信号与系统

Lecture 2

第二章 连续系统的时域分析

§2.1 引言—经典解法

§2.2 系统方程的算子表示法

§2.4 奇异函数

§2.3 系统的零输入响应

§2.5 信号的时域分解

第二章 连续时间系统的时域分析

基本要求:
- 了解微分方程的建立与经典求解方法; （1）
- 掌握单位冲激函数、单位阶跃函数; （1）
- 掌握线性时不变系统的零输入响应求解; （1）
- 掌握单位冲激响应与单位阶跃响应的定义、求解; （2）
- 掌握卷积的定义、性质、计算; （2）
- 掌握用卷积求线性时不变系统的零状态响应。 （2）

重点与难点:
- 单位冲激函数的性质;
- 单位冲激响应定义、求解;
- 卷积定义、计算、性质;
- 线性时不变系统响应的求解。

复习

- 信号与函数
- 系统与方程

  分类：线性、时不变、因果性判断

本讲内容

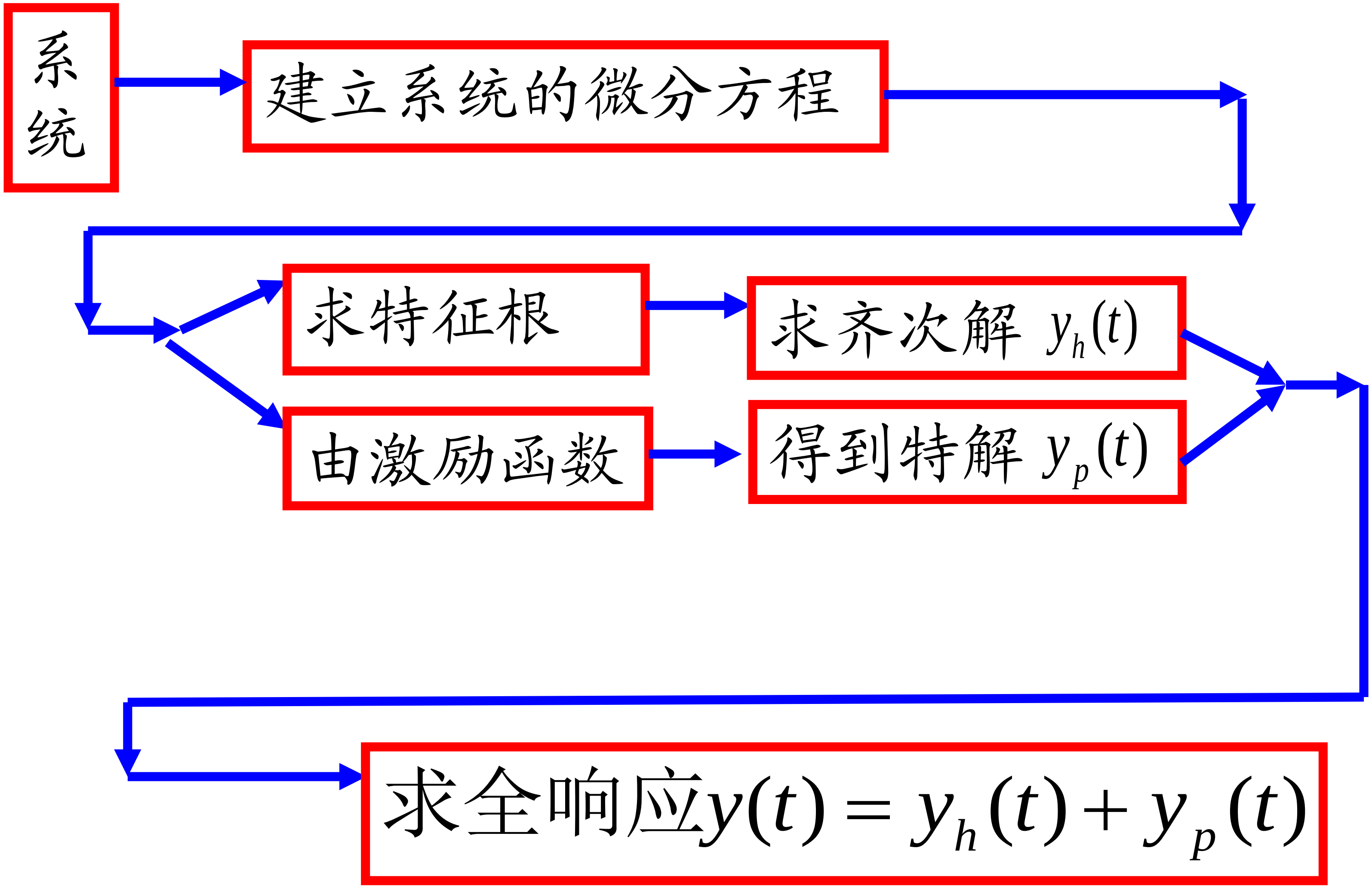
- 连续时间LTI系统响应的经典解法
- 系统方程的算子表示
- 奇异函数
- 系统的零输入响应求解
- 信号的分解

§2.1 引言

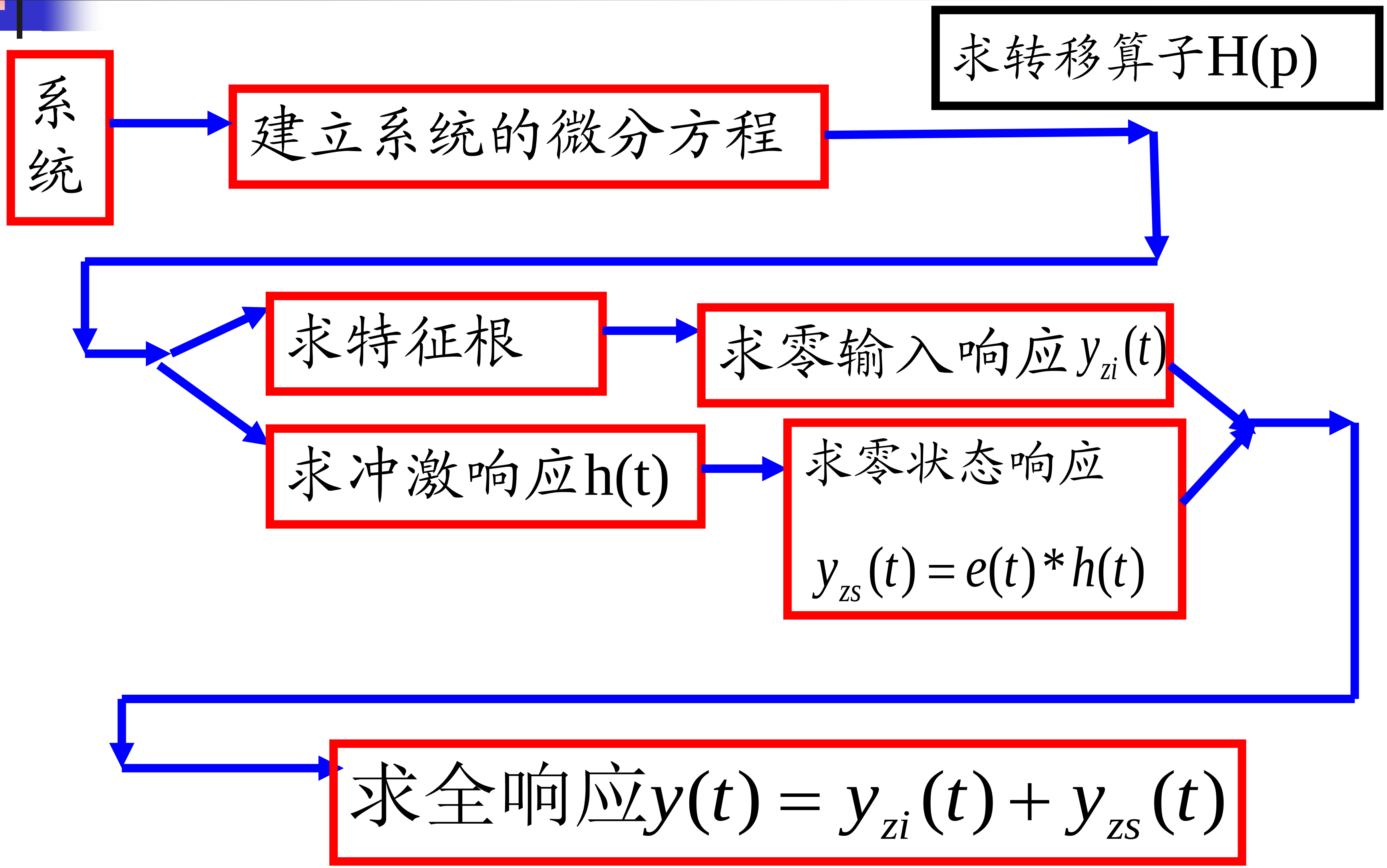
本章介绍连续时间系统的时域分析方法，包含本课程特定的几个信号以及连续系统的时域分析。

