



信号与系统

Lecture 5

第三章 连续信号的正交分解（续）

§ 3.4 周期信号的频谱

§ 3.5 非周期信号的傅里叶变换

§ 3.6 常用信号的频谱函数举例

§ 3.7 周期信号的频谱函数



复习

- 正交函数集与信号的分解
- 周期信号的傅里叶级数表示

本讲内容

- 周期信号的频谱
- 傅里叶变换
- 非周期信号的频谱
- 典型信号的傅里叶变换



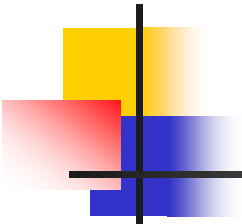
§ 3.4 周期信号的频谱

对于周期函数 $f(t)$ ，设其周期为 T ，令 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ，则

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t}$$


$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

A_n —— **振幅**，是频率 $n\Omega$ 的偶函数；

φ_n —— **相位**，是频率 $n\Omega$ 的奇函数。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t}$$

振幅 c_n 是复数，称为复振幅，可以表示成

$$c_n = |c_n| e^{j\varphi_n} \quad (|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} A_n)$$

$|c_n|$ —— **幅度/振幅** φ_n —— **相位** 对频率的奇偶性同上。



一. 什么是频谱

周期性函数可以通过傅里叶级数展开成正弦函数的线性组合。如果给定了各个频率分量的幅度和相位，就可以确定信号。

频谱是信号的一种图形表示方法，它将信号各个频率分量上的系数关系用图形的方法表示出来。

信号的频谱可以说明信号的特性，而且可以给信号的变换和处理计算带来很多方便之处。



频谱图一般有两个，一个称为振幅频谱，另一个称为相位频谱。

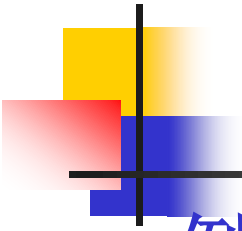
——振幅频谱：表示信号含有的各个频率分量的幅度。

其横坐标为频率，纵坐标各个对应频率分量的幅度。

——相位频谱：表示信号含有的各个频率分量的相位。

其横坐标为频率，纵坐标各个对应频率分量的相位。

频谱还可分为单边频谱和双边频谱。

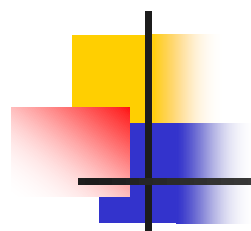


例1 $f(t) = 2 + 3\cos(\pi t + 10^\circ) + 2\cos(2\pi t + 20^\circ)$
 $+ 0.4\cos(3\pi t + 45^\circ) + 0.8\cos(6\pi t + 30^\circ),$
试画出 $f(t)$ 的振幅谱和相位谱。

解： $f(t)$ 为周期信号，题中所给的 $f(t)$ 表达式可视为 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式。据

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

可知，其基波频率 $\Omega = \pi$ (rad/s)，周期 $T=2$ s， $\omega=2\pi$ 、 3π 、 6π 分别为二、三、六次谐波频率。且有



$$A_0 = 2 \quad \varphi_0 = 0$$

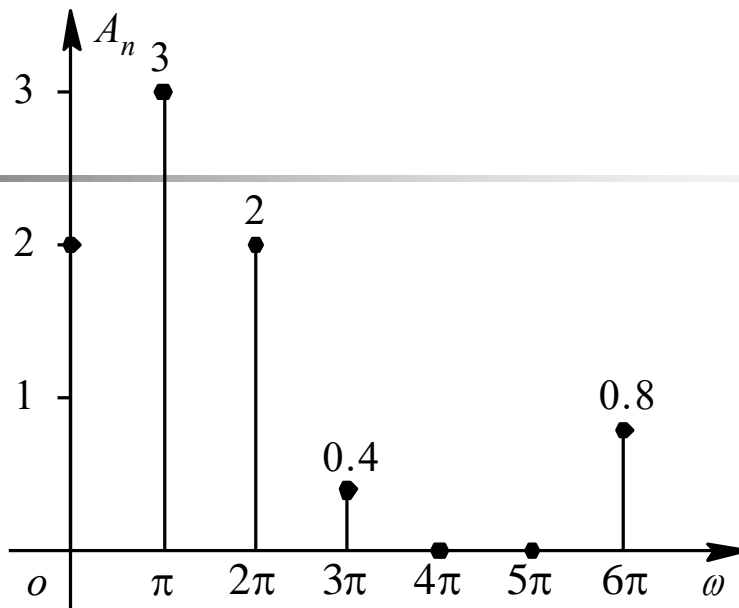
$$A_1 = 3 \quad \varphi_1 = 10^\circ$$

$$A_2 = 2 \quad \varphi_2 = 20^\circ$$

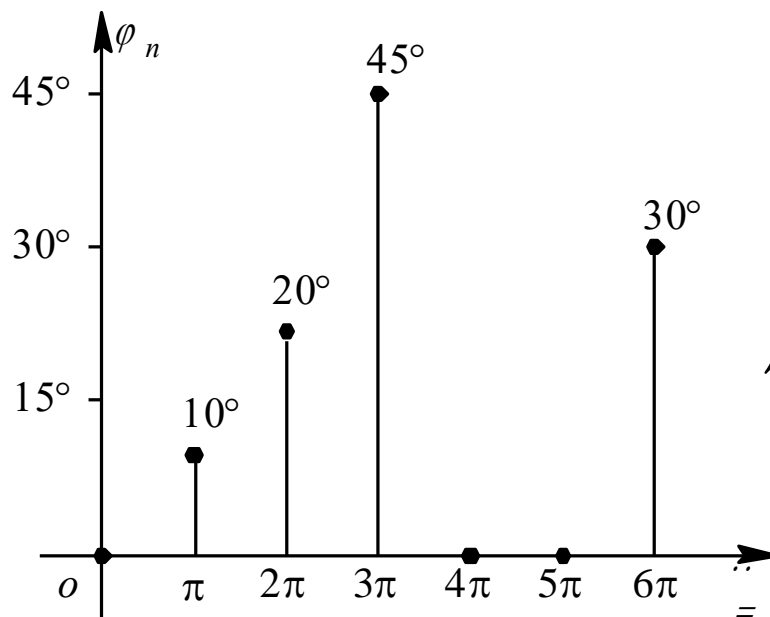
$$A_3 = 0.4 \quad \varphi_3 = 45^\circ$$

$$A_6 = 0.8 \quad \varphi_6 = 30^\circ$$

其余 $A_n = 0$

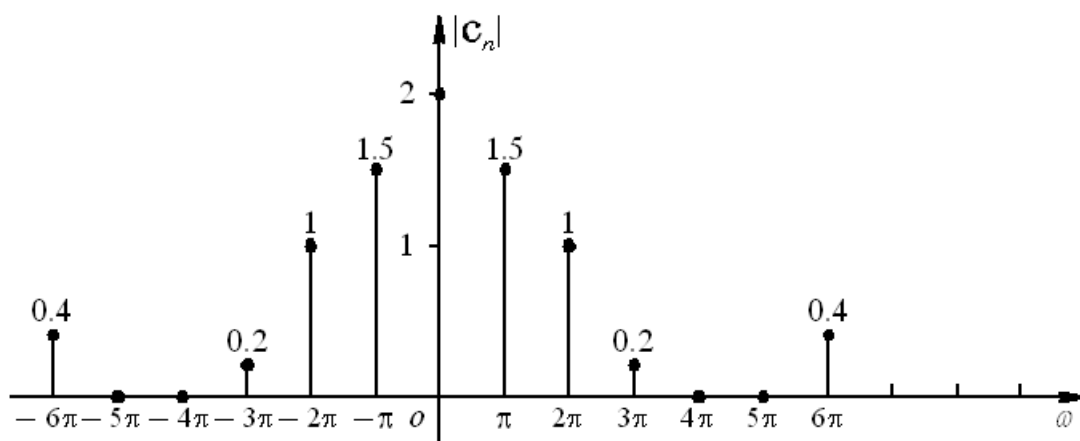


(a)

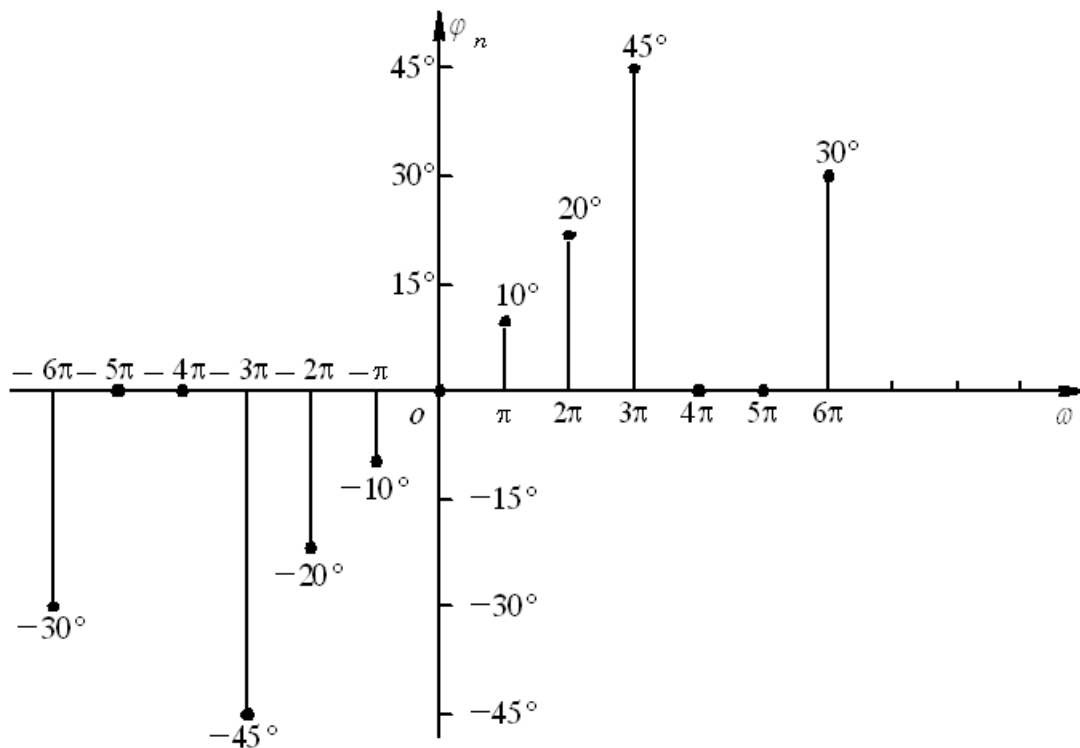


(b)

信号的频谱 \square
(a) 振幅谱
(b) 相位谱



(a)



(b)

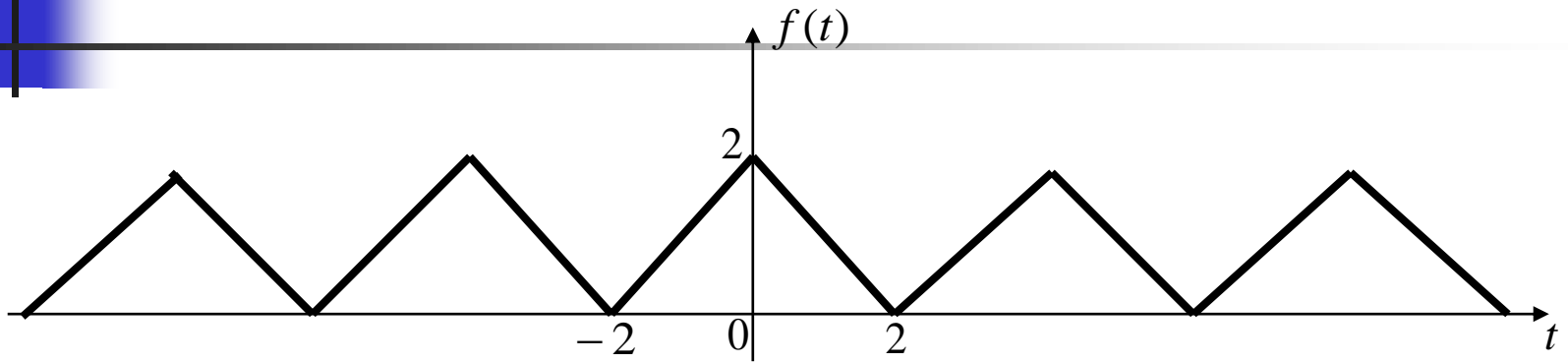
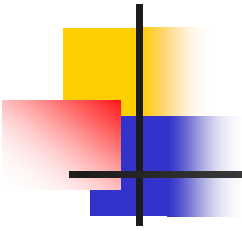
$$|c_0| = A_0$$

