信号与系统

Lecture 8

第五章:连续时间系统的复频域分析

§5.1 引言

§5.2 拉普拉斯变换

§5.3 拉普拉斯变换的收敛区

§5.4 常用函数的拉普拉斯变换

§5.5 拉普拉斯反变换

基本要求：
理解拉普拉斯变换的定义，收敛区，计算；　(1)
掌握拉普拉斯变换的性质及应用；　(1，2)
掌握拉普拉斯变换分析线性系统；　(2)
掌握根据系统函数画出系统的模拟框图。　(2)

重点与难点：
拉普拉斯反变换的求解方法；
拉普拉斯变换的性质；
系统模拟图。

复习

- 系统的频响函数
  - 物理意义
  - 应用
- 理想低通滤波器
  - 频响特性
  - 单位冲激响应
  - 物理上是否可实现

本讲内容

- 复频域分析的数学基础
  - 拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的收敛区
  - 常用函数的拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯反变换的计算
- 拉普拉斯变换的性质

§5.1 引言

§2.2 系统方程的算子表示法

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=$$

$$b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

令 $p=\dfrac{d}{dt}$，$p^i=\dfrac{d^i}{dt^i}$，

则原方程可写成如下的（算子）形式：

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0)r(t)=(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0)e(t)$$

$$H(p)=\frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p \ + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p + a_0}$$

称为该系统的转移算子（传输算子）。

练习：写出下列微分方程的转移算子。

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=2\frac{d^2}{dt^2}e(t)+9\frac{d}{dt}e(t)+11e(t)$$

- 由微分方程的算子形式可以很方便地得到方程的解；
- 算子形式的微分方程与其拉普拉斯变换式形式类似，转移算子也与系统函数的形式类似。

英国工程师赫维赛德（1850－1925）

与

法国数学家拉普拉斯（1749－1825）

拉普拉斯变换法的几个显著优点：

- 简化了函数：指数函数－初等函数
- 简化了运算：时域微积分－复频域的乘除运算
- 简化了求解过程：可一次性获得系统的完全响应
- 利用系统函数的零极点分布可以直观地研究系统的时频特性

1. 拉氏变换的定义——从傅氏变换到拉氏变换

绝对可积条件限制了傅里叶变换的应用，如

$f(t) = u(t)$ FT存在，但不好算

$f(t) = e^{at}u(t) \quad (a > 0)$ FT不存在

对这些信号若乘以一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ （σ 为某实数），使得 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件，再求其傅里叶变换。

2. 公式推导　　正变换

$$FT(f(t)) = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$FT[e^{-\sigma t}f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

令 $s = \sigma + j\omega,$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

反变换

$$FT(e^{-\sigma t} f(t)) = F(s)$$

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

$s = \sigma + j\omega$, 则 $d\omega = ds / j$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

双边拉普拉斯变换：

$$\boxed{f(t) \leftrightarrow F_d(s)}$$

$$\begin{cases} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \end{cases}$$

其中 $s = \sigma + j\omega$

几点说明：

（1）从信号分解的角度来看两种变换：

傅氏变换是把信号分解为形式为 $e^{j\omega t}$ 的分量之和，每一对正、负 ω 频率分量组成一个等幅的正弦振荡，即

$$e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}=2\cos(\omega t)$$

振荡的振幅为 $\dfrac{|F(j\omega)|d\omega}{\pi}$，是无穷小量。

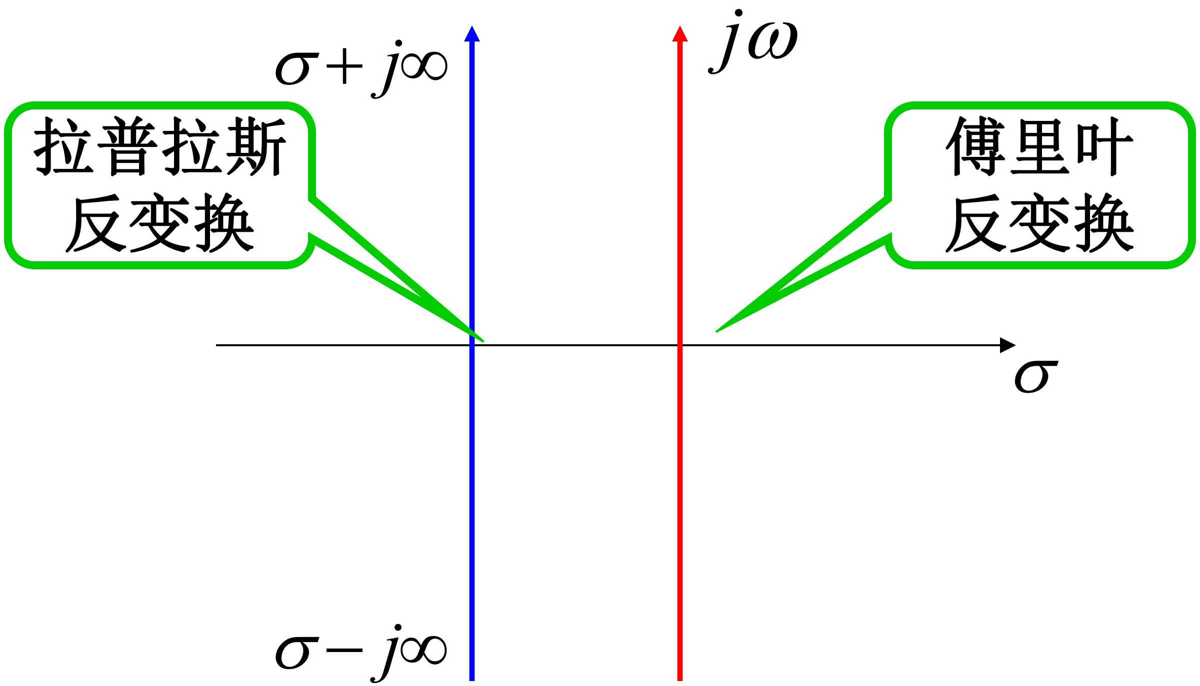
拉氏变换是把信号分解为形式为 $e^{st}=e^{(\sigma+j\omega)t}$ 的分量之和，每一对正、负 ω 频率分量组成一个幅度呈指数规律变化的的正弦振荡，即