线性连续时间系统常常用常系数微分方程来表示，因此连续时间系统的时域分析就是从微分方程求方程的解，即给定微分方程、激励信号和初始条件，求系统的响应。

在系统的分析中，常以基本电路系统为案例进行分析。



经典法


系统
建立系统的微分方程
求转移算子H(p)
求特征根
求零输入响应$y_{zi}(t)$
求冲激响应h(t)
求零状态响应
$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)$
求全响应$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

卷积法

1. 微分方程的建立

描述线性时不变连续系统的数学模型是线性常系数微分方程。对于电系统，列写数学模型的基本依据有如下两方面。

(1) 元件约束，与元件的连接方式无关

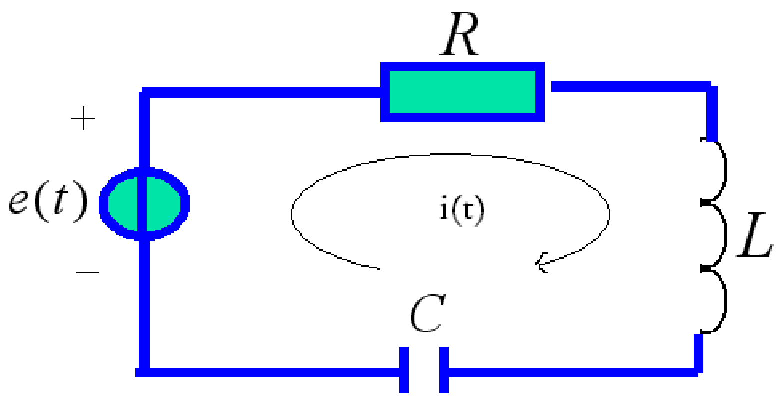
电阻: $$R=\frac{u(t)}{i(t)}$$

电容: $$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt},u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

电感: $$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt},i_L=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)d\tau$$

互感(同、异名端连接)、理想变压器等原、副边电压、电流关系等。

(2) 连接方式约束：kvl和kil，与元件的性质无关.



$$u_L(t)+u_R(t)+u_C(t)=e(t)$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$$

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

常系数微分方程的一般形式

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t)$$

$$= b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

齐次方程的特征方程为

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

特征方程的解称为特征根（特征频率、固有频率）。

2. 微分方程的经典解法

将响应分为齐次解和非齐次特解两部分：

1）齐次通解：由特征根得到的系统的自然响应（或自由响应）；

2）特解：由激励项得到的系统的受迫响应；

3）带入初始条件，确定齐次通解中的待定系数。

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

齐次解 $y_h(t)$ 的模式由齐次方程的特征根确定。

特　解 $y_p(t)$ 由激励信号的形式确定。

→ 自然响应/自由响应

→ 受迫响应/强迫响应

齐次通解$y_h(t)$的形式

(1) 特征根是不等实根 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + K_n e^{\lambda_n t}$$

(2) 特征根是n重实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$

$$y_h(t) = (K_1 + K_2 t + \cdots + K_n t^{n-1}) e^{\lambda t}$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i, \quad i = n/2$

$$y_h(t) = e^{\sigma_1 t}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) + \cdots + e^{\sigma_i t}(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

* 齐次通解中的待定系数由全响应 + 系统的初始条件确定。

常用激励信号对应的特解

激励信号	特解
K	A
Kt	$A+Bt$
Ke^{-at}（特征根 $s\neq -a$）	Ae^{-at}
Ke^{-at}（特征根 $s=-a$）	Ate^{-at}
$K\sin\omega_0 t$ 或 $K\cos\omega_0 t$	$A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$
$Ke^{-at}\sin\omega_0 t$ 或 $Ke^{-at}\cos\omega_0 t$	$Ae^{-at}\sin\omega_0 t+Be^{-at}\cos\omega_0 t$

例1 已知某二阶线性时不变连续时间系统的方程为

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=e(t),\ t>0$$

初始条件 $y(0)=1, y'(0)=2$，激励信号 $e(t)=e^{-t}$，求系统的全响应。

解：1) 求齐次方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=0$ 的解。

特征方程为 $\lambda^2+6\lambda+8=0$

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$

齐次通解 $y_h(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-4t}$

2） 求非齐次方程的特解。

由激励f (t) 的形式，可设方程的特解为 $y_p(t)=Ce^{-t}$

将特解代入原微分方程即可求得常数C=1/3.