$$|c_n| = \frac{1}{2} A_n$$

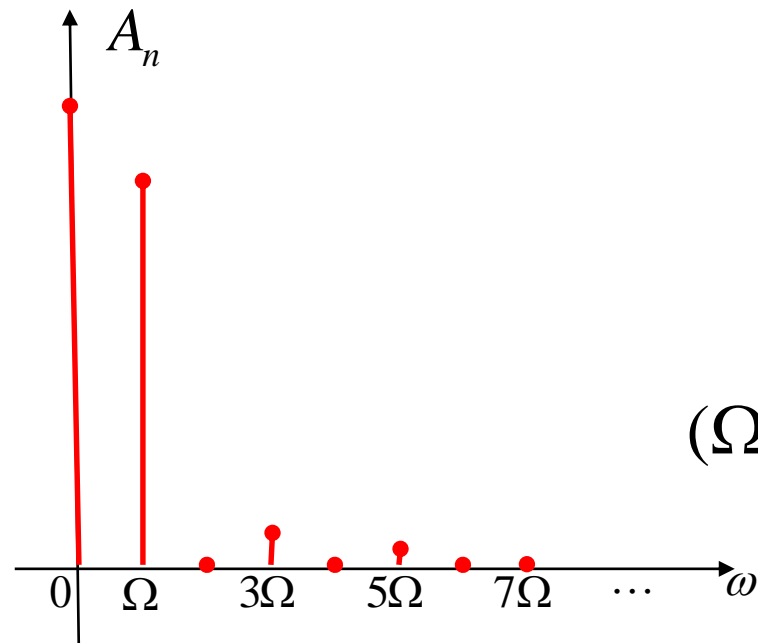
信号的双边频谱

(a) 振幅谱

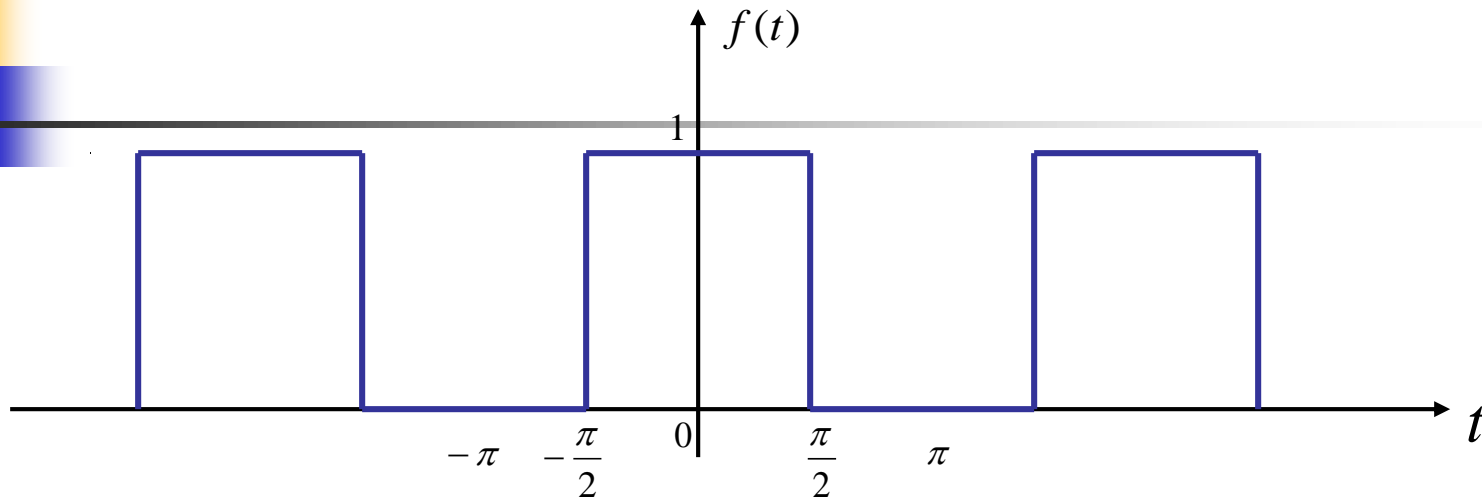
(b) 相位谱



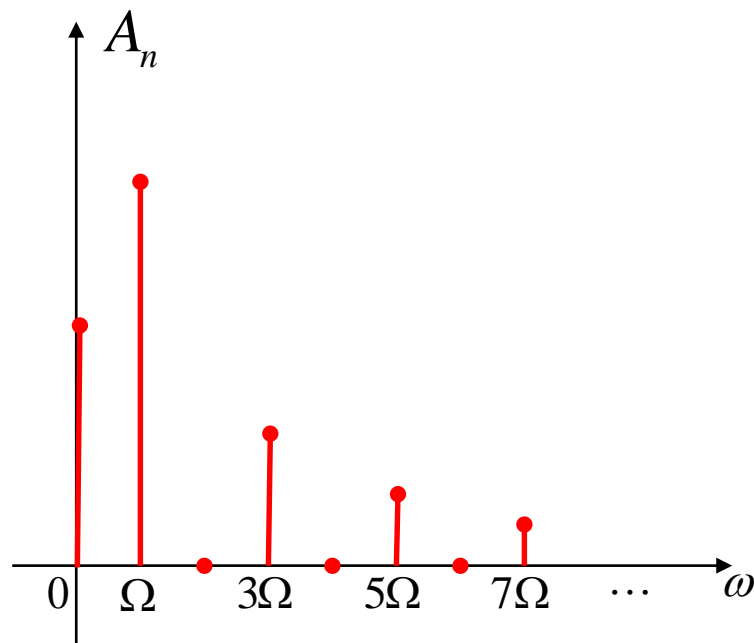
$$f(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2} (\cos \Omega t + \frac{1}{9} \cos 3\Omega t + \frac{1}{25} \cos 5\Omega t + \dots)$$



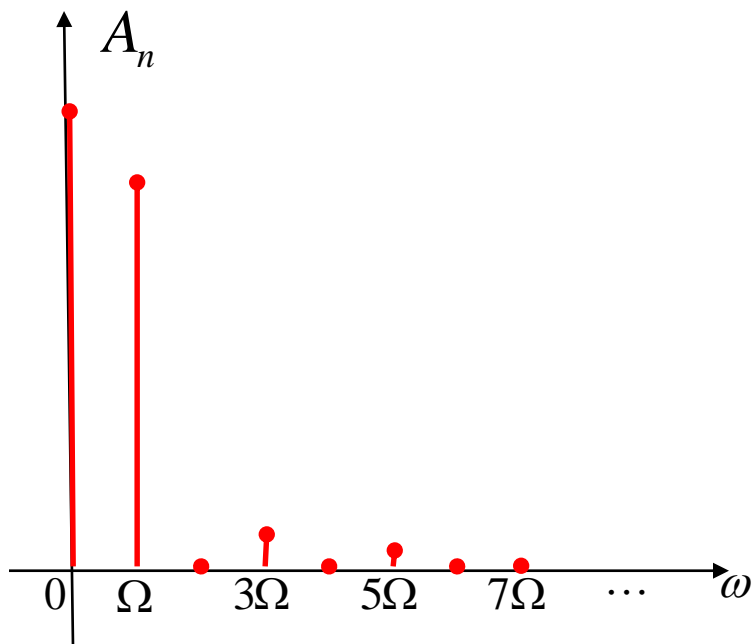
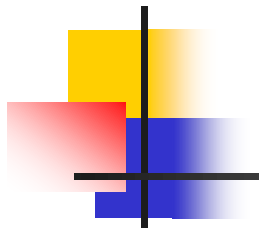
$$(\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2})$$



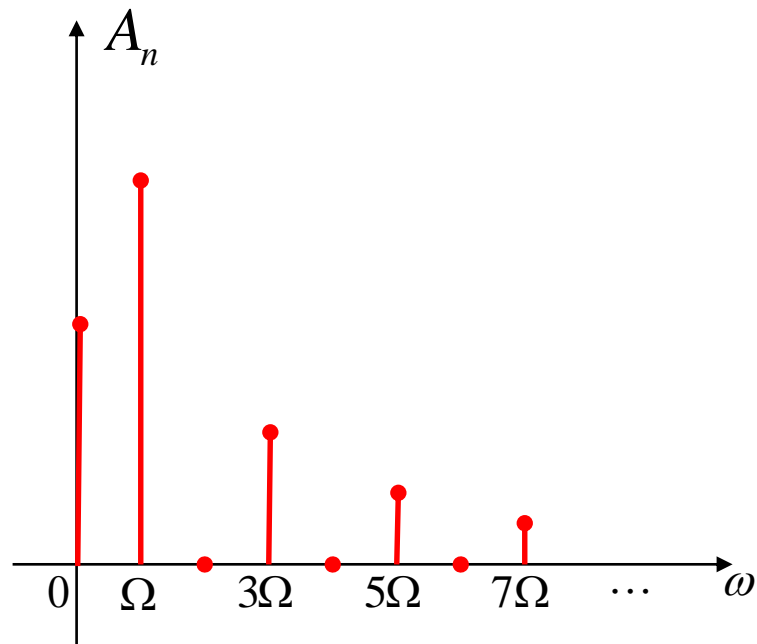
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots \right)$$



$$(\Omega = 2\pi)$$



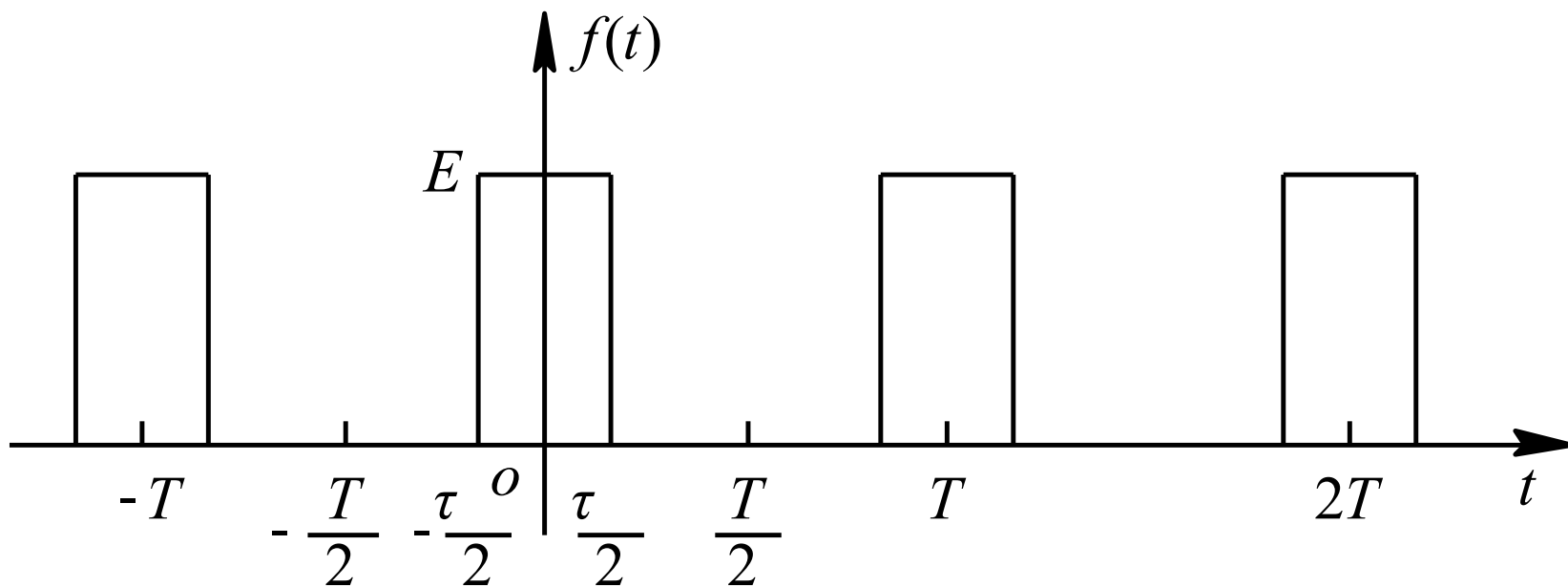
$$(\Omega = \frac{\pi}{2})$$



$$(\Omega = 2\pi)$$

二. 周期信号频谱的特点（以周期矩形脉冲为例）

$$f(t) = \begin{cases} E & \text{当 } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{当 } -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



