信号与系统

Lecture 12

第七章:离散时间系统的时域分析（续）

§7.4 零输入响应

§7.5 零状态响应

本讲内容

- 常系数差分方程的经典解法
- 零输入响应

§7.4

- 单位函数响应
- 卷积和
- 零状态响应

§7.5

离散时间系统的响应

- 迭代法
- 经典法
- 卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应
- 变换域法（z变换法）

转移算子

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)$$
$$=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_0e(k)$$

引入移序算子 $S[y(k)]=y(k+1)$，得

$$(S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1S+a_0)y(k)$$
$$=(b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_1S+b_0)e(k)$$

$$y(k)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}e(k)$$

$$H(S)=\frac{b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}$$ 转移算子

大家还记得常系数微分方程的转移算子和系统函数吗?

$$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+r(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+5\frac{d}{dt}e(t)+2e(t)$$

$$H(p)=\frac{p^2+5p+2}{p^3+2p^2+3p+1} \qquad H(s)=\frac{s^2+5s+2}{s^3+2s^2+3s+1}$$

特征方程、特征根

- n阶齐次差分方程：

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0 y(k)=0$$

- 应用移序算子 $S[y(k)]=y(k+1)$

$$(S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_0)y(k)=0$$

- 特征方程：

$$\boxed{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_0=0}$$

有n个根 $v_i, i=1,2,\ldots,n$ ，称为系统的特征根。

求解差分方程的迭代法和经典法

- 迭代法—当差分方程阶次较低时常用此法

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad x(n) = \delta(n), y(-1) = 0$$

$$n = 0 \quad y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + 1 = 1$$

$$n = 1 \quad y(1) = ay(0) + x(1) = a + 0 = a$$

$$n = 2 \quad y(2) = ay(1) + x(2) = a \cdot a + 0 = a^2$$

$$n = 3 \quad y(3) = ay(2) + x(3) = a \cdot a^2 + 0 = a^3$$

$$\cdots\cdots$$

$$y(n) = a^n u(n) \longleftrightarrow H(S) = \frac{S}{S-a}$$

$$h(n)$$

思考：将上述方程改为

$$y(n) = ay(n-1) + x(n-1) \qquad x(n) = \delta(n), y(-1) = 0$$

采用迭代法，得到方程的解为

$$h(n) = a^{n-1}u(n-1) \longleftrightarrow H(S) = \frac{1}{S-a}$$

$$h(n) = a^{n}u(n) \longleftrightarrow H(S) = \frac{S}{S-a}$$

• 时域经典法　　齐次通解

(1) 特征根是不等实根 $v_i, i = 1,2,\ldots,n$

$$y_h(k) = C_1 v_1^{\ k} + C_2 v_2^{\ k} + \cdots + C_n v_n^{\ k}$$

(2) 特征根是等实根 $v_i = v, i = 1,2,\ldots,n$

$$y_h(k) = (C_1 + C_2 k + \cdots + C_n k^{n-1}) v^k$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $v_{1,2} = \alpha \pm j\beta = \rho e^{\pm j\Omega_0}$

