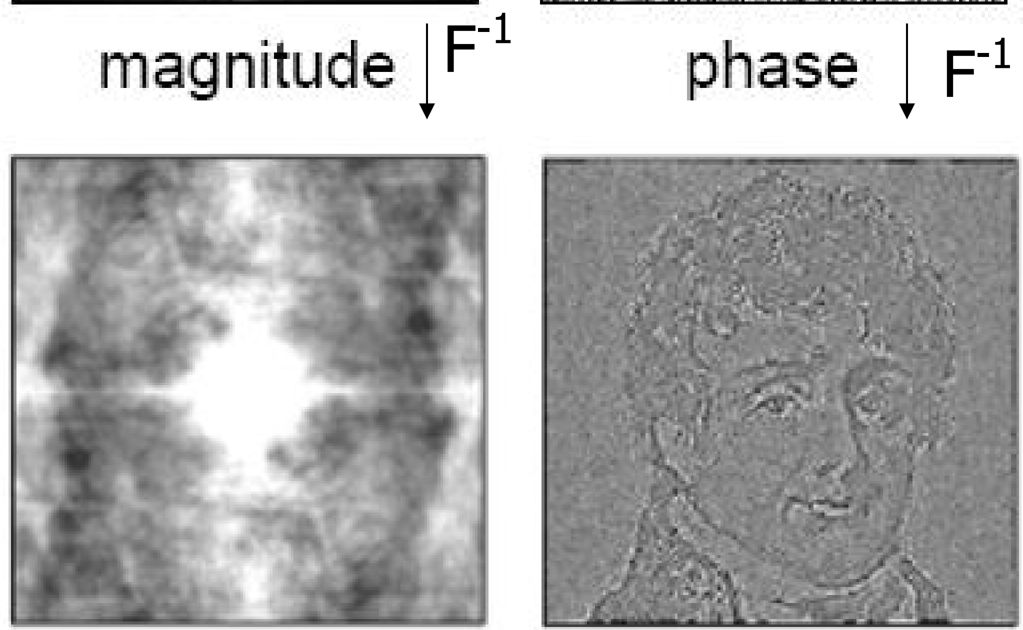
amplitude

original

phase

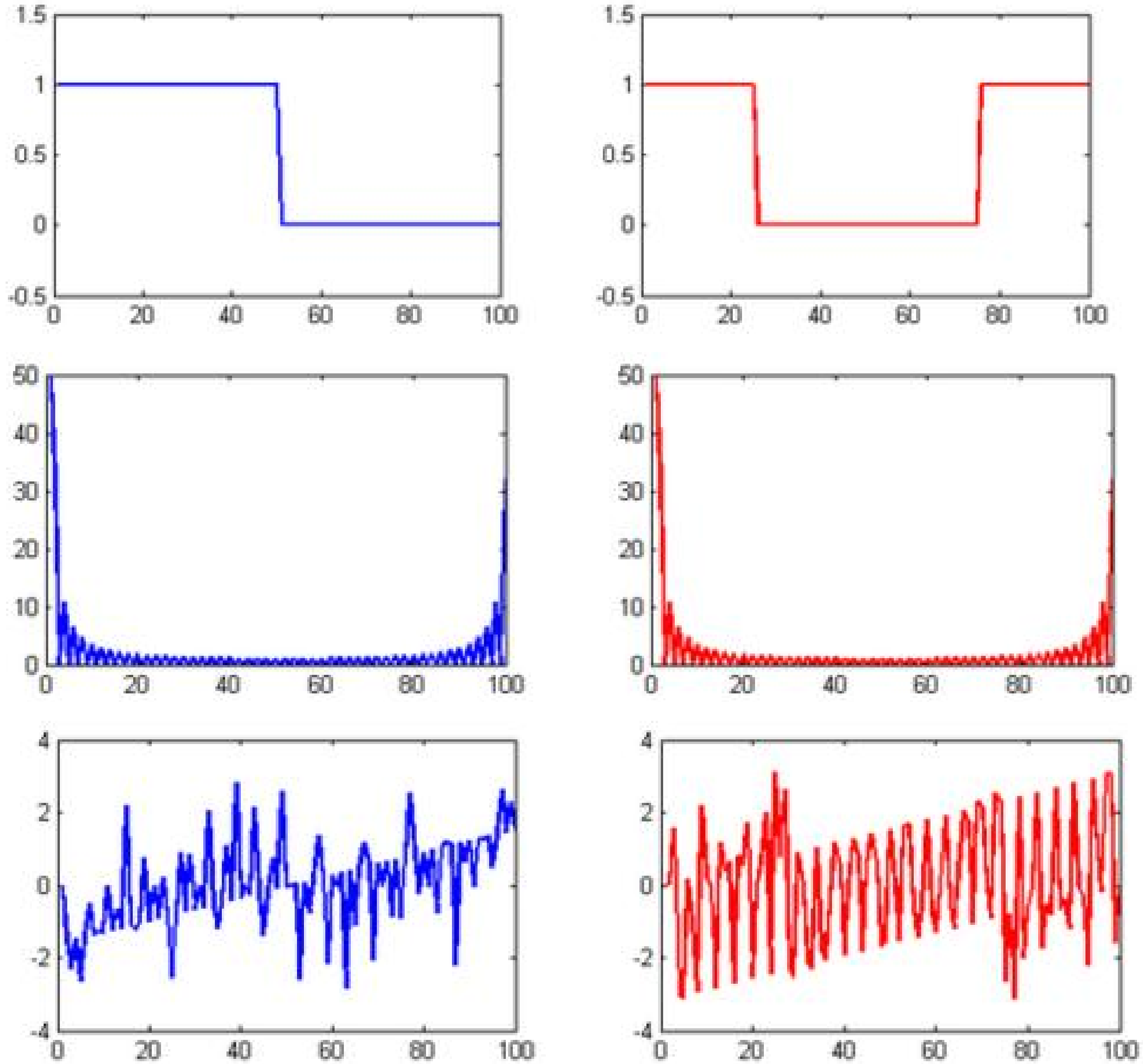
$$FT^{-1}\left(F(x)/\left|F(x)\right|\right)$$





Phase contains more important information than magnitude

Phase contains more important information than magnitude



基本要求：

- 掌握系统频率响应函数的概念、线性时不变系统零状态响应的频域分析方法； (1)
- 掌握理想低通滤波器的频响特性； (1)
- 掌握调制与解调的原理和过程；
- 了解无失真传输的条件。