$$e^{(\sigma+j\omega)t}+e^{(\sigma-j\omega)t}=2e^{\sigma t}\cos(\omega t)$$

振荡的振幅为 $\dfrac{|F(s)|e^{\sigma t}d\omega}{\pi}$，是无穷小量。

(2) 傅里叶变换是拉普拉斯变换在 $\sigma=0$ 时的特例。

两种反变换的积分路径：



3. 单边拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换

$$\begin{cases} F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \end{cases}$$

单边拉普拉斯变换

$$\begin{cases} F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t)=\left[\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds\right]u(t) \end{cases}$$

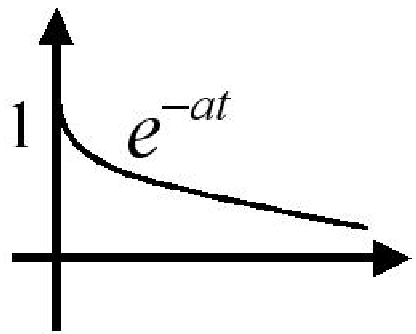
原函数　　象函数

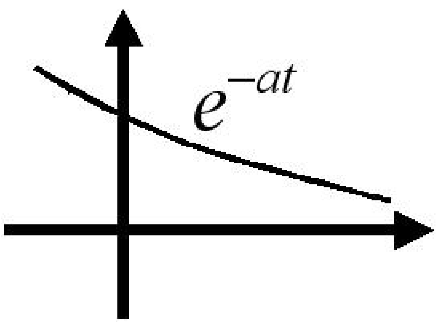
$$\boxed{f(t)\leftrightarrow F(s)}$$