$$y_h(k) = C_1(\alpha + j\beta)^k + C_2(\alpha - j\beta)^k$$

或

$$y_h(k) = C_1 \rho^k \cos k\Omega_0 + C_2 \rho^k \sin k\Omega_0$$

特解的形式：

- 强迫项为 n^k 的多项式，

  则特解为 $D_1 n^k + D_2 n^{k-1} + \cdots + D_{k+1}$

- 强迫项含有 a^k 且 a 不是齐次根，则特解 Da^k

- 强迫项含有 a^k 且 a 是单次齐次根，

  则特解 $(D_1 k + D_2)a^k$

- 强迫项含有 a^k 且 a 是n重齐次根, 则特解为

$$(D_1 k^n + D_2 k^{n-1} + \cdots + D_n)a^k$$

经典法求解（全响应）：

一般步骤如下：

(1) 由方程对应的特征方程、特征根，得到齐次解通式；

(2) 根据原方程的激励函数的形式，求出特解；

(3) 写出原方程的全解的一般形式（即齐次解+特解）；

(4) 代入初始条件，求出齐次解的待定系数；

(5) 写出全响应的最终表达式。

例1 已知某二阶线性时不变离散时间系统的方程

$$y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=2^k u(k)$$

初始条件y(0)=0, y(1)=-1, 求系统的全响应y(k)。

解 (1)求齐次解

特征方程为 $S^2-5S+6=0$

特征根为 $v_1=2, v_2=3$

所以齐次解 $y_h(k)=C_1 2^k+C_2 3^k$

(2) 求非齐次方程的特解

由输入e(k)的形式，设方程的特解为

$$y_p(k) = Ak2^k, \quad k \geq 0$$

将特解代入原微分方程，即可求得常数A=-2。

(3) 求方程的全解

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = C_1 2^k + C_2 3^k - k2^{k+1}, \quad k \geq 0$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y(1) = 2C_1 + 3C_2 - 4 = -1$$

解得 C_1=–3，C_2= 3

$$y(k) = -3 \times 2^k + 3^{k+1} - k2^{k+1}, \quad k \geq 0$$

§7.4 离散时间系统的零输入响应

与连续时间系统的时域分析相类似，线性移不变离散系统的全响应除了可以分为自由响应和强迫响应外，还可以分为零输入响应和零状态响应。

全响应是零输入响应与零状态响应之和。

若方程特征根均为单根，则其零输入响应为

$$y_{zi}(k) = C_1 v_1^{\,k} + C_2 v_2^{\,k} + \cdots + C_n v_n^{\,k}$$

其中，系数 C_i 由初始条件决定。

系统的初始条件

在求解系统的响应时，必然要利用系统的初始条件(initial condition)。注意：

1. **初始条件有时是 y(0)，y(1)，…，y(N)，有时是 y(-1)，y(-2)，…，y(-N)。对于因果系统，常用后者。**
2. **讨论因果系统对有始信号的响应时，如果给定的初始条件是y(-1)，y(-2)等小于零的时间点上的值，这时的初始条件就是系统零输入响应的初始条件。**
3. **某些情况下给定的初始条件包括两部分：**

——零输入响应的初始条件

——零状态响应在初始时刻的值

例2（例题7-7） 求下列系统的零输入响应。

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=e(k+1)-2e(k)$$

$$y_{zi}(0)=0; y_{zi}(1)=1$$

解： 特征方程为：

$$S^2-3S+2=(S-1)(S-2)=0$$

有两个特征根：1和2。

$$\therefore\ y_{zi}(k)=c_1 1^k+c_2 2^k$$

$$y_{zi}(k) = c_1 1^k + c_2 2^k$$

代入初值：

$$y_{zi}(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y_{zi}(1) = c_1 + 2c_2 = 1$$

解得：

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore\ y_{zi}(k) = -1 + 2^k ; k \geq 0$$

思考：不同初始条件下求系统的零输入响应。

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=e(k+1)-2e(k)$$

激励为有始信号。

$$y(-1)=0;\ y(-2)=1$$

$$y_{zi}(0)=0;\ y_{zi}(1)=1$$

$$y(0)=0;\ y(1)=1$$

§7.5 离散时间系统的零状态响应

单位函数响应
- 1、单位函数响应定义
- 2、单位函数响应求解方法
- 3、根据单位函数响应分析系统的因果性和稳定性

卷积和
- 1、定义
- 2、计算
- 3、性质
- 4、零状态响应

一、单位函数响应

1、定义

离散时间系统对单位函数 $\delta(n)$ 的零状态响应 $h(n)$，称为系统的单位函数响应。

2、单位函数响应的求法

- 一般时域经典方法求h(n)；
- 利用转移算子求h(n)；
- 将$\delta(n)$转化为起始条件，于是齐次解，即零输入解就是单位函数响应$h(n)$;

