信号与系统

Lecture 9

第五章: 连续时间系统的复频域分析（续）

§5.6 拉普拉斯变换的基本性质

§5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法

§5.9 线性系统的模拟

傅氏变换的基本性质

性质名称	时域	频域
线性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2F_2(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$
调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
	$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))-F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$
帕塞瓦尔等式	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\mathrm{j}\omega)\|^2\,\mathrm{d}\omega$

拉氏变换的基本性质

序号	性质名称	信　　号	拉普拉斯变换
0	定义	$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\,ds,\ t\geqslant 0$	$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,\ \sigma>\sigma_0$
1	线性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
2	尺度变换	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \sigma>a\sigma_0$
3	时移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0),\ t_0>0$	$e^{-st_0}F(s),\ \sigma>\sigma_0$
4	复频移	$e^{s_a t}f(t)$	$F(s-s_a),\ \sigma>\sigma_a+\sigma_0$
5	时域微分	$f^{(1)}(t)=\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-),\ \sigma>\sigma_0$
		$f^{(n)}(t)=\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0^-)$
6	时域积分	$\left(\int_{0^-}^{t}\right)^n f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s^n}F(s),\ \sigma>\max(\sigma_0,\ 0)$
		$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$
		$f^{(-n)}(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\right)^n f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s^n}F(s)+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0^-)$
7	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$ $f_1(t)$、$f_2(t)$为因果信号	$F_1(s)F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
8	时域相乘	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(\lambda)F_2(s-\lambda)\,d\lambda$ $\sigma>\sigma_1+\sigma_2,\ \sigma_1<c<\sigma-\sigma_2$
9	S 域微分	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s),\ \sigma>\sigma_0$
10	S 域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty}F(\lambda)\,d\lambda,\ \sigma>\sigma_0$
11	初值定理	$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$	
12	终值定理	$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$，$s=0$ 在收敛域内	

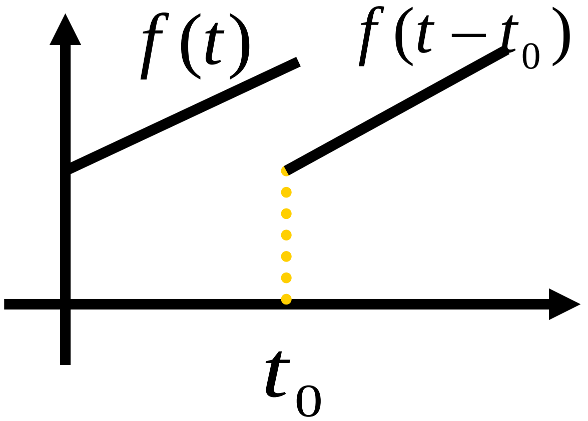
重点

- 拉普拉斯变换的基本性质
  - 时移特性
  - 时域的微分和积分特性
  - 卷积定理
  - 初值和终值定理

时移

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ，则

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s) \quad t_0 > 0$$



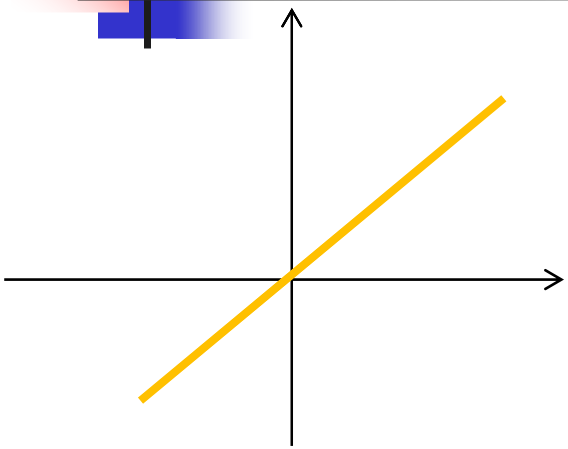
傅里叶变换的时移性质

若：$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

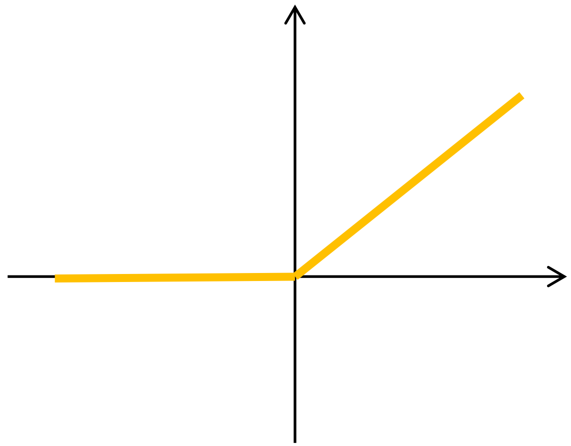
则：$f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$