周期矩形脉冲信号



为得到该信号的频谱，先求其傅里叶级数的复振幅。

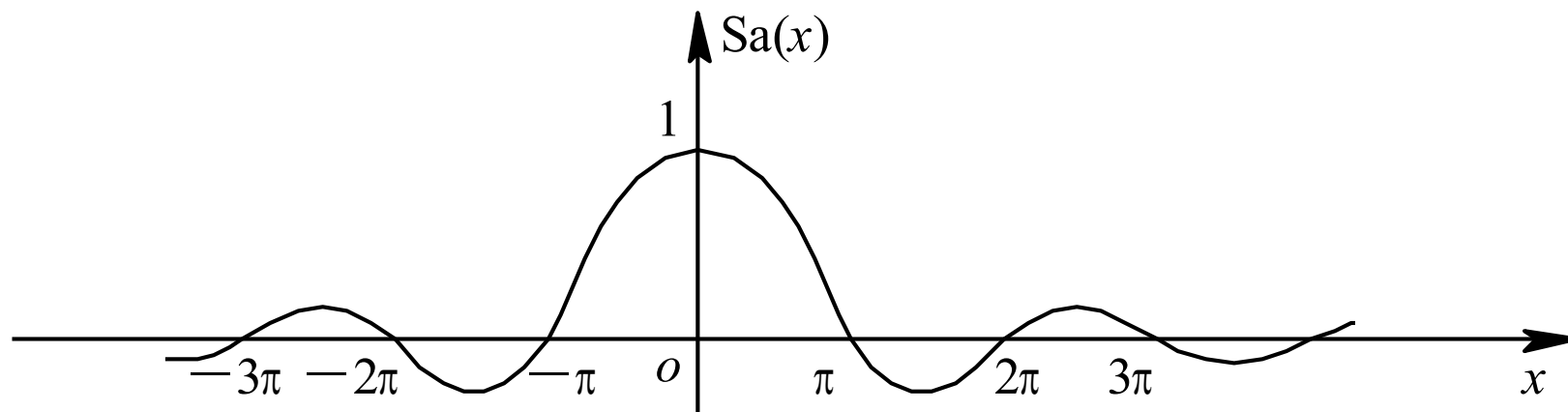
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\Omega t} dt \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{T} \right) \\&= \frac{E}{T} \cdot \left. \frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2E}{T} \cdot \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega} \\&= \frac{E\tau}{T} \cdot \frac{\sin n\Omega\tau/2}{n\Omega\tau/2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\end{aligned}$$



取样函数定义为

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

这是一个偶函数，且 $x \rightarrow 0$ 时， $Sa(x)=1$ ；当 $x=k\pi$ 时， $Sa(k\pi)=0$ 。



$Sa(x)$ 函数的波形



因此周期矩形脉冲信号的复振幅可写成取样函数的形式，即

$$c_n = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$|c_n| = \frac{E\tau}{T} \left| \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \right|$$

\Rightarrow 各次谐波的振幅与 $\frac{\tau}{T}$ 有关，下面取 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$

c_n 是实数， \Rightarrow 相位 $\varphi_n = 0 / \pi$

接下来我们画出相应的频谱图，步骤如下。

1. 找出谐波为零的点

先考虑 ω 的连续函数 $C_n = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$

它与横轴的交点由下式决定： $\sin \frac{\omega\tau}{2} / \frac{\omega\tau}{2} = 0$

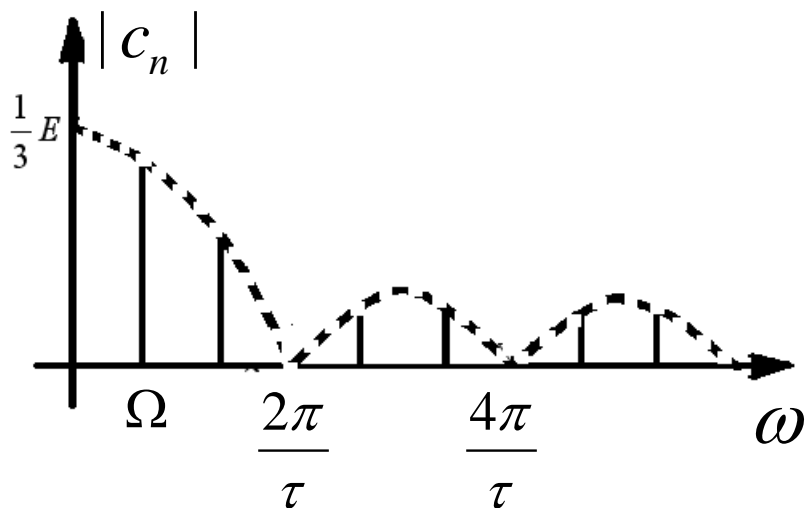
即 $\frac{\omega\tau}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$, 故 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau}, \frac{6\pi}{\tau}, \dots, \frac{2k\pi}{\tau}, \dots$

若这些频率恰好是原信号基波频率的整数倍，即对应的谐波为零。

2. 求出各次谐波的振幅值

因为 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$ ，故振幅最大值为 $\frac{E\tau}{T} = \frac{1}{3}E$ ，且 $\frac{2\pi}{\tau} = 3\Omega$ ，

因此从原点到第一个零点内含有两条谱线。依次类推，就大致画出了振幅频谱图，如下所示。



3. 相位的确定

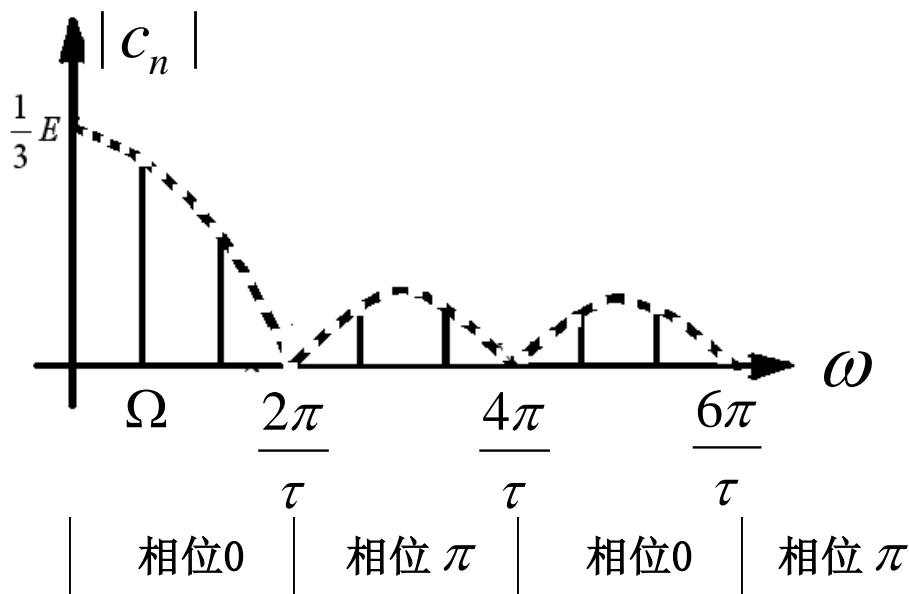
$$c_n = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right), \quad \text{又} \quad c_n = |c_n|e^{j\varphi_n}$$

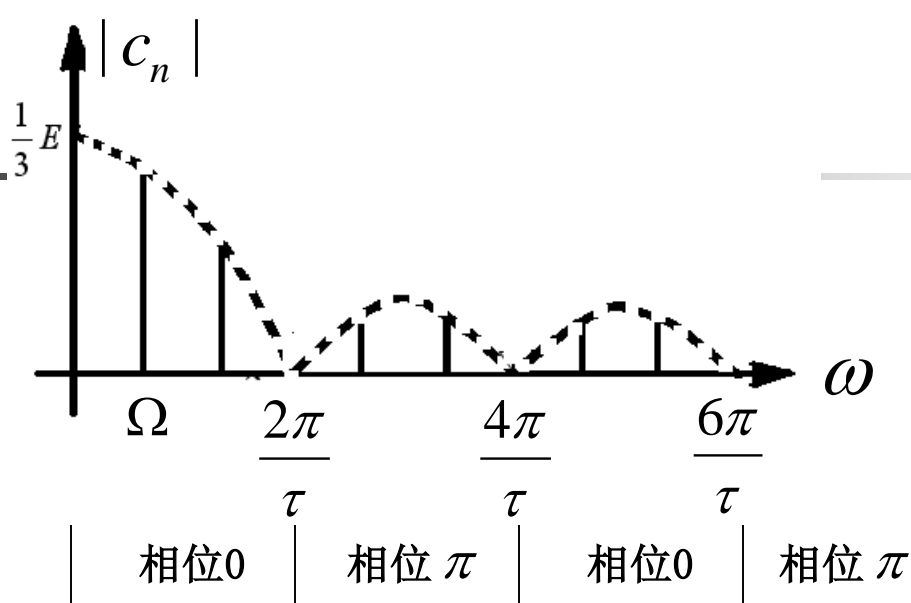
当 $\frac{n\Omega\tau}{2}$ 在第一、二象限, 即 $0 < n\Omega < \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau} < n\Omega < \frac{6\pi}{\tau}, \dots$

时, c_n 为正实数, 此时相位为零;

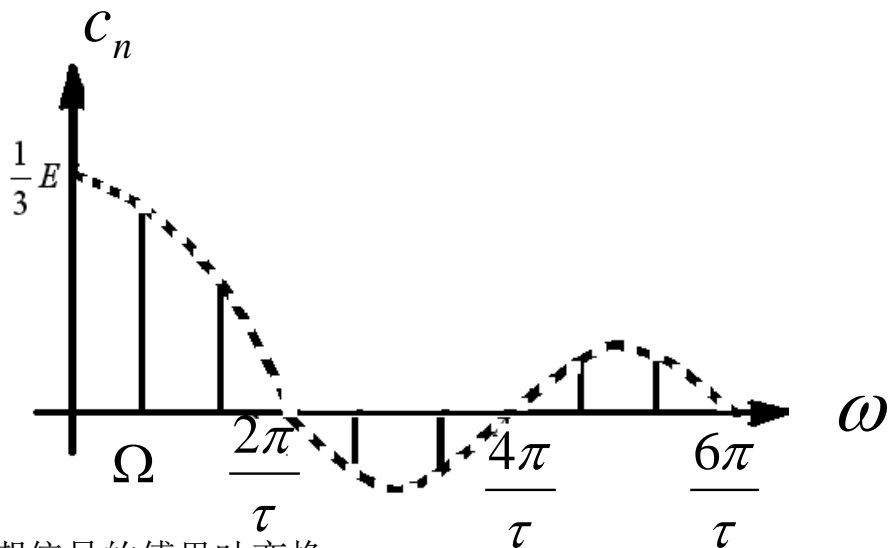
当 $\frac{n\Omega\tau}{2}$ 在第三、四象限, 即 $\frac{2\pi}{\tau} < n\Omega < \frac{4\pi}{\tau}, \frac{6\pi}{\tau} < n\Omega < \frac{8\pi}{\tau}, \dots$

时, c_n 为负实数, 此时相位为 π .