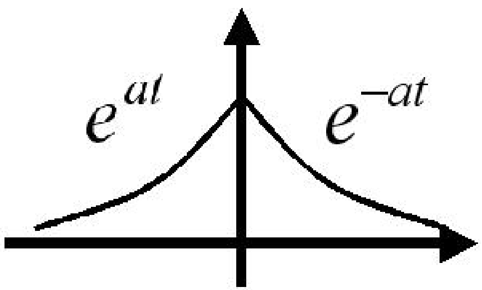
几点说明：

(1) t<0区间的函数值与单边拉氏变换的结果无关。

$$LT^{-1}[\frac{1}{s+\alpha}]=e^{-\alpha t}u(t)$$







(2) 规定单边拉氏变换下限从0^-开始。初始条件自动地包含在变换式中。

§5.3 拉普拉斯变换的收敛区

前面提到，拉普拉斯变换的提出是为了解决某些函数不满足绝对可积条件导致其傅里叶变换或不存在，或存在但不好求的问题。

通过 $f(t)e^{-\sigma t}$ “控制”原函数 $f(t)$。

问题1：对σ的取值有何要求？

问题2：是否所有的函数均可通过这种方式使其满足绝对可积条件呢？

把 $f(t)e^{-\sigma t}$满足绝对可积的σ值的范围称为拉氏变换的收敛区。

本节讨论单边拉普拉斯变换的收敛区。

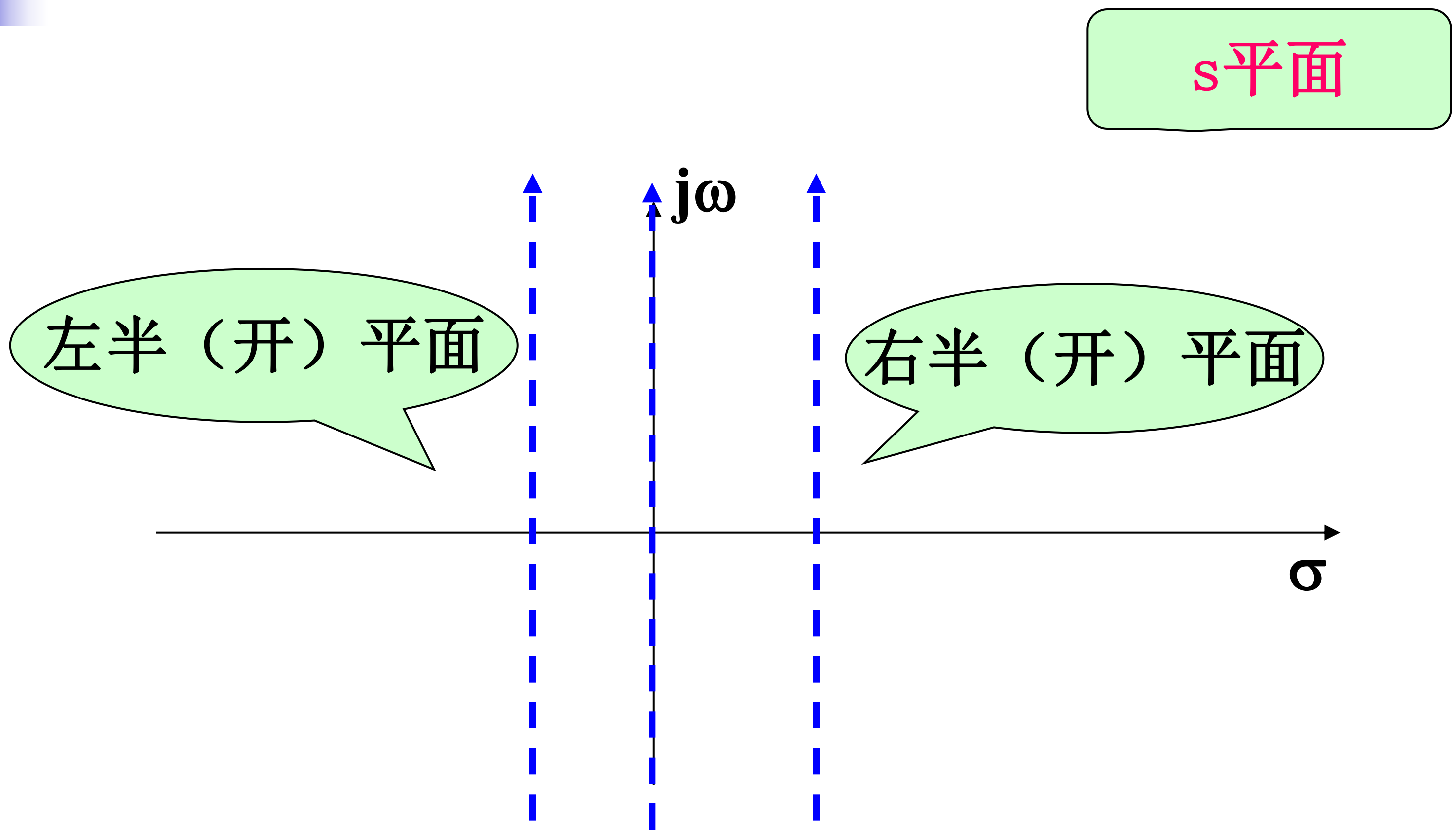
通常如果$f(t)$是指数阶函数，且分段连续，则其单边拉氏变换存在。

指数阶函数是指存在 σ_0 ，当 $\sigma > \sigma_0$ 时，

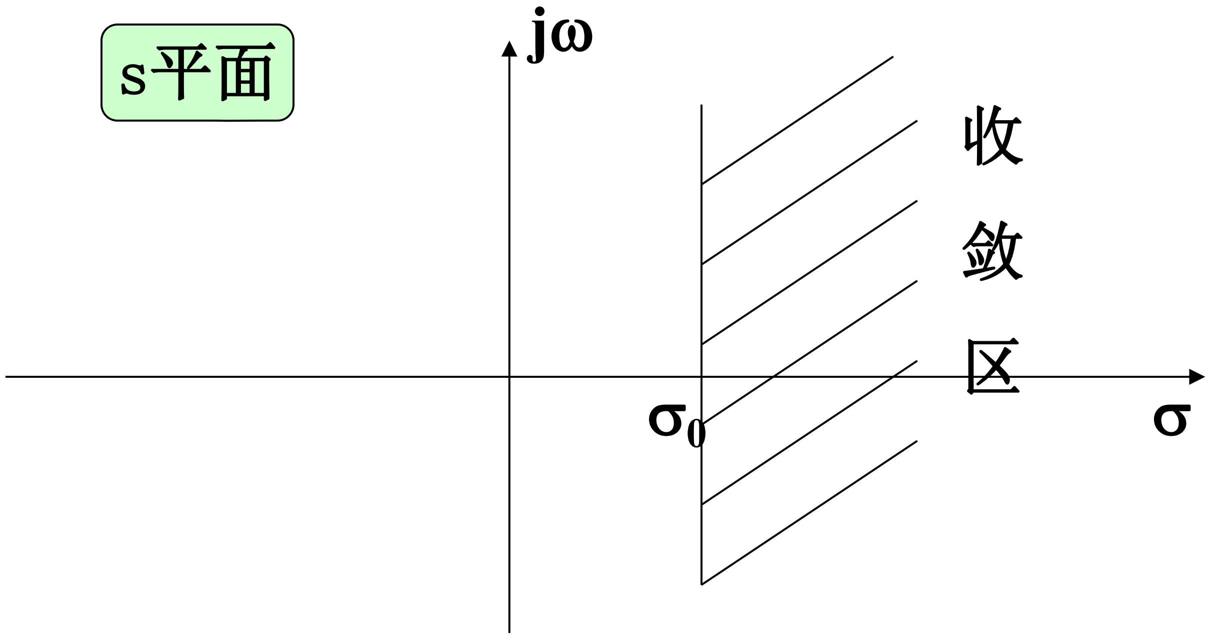
$$\lim_{t \to +\infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0$$