重点与难点：

- 系统的频率响应函数；

本讲内容

- 信号通过系统的频域分析方法
- 理想低通滤波器的频响，单位冲激响应与单位阶跃响应

§4.1 引言

系统响应（零状态响应）的时域求解：

1. 将激励信号分解为一系列冲激函数之和；
2. 对每个单元激励求得系统的响应（即冲激响应）；
3. 这些单元激励响应的叠加，就是系统对激励信号的总的响应（零状态响应）。

$$e(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=e(t)*\delta(t)$$

$$\downarrow\ \delta(t)\rightarrow h(t)$$

$$r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=e(t)*h(t)$$

系统响应（零状态响应）的频域求解：

1、将激励信号分解为一系列等幅正弦函数或虚幂指数函数；

2、求系统对每个单元激励的响应；

3、这些单元激励响应的叠加，就是系统对激励信号的总的响应（零状态响应）。

零状态响应：从信号分解的角度

$$e(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\downarrow\ e^{j\omega t}\rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$r_{zs}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[E(j\omega)H(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Updownarrow$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{zs}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

零状态响应：从傅里叶变换的性质来看

$$e(t) \quad * \quad h(t) \quad = \quad r(t)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{j}\omega) \quad \times \quad H(\mathrm{j}\omega) \quad = \quad R(\mathrm{j}\omega)$$

§4.2 信号通过系统的频域分析方法

设 $e(t) \leftrightarrow E(j\omega)$, $r_{zs}(t) \leftrightarrow R(j\omega)$,

定义：频域的系统函数

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

又称为频率响应函数/频响。实际上，$h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

频域分析法—研究信号的频谱通过系统后产生的变化。

频域求系统响应：

1. 将输入信号分解为正弦分量，即求频谱 $E(j\omega)$；
2. 求系统函数 $H(j\omega)$；
3. 通过公式 $R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$ 求零状态响应的频谱 $R(j\omega)$；
4. 由傅里叶反变换得到零状态响应 $r_{zs}(t)$。

频域信号处理：

系统对不同频率的等幅正弦信号的作用不同：对信号中各个频率分量的相对大小将产生不同的影响，同时对各个频率分量也会产生不同的相移。叠加后的信号波形也就不同于输入信号的波形，从而达到对信号处理的目的。

中国人在美国旅游，想去白宫不知道怎么走。

游客问翻译：“白宫怎么走？”

翻译问路人：“Where is the White House?”

路人回答：“Go straight，then turn right.”

翻译告诉游客：“直走，再右拐。”

傅里叶正变换

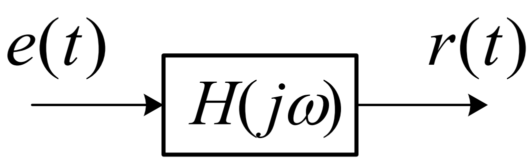
频域处理

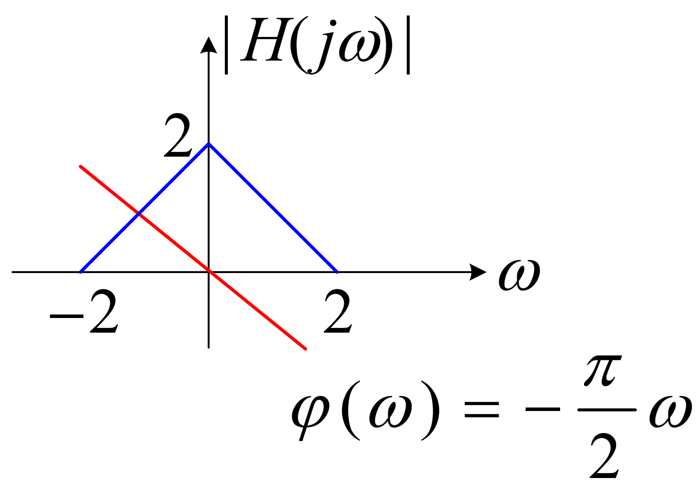
傅里叶反变换

例1 （P174 例题4-1）一线性系统的频响曲线如右图所示。设激励信号为

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

求零状态响应。





解：(1) 求输入信号的频谱。

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

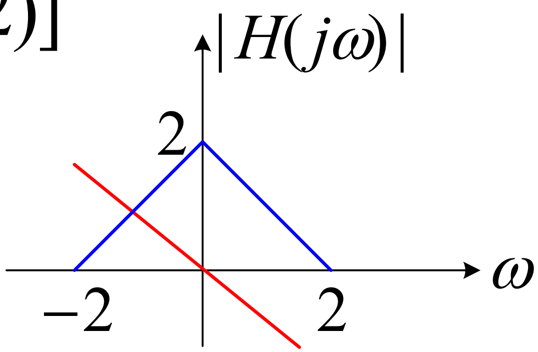
$$E(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)]$$

$$+ 2\pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$$

(2)求系统函数。由给出的频响曲线，可知

$$|H(j\omega)| = (2-|\omega|)[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$



$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= \begin{cases} (2-|\omega|)e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}, & |\omega| < 2 \\ 0, & |\omega| \geq 2 \end{cases}$$

(3) 求响应的频谱。

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$

$$=8\pi\delta(\omega)+2\pi e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+1)+2\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-1)$$

(4) 求响应的时域表达式。

$$r(t)=4+e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jt}+e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt}$$

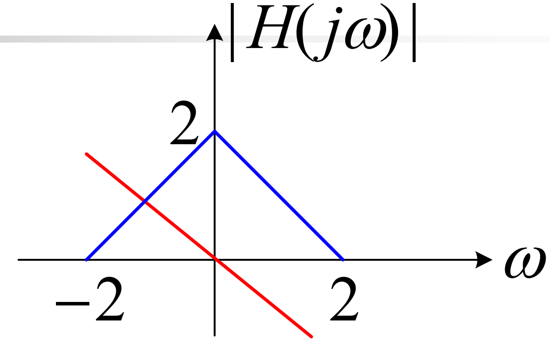
$$=4+e^{-j(t-\frac{\pi}{2})}+e^{j(t-\frac{\pi}{2})}$$