3） 求方程的全解。

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}$$

代入初值，得

$$y(0)=K_1+K_2+\frac{1}{3}=1 \qquad y'(0)=-2K_1-4K_2-\frac{1}{3}=2$$

解得 $K_1=\frac{5}{2}, K_2=-\frac{11}{6}$，因此系统的全响应为

$$y(t)=\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{11}{6}e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}, \quad t\geq 0$$

微分方程的经典解法小结:

(1) 建立系统的数学模型（常微分方程）;
(2) 由特征根求齐次方程的通解（含待定系数）;
(3) 根据激励的形式求特解;
(4) 得到全响应的表达式;
(5) 代入初始条件求齐次通解中的待定系数，得到全响应。

- 若激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励发生变化，须重新求解。
- 初始条件发生变化，须重新求解。
- 是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

	齐次解	特解
系统（特征根）	√	√
初始状态	√	
激励	√	√

一种解决方法：从响应的物理含义着手

另一种解决方法：在变换域中进行处理

§2.2 系统方程的算子表示法

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) =$$

$$b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

令$p = \frac{d}{dt}$，$p^i = \frac{d^i}{dt^i}$，

则原方程可写成如下的（算子）形式:

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)r(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0)e(t)$$

记为 $D(p)r(t) = N(p)e(t)$ **或** $r(t) = \frac{N(p)}{D(p)}e(t)$

$$r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

记 $H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}$

称为该系统的转移算子。

- 由微分方程的算子形式可以很方便地得到方程的解;
- 算子形式的微分方程与其拉普拉斯变换式形式类似，转移算子也与系统函数的形式类似。

练习：写出下列微分方程的转移算子。

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=2\frac{d^2}{dt^2}e(t)+9\frac{d}{dt}e(t)+11e(t)$$

性质1 以p的正幂多项式出现的运算式，在形式上可以像代数多项式那样进行展开和因式分解。例如：

$$(p+2)(p+3)y(t)=(p^2+5p+6)y(t)$$

$$(p^2-4)f(t)=(p+2)(p-2)f(t)$$

性质2 设$A(p)$和$B(p)$是p的正幂多项式， 则

$$A(p)B(p)f(t)=B(p)A(p)f(t)$$

性质3　微分算子方程等号两边p的公因式不能随便消去。

例如，由下面方程

$$py(t) = pf(t)$$

不能随意消去公因子p而得到$y(t)=f(t)$的结果。因为$y(t)$与$f(t)$之间可以相差一个常数c。 正确的结果应写为

$$y(t) = f(t) + c$$

也不能由方程 $$(p+a)y(t) = (p+a)f(t)$$

通过直接消去方程两边的公因式$(p+a)$得到$y(t)=f(t)$， 因为$y(t)$与$f(t)$之间可以相差ce^{-at}，其正确的关系是

$$y(t) = f(t) + ce^{-at}$$

性质4

$$D(p)\cdot\frac{A(p)}{D(p)B(p)}f(t)=\frac{A(p)}{B(p)}f(t)$$

但是

$$\frac{A(p)}{B(p)D(p)}\cdot D(p)f(t)\neq\frac{A(p)}{B(p)}f(t)$$

例如，$p\cdot\frac{1}{p}f(t)=f(t)$，但是$\frac{1}{p}\cdot pf(t)\neq f(t)$。这是因为

$$p\cdot\frac{1}{p}f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)$$

而

$$\frac{1}{p}\cdot pf(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}f(\tau)\right]\mathrm{d}\tau=f(t)-f(-\infty)\neq f(t)$$

§2.4 奇异函数

本节介绍本课程特定的几个信号：

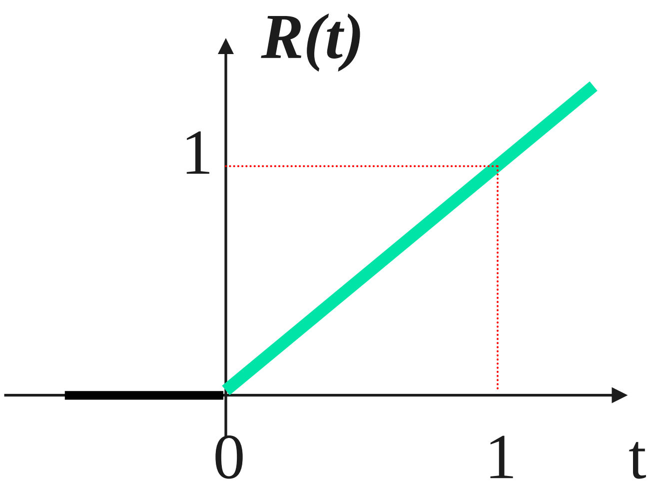
1. 斜变信号
2. 单位阶跃信号
3. 单位冲激信号
4. 冲激偶信号

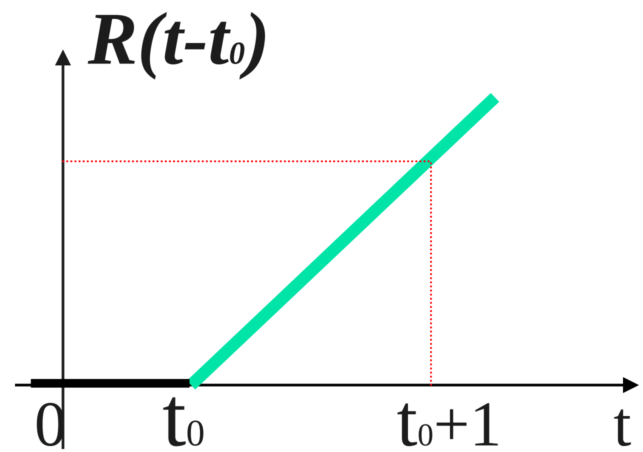
这些信号（函数）或其各阶导数有一个或多个间断点，这样的函数统称为奇异函数。

单位斜变信号

$$t \geq 0 \quad R(t) = t \qquad\qquad t \geq t_0 \quad R(t - t_0) = t - t_0$$

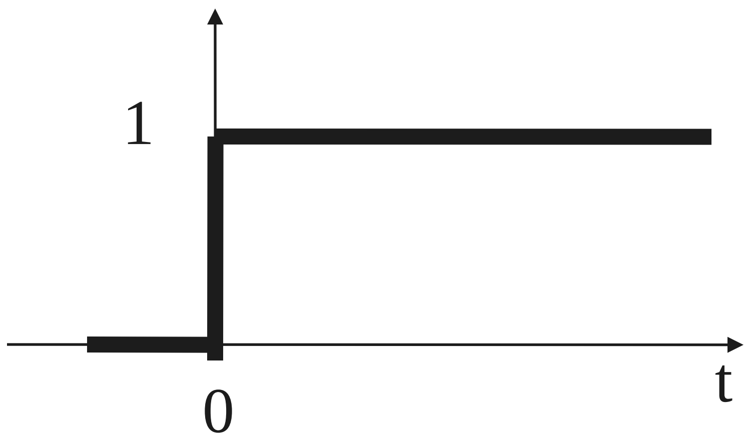
$$t < 0 \quad R(t) = 0 \qquad\qquad t < t_0 \quad R(t - t_0) = 0$$

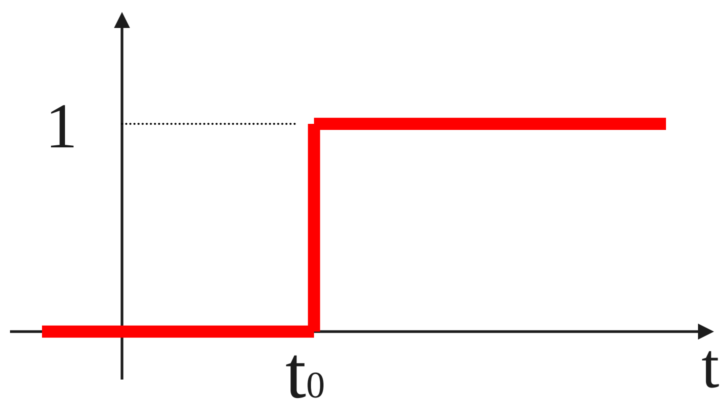




单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ / $u(t)$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}\qquad u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