所谓分段连续，是指除有限个不连续点外函数是连续的，且时间由间断点两侧趋于间断点时，函数有有限的极限值。

S平面



单边拉氏变换的收敛区



σ_0称收敛坐标

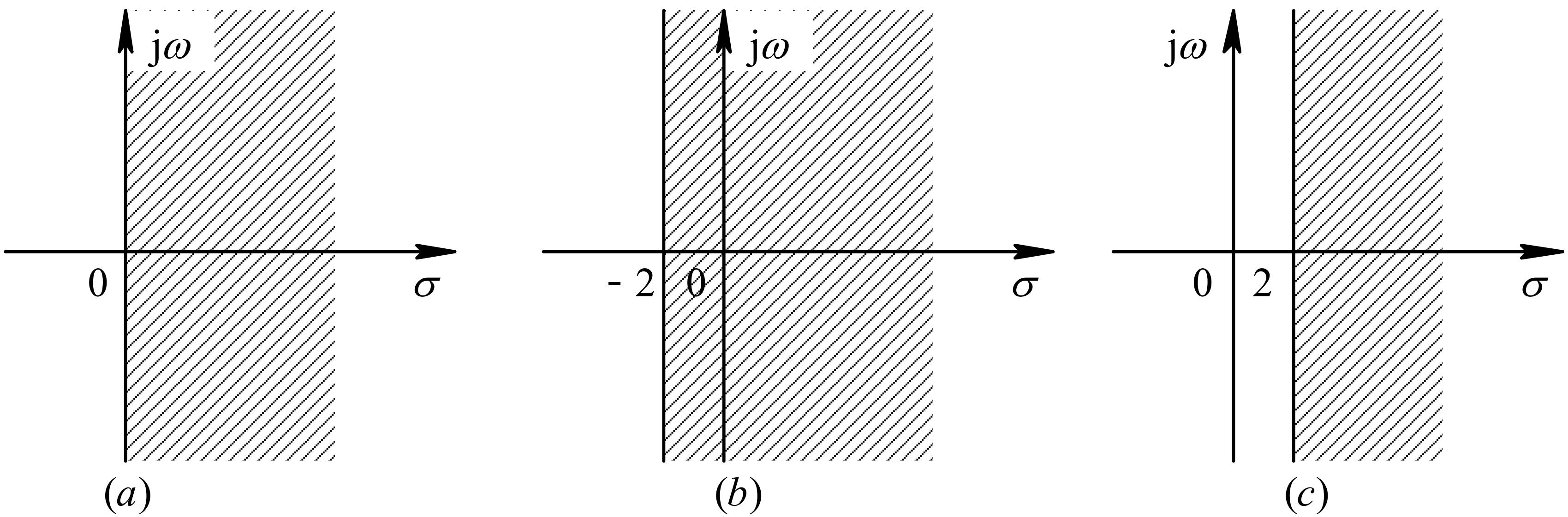
$\sigma=\sigma_0$称收敛边界/轴

$\sigma>\sigma_0$称收敛区

例1 试确定下列信号的拉普拉斯变换的收敛域。

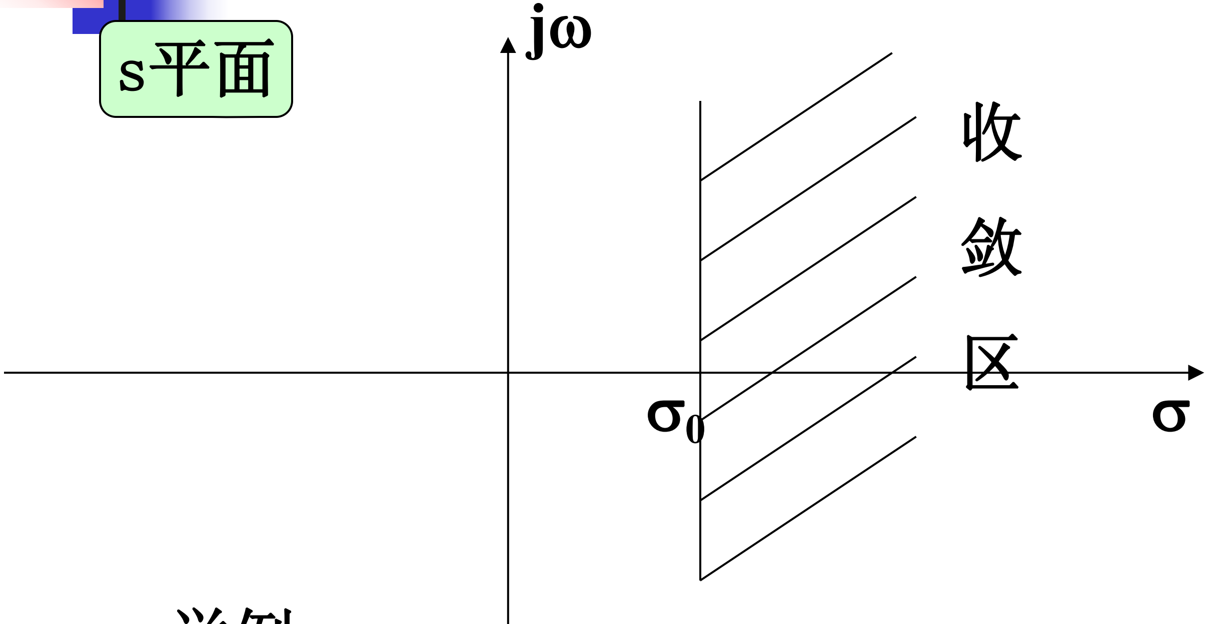
$$f_1(t) = e^{t^2} \qquad f_2(t) = u(t)$$

$$f_3(t) = e^{-2t}u(t) \qquad f_4(t) = e^{2t}u(t)$$



$F_2(s)$的ROC　　$F_3(s)$的ROC　　$F_4(s)$的ROC

单边拉氏变换的收敛区



σ_0称收敛坐标

$\sigma=\sigma_0$称收敛边界/轴