$$=4+2\cos(t-\frac{\pi}{2})=4+2\sin t$$

分析：

$$e(t) = 2 + 2\cos t + 2\cos(2t)$$

$$r(t) = 4 + 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$$

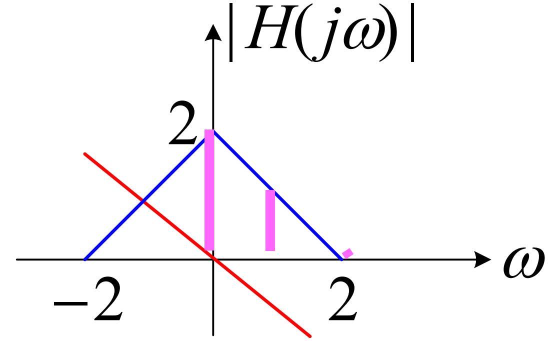


$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega$$

可见，经过系统后，二次谐波被滤除，
直流分量放大2倍，基波产生了相移。

问题：

此题还有没有其他求解方法？



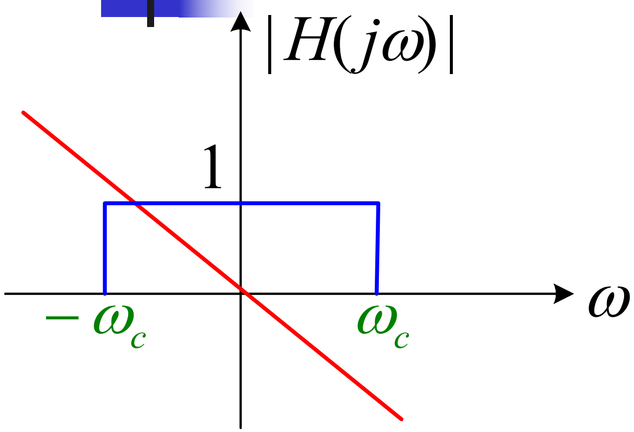
§4.3 理想低通滤波器

- 滤波器是一种选频装置，可以使信号中特定频率成分通过，而极大地衰减其他频率成分。
- 所谓理想滤波器，是指能使通带内信号的幅值和相位都不失真，阻带内的频率成分都衰减为零的滤波器。
- 理想滤波器是不存在的，实际滤波器幅频特性中通带和阻带间没有严格界限，存在过渡带。

本节主要内容：

- 理想低通滤波器的频响特性
- 理想低通滤波器的单位冲激响应
- 理想低通滤波器的单位阶跃响应

一. 理想低通滤波器的频响



$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c \quad \text{（截止频率）}$$

或

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}[u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)]$$

更一般地：

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$

特性：

1、对于激励信号中低于截止频率 ω_c 的各分量，一致均匀地通过，在时间上延迟同一段时间 t_0 。

2、对于高于截止频率 ω_c 的各分量，则一律不能通过。

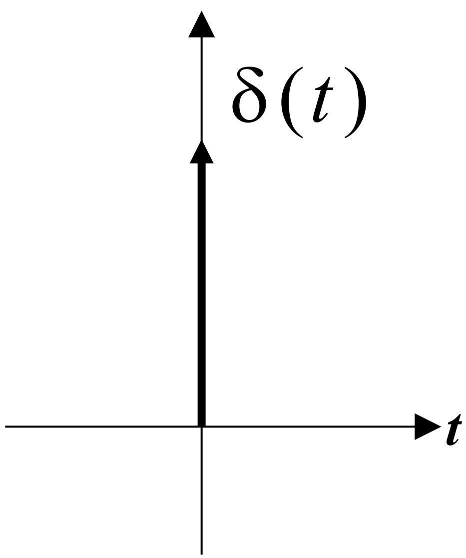
思考：

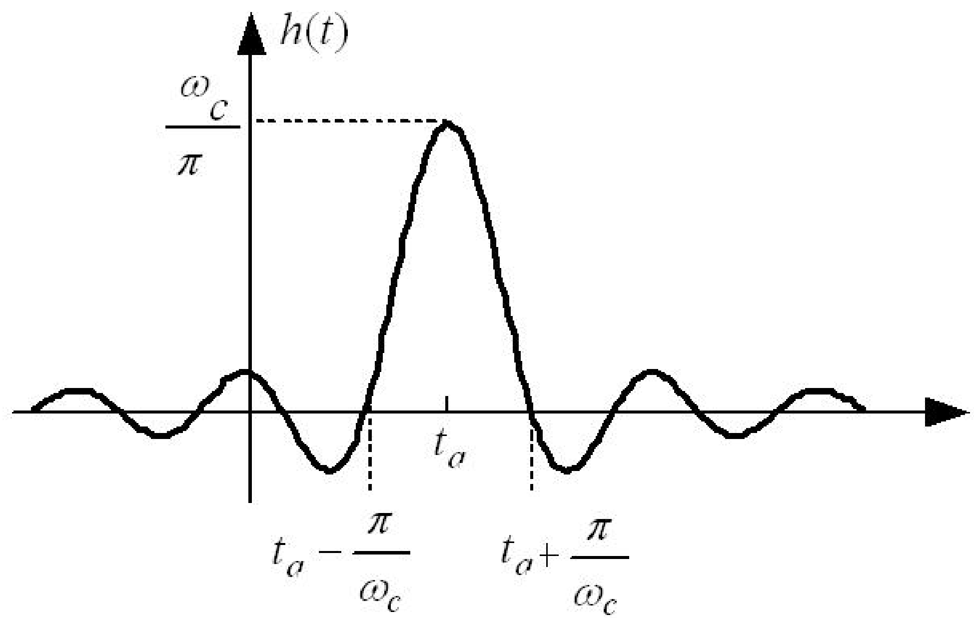
参照理想低通滤波器的频响曲线，可否画出理想高通、理想带通、理想全通滤波器的频响曲线？