  在 $n=0$ 时，接入的激励转化为起始条件;

  在 $n\neq 0$ 时，接入的激励用线性时不变性来计算。

（1）利用转移算子求解

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)$$

$$=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_0e(k)$$

系统的转移算子：

$$H(S)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}$$

对H(S)进行部分分式分解，即可得到h(n)的表达式。

转移算子及其对应的单位函数响应（表7-2）

编号	$H(s)$	$h(k)$
1	1	$\delta(k)$
2	$\dfrac{1}{s-v}$	$v^{k-1}u(k-1)$
3	$\dfrac{1}{s-\mathrm{e}^{\lambda T}}$	$\mathrm{e}^{\lambda(k-1)T}u(k-1)$
4	$\dfrac{s}{s-v}$	$v^{k}u(k)$
5	$\dfrac{s}{s-\mathrm{e}^{\lambda T}}$	$\mathrm{e}^{\lambda kT}u(k)$
6	$A\dfrac{s}{s-v}+A^{*}\dfrac{s}{s-v^{*}}$ $A=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$，$v=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)T}$	$2r\mathrm{e}^{\alpha kT}\cos(\beta kT+\theta)u(k)$
7	$\dfrac{s}{(s-v)^{2}}$	$kv^{k-1}u(k)$
8	$\dfrac{s}{(s-\mathrm{e}^{\lambda T})^{2}}$	$k\mathrm{e}^{\lambda(k-1)T}u(k)$
9	$\dfrac{s}{(s-v)^{n}}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}k(k-1)\cdots(k-n+2)v^{k-n+1}u(k)$
10	$\dfrac{s}{(s-\mathrm{e}^{\lambda T})^{n}}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}k(k-1)\cdots(k-n+2)\mathrm{e}^{\lambda(k-n+1)T}u(k)$

例3（例题7-9）求下列系统的单位函数响应。

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

解：

$$H(S)=\frac{S^2-3}{S^2-5S+6}$$

$$=1+\frac{5S-9}{S^2-5S+6}=1+\frac{6}{S-3}-\frac{1}{S-2}$$

得：

$$h(n)=\delta(n)+(6\times 3^{n-1}-2^{n-1})u(n-1)$$

例4 已知某因果系统是一个二阶常系数差分方程，并已知当激励x(n)=u(n)时的零状态响应为：

$$g(n)=(2^n+3\times 5^n+10)u(n)$$

（i）求系统单位函数响应。

（ii）若系统为零状态，求此二阶差分方程。

解: (i) $g(n)=(2^n+3\times5^n+10)u(n)$

$$\therefore g(n-1)=(2^{n-1}+3\times5^{n-1}+10)u(n-1)$$

$$\because \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$\therefore h(n)=g(n)-g(n-1)$$

$$=14\delta(n)+(2^{n-1}+12\times5^{n-1})u(n-1)$$

(ii) 由单位函数响应的形式

$$h(n) = 14\delta(n) + (2^{n-1} + 12 \times 5^{n-1})u(n-1)$$

可知该系统的转移算子为:

$$H(S) = 14 + \frac{1}{S-2} + \frac{12}{S-5} = \frac{14S^2 - 85S + 111}{S^2 - 7S + 10}$$