$\sigma>\sigma_0$称收敛区

举例：

(1) 单个脉冲信号，其收敛区为整个s平面.

(2) 单位阶跃信号，其收敛区为s平面的右半平面.

(3) 指数信号 $e^{\alpha t}$ ，其收敛区为 $\sigma > \mathrm{Re}(\alpha)$.

§5.4 常用函数的拉氏变换

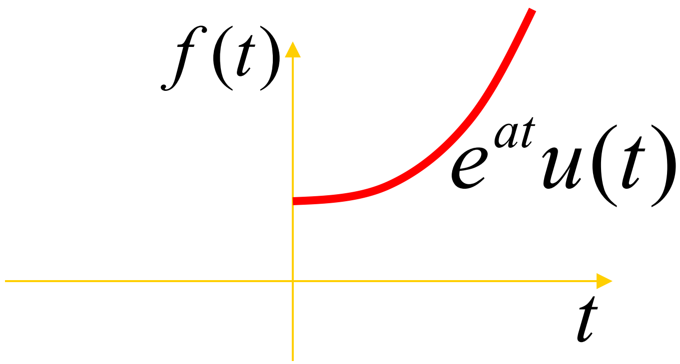
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
$e^{\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

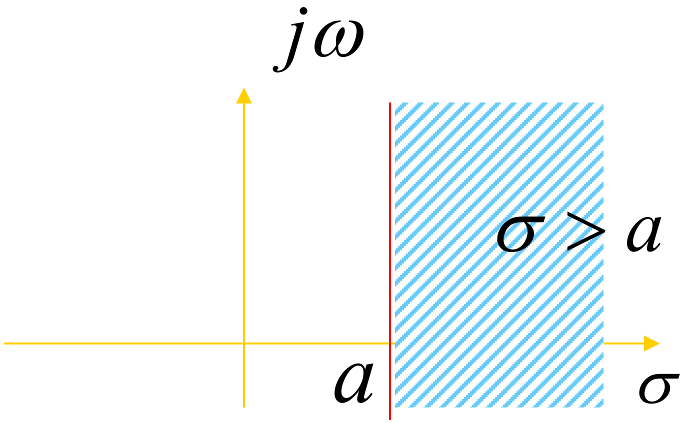
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