二. 理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$$



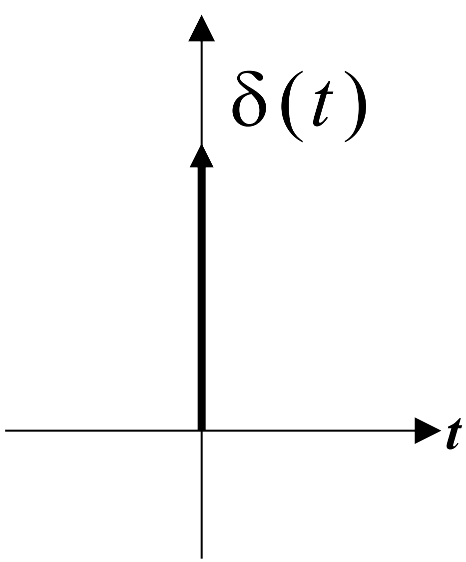


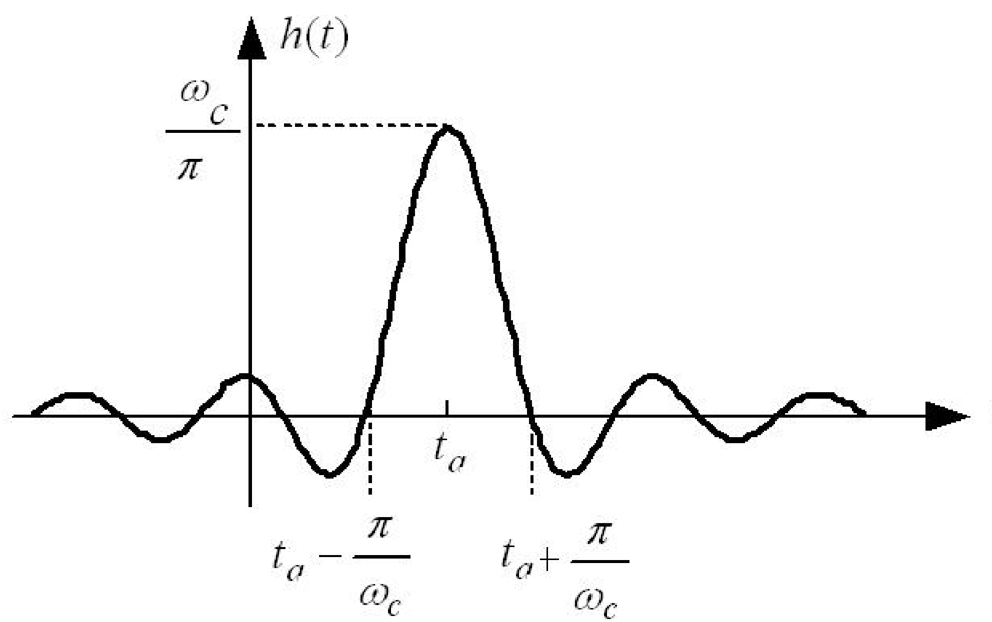
a. 波形发生了失真。

$$\lim_{\omega_c \to \infty} h(t) = \lim_{\omega_c \to \infty} \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$$