故系统对应差分方程为:

$$y(n+2) - 7y(n+1) + 10y(n) = 14x(n+2) - 85x(n+1) + 111x(n)$$

（2）转化成零输入响应—等效初始条件法

例5 $y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$

解：特征根为三重根 $v=1$，所以齐次通解为：

$$h(n)=(C_1n^2+C_2n+C_3)(+1)^n$$

初始条件：

$$h(0)=1,\quad h(-1)=0,\quad h(-2)=0,\cdots$$

解得 $C_1=\frac{1}{2}\quad C_2=\frac{3}{2}\quad C_3=1$

$$\boxed{h(n)=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)u(n)}$$

3、根据单位函数响应分析系统的因果性和稳定性

- 因果性：有输入才有输出。
- 稳定性：输入有界则输出必定有界。

<table>
<tr><td rowspan="2">因果</td><td rowspan="2" colspan="2">$h(t)=0,\quad t<0$</td><td>$h(n)=0,\quad n<0$</td></tr>
<tr><td>激励最高序号不大于
响应最高序号</td></tr>
<tr><td rowspan="3">稳定</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|<\infty$</td><td>$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">因果系统</td><td>$\int_{0}^{\infty}|h(t)|<\infty$</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$</td></tr>
<tr><td>系统函数H(s)的所有极点全部位于s平面的左半开平面</td><td>?</td></tr>
</table>

例6 已知某系统的单位函数响应为$h(n)=a^n u(n)$，

问：它是否是因果系统？是否是稳定系统？

解：$n<0$时：$h(n)=0$ 是因果系统

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|a|}, & |a|<1\\ \text{不收敛}, & |a|>1\end{cases}$$

稳定

不稳定

二、卷积和

1、定义

2、计算

3、性质

4、零状态响应

1. 卷积和定义

两个连续时间信号$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分定义如下：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

类似地， 我们定义序列$f_1(k)$和$f_2(k)$的卷积和为：

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)\triangleq\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$$

如果$f_1(k)$为因果序列，由于$k<0$时，$f_1(k)=0$，故

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$$

如果$f_2(k)$为因果序列，而$f_1(k)$不受限制，那么当$(k\text{-i})<0$，即$i>k$时，$f_2(k\text{-i})=0$, 因而

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f_1(i)f_2(k-i)$$

如果$f_1(k)$和$f_2(k)$均为因果序列，则有

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{k}f_1(i)f_2(k-i)$$

常用序列的卷积和公式

序号	$f_1(k),\ k\geq 0$	$f_2(k),\ k\geq 0$	$f_1(k)*f_2(k),\ k\geq 0$
1	$f(k)$	$\delta(k)$	$f(k)$
2	$f(k)$	$\varepsilon(k)$	$\sum_{i=0}^{k} f(i)$
3	$\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$	$k+1$
4	a^k	$\varepsilon(k)$	$\dfrac{1-a^{k+1}}{1-a},\quad a\neq 1$
5	a_1^k	a_2^k	$\dfrac{a_1^{k+1}-a_2^{k+1}}{a_1-a_2},\quad a_1\neq a_2$
6	a^k	a^k	$(k+1)a^k$
7	k	k	$\dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$
8	$e^{\lambda k}$	$\varepsilon(k)$	$\dfrac{1-e^{\lambda(k+1)}}{1-e^{\lambda}}$
9	$e^{\lambda_1 k}$	$e^{\lambda_2 k}$	$\dfrac{e^{\lambda_1(k+1)}-e^{\lambda_2(k+1)}}{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}},\quad \lambda_1\neq\lambda_2$
10	$e^{\lambda k}$	$e^{\lambda k}$	$(k+1)e^{\lambda k}$
11	$a_1^k\cos(\Omega_0 k+\theta)$	a_2^k	$\dfrac{a_1^{k+1}\cos[\Omega_0(k+1)+\theta-\varphi]-a_2^{k+1}\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\Omega_0}}$ $\varphi=\arctan\left(\dfrac{a_1\sin\Omega_0}{a_1\cos\Omega_0-a_2}\right)$

2. 卷积和的计算

- 按公式计算　　　√
- 图解法　　　　　√
- 对位相乘求和法　√
- 利用卷积的性质求卷积

(1) 按公式计算

例7 设 $f_1(k)=e^{-k}\varepsilon(k)$，$f_2(k)=\varepsilon(k)$ ，求 $f_1(k)*f_2(k)$。

解：由卷积和定义式得

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{-i}\varepsilon(i)\varepsilon(k-i)$$