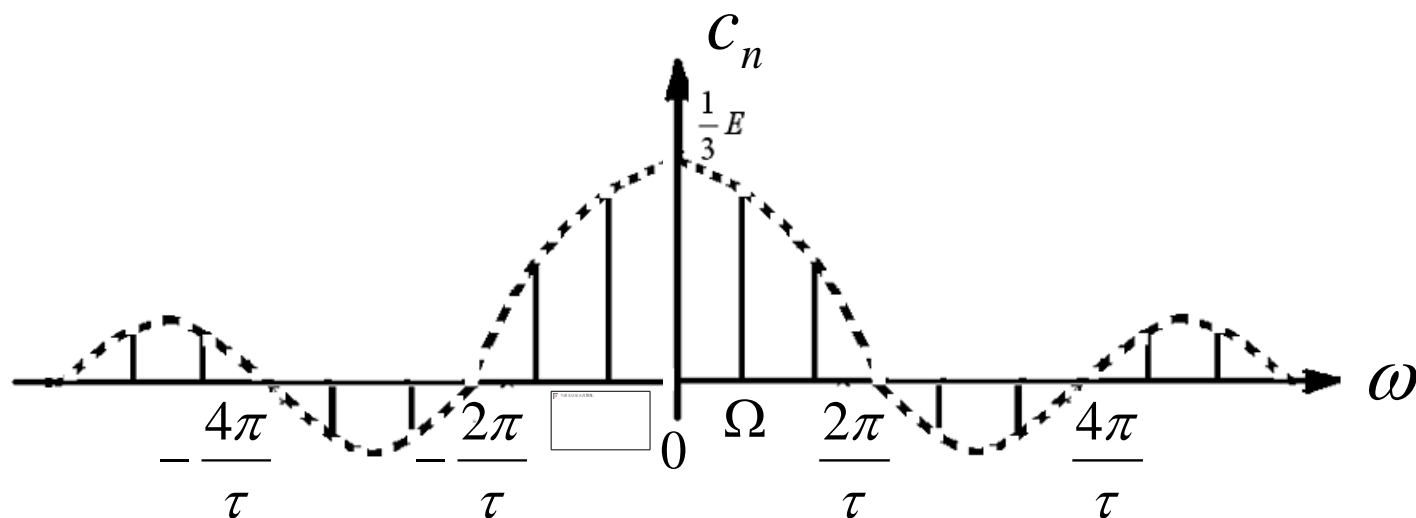


此时若规定幅度为正时其相位为0，幅度为负时其相位为 π ，这可以将幅度谱与相位谱合而为一：



4. 画出频谱图

再通过对称性把负轴部分画出来，就得到了 $c_n \sim \omega$ 关系图，即频谱图（包含了幅度谱和相位谱）。



周期矩形脉冲信号的频谱



由上图可以看出，此周期信号频谱具有以下几个特点：

- **离散性**，此频谱由不连续的谱线组成，每一条谱线代表一个正弦分量。此频谱称为不连续谱或离散谱。
- **谐波性**，此频谱的每一条谱线只能出现在基波频率 Ω 的整数倍频率上，即含有 Ω 的各次谐波分量，而决不含非 Ω 的谐波分量。
- **收敛性**，此频谱的各次谐波分量的振幅虽然随 $n\Omega$ 的变化有起伏变化，但总的趋势是随着 $n\Omega$ 的增大而逐渐减小。当 $n\Omega \rightarrow \infty$ 时， $|c_n| \rightarrow 0$ 。

三. 频带宽度

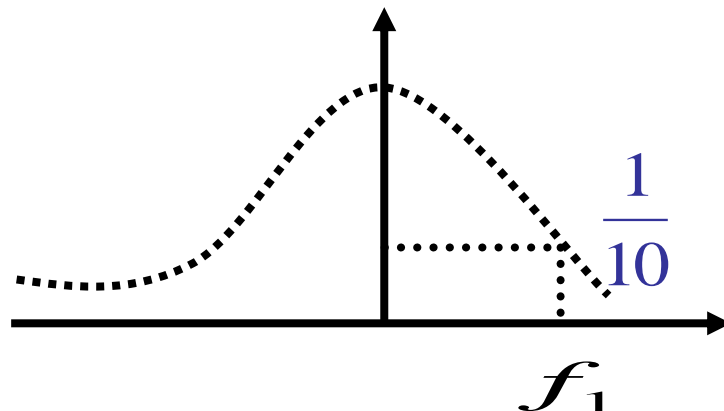
周期矩形脉冲信号含有**无穷多条谱线**，也就是说，周期矩形脉冲信号可表示为无穷多个正弦分量之和。在信号的传输过程中，要求一个传输系统能将这无穷多个正弦分量不失真地传输显然是不可能的，也是不必要的。实际工作中，应要求传输系统能将信号中的主要频率分量传输过去。

周期矩形脉冲信号的主要能量集中在第一个零点之内，因而，常常将 $0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形脉冲信号的**频带宽度**。记为

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} (\text{rad} / \text{s}) \quad \text{或} \quad B_f = \frac{1}{\tau} (\text{Hz})$$

频带宽度

a. 对于单调衰减的信号，把零频率到谐波幅度降到最大值十分之一的那个频率间的频带，定义为信号的频带宽度。



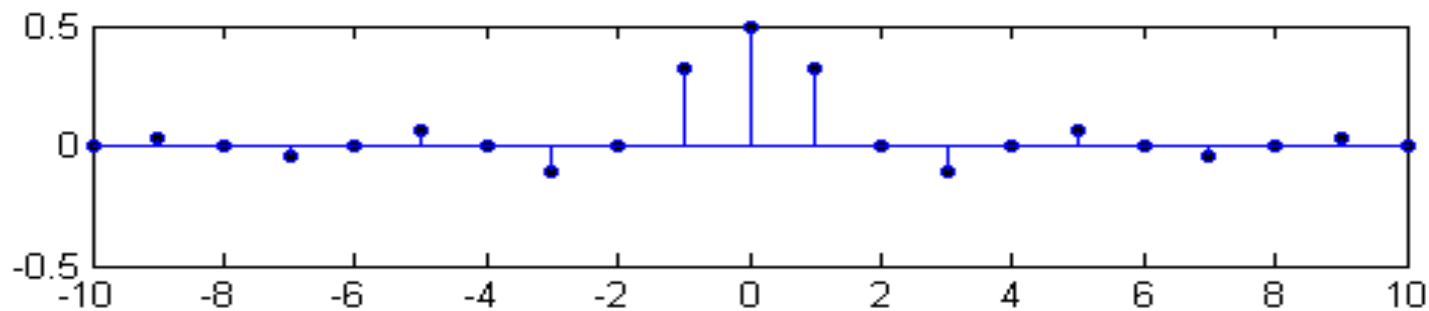
b. 当信号能量的主要部分集中在某一较高频率 ω_c 附近时，频带宽度分布于 ω_c 的两边， ω_c 附近第一次过零点的频率作为频带的边界。

c. 脉冲信号的脉宽和频宽是成反比的。这反映了信号的时间特性和频率特性之间的关系。

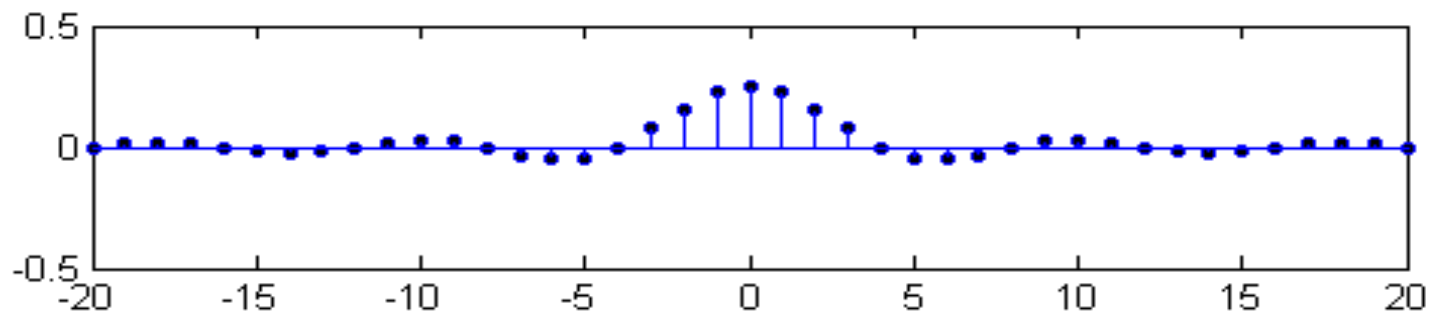
参数的变化对频谱的影响

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad |C_0| = \frac{E\tau}{T}$$

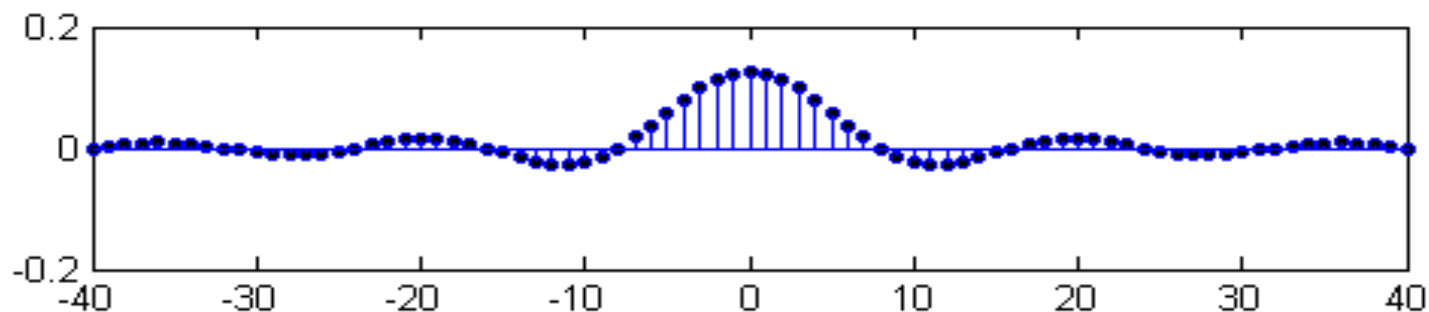
τ 不变, T 增大



$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$$

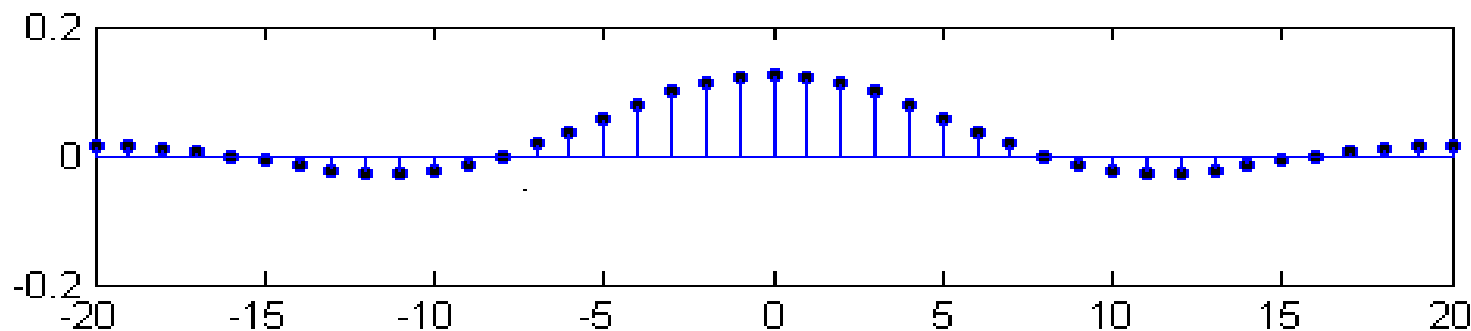
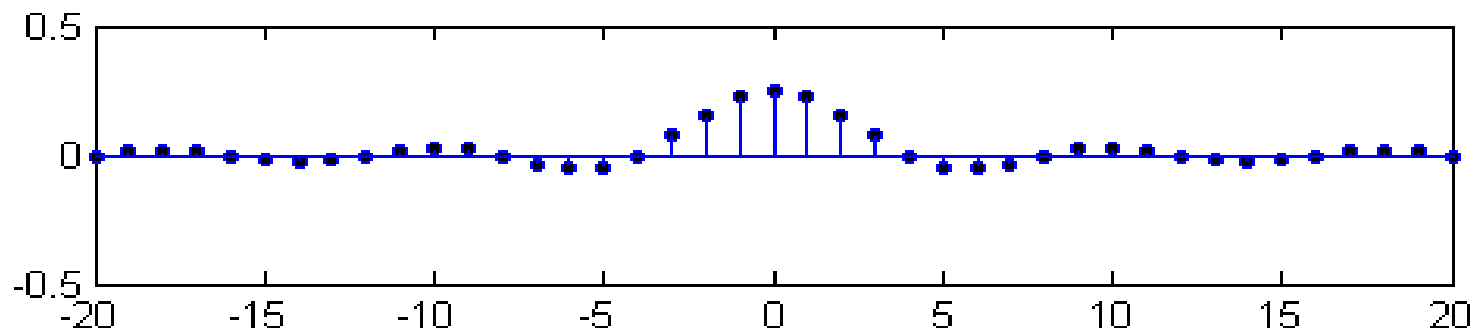
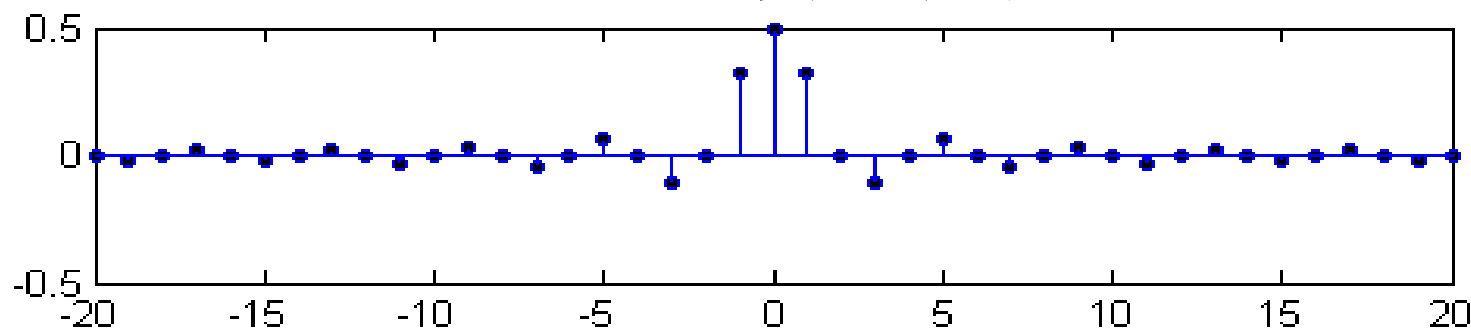