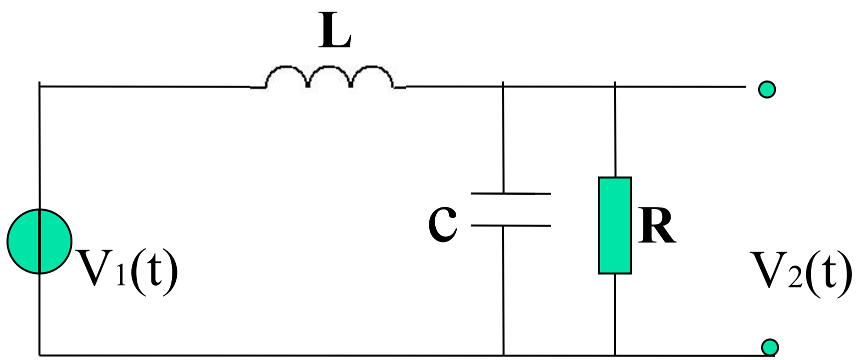
b. h(t) 的主峰发生在 $t=t_0$处。

c. 系统违背了因果律，因此在物理上是无法实现的。



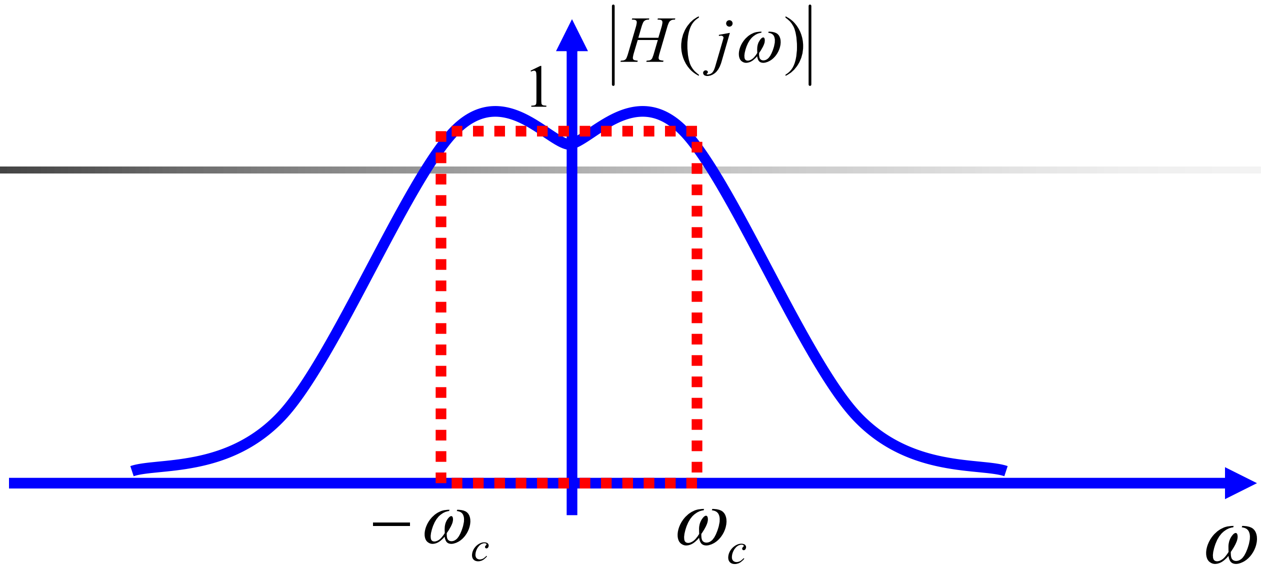


理想低通滤波器在物理上是无法实现的，但是，传输特性接近理想特性的网络却不难构成。如：

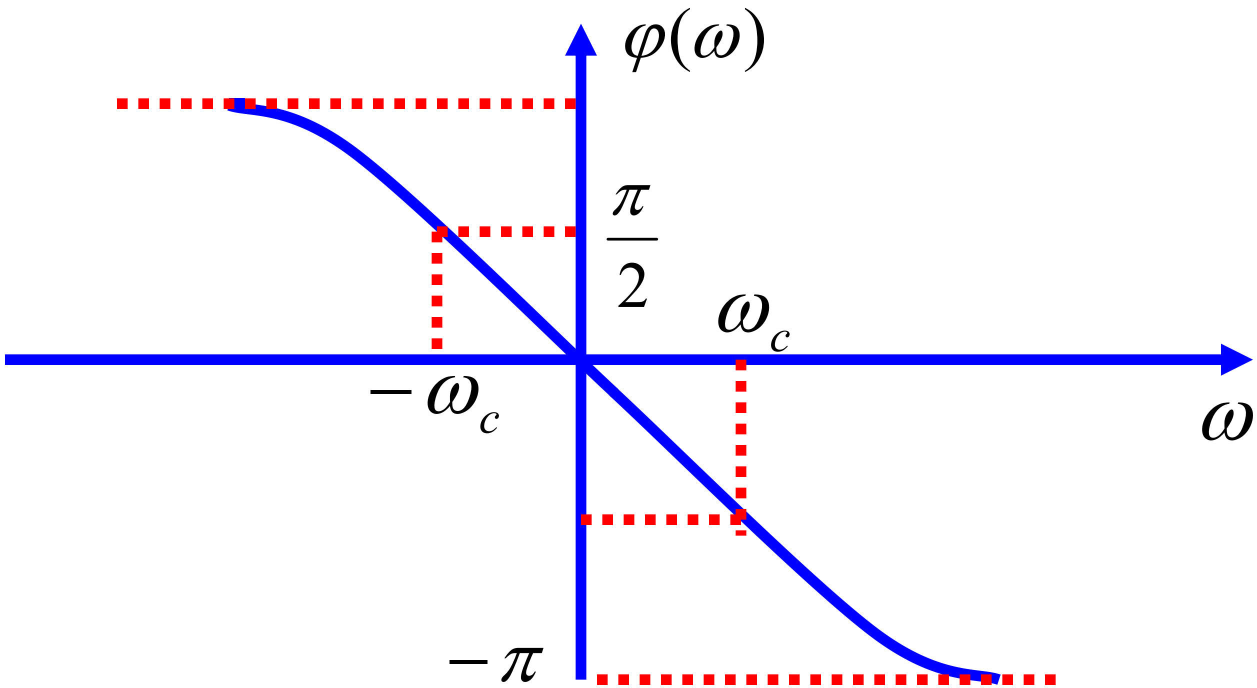


$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right]$$



$|H(j\omega)|$
1
$-\omega_c$
ω_c
ω



$\varphi(\omega)$
$\frac{\pi}{2}$
ω_c
$-\omega_c$
ω
$-\pi$

三. 单位阶跃响应

$$r_u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\sin\omega_c(\tau-t_0)}{\pi(\tau-t_0)}d\tau$$

令： $x=\omega_c(\tau-t_0),dx=\omega_c d\tau,d\tau=\dfrac{dx}{\omega_c}$

$$r_u(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{0}^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx]$$

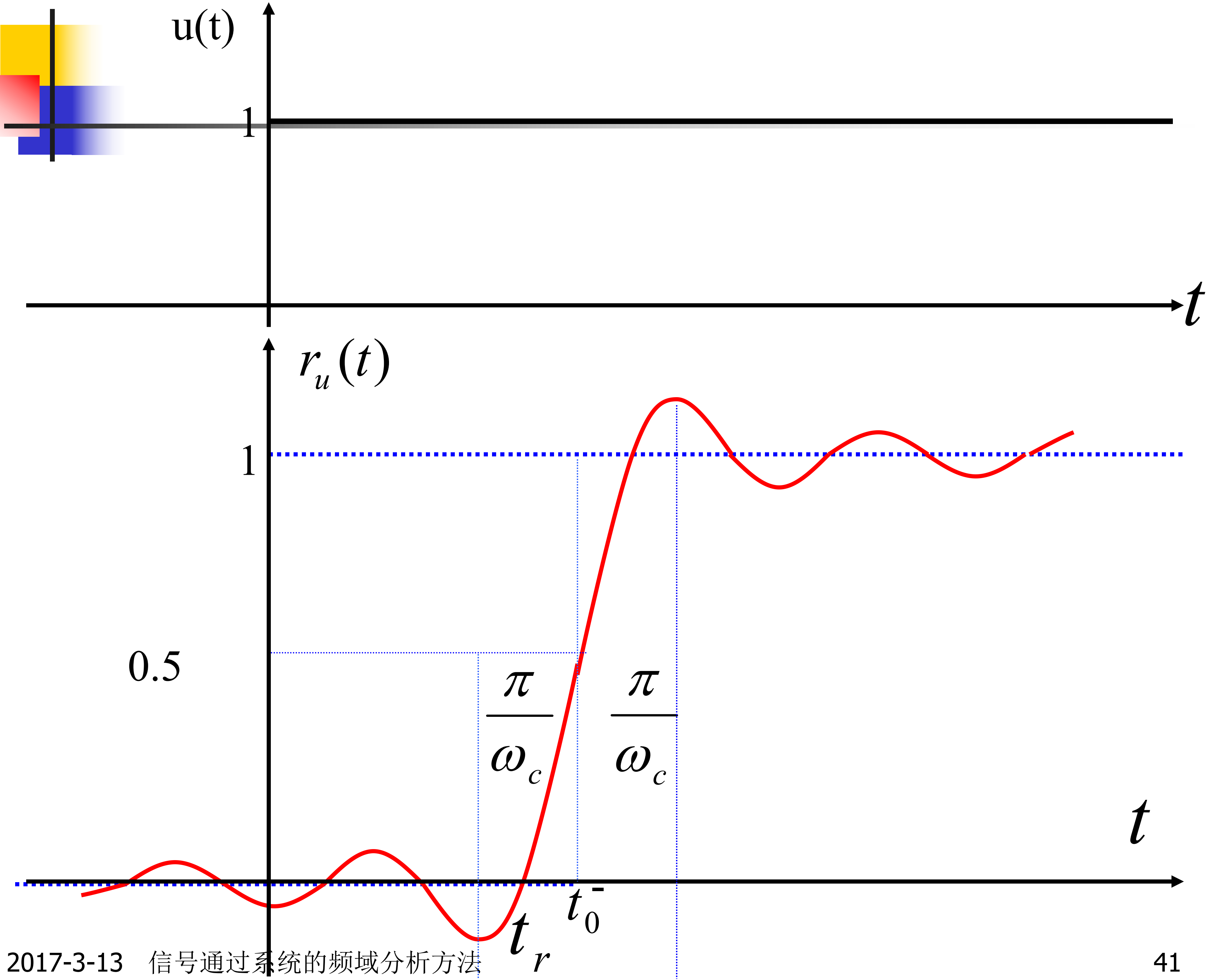
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ldots(1)$$