当$k\geq 0$时：

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{k}e^{-i}=\frac{1-(e^{-1})^{k+1}}{1-e^{-1}}=\frac{1-e^{-(k+1)}}{1-e^{-1}}$$

或记成

$$f_1(k)*f_2(k)=\left(\frac{1-e^{-(k+1)}}{1-e^{-1}}\right)\varepsilon(k)$$

（2）图解法

例8　已知离散信号

$$f_1(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 3 & k=1\\ 2 & k=2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_2(k)=\begin{cases}4-k & k=0,1,2,3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求卷积和 $f_1(k)*f_2(k)$。

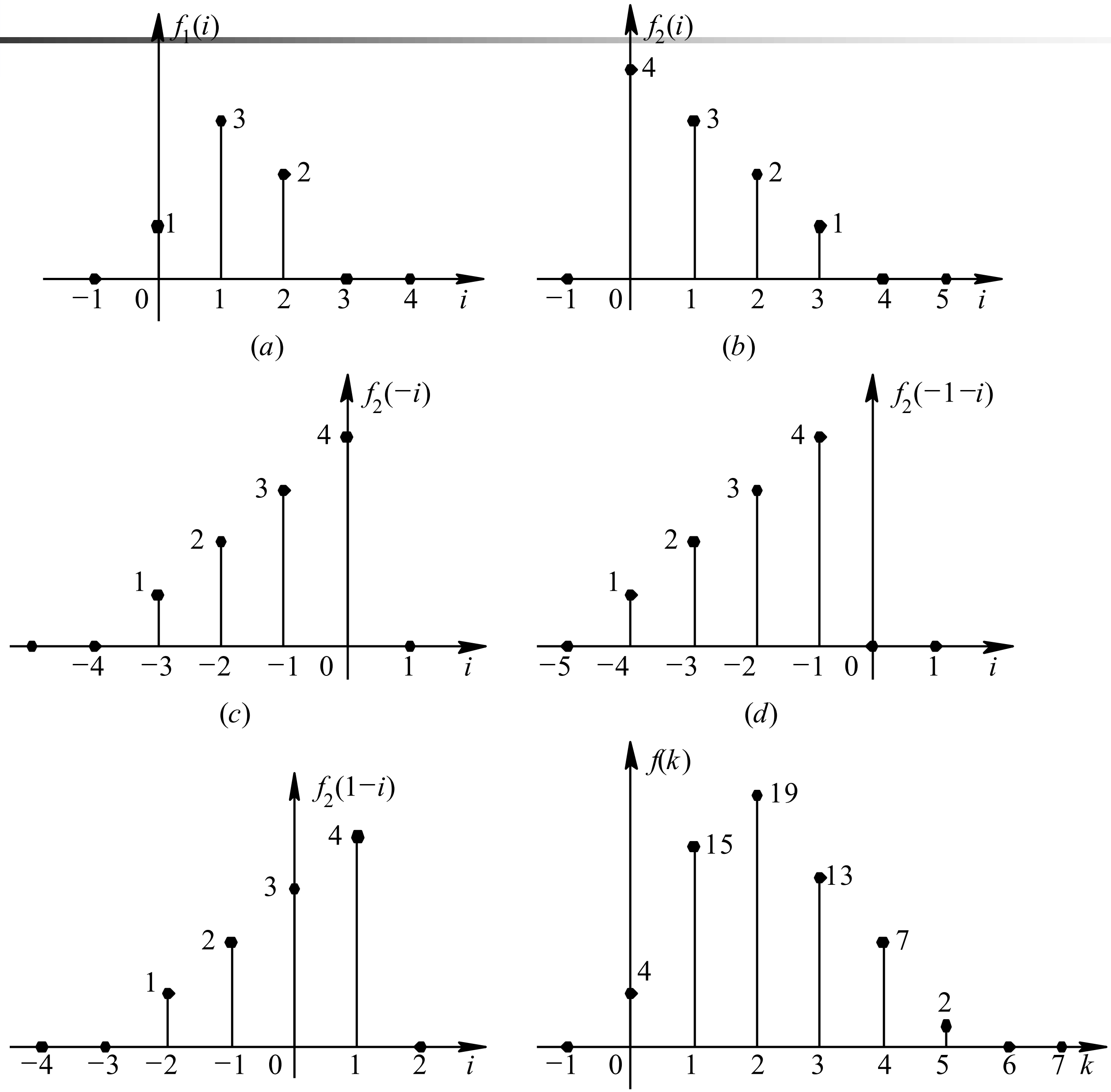
解： $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$