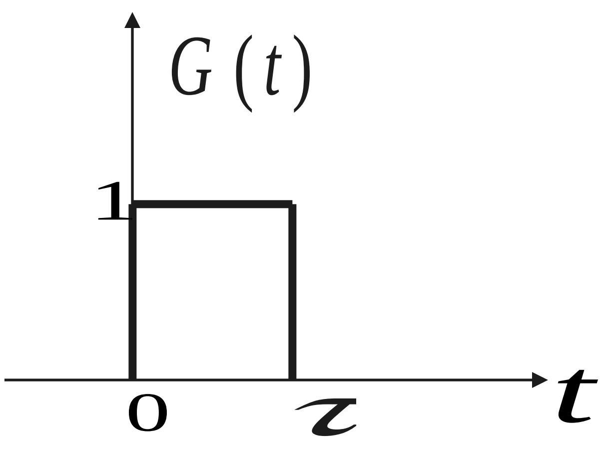


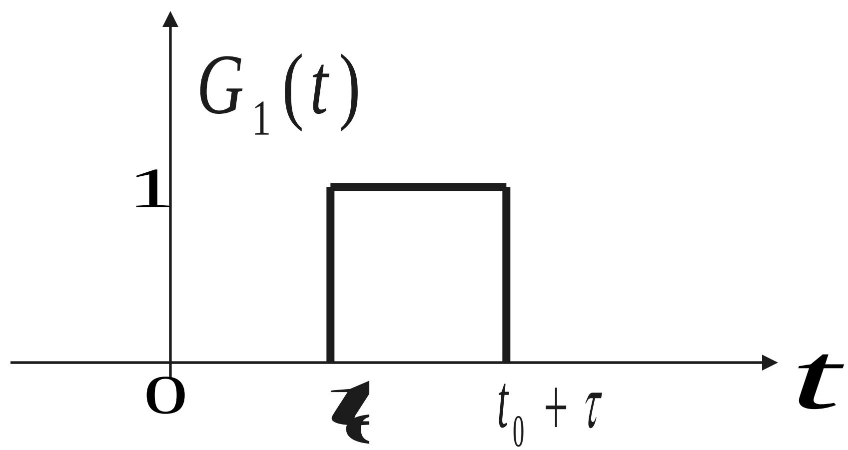


矩形脉冲（门函数）

$$G(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

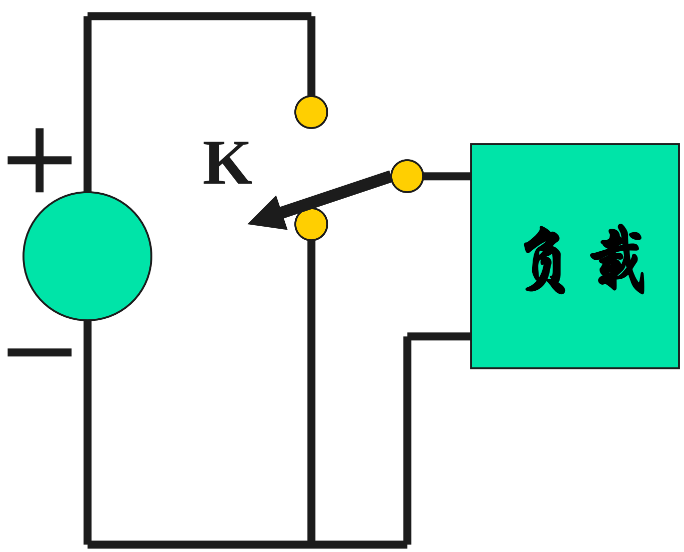
$$G_1(t) = u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)$$