定义如下的正弦积分函数：

$$\mathrm{Si}(y)=\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{y}Sa(x)dx\ldots(2)$$

将(1)(2)代入，得到

$$r_u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t-t_0)]$$


u(t)
1
t
$r_u(t)$
1
0.5
$\frac{\pi}{\omega_c}$
$\frac{\pi}{\omega_c}$
t
t_r
t_0

说明：

a. 波形产生了失真；

$$\omega_c \to \infty, r_u(t) \to u(t - t_0)$$

b. 响应出现的时间比激励滞后t_0；

c. 输出电压的前沿是倾斜的，说明电压的建立需要一段时间。此时间与通带成反比：$t_r = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$

d. 系统违背了因果律，因此在物理上是无法实现的。

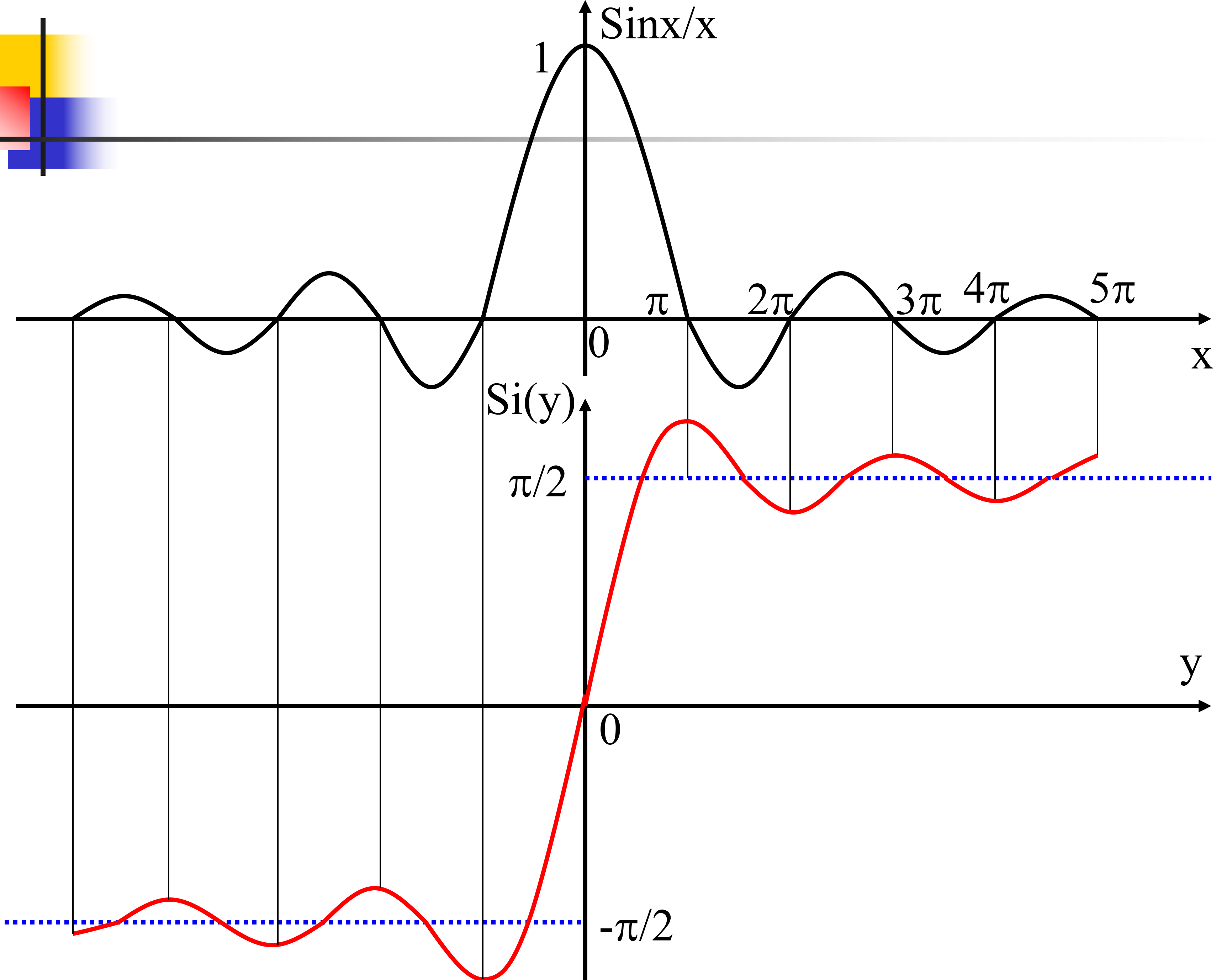
正弦积分

1. $Sa(x)$ 在 $\pm n\pi$ 为零，$Si(y)$在 $\pm n\pi$ 取极值。

2. $Si(y)$ 为奇函数，即 $Si(y)=-Si(-y)$

3. $Si(0)=0, Si(\infty)=\dfrac{\pi}{2}, Si(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$

4. 在 $y=0$ 附近，$Si(y)$ 近似于直线。



Sinx/x
1
π
2π
3π
4π
5π
0
x
Si(y)
π/2
y
0
-π/2

§4.4 系统的物理可实现性/佩利–维纳准则

时域：因果性

$$\boxed{t<0,\quad h(t)=0}$$

频域：佩利—维纳准则

(1) 能量可积：$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^{2}d\omega<\infty}$