说明：对于有始函数，$f(t-t_0)u(t-t_0) = f(t-t_0), \quad t_0 > 0$

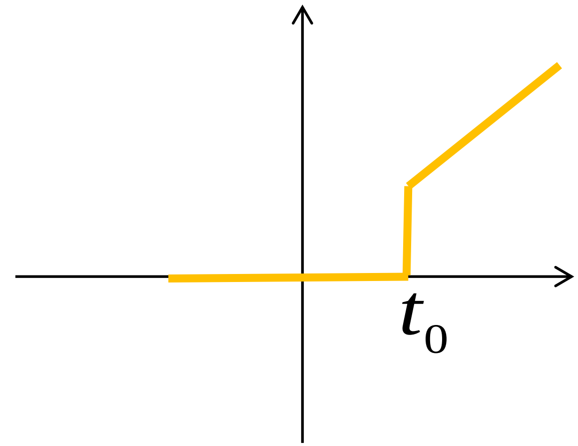
$f(t)=t$



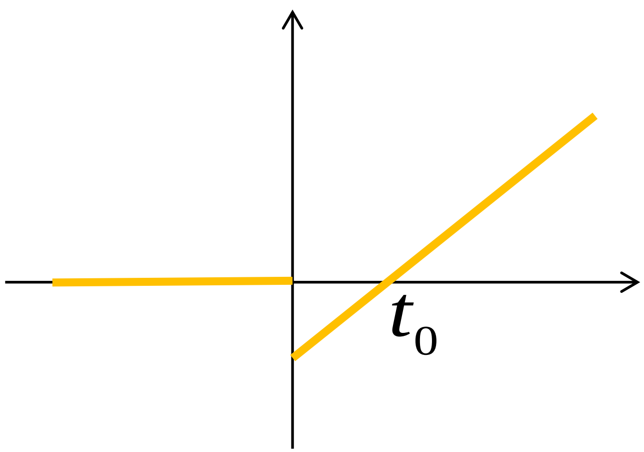
$f(t)u(t)$



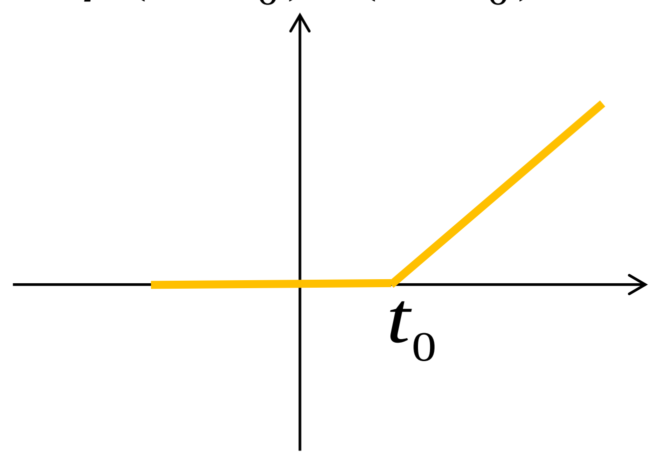
$f(t)u(t-t_0)$



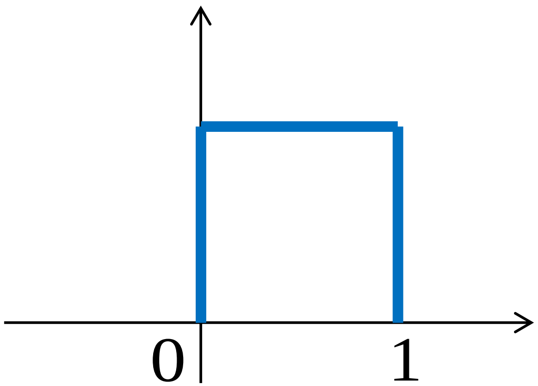
$f(t-t_0)u(t)$



$f(t-t_0)u(t-t_0)$



思考：如下门函数的拉普拉斯变换是什么？

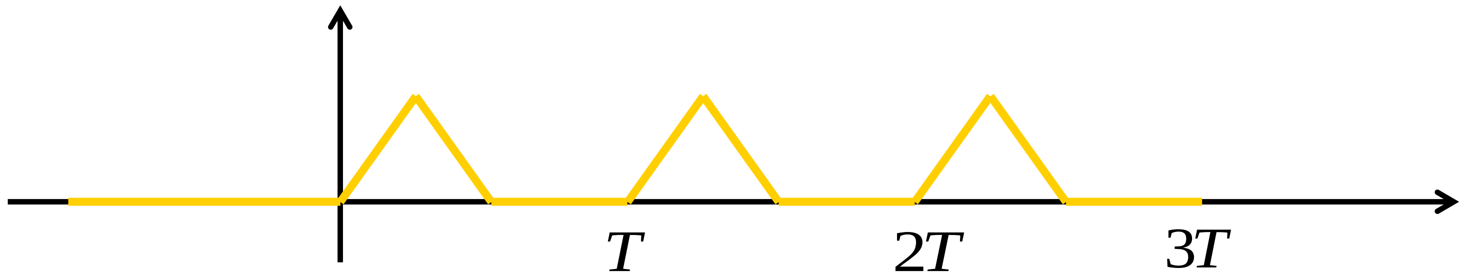


$$f(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$F(s) = ?$$

时移特性的应用 P240

有始周期函数：t>0时呈现周期性，t<0时函数值为零。



$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+\ldots$$

$$=f_1(t)+f_1(t-T)u(t-T)+f_1(t-2T)u(t-2T)+\ldots$$

有始周期函数的拉氏变换定理：若有始周期函数$f(t)$的第一个周期的拉氏变换为$F_1(s)$，则函数$f(t)$的拉氏变换为

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

$$f_1(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} F_1(s)$$

第一周期的拉氏变换

$$f_1(t-nT)u(t-nT) \Leftrightarrow e^{-snT}F_1(s)$$

利用时移特性

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(t-nT)u(t-nT) \Leftrightarrow F_1(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

利用无穷递减
等比级数求和

时域微分积分

1. 时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{n-1}(0^-)$$

$$= s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0^-)$$

傅里叶变换的时域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，且 $\lim_{|t|\to\infty} f(t)=0$

则 $$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

一般地，如果 $\lim_{|t|\to\infty} f^{k}(t)=0 \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$

则 $$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

2. 时域积分特性

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ，则

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

0^-

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau)d\tau}{s}$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