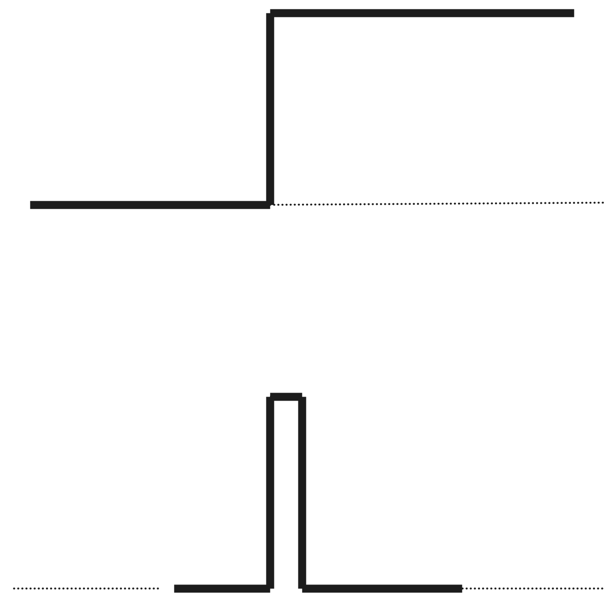




物理含义

(1) 在t=0的时刻接入单位直流电压 – 单位阶跃函数
(2) 突然接通又马上断开电源 – 矩形脉冲



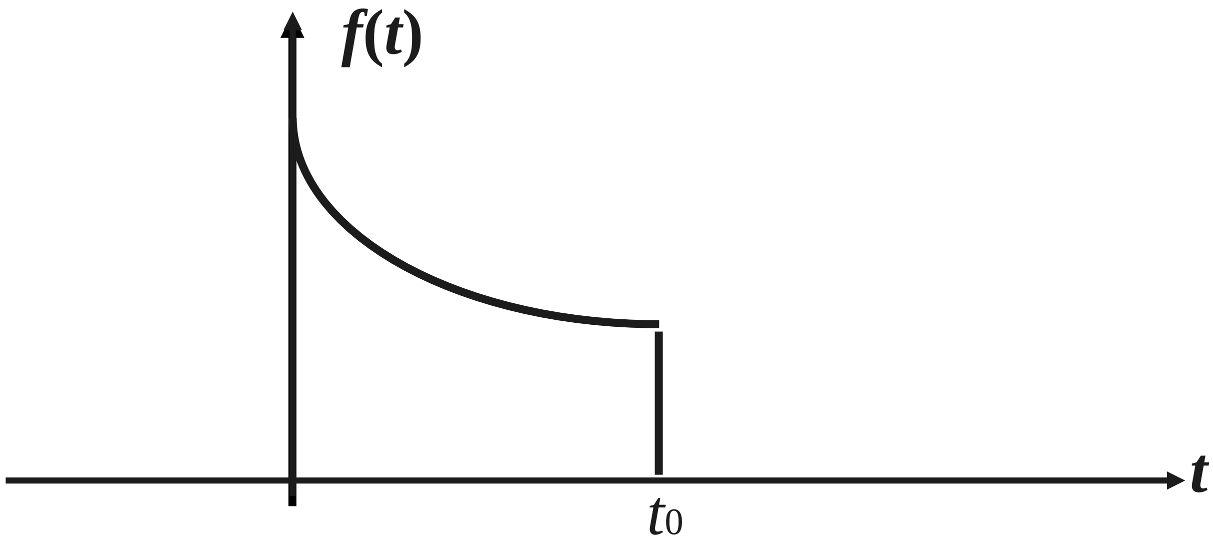


信号取单边或加窗

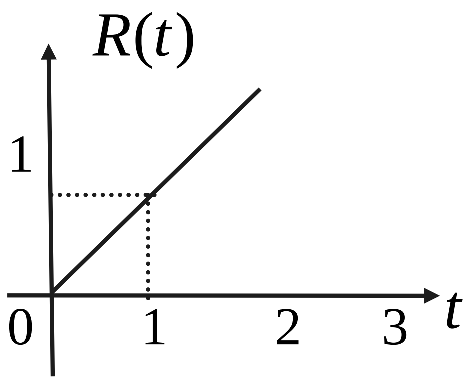
$$f(t)u(t)$$

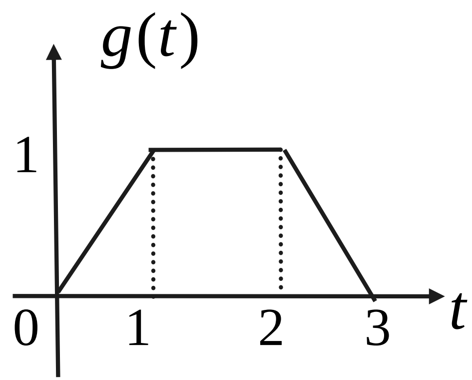
$$f(t)[u(t)-u(t-t_0)]$$

例： $f(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$



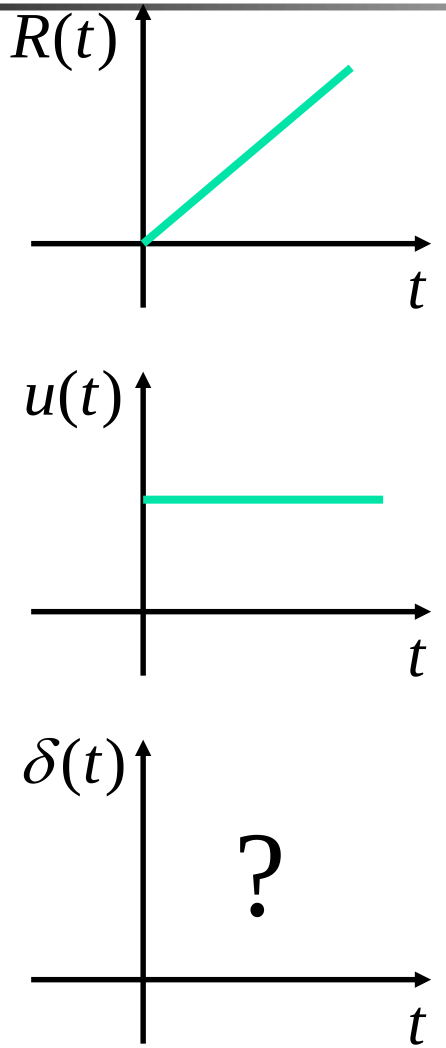
用阶跃信号表示其他信号





$$R(t) = tu(t)$$

$$g(t) = t[u(t) - u(t-1)] + [u(t-1) - u(t-2)] + (3-t)[u(t-2) - u(t-3)]$$



$R(t)$

$\downarrow$ 求导

$u(t)$

$\downarrow$ 求导

$\delta(t)$

单位冲激函数 $\delta(t)$

1. 定义：有多种定义方式

a. Dirac定义：

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

性质（抽样性）：

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

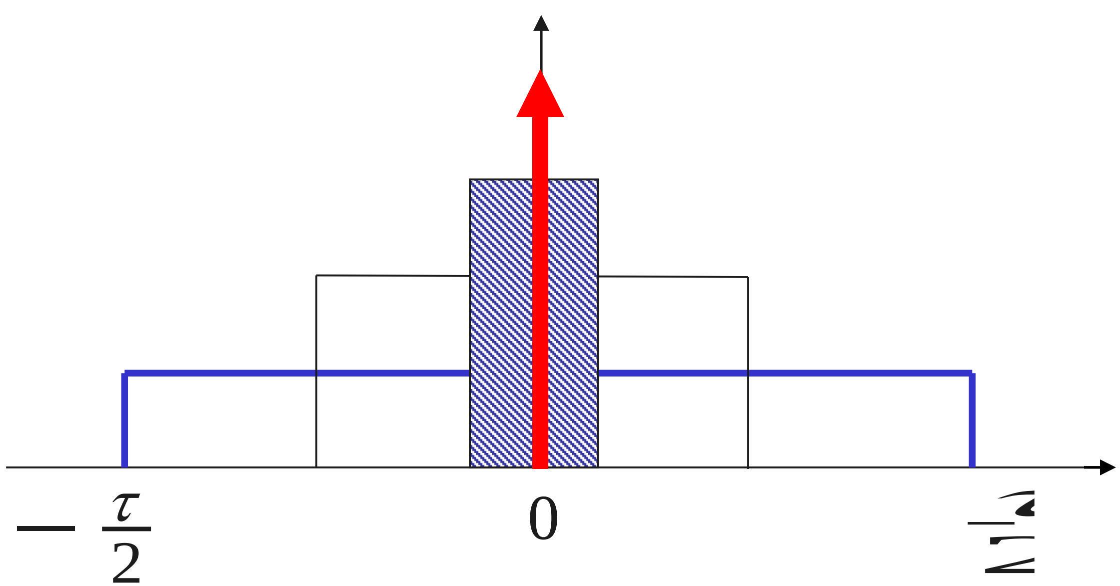
b. 利用冲激函数的抽样性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$ （若f (t) 在t=0连续）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$ （若f (t) 在t=t_0连续）

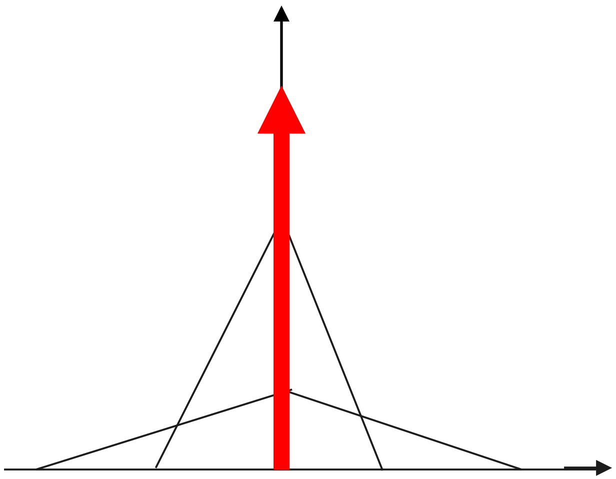
C.定义：宽为 τ 高为 的矩形脉冲，保持面积1不变，使宽度趋于0时的极限，就是单位冲激信号。即