(2) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^{2}}d\omega<\infty}$

(1) 佩利-维纳准则只是物理可实现系统的必要条件，而不是充分条件。

(2) 由佩利-维纳准则可以推出以下结论：对物理可实现的系统来说，

a. 幅度函数 $|H(j\omega)|$ 在某些离散频率处可以是零，但在一有限频带内不能为零。

b. 频响的衰减速率有限制，应不大于指数衰减速度。

高斯幅频特性是否物理可实现？

$$\left|H(j\omega)\right| = e^{-\omega^2}$$

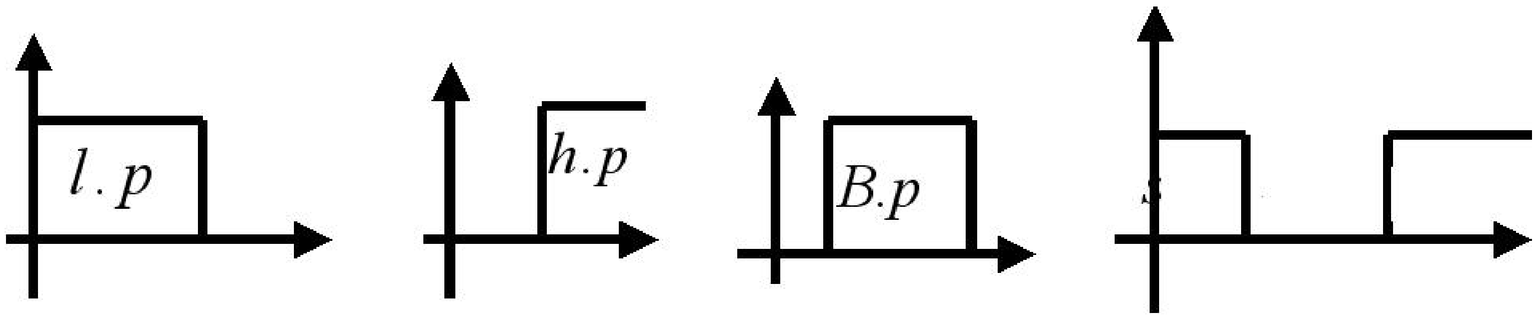
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln(e^{-\omega^2})\right|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1+\omega^2} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\omega^2+1}\right) d\omega = \lim_{B\to\infty} \left(\omega - tg^{-1}\omega\right)\Big|_{-B}^{B}$$

$$= \lim_{B\to\infty} 2(B - tg^{-1}B) = 2\left(\lim_{B\to\infty} B - \frac{\pi}{2}\right)$$