$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{8}$$

参数的变化对频谱的影响

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad |C_0| = \frac{E\tau}{T}$$

T 不变, τ 减小





§ 3.5 傅里叶变换与非周期信号的频谱

- 频谱密度函数
- 非周期信号的频谱分析—傅里叶变换
- 周期和非周期矩形脉冲信号频谱的对比



一. 问题的提出

1. 从物理概念考虑：信号的能量存在，其频谱分布的规律就存在。
2. 从数学角度来看：

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

信号中各频谱分量虽然都是无穷小量，但是它们并不是同等大小的，相对值之间仍有差别。

为了表示这种差别，需引入一个新的物理量，这就是**频谱密度函数**。



二. 频谱密度函数

1. 定义：令

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T\dot{A}_n}{2} (= \lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi \frac{\dot{A}_n}{\Omega})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (T = \frac{2\pi}{\Omega})$$

称 $F(j\omega)$ 为非周期信号的频谱密度函数，简称频谱函数。



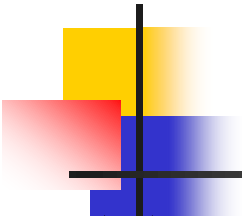
2. 几点说明

(1) $F(j\omega)$ 代表了信号中各频率分量的**相对**大小。

(2) 各频率分量的**实际振幅**为 $\frac{|F(j\omega)| d\omega}{\pi}$ 是无穷小量。

(3) $F(j\omega)$ 具有**单位频带的幅度的量纲**。

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T \dot{A}_n}{2} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi \frac{\dot{A}_n}{\Omega}$$


$$(4) F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$ 为 $F(j\omega)$ 的振幅,
它代表信号中各频率分量的振幅的相对大小。

$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$ 为 $F(j\omega)$ 的相位,
它代表相关频率分量的相位。

且 $|F(j\omega)|$ 和 $R(\omega)$ 为 ω 的偶函数;

$\varphi(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 为 ω 的奇函数。

三. 非周期信号的频谱的特点

由前面的分析可知，在一定条件下，周期信号可以转化为非周期信号，转化的条件是周期 T 无限趋大。

周期信号频谱的相邻谱线间的间隔为 $\Omega(\omega_1)$ 。当 $T \rightarrow \infty$ 时，谱线无限密集($d\omega$)，于是离散频谱就变成了**连续频谱**。

具有**离散频谱**的信号，其能量集中在一些离散的谐波分量中；具有**连续频谱**的信号，其能量分布在所有的频率中，每一频率分量包含的能量则为无穷小量。

非周期信号的频谱也具有**收敛性**，信号的大部分能量集中在低频段。频宽的定义方法与周期信号相同，**脉宽与频宽成反比**。

四. 傅里叶变换（傅里叶积分）

前面已经得到频谱密度函数：

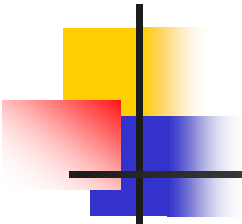
$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T\dot{A}_n}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T\dot{A}_n}{2} e^{jn\Omega t} \frac{2}{T}$$

$$\because \frac{2}{T} = \frac{\Omega}{\pi}, \text{ 当 } T \rightarrow \infty \text{ 时 } \frac{2}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{\pi}, n\Omega \rightarrow \omega, \text{ 因此}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

称为非周期信号的**傅里叶积分**，它与周期信号的傅里叶级数相当。



称 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ 为傅里叶(正)变换,

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ 为傅里叶反变换。

记为

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad F(j\omega) = FT\{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} \quad f(t) = FT^{-1}\{F(j\omega)\}$$

或简记为

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$



几点说明:

$f(t)$ 和 $F(j\omega)$ 之间是一一对应的, 根据其中的一个可以确定另外一个。可以认为, 它们包含了相同的信息, 只不过自变量不同, 它们是相同信号的不同表达形式。

正变换将以时间为自变量的函数变成了以频率为变量的函数, 将信号从时域变换到了频域。所以建立在这种变换上的系统分析方法称为**变换域法**。

在频域中我们用 $j\omega$ 作自变量, 目的是为后面引入拉普拉斯变换打下伏笔。



傅里叶积分也有三角形式:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \end{aligned}$$



非周期信号:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

周期信号:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

这表明非周期信号与周期信号一样, 也可以分解为许多不同频率的正弦分量。这些分量的频率从0到无穷大。

对周期信号, 是用实际振幅 A_n 作出的。

对非周期信号, 是用密度函数 $F(j\omega)$ 作出的。



傅里叶变换存在的充分条件是： $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 存在。

由 $|\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 知

$$|F(j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-j\omega t}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-j\omega t}| dt$$

而 $|e^{-j\omega t}| = 1$, $\therefore |F(j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$

补充：傅里叶变换的其他形式

$$F(j\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

只要 $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2\pi}$ $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2\pi} \\ a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ a_1 = \frac{1}{2\pi}, a_2 = 1 \end{array} \right.$

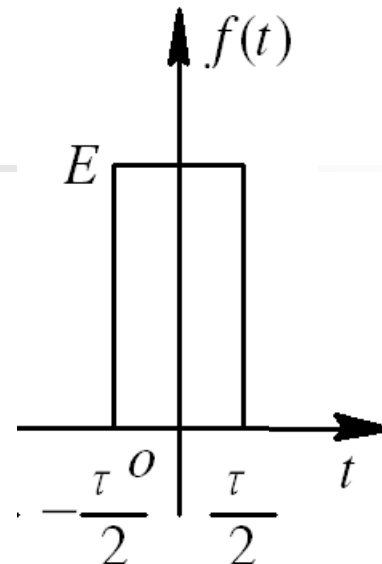
在最近的科技书中比较通用的形式有：

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$$

例2 求单个矩形脉冲信号的频谱。

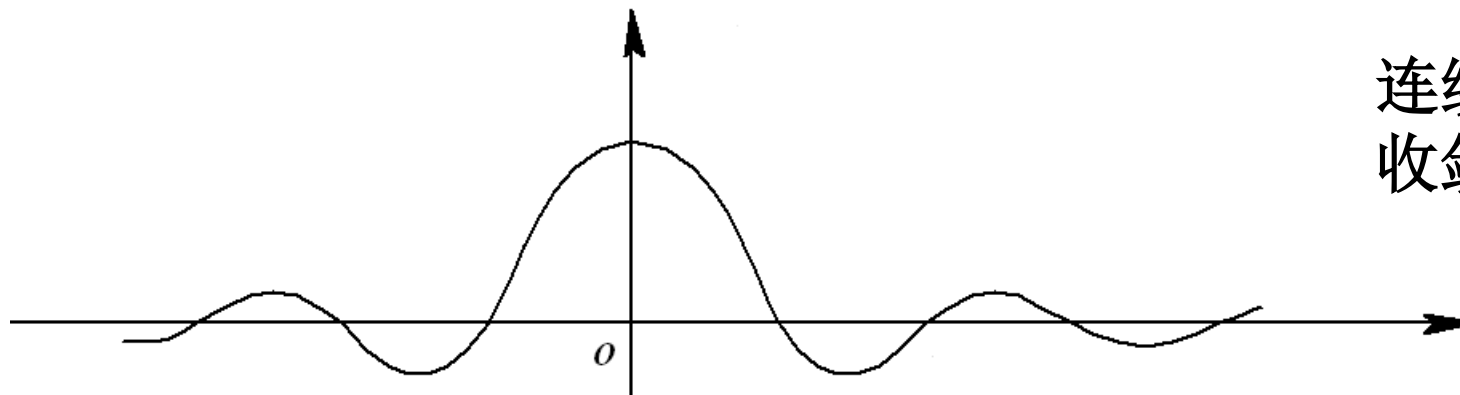
$$f(t) = \begin{cases} E & \text{当 } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



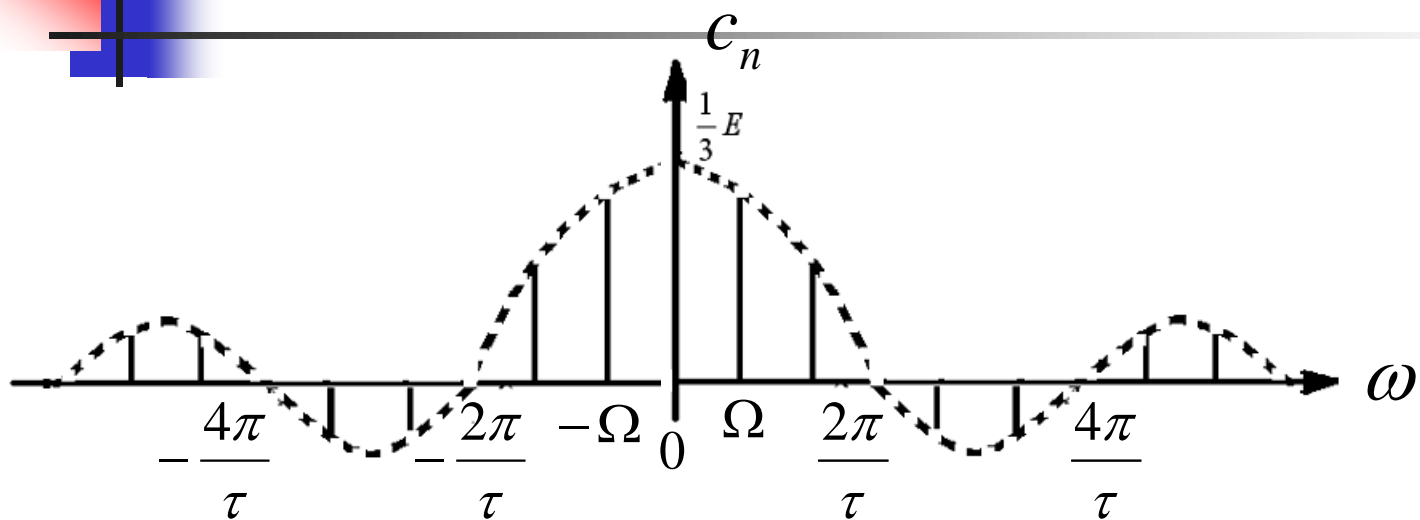
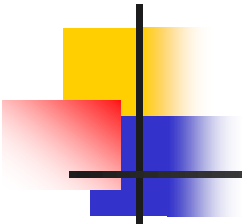
解: $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt$

$$= \frac{E}{j\omega} (e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}) = \frac{2E}{\omega} \sin(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$= E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

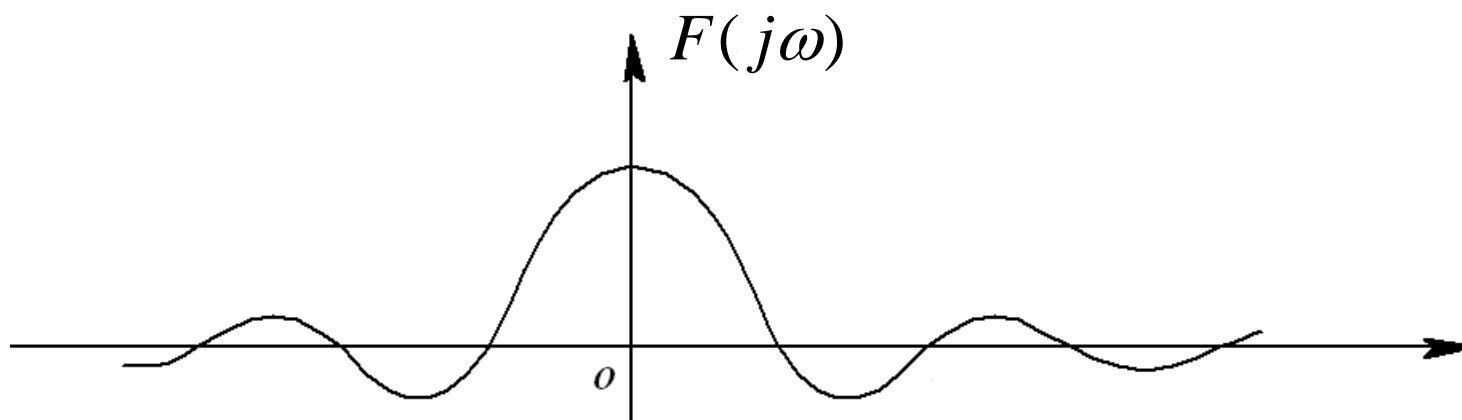


连续性
收敛性



周期信号

离散性
谐波性
收敛性



非周期信号

连续性
收敛性

周期和非周期矩形脉冲信号频谱的对比

1. 它们都具有抽样函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的形式。

$$2. \quad \dot{A}_n = \frac{2E\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}} \quad \text{和} \quad F(j\omega) = E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