卷积定理

$$若 f_1(t) \leftrightarrow F_1(s),\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$$

$$则 L[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau] = F_1(s) F_2(s)$$

$$L[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_1(z) F_2(s-z) dz$$

初值和终值定理

1. 初值定理：若 $f(t)$ 及其导数存在拉氏变换，且 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，则

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

2. 终值定理：若 $f(t)$ 及其导数可以进行拉氏变换且 $\lim_{t \to \infty} f(t)$ 存在，则

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

§5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法

用拉普拉斯变换分析系统基于两种观点:

1. 用变换的观点 ⟶ 作为数学工具

2. 引入系统函数的概念

1. 用拉氏变换求解微分方程的一般步骤

$r(t)$ 的微分方程
初始条件

取拉氏变换

R(s) 的代数方程

解方程

R(s) 的函数

取拉氏反变换

微分方程的解

经典法
时域卷积法
频域分析法

此处，可以是零状态响应，也可以是全响应

例1. 求下列系统的响应。

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=e(t)$$

$$e(t)=u(t),\quad r(0)=1, r'(0)=2$$

解：设 $r(t)\leftrightarrow R(s)$，方程两边同时作拉普拉斯变换，得

$$[s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)]+3[sR(s)-r(0^-)]+2R(s)=E(s)$$

$$\Rightarrow R(s)=\frac{s^2+5s+1}{s(s^2+3s+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+3\frac{1}{s+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow r(t)=\frac{1}{2}u(t)+3e^{-t}u(t)-\frac{5}{2}e^{-2t}u(t)$$

一个有趣的现象

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 3\frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) = e(t)$$

已知激励，求零状态响应。

$$[s^2 R_{zs}(s) - s r_{zs}(0^-) - r'_{zs}(0^-)] + 3[s R_{zs}(s) - r_{zs}(0^-)] + 2R_{zs}(s) = E(s)$$

$$\Rightarrow R_{zs}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad E(s)$$

这个系统的转移算子是

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$$

2. 系统函数 H(s)