发散的，物理不可实现

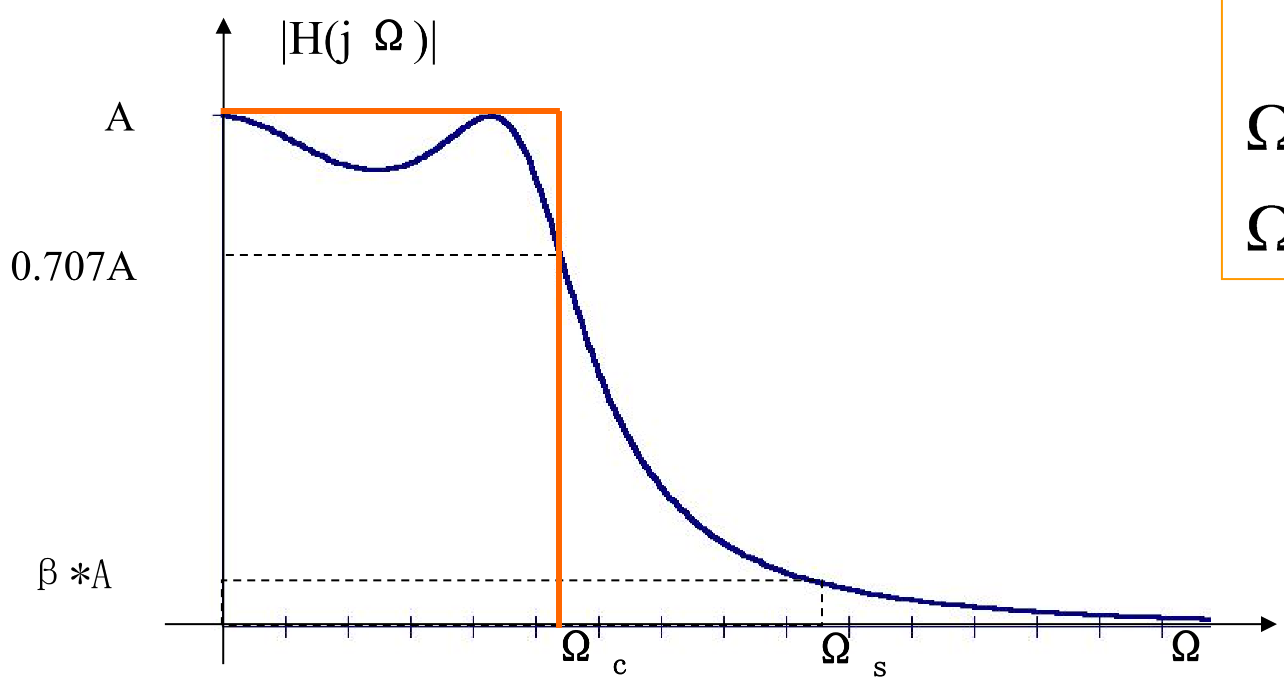
以下系统在物理上都是不能实现的：



理想滤波器具有非因果无穷的冲击响应和不连续的频率特性，要用稳定的LTI系统来实现这样的特性是不可能的。

工程上是用有限冲激响应的因果LTI系统或具有连续频率特性的LTI系统来逼近理想特性。在满足一定的误差要求的情况下用可实现函数来逼近理想滤波特性。

实际低通滤波器特性：



Ω_c ——截止频率
（又称为：3dB 衰耗点、半功率点）

Ω_s ——阻带边界频率

$\Omega_s - \Omega_c$ ——过渡带宽

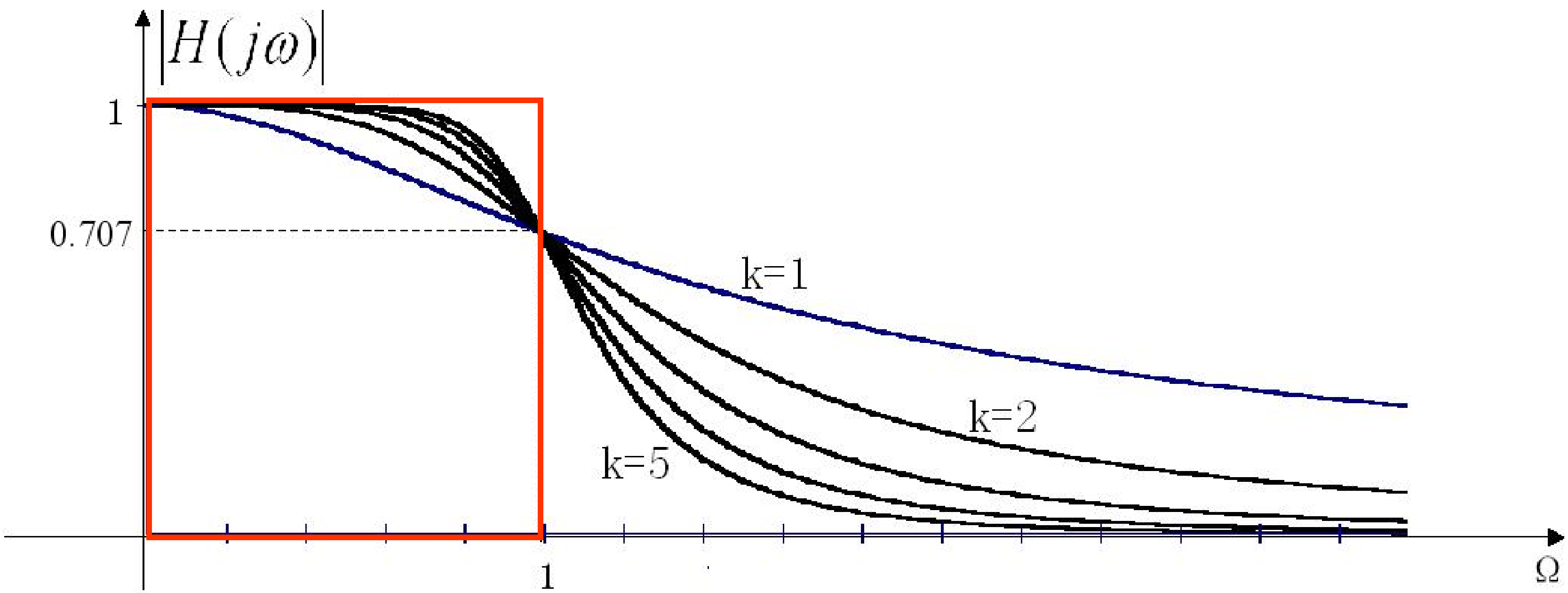
对相位特性的逼近在一般的应用中可以不作要求。

巴特沃斯（Butterworth）滤波器：

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + B_k\Omega^{2k}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$$

B_k 由通带边界衰减量的要求确定，一般取3dB。

k称为滤波器的阶数，k越大越接近于理想情况，但所用元件越多，结构越复杂。

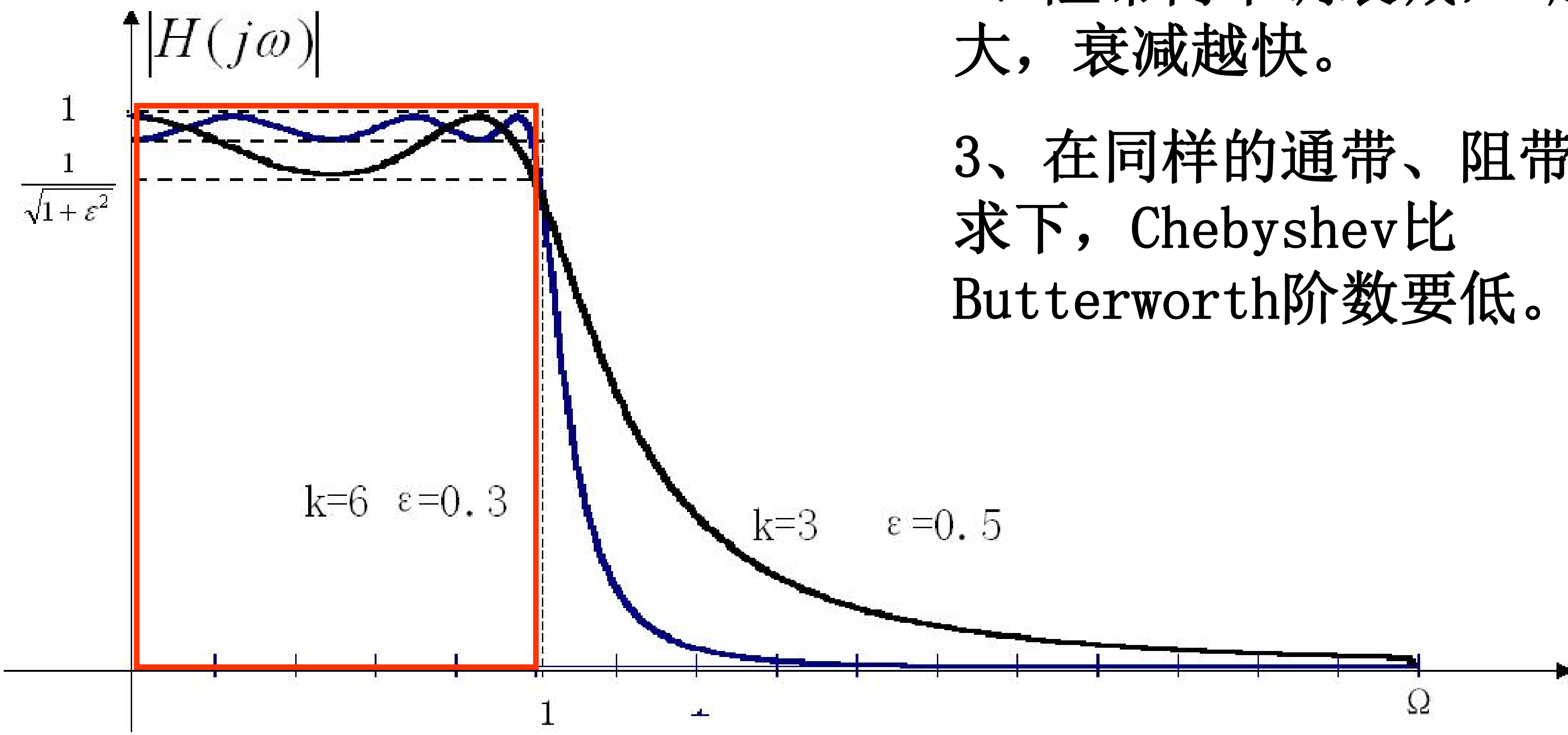


切比雪夫（Chebyshev）滤波器：

1、通带内等波纹起伏，k越大，起伏越多。

2、阻带内单调衰减，k越大，衰减越快。

3、在同样的通带、阻带要求下，Chebyshev比Butterworth阶数要低。



小结

- 求解系统响应的频域分析方法
- 系统的频响函数及其物理意义
- 理想低通滤波器的频响，冲激响应响应

课外作业

阅读:4.1-4.3;　预习:5.1—5.5

作业:4.5,4.6