(1) \dot{A}_n 值较 $F(j\omega)$ 值多乘了 $\frac{2}{T}$. 这是由于两者的定义规定的;

(2) A_n 中的不连续变量 $n\Omega$ 在 $F(j\omega)$ 中变成了连续变量 ω ;

$$3. \quad F(j\omega) \text{ 和 } \dot{A}_n \text{ 可以互求: } \dot{A}_n = \frac{2}{T} F(j\omega) \big|_{\omega = n\Omega}$$



小结

- 周期信号频谱的特点
- 傅里叶变换
- 非周期信号频谱的特点

课外作业

阅读: 3.4, 3.5

自学: 3.6, 3.7

预习: 3.8, 3.9

表 3.1 常用傅里叶变换对

编 号	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$g_{\tau}(t)$	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$2\pi g_{\tau}(\omega)$
3	$e^{-\alpha}\varepsilon(t), \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
4	$te^{-\alpha}\varepsilon(t), \alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$
5	$e^{-\alpha t }, \alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
10	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

续表

编 号	$f(t)$	$F(j\omega)$
11	$\epsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
12	$\text{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}, F(0)=0$
13	$\frac{1}{\pi t}$	$-j \text{Sgn}(\omega)$
14	$\delta_T(t)$	$\Omega\delta_a(\omega)$
15	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega)$
16	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} \epsilon(t), a>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$

§ 3.6 常用信号频谱函数举例

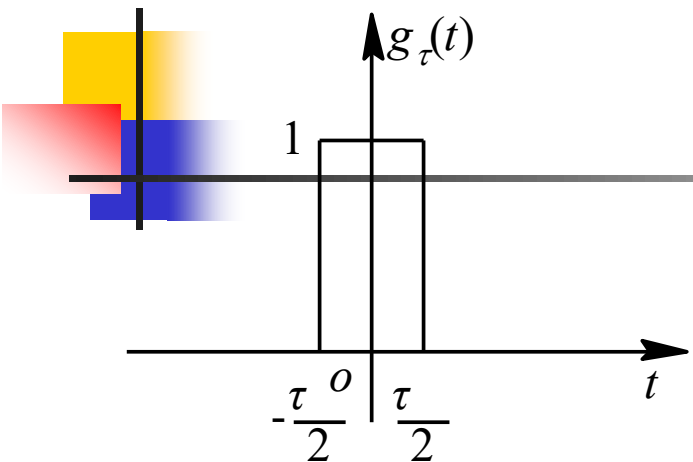
例 3.1 图 3.1(a)所示矩形脉冲一般称为门函数。其宽度为 τ ，高度为1，通常用符号 $g_\tau(t)$ 来表示。试求其频谱函数。

解 门函数 $g_\tau(t)$ 可表示为

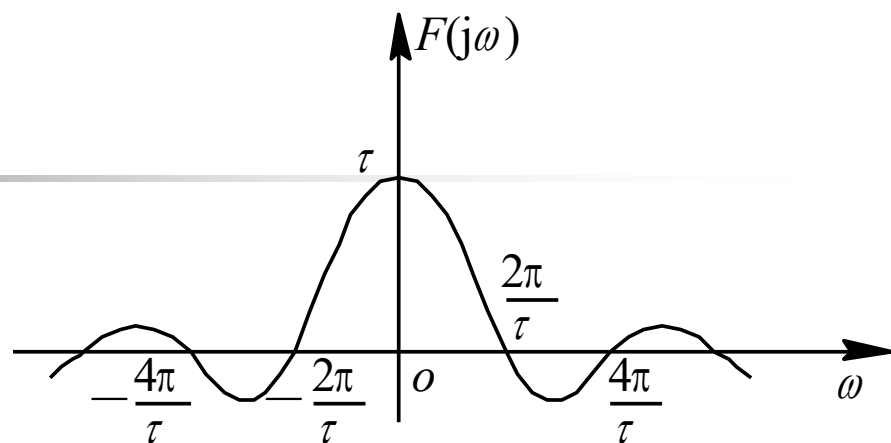
$$g_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

根据傅里叶变换的关系式(3.4-2)，可得

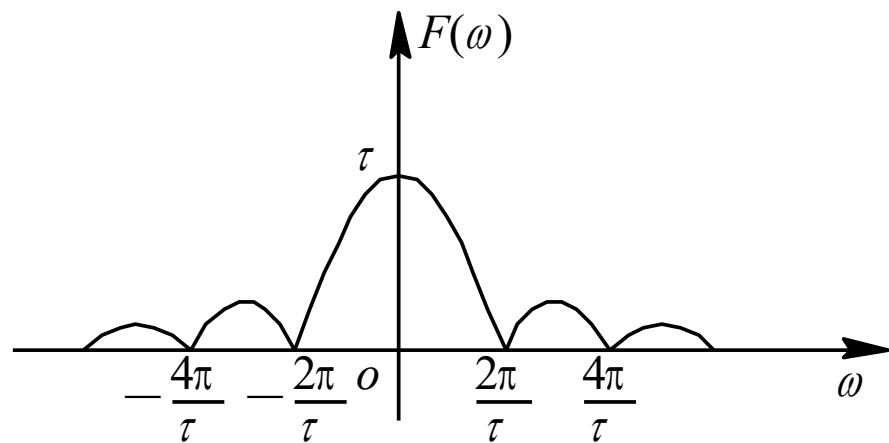
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} = \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega} = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$



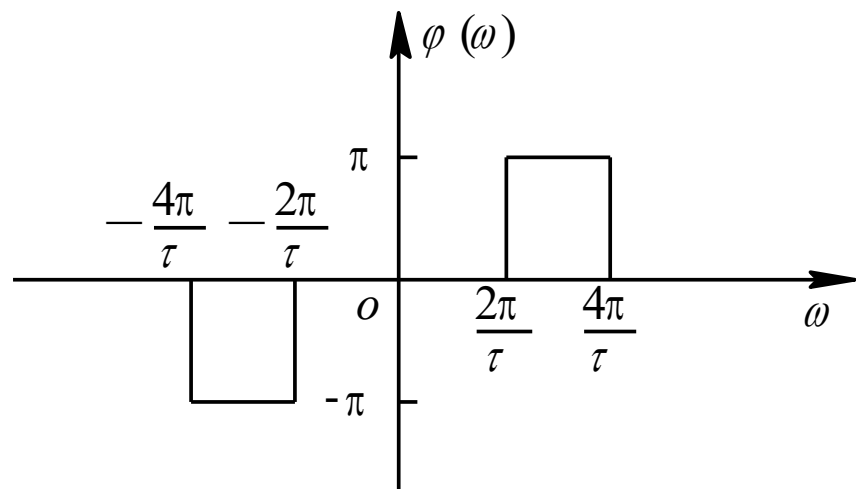
(a)



(b)



(c)



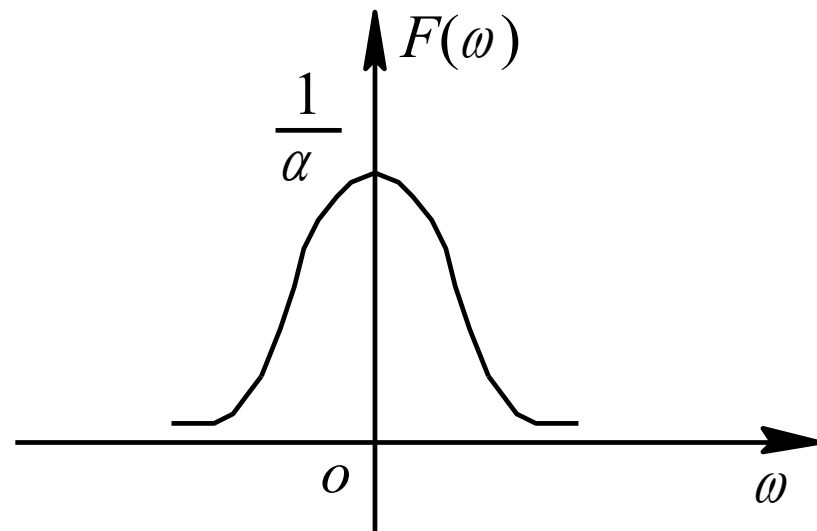
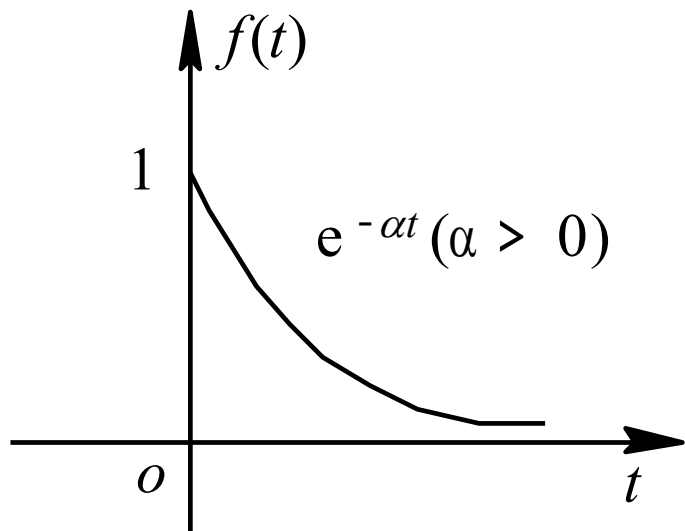
(d)

图 3.1 门函数及其频谱

(a) 门函数； (b) 门函数的频谱； (c) 幅度谱； (d) 相位谱

例 3.2 求指数函数 $f(t)$ 的频谱函数。

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$



(a) 图 3.2 单边指数函数 $e^{-\alpha t}$ 及其频谱
(a) 单边指数函数 $e^{-\alpha t}$; (b) $e^{-\alpha t}$ 的幅度谱



解

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} e^{-j\arctan\frac{\omega}{\alpha}} \end{aligned}$$

其振幅频谱及相位频谱分别为

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$



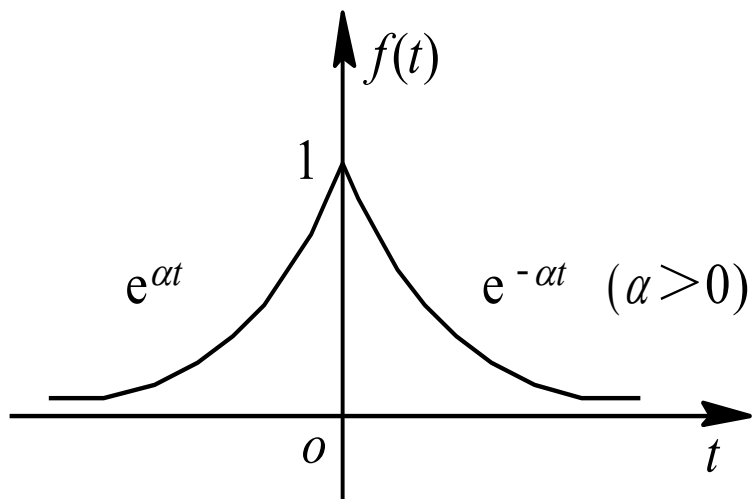
例 3.3 求图 3.3(a)所示双边指数函数的频谱函数。

解 双边指数函数可表示为

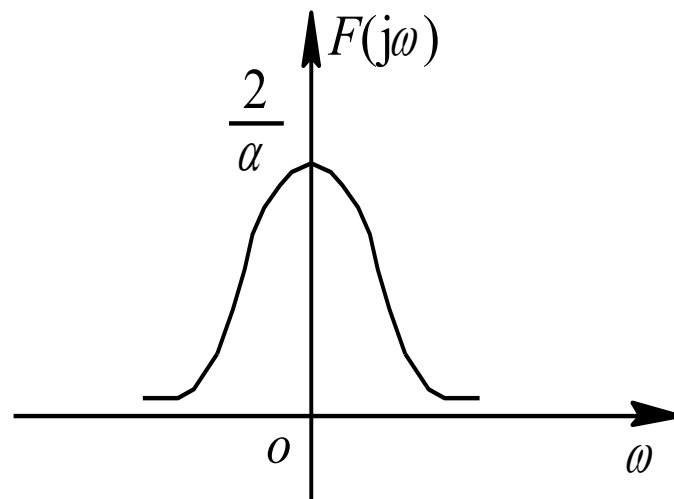
$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