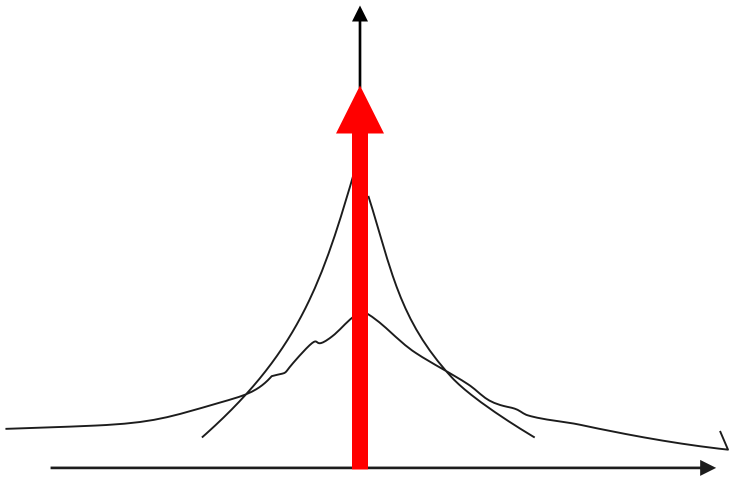
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$



其他函数演变的单位冲激函数

- 三角脉冲的极限
- 双边指数脉冲的极限





$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]\right\}$$

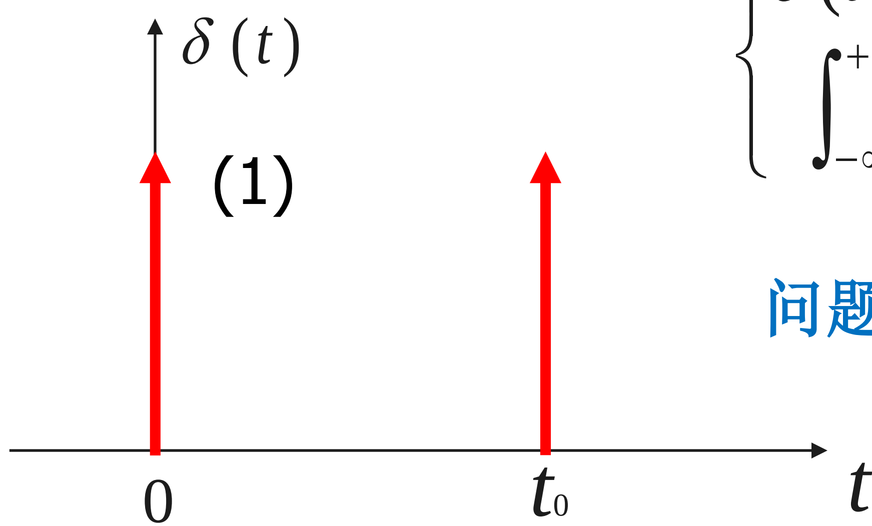
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right]$$

冲激信号图形与平移

如果矩形脉冲的面积不是1，而是A，则表示一个冲激强度为A倍单位值的δ函数。

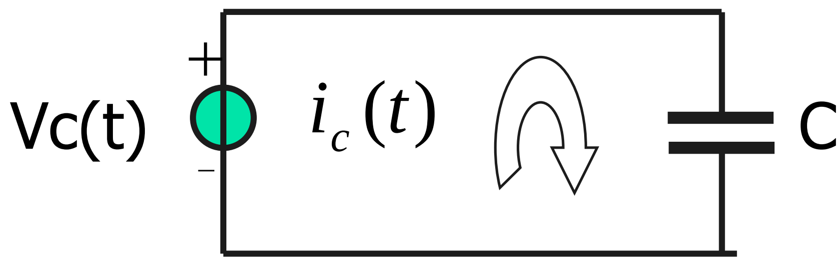
冲激函数用箭头表示，并将冲激强度注于箭头旁，如图。

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & t\neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \end{cases}$$



问题：平移后的取样特性？

2. 冲激函数的物理意义



- 由于冲激电流的出现，允许电容两端的电压跳变。
- 由于冲激电压的出现，允许电感电流跳变。
- 冲激函数可以看作是强度很大而作用时间很短的物理量的理想模型。

3. 冲激函数的性质

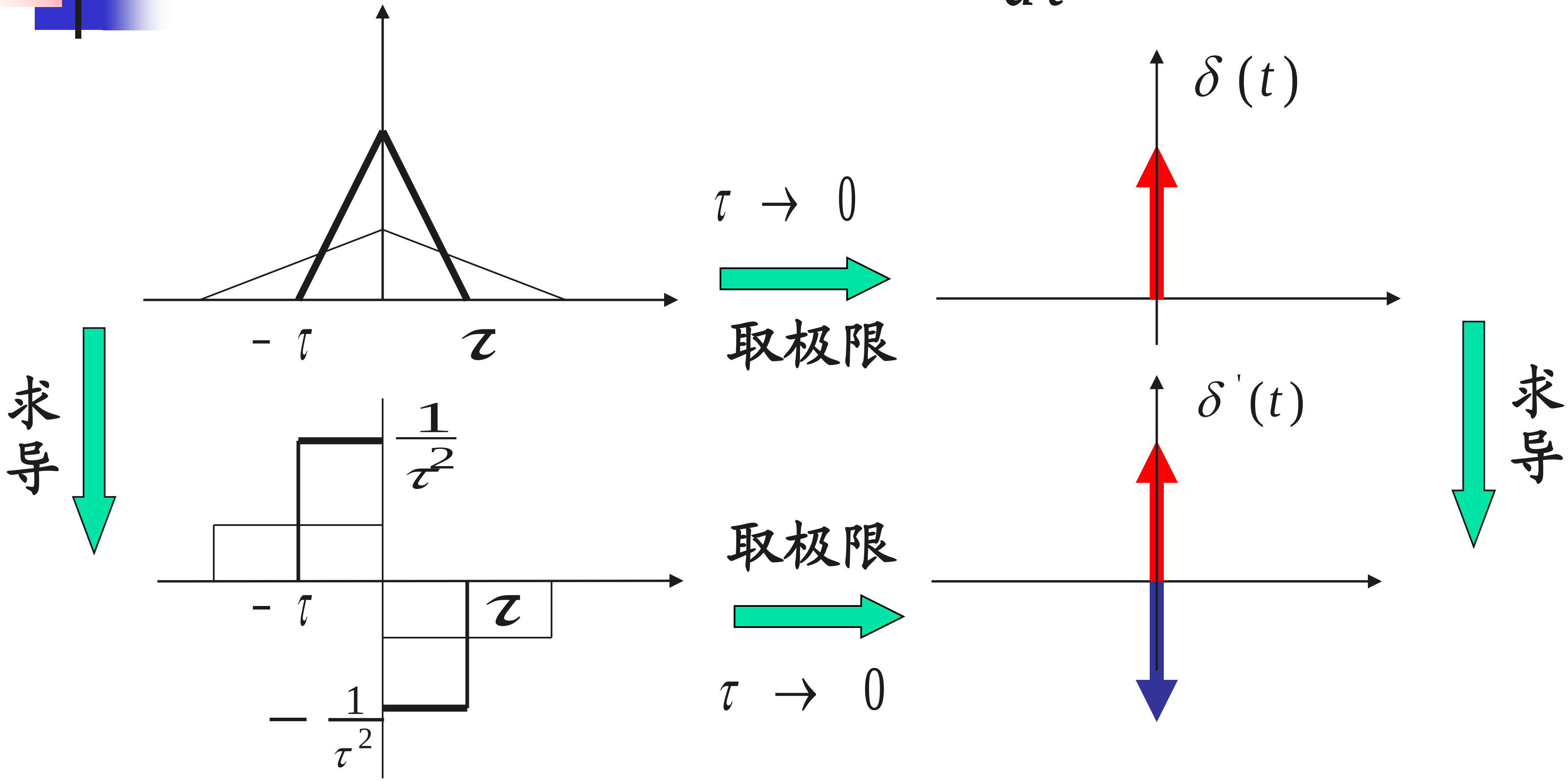
$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \qquad f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \delta(-t) = \delta(t) \qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