傅氏变换与拉氏变换的关系

$f(t)$	$FT[f(t)]$	$LT[f(t)]$
$e^{at}u(t)$ $(a>0)$	✗	$\dfrac{1}{s-a}$
$e^{-at}u(t)$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{j\omega+a}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$	$\dfrac{1}{s}$

(1) $\sigma_0 > 0$

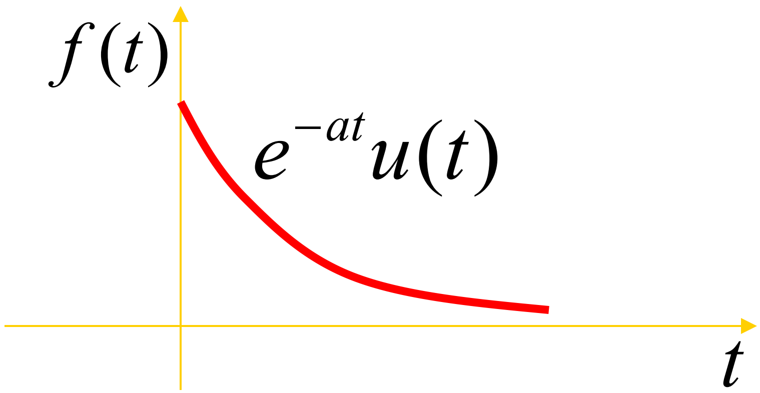


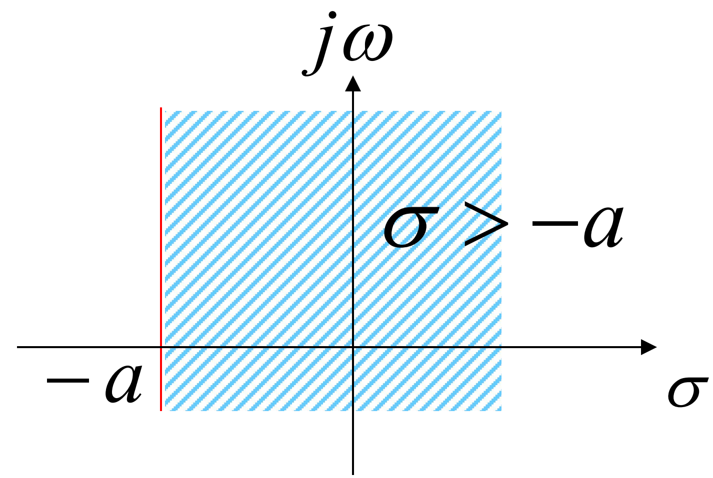


$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

傅氏变换不存在，拉氏变换存在。

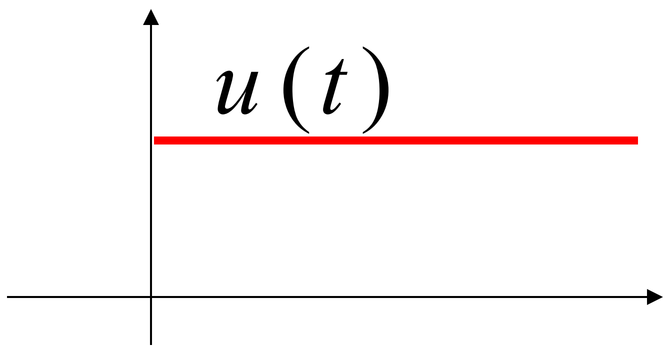
(2) $\sigma_0 < 0$





$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s+a}} \xrightarrow{s = j\omega} \boxed{F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}}$$

(3) $\sigma_0 = 0$



存在傅氏变换，但以虚轴为收敛边界，不能简单 $s = j\omega$，要包含奇异函数项。

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s}} \Rightarrow \boxed{F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \underline{\pi\delta(\omega)}}$$

$$\boxed{F(j\omega) = F(s)\Big|_{s=j\omega} + \underline{\pi\sum_n k_n \delta(\omega - \omega_n)}}$$

§5.5 拉普拉斯反变换

1. 查表（P225 表5-1）

2. 部分分式展开法(P226-233)

3. 围线积分法---留数法(P233-238)

4. 利用拉氏变换的性质求反变换

1. 部分分式展开法（Heaviside展开法）

常见的拉氏变换式是复频域变量s的多项式之比（有理分式），一般形式是(不失一般性，设$a_n=1$)

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

- 在分解F(s)为许多简单变换式之前,应先检查一下F(s)是否是真分式,即保证n>m。若不是真分式,需利用长除法将F(s)化成如下形式。

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=B_0+B_1 s+B_2 s^2+\cdots+B_{m-n}s^{m-n}+\frac{N_1(s)}{D(s)}$$