将 $f(t)$ 代入式(3.4-2), 可得其频谱函数为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



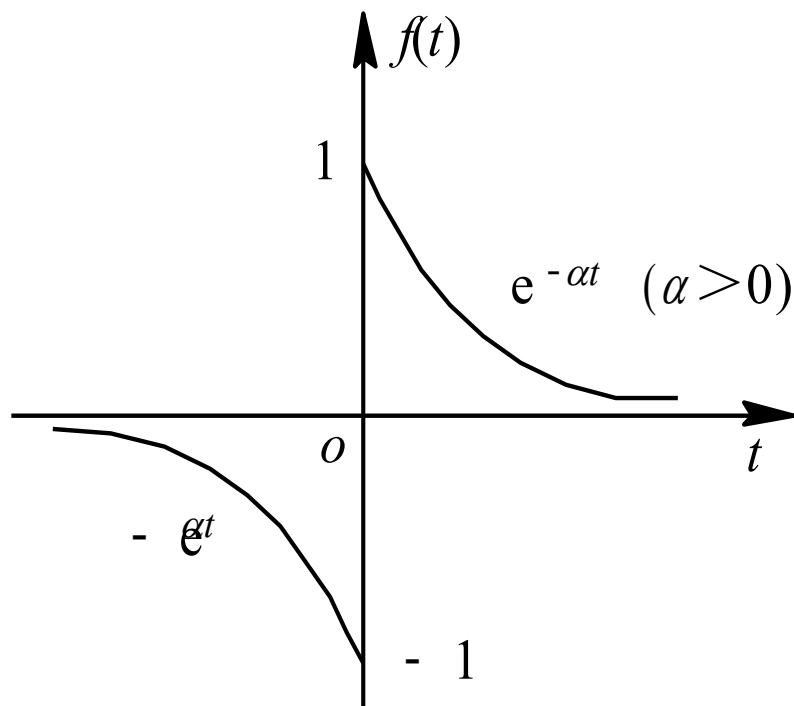
(a)



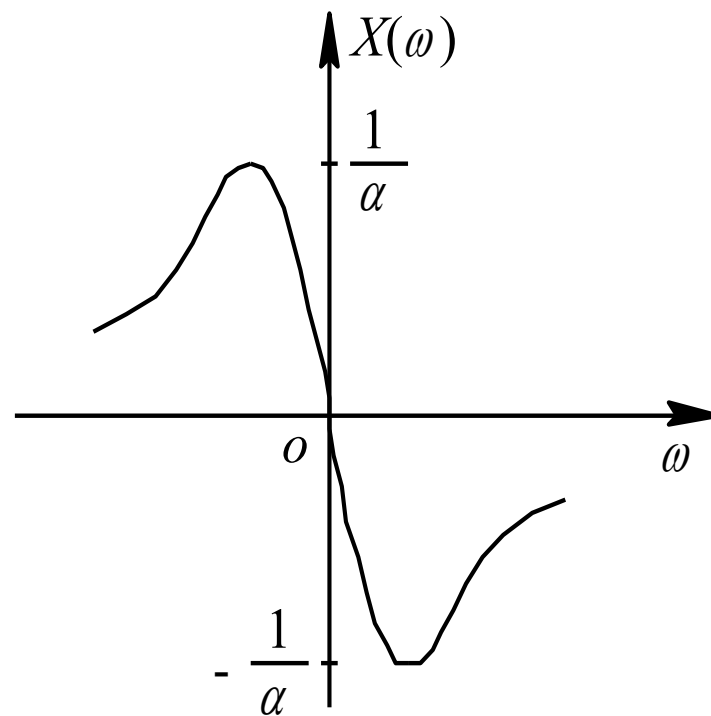
(b)

图 3.3 双边指数函数及其频谱
(a) 双边指数函数； (b) 频谱

例 3.4 求图 3.4(a)所示信号 $f(t)$ 的频谱函数。

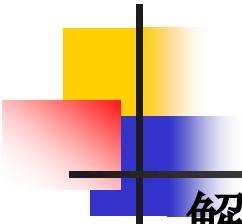


(a)



(b)

图 3.4 例 3.4 图
(a) 信号 $f(t)$; (b) 频谱

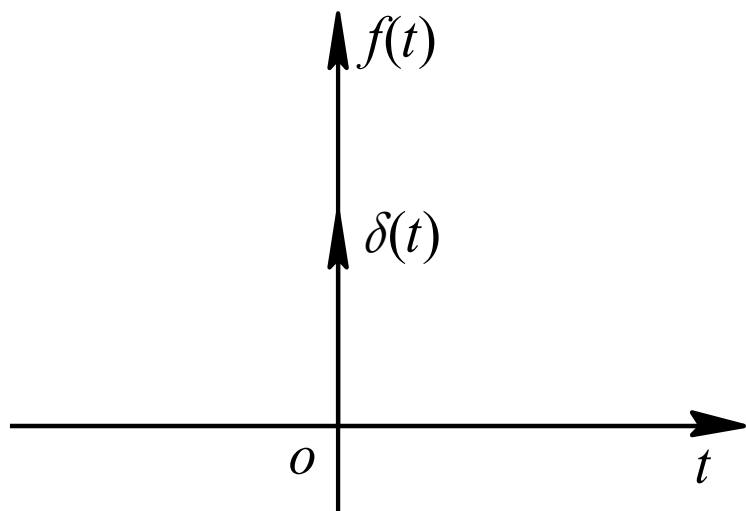


解 图示信号 $f(t)$ 可表示为

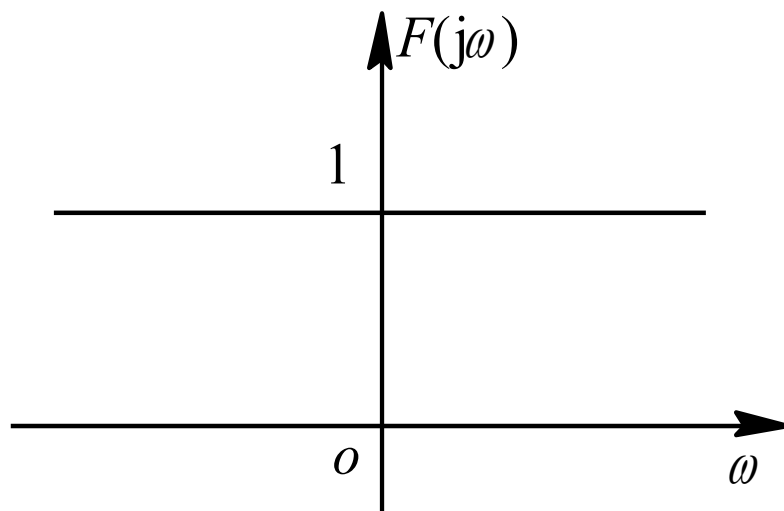
$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ -e^{-at} & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 -e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = j \frac{-2\omega}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

例 3.5 求单位冲激函数 $\delta(t)$ 的频谱函数。



(a)



(b)

图 3.5 信号 $\delta(t)$ 及其频谱
(a) 单位冲激信号 $\delta(t)$; (b) $\delta(t)$ 的频谱



解

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

可见，冲激函数 $\delta(t)$ 的频谱是常数1。也就是说， $\delta(t)$ 中包含了所有的频率分量，而各频率分量的频谱密度都相等。显然，信号 $\delta(t)$ 实际上是无法实现的。

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

根据分配函数关于 $\delta(t)$ 的定义, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (\varphi(t) \text{ 为试验函数})$$

将函数 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$ 进行这个试验, 从而有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \right] \varphi(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega = \varphi(0) \end{aligned}$$

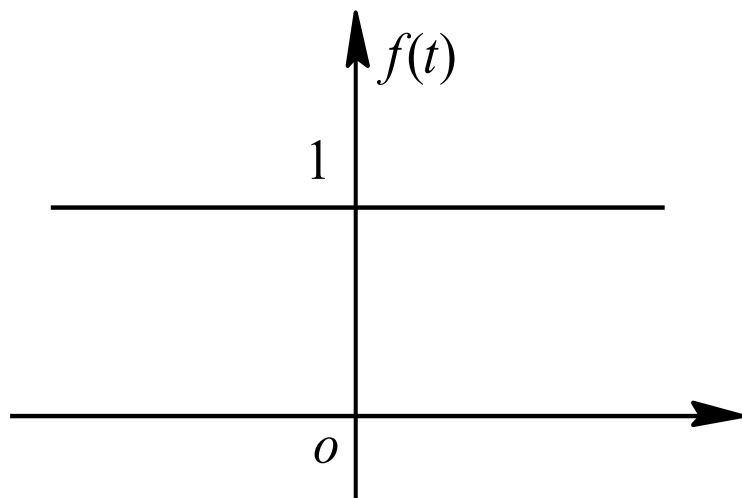
显然,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

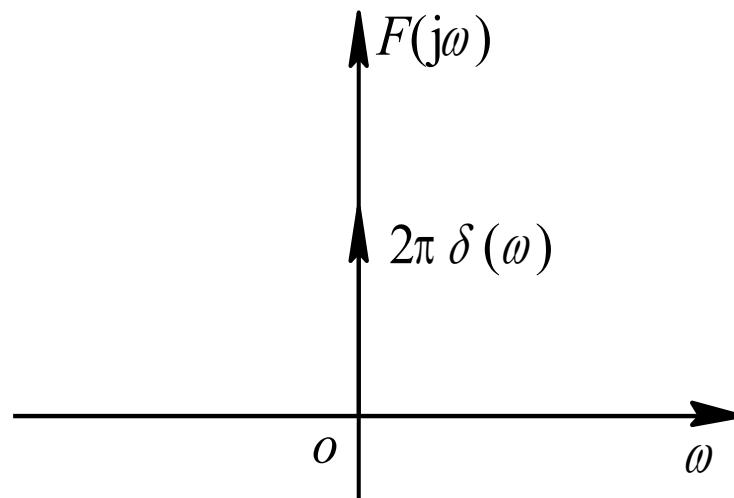
这说明常数 1 的傅里叶反变换是 $\delta(t)$ 。即

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

例 3.6 求直流信号1的频谱函数。

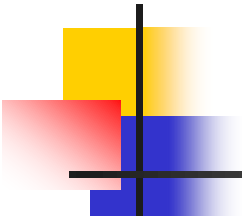


(a)



(b)

图 3.6 直流信号 $f(t)$ 及其频谱
(a) 直流信号 $f(t)$; (b) 频谱



解 直流信号1可表示为

$$f(t) = 1 \quad -\infty < t < \infty$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$



例 3.7 求符号函数 $\text{Sgn}(t)$ 的频谱函数。

$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

考察例 3.4 所示信号 $f(t)$

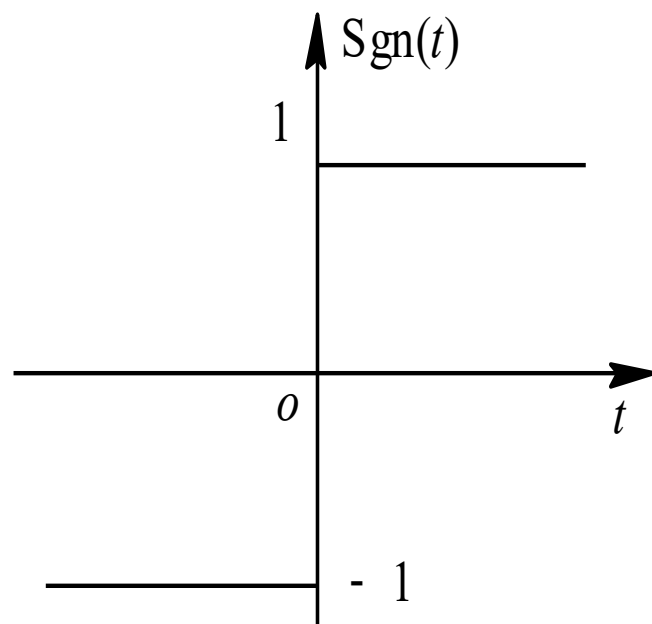
$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{-\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，其极限为符号函数 $\text{Sgn}(t)$ 。因而可以用求 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 当 $\alpha \rightarrow 0$ 的极限的方法来求得 $\text{Sgn}(t)$ 的频谱函数。