联系s域中零状态响应与激励间的运算关系称为s域系统函数，简称为系统函数或系统转移函数H(s)。其定义如下：

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$$

$$H(j\omega) \Longleftrightarrow h(t) \Longleftrightarrow H(s) \Longleftrightarrow H(p)$$

$$r''(t)+5r'(t)+4r(t)=2e'(t)+e(t)$$

$$H(s)=?$$

例5-14（P261） 已知输入 $e(t)=e^{-t}u(t)$，初始条件为 $r(0)=2, r'(0)=1$，系统转移函数为：

$$H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}$$

求系统的响应r(t)，并标出受迫分量与自然分量；瞬态分量与稳态分量。

解：(1) 求零输入响应。由系统转移函数的表达式可知系统的特征方程为

$$s^2+5s+6=0$$

有两个单根：$s_1=-2, s_2=-3$

所以

$$r_{zi}(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}$$

其中的待定系数由初始条件确定:

$$r(0) = K_1 + K_2 = 2$$

$$r'(0) = (-2K_1) + (-3K_2) = 1$$

得 $K_1 = 7, K_2 = -5.$ 所以

$$r_{zi}(t) = \underbrace{7e^{-2t} - 5e^{-3t}}_{\text{自然分量}}$$

(2) 求零状态响应。因为 $e(t)=e^{-t}u(t)$，故 $E(s)=\dfrac{1}{s+1}$

$$R_{zs}(s)=H(s)E(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}\,\frac{1}{s+1}$$

$$=\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

故 $r_{zs}(t)=\underbrace{2e^{-t}u(t)}_{\text{受迫分量}}-\underbrace{3e^{-2t}u(t)+e^{-3t}}_{\text{自然分量}}u(t)$

$$r(t)=\underbrace{\underbrace{2e^{-t}u(t)}_{\text{受迫分量}}+\underbrace{(4e^{-2t}-4e^{-3t})u(t)}_{\text{自然分量}}}_{\text{瞬态分量}}$$

练习：系统 $\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)$ ，求下列激励下系统的零状态响应。

$$(1)\quad e(t)=\delta(t) \qquad (2)\quad e(t)=u(t)$$

$$(3)\quad e(t)=e^{-t}u(t) \qquad (4)\quad e(t)=e^{-2t}u(t)$$

答案：

$$(1)\quad r_{zs}(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)$$

$$(2)\quad r_{zs}(t)=\frac{1}{2}[u(t)+e^{-2t}u(t)]$$

$$(3)\quad r_{zs}(t)=e^{-2t}u(t)$$

$$(4)\quad r_{zs}(t)=(1-t)e^{-2t}u(t)$$

§5.9 线性系统的模拟

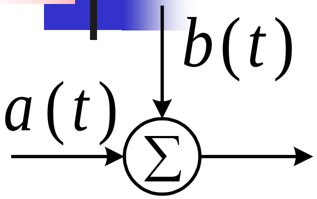
连续时间系统的数学模型

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dr(t)}{dt} + a_n r(t)$$

$$= b_0 \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{de(t)}{dt} + b_m e(t)$$