(1) D(s)=0的根无重根。

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)}$$

$$=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}$$

其中待定系数这样求得：

$$K_K=[(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}]_{s=s_k} \quad \text{或} \quad K_k=[\frac{N(s)}{D'(s)}]_{s=s_k}$$

这时 $\boxed{f(t)=LT^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t}\varepsilon(t)}$

2. D(s)=0有重根。蔔

若D(s)=0只有一个r重根s_1, 即$s_1=s_2=\cdots=s_r$, 而其余(n-r)个全为单根, 则D(s)可写成

$$D(s)=a_n(s-s_1)^r(s-s_{r+1})(s-s_{r+2})\cdots(s-s_n)$$

F(s)展开成部分分式:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{1}{a_n}\left(\frac{K_{1r}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{1(r-1)}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{K_{12}}{(s-s_1)^2}+\frac{K_{11}}{s-s_1}+\frac{K_{1r}}{s-s_{r+1}}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}\right)$$

其中 $$K_{1i}=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}[(s-s_1)^r F(s)]_{s=s_1}$$

例2 已知 $F(s)=\dfrac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}$， 求$F(s)$的拉氏反变换。

解：

$$F(s)=\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{11}}{s+1}+\frac{K_3}{s+3}$$

$$K_{12}=(s+1)^2\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$K_{11}=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}\right]\bigg|_{s=-1}=1$$

$$K_3=(s+3)\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}\bigg|_{s=-3}=-1$$

于是 $$F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

$$f(t)=LT^{-1}[F(s)]=(te^{-t}+e^{-t}-e^{-3t})u(t)$$

例3 求 $LT^{-1}[\frac{s^3}{s^2+s+1}]$

解：

$$\frac{s^3}{s^2+s+1}=s-1+\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$=s-1+\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\therefore f(t)=\delta'(t)-\delta(t)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$$

2. 围线积分法（留数法）

留数定理的内容为：若复变函数$G(s)$在闭合曲线L上及其内部，除内部的有限个孤立奇点外处处解析，则$G(s)$沿闭合曲线L的积分等于2π j乘以$G(s)$在这些奇点(s_i)的留数之和，即

$$\oint_L G(s)ds = 2\pi j \sum_{L\text{内奇点}} \underset{s_i}{\mathrm{Res}}[G(s)]$$

拉普拉斯的反变换式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

这是一个复变函数的积分，积分路径是s平面上平行于虚轴的直线 σ =C> σ $_0$。

根据约当引理，若满足条件

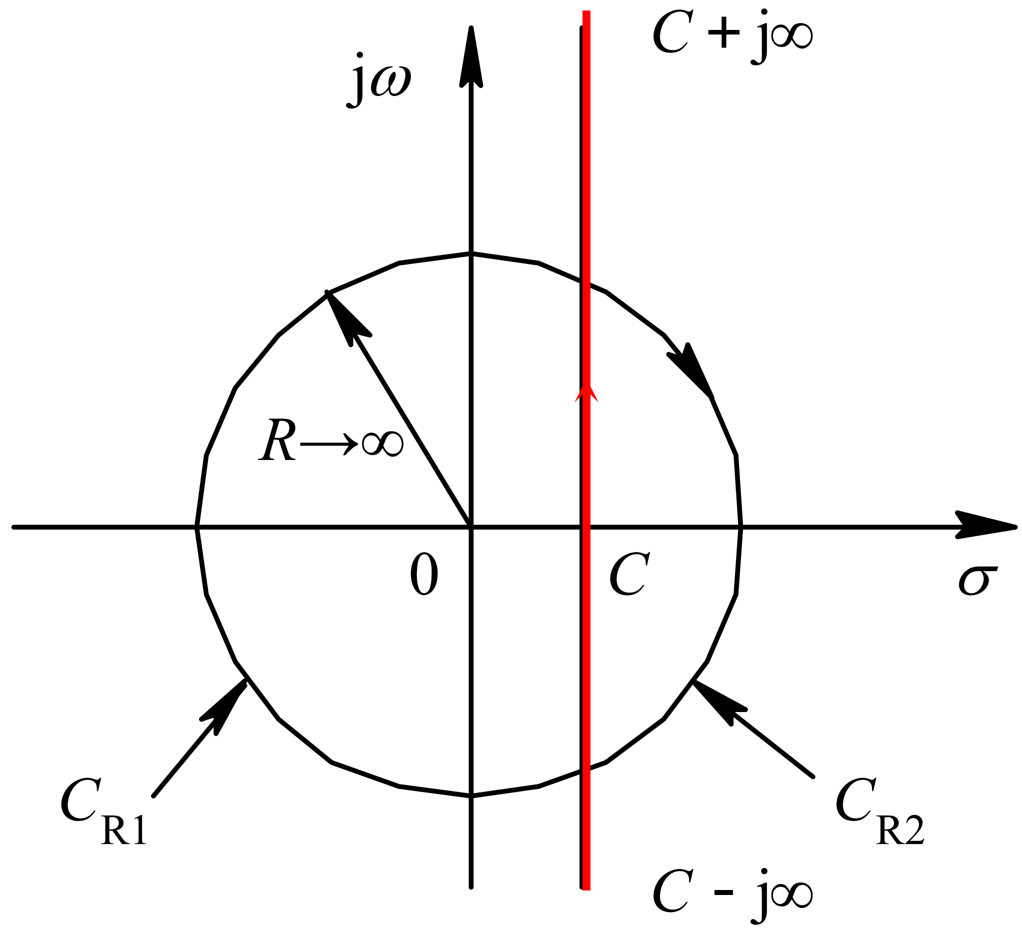
$$\lim_{|s=R|\to\infty}\left|F(s)\right|=0$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R1}}F(s)e^{st}ds=0,\quad t>0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R2}}F(s)e^{st}ds=0,\quad t<0$$