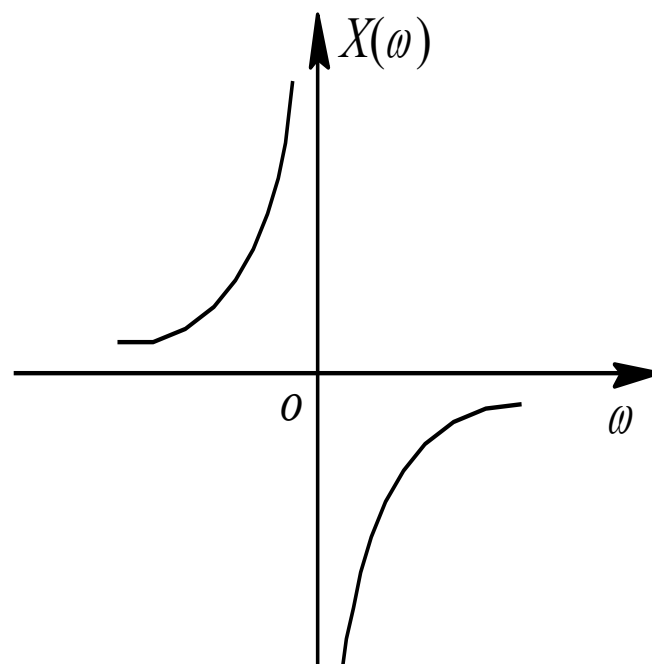


例 3.4 所示信号的频谱函数为 $-j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$ ，从而有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{Sgn}(t)] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}\end{aligned}$$




(a)



(b)

图 3.7 符号函数 $\text{Sgn}(t)$ 及其频谱
(a) $\text{Sgn}(t)$ 的波形； (b) 频谱



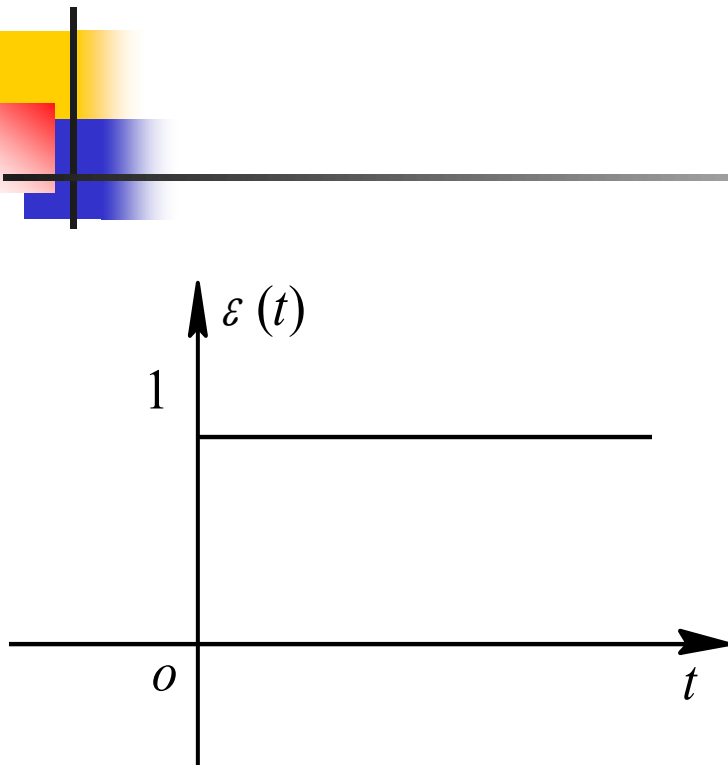
例 3.8 求阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的频谱函数。

解 由阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的波形容易得到

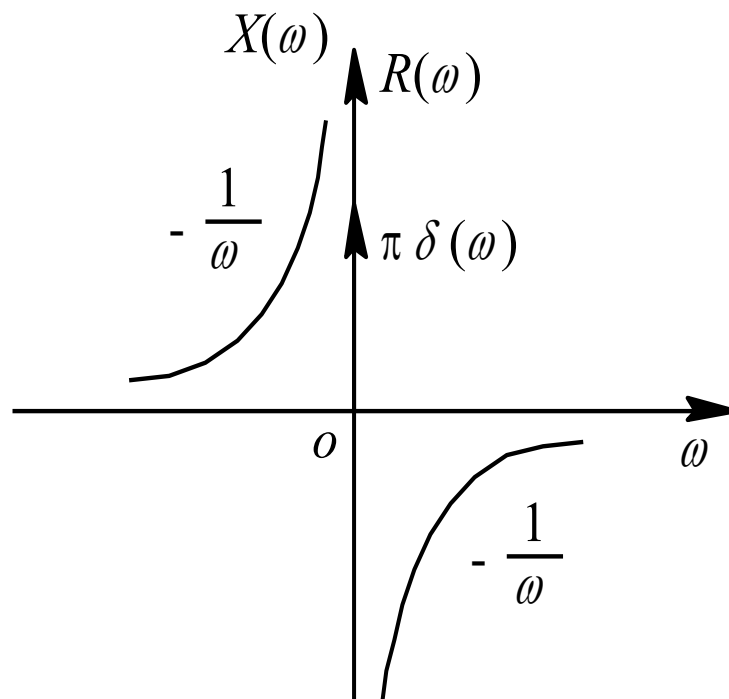
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

从而就可更为方便地求出 $\varepsilon(t)$ 的频谱函数， 即

$$\mathcal{F}[\varepsilon(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \text{Sgn}(t)\right] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



(a)



(b)

图 3.8 阶跃函数及其频谱

(a) $\varepsilon(t)$ 的波形; (b) 频谱

§ 3.7 周期信号的频谱函数

设 $f(t)$ 为周期信号，其周期为 T ，其复指数形式的傅里叶级数为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

式中， Ω 为基波角频率 ($\Omega = 2\pi/T$)， F_n 为复振幅，

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

对周期信号 $f(t)$ 求傅里叶变换，从而有

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot \mathcal{F}[e^{jn\Omega t}]$$

据傅里叶变换的频移性质，可知

$$e^{jn\Omega t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\Omega)$$

所以得到

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

例 3.7-1 求图 3.6-1(a)所示周期矩形脉冲 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

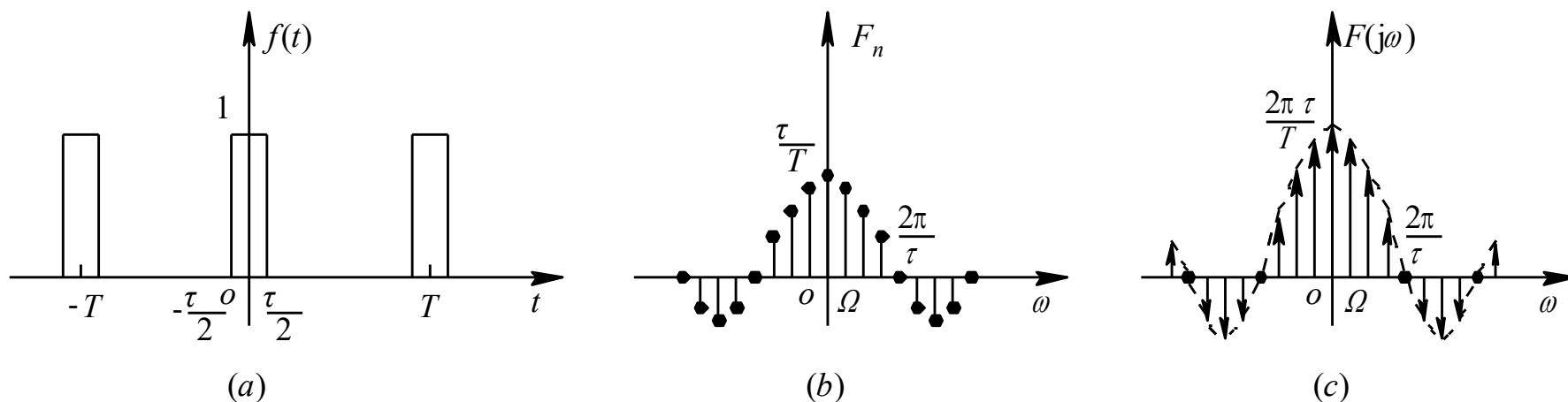


图 3.7-1 周期矩形脉冲信号及其频谱

(a) $f(t)$ 的波形; (b) 复振幅 F_n ; (c) 频谱函数 $F(j\omega)$



解 周期矩形脉冲 $f(t)$ 的复振幅 F_n 为

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-jn\Omega t} dt \\ &= \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega) \\ &= \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega) \\ &\quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

例 3.7-2 图3.7-2(a)为周期冲激函数序列 $\delta_T(t)$ ，其周期为 T ， $\delta_T(t)$ 可表示为

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad m \text{ 为整数}$$

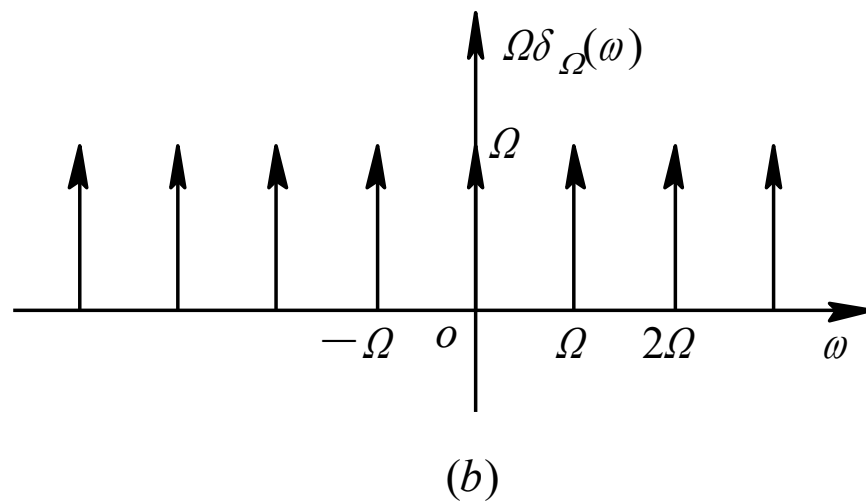
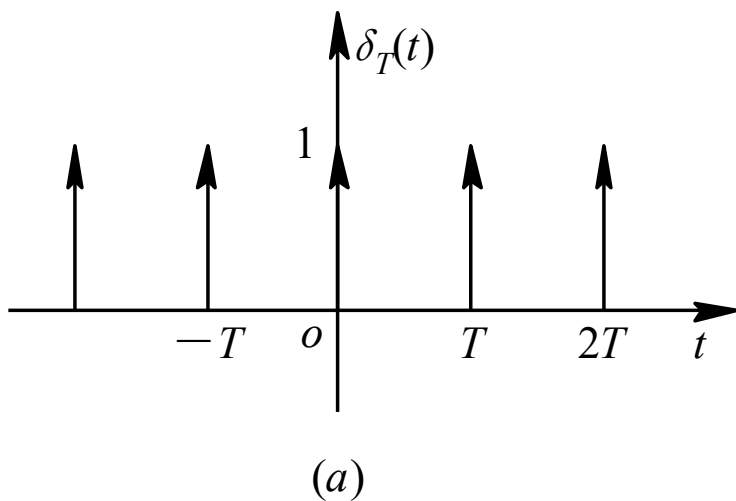
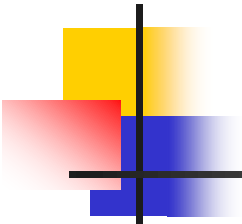


图 3.7-2 周期冲激序列及其频谱



解 先求 $\delta_T(t)$ 的复振幅 F_n :

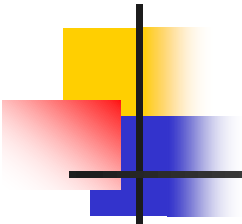
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \\ &= \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned}$$

可见, 周期冲激函数序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换为一个在频域中周期为 Ω 的冲激序列。

若令 $\delta_\Omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$, 则有

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \Omega \delta_\Omega(\omega)$$



设一周期信号 $f_T(t)$ ，其周期为 T ， $f_T(t)$ 中位于第一个周期的信号若为 $f_a(t)$ ，则不难得到

$$f_T(t) = f_a(t) * \delta_T(t) = f_a(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

应用傅里叶变换的卷积性质，有

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = \mathcal{F}[f_a(t)] \cdot \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \mathcal{F}[f_a(t)] \cdot \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$$

式中， $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 。



已经知道

$$\mathcal{F}[g_\tau(t)] = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

将其代入式(3.6-4), 有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_\tau(t)] &= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega) \\ &= \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\Omega)\end{aligned}$$