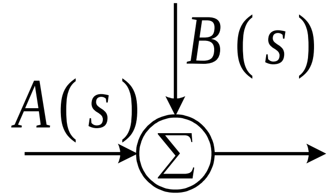
基本运算：相加，系数乘，各阶导数

1. 基本单元符号



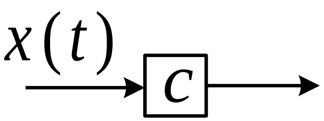
$y(t) = a(t) + b(t)$

加法器



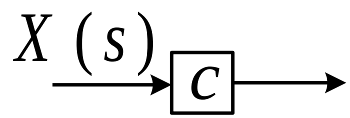
$Y(s) = A(s) + B(s)$

加法器



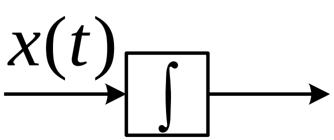
$y(t) = cx(t)$

标量乘法器



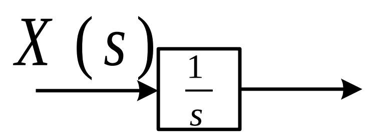
$Y(s) = cX(s)$

标量乘法器



$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

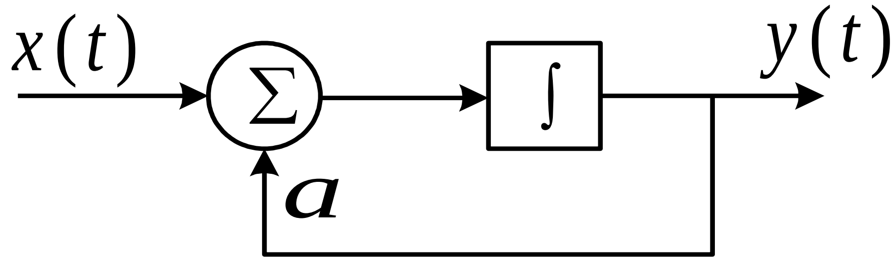
积分器



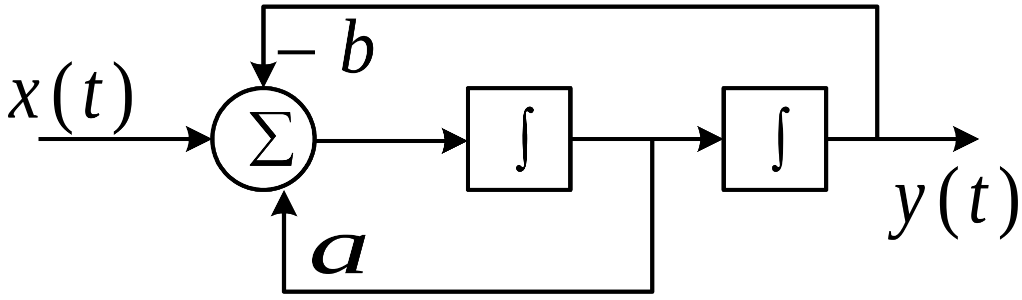
$Y(s) = \dfrac{X(s)}{s}$

积分器

2. 连续时间系统的直接模拟框图



$$y'(t)-ay(t)=x(t)$$



$$y''(t)-ay'(t)+by(t)=x(t)$$

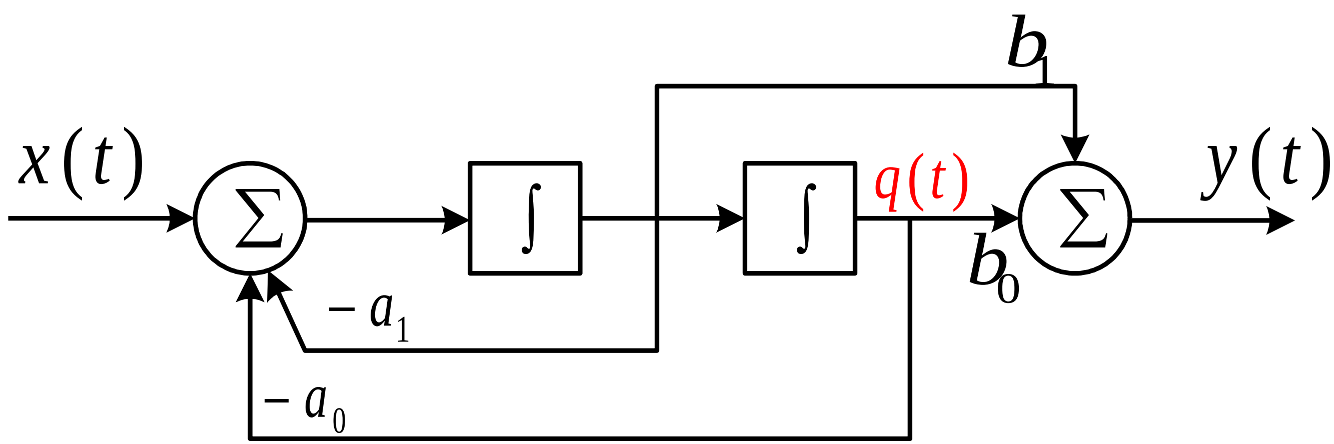
例3 画如下方程的模拟框图。

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1x'(t)+b_0x(t)$$

方法：引入一个新的函数 $q(t)$。令

$$q''(t)+a_1q'(t)+a_0q(t)=x(t)$$

则 $y(t)=b_1q'(t)+b_0q(t)$



练习：P291　5.30　　5.31　　5.32

小结

- 拉普拉斯变换的性质要熟记
- 拉普拉斯变换法可一次性地得到系统的全解。
- 线性系统的模拟框图与微分方程的相互转换。

课外作业

阅读：5.7，5.9；预习：7.1，7.3

作业：5.15(1)　5.24　5.30(2)