第一步，画出$f_1(i)$、$f_2(i)$图形。

第二步，将$f_2(i)$图形以纵坐标为轴翻转，得到$f_2(-i)$图形。

第三步，将$f_2(-i)$图形沿i轴左移($k<0$)或右移($k>0$)$|k|$个时间单位，得到$f_2(k-i)$ 图形。

第四步，对任一给定值k，进行相乘、求和运算，得到序号为k的卷 积 和序列值$f(k)$。若令k由$-\infty$至∞变化，$f_2(k-i)$图形将从$-\infty$处开始沿i轴自左向右移动，由计算求得卷积和序列$f(k)$。



(e) (f)

卷积和计算图解

$k<0$ 时，由于乘积项 $f_1(i)f_2(k-i)$ 均为零，故 $f(k)=0$。

$k=0$ 时，$f(0)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i)=\sum_{i=0}^{0} f_1(i)f_2(-i)=f_1(0)f_2(0)=1\times4=4$。

$k=1$ 时，$f(1)=\sum_{i=0}^{1} f_1(i)f_2(1-i)=f_1(0)f_2(1)+f_1(1)f_2(0)=3+12=15$。

$$k=2\text{ 时，}f(2)=\sum_{i=0}^{2} f_1(i)f_2(2-i)=f_1(0)f_2(2)+f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)$$
$$=2+9+8=19。$$

同理可得 $f(3)=13$，$f(4)=7$，$f(5)=2$，以及 $k>5$ 时 $f(k)=0$。

于是，其卷积和为

$$f(k)=\{\cdots 0\ \ 4\ \ 15\ \ 19\ \ 13\ \ 7\ \ 2\ \ 0\}$$

$$\uparrow$$

$$k=0$$

（3）对位相乘求和法

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$$

$$=\ldots+f_1(-1)\cdot f_2(k+1)+f_1(0)\cdot f_2(k)+f_1(1)\cdot f_2(k-1)$$

$$+f_1(2)\cdot f_2(k-2)+\ldots f_1(i)\cdot f_2(k-i)+\ldots$$

***f*(*k*)=所有两序列序号之和为*k*的那些样本乘积之和**

例如

$$f(2)=\ldots+f_1(-1)\cdot f_2(3)+f_1(0)\cdot f_2(2)+f_1(1)\cdot f_2(1)+\ldots$$

求 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$ ，其中

$$f_1(k)=\{f_1(1), f_1(2), f_1(3)\} \quad f_2(k)=\{f_2(0), f_2(1)\}$$

		$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$
$\times$			$f_2(0)$	$f_2(1)$
		$f_1(1)f_2(1)$	$f_1(2)f_2(1)$	$f_1(3)f_2(1)$
$+$	$f_1(1)f_2(0)$	$f_1(2)f_2(0)$	$f_1(3)f_2(0)$	
	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