因此，当t>0时，圆弧应补在直线左边，如图中的C_{R1}。而当t<0时，圆弧应补在直线右边。



因此

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}[\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}ds+\int_{C_{R1}} F(s)\,e^{st}ds],\quad t>0$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}[\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}ds+\int_{C_{R2}} F(s)\,e^{st}ds],\quad t<0$$

- 由于图中围线C_{R1}半径充分大，并在直线$\sigma=C>\sigma_0$的左边，因而C_{R1}与直线所构成的闭合围线包围了$F(s)e^{st}$的所有极点s_k，故有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\,e^{st}ds=\sum_k \mathrm{Res}[F(s)\,e^{st}\,]_{s=s_k}\qquad t>0$$

- 而围线C_{R2}在直线$\sigma=C>\sigma_0$的右边，C_{R2}与直线所构成的围线不包含$F(s)e^{st}$的任何极点，故有

$$f(t)=0,\qquad t<0$$

综合上述分析，得到：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=(\sum_k \mathop{\mathrm{Res}}_{s_k} s[F(s)e^{st}])\varepsilon(t)$$

当F(s)为有理函数时，其留数可作如下计算：

（1）若s_i为$F(s)e^{st}$的单极点，则

$$\operatorname*{Res}_{s_i}[F(s)e^{st}] = (s-s_i)F(s)e^{st}\Big|_{s=s_i}$$

（2）若s_i为$F(s)e^{st}$的r重极点，则

$$\operatorname*{Res}_{s_i}[F(s)e^{st}] = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\Big[(s-s_i)^r F(s)e^{st}\Big]_{s=s_i}$$

留数法与部分分式分解法比较：

1）部分分式分解法只能解决有理函数，而留数法不受有理函数的限制；

2）留数法不能解决m>=n的情况，部分分式分解法可以；

3） 留数法在数学上比部分分式分解法严密；

4） 部分分式分解法涉及的基础知识比留数法简单。

例5 求 $F(S)=\dfrac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}$ 的原函数。

象函数为有理真分式

解：单极点有 $s_1=0,\ s_2=-3,$ 二重极点有 $s_3=-1.$

$$[(s-s_1)F(s)e^{st}]_{s=s_1=0}=\frac{s+2}{(s+3)(s+1)^2}e^{st}\Big|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

$$[(s-s_2)F(s)e^{st}]_{s=s_2=-3}=\frac{s+2}{s(s+1)^2}e^{st}\Big|_{s=-3}=\frac{1}{12}e^{-3t}$$

$$\mathrm{Res}[-1]=\frac{d}{ds}[(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}e^{st}]\Big|_{s=s_3=-1}$$

$$=-\frac{t}{2}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-t}=-(\frac{t}{2}+\frac{3}{4})e^{-t}$$

$$\therefore f(t)=[\frac{2}{3}+\frac{1}{12}e^{-3t}-(\frac{t}{2}+\frac{3}{4})e^{-t}]\varepsilon(t)$$

例6 求 $\dfrac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}$ 的原函数。

象函数为有理式，但非真分式

方法一：直接用留数法求解，得

$$f(t)=(3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t})u(t)$$

方法二：部分分式分解法

$$\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}=2+\frac{s+4}{2s^2+5s+3}=2+\frac{3}{s+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{s+\frac{3}{2}}$$

$$\therefore f(t)=2\delta(t)+(3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t})u(t)$$

为什么两种方法的结果不一样？参见课本P235的说明。

小结

- 拉普拉斯变换是信号与系统分析的新工具。

  （1）定义

  （2）与傅里叶变换的关系

  （3）收敛域

  （4）常见信号的拉普拉斯变换

  （5）拉普拉斯反变换的求法

课外作业

阅读：5.1-5.5　自学：5.6　预习：5.7,5.9

作业:5.3(7)(8)，5.4(3)(5)