对位相乘求和法

两个有限长序列的卷积和计算，可采用上述对位相乘求和法。 把两个序列排成两行，按普通乘法运算进行相乘，但中间结果不进位，最后将位于同一列的中间结果相加，就得到卷积和序列。

$$
\begin{array}{rcccccc}
f_1(0)\rightarrow & & & 4 & \boxed{3} & 2 & 1 \\
\times f_2(0)\rightarrow & & & & 1 & 3 & \boxed{2} \\
\hline
 & & & 8 & \boxed{6} & 4 & 2 \\
 & & 12 & 9 & 6 & 3 & \\
+ & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
\hline
f(0)\rightarrow & 4 & 15 & 19 & \boxed{13} & 7 & 2
\end{array}
$$

$$
f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\{\ \underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{4}\quad 15\quad 19\quad 13\quad 7\quad 2\ \}
$$

3. 卷积和的性质

性质1 离散信号的卷积和运算服从交换律、结合律和分配律，即

$$f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$$

$$f_1(k)*[f_2(k)*f_3(k)]=[f_1(k)*f_2(k)]*f_3(k)$$

$$f_1(k)*[f_2(k)+f_3(k)]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k)$$

性质2 任一序列$f(k)$与单位脉冲序列$\delta(k)$的卷积和等于序列$f(k)$本身，即

$$f(k)*\delta(k)=\delta(k)*f(k)=f(k)$$

性质3 若 $f_1(k)*f_2(k)=f(k)$，则

$$f_1(k)*f_2(k-k_1)=f_1(k-k_1)*f_2(k)=f(k-k_1)$$

$$f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f_1(k-k_2)*f_2(k-k_1)=f(k-k_1-k_2)$$

式中k_1，k_2均为整数。

4. 零状态响应

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$=e(t)*\delta(t)$$

$$e(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}e(i)\delta(k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}e(i)\delta(k-i)$$

$$=e(k)*\delta(k)$$

$$r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=e(t)*h(t)$$

$$y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}e(i)h(k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}e(i)h(k-i)$$

$$=e(k)*h(k)$$

练习：计算下列卷积和

$$(1)\quad \varepsilon(k)*\varepsilon(k)$$

$$(2)\quad \varepsilon(k-3)*\varepsilon(k-4)$$

$$(3)\quad a^k\varepsilon(k)*\delta(k)$$

$$(4)\quad a^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)\quad (a\neq 1)$$

$$(5)\quad a^k\varepsilon(k)*a^k\varepsilon(k)$$

答案：(1) $\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\varepsilon(i)\varepsilon(k-i)$

$$=(\sum_{i=0}^{k}1)\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$$

(2) $\varepsilon(k-3)*\varepsilon(k-4)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\varepsilon(i-3)\varepsilon(k-i-4)$

$$=(\sum_{i=3}^{k-4}1)\varepsilon(k-7)=(k-6)\varepsilon(k-7)$$

(3) $a^k\varepsilon(k)$

(4) $\dfrac{1-a^{k+1}}{1-a}\varepsilon(k)$ (5) $(k+1)a^k\varepsilon(k)$

例9（例题7-10）一离散时间系统的转移算子为：

$$H(S)=\frac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}$$

已知系统的初始条件为 $y(0)=9, y(1)=13.9$ ，当系统输入为 $\varepsilon(k)$时，求系统的响应。

分析：此题的关键是对给出的初始条件的理解。若这里的初始条件只是指零输入响应在0，1时刻的值，则可以依次求出零输入响应，零状态响应，从而得到全响应。

但是这里的初始条件是全响应的初始条件，其中还包括激励所产生的初始响应。因此无法先求出零输入响应。

此题需先求出零状态响应，进而算出零状态响应的初值，再从全响应的初始条件中减去此初值，得到零输入响应的初始条件，由此求出零输入响应。

小结

- 线性差分方程的解法
- 零输入响应
- 单位函数响应
- 卷积和
- 零状态响应

课外作业

阅读：7.4-7.6；预习：8.1-8.3

作业：7.27，7.29