冲激偶信号 —— $\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$



冲激偶信号是这样一种函数：当t从负值趋于零时，它是一强度为无限大的正的冲激函数；当t从正值趋于零时，它是一强度为无限大的负的冲激函数。

冲激偶的性质

$$\int_{-\infty}^{t} \delta^{'}(t)dt = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{'}(t)dt = 0$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{'}(t)dt = -f^{'}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{'}(t-t_0)dt = -f^{'}(t_0)$$

$$\delta^{'}(-t) = -\delta^{'}(t)$$

函数名 特性	$\delta(t)$	$\delta'(t)$
1.引出	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$ $\delta(t)=0(t\neq 0)$	$\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$
2.奇偶	$\delta(-t)=\delta(t)$	$\delta'(-t)=-\delta'(t)$
3.抽样	$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$	$f(t)\delta'(t)=$ $f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$
4.积分	$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$	$\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau=\delta(t)$

§2.3 系统的零输入响应

响 应

回顾常系数微分方程求解

需要一个方程

系 统

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=2\frac{d^2}{dt^2}e(t)+9\frac{d}{dt}e(t)+11e(t)$$

需要若干初始条件

初始能量

$$r(0)=2,\quad r'(0)=1$$

需要输入函数的表达式

激 励

$$e(t)=2e^{-3t}$$

两个重要的概念

零输入响应和零状态响应:

a. 仅由初始时刻的储能引起的响应，记为$r_{zi}(t)$

b. 仅由激励信号所产生的响应，记为$r_{zs}(t)$

分解性: 能把由初始储能引起的响应和由激励引起的响应分离开来的系统的性质。

对于初始状态不为零的系统，如果它同时满足以下条件:

（1）分解性;
（2）零输入响应线性;
（3）零状态响应线性

也称其为线性系统。

常系数微分方程代表的系统是线性系统，且是LTI系统。

思考：零输入响应与经典解法中的齐次解有何关系？

求齐次解的步骤：

(1) 建立系统的数学模型（常微分方程）；
(2) 由特征方程求特征根;
(3) 由特征根得到齐次通解的形式（含待定系数）；
(4) 由激励得到特解;
(5) 得到全响应后代入初始条件，得到齐次通解中的待定系数。

求零输入响应的步骤：

(1) 建立系统的数学模型（常微分方程）；
(2) 由特征方程求特征根;
(3) 由特征根得到齐次通解的形式（含待定系数）；
(4) 代入初始条件，得到待定系数，从而得到零输入响应。

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

特征方程

若n阶常系数微分方程的特征根为n个单根 λ_i，则零输入响应具有如下形式（与齐次通解形式相同）：

$$r_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$$

若特征根有重根，零输入响应的形式也与齐次通解形式相同。不同的是，零输入响应中的待定系数直接由初始条件求出。

例1 系统方程为

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{de(t)}{dt}, \quad t > 0$$

激励 $e(t) = 3e^{-2t}$, 初始条件为 $i(0) = 0, \quad i'(0) = 1$

求系统的零输入响应。

答案: $i(t) = te^{-t}, \quad t \geq 0$

思考:

初始条件为 $i(0) = 0, \quad i'(0) = 2$ 时的零输入响应=?

初始条件为 $i(0) = 0, \quad i'(0) = 0$ 时的零输入响应=?

§2.5 信号的时域分解

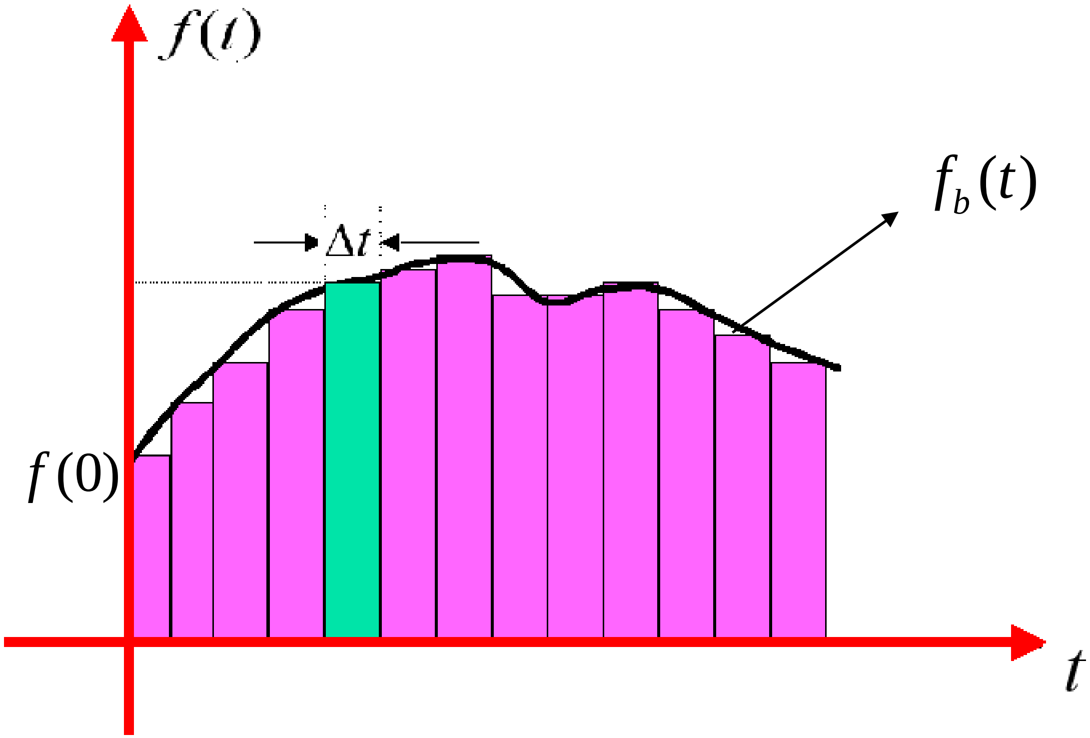
通过前面的学习，我们知道了

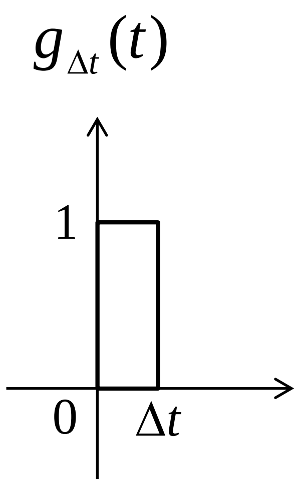
- 线性系统的全响应可以分解为零输入响应，零状态响应
- 零输入响应求解方法

问题：激励为任意信号时的零状态响应怎么求？

教材上介绍了3种分解方式:

- 脉冲信号表示为奇异函数之和
- 任何函数表示为阶跃函数的积分
- 任何函数表示为冲激函数的积分

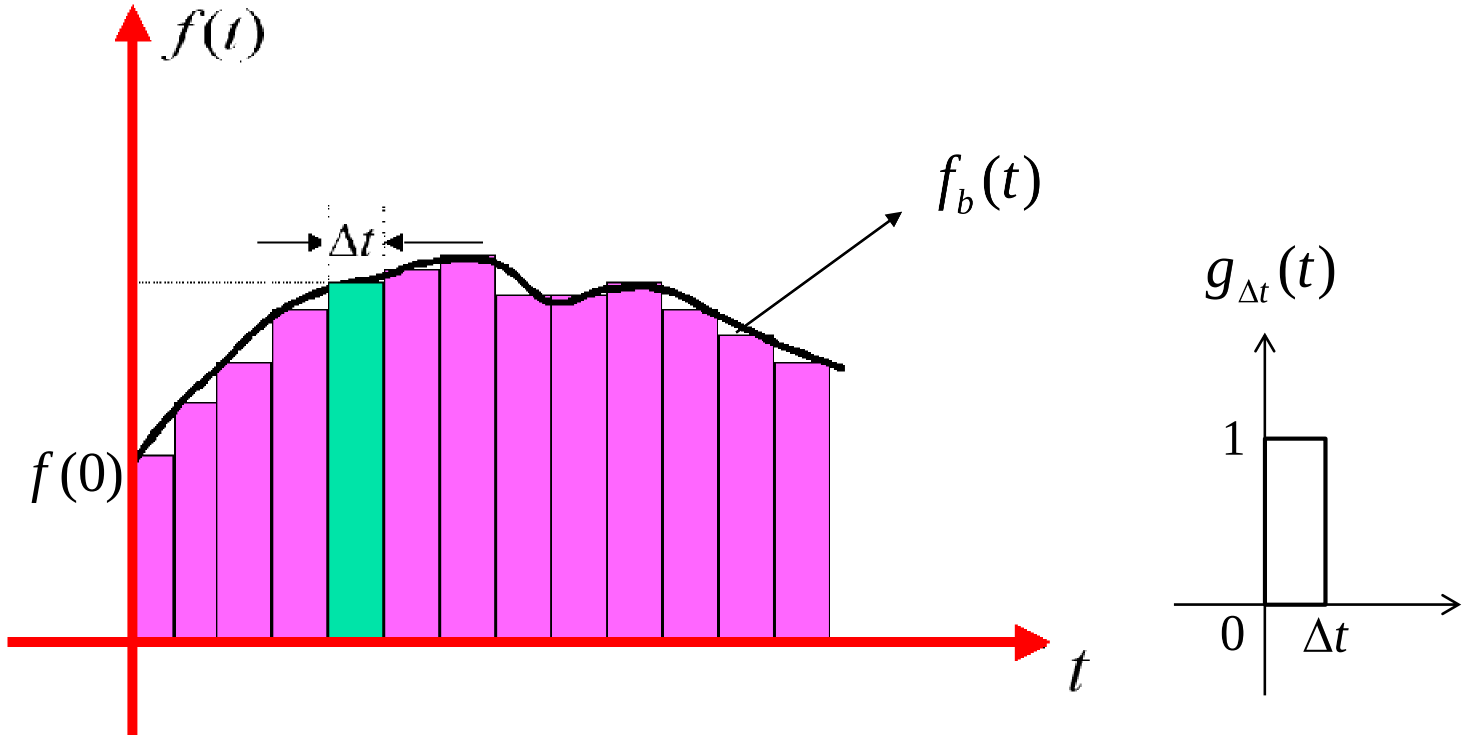




$$f_1(t) = f(0)g_{\Delta t}(t)$$

$$f_2(t) = f(\Delta t)g_{\Delta t}(t-\Delta t)$$

$$f_{k+1}(t) = f(k\Delta t)g_{\Delta t}(t-k\Delta t)$$



$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) g_{\Delta t}(t - k\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) \frac{g_{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\Delta t} \Delta t$$

$$\Delta t \to d\tau, \quad k\Delta t \to \tau$$

$$= \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

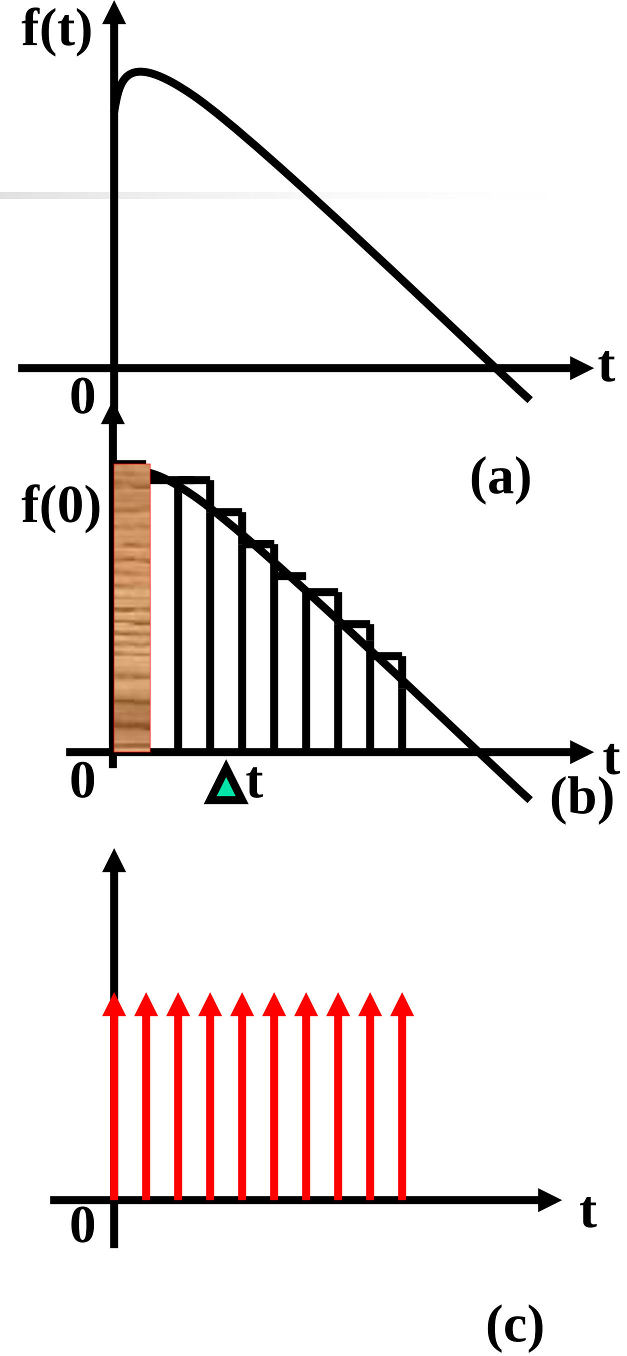
回顾:

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) g_{\Delta t}(t - k\Delta t)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) \frac{g_{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\Delta t} \Delta t$$

令 $\Delta t \to d\tau, \quad k\Delta t \to \tau$

$$\boxed{f(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau}$$



结论：任何函数表示为冲激函数的积分

$$\boxed{f(t)=\int_{0}^{t} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{f(t)=\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

小结

- 常微分方程的建立与经典解法
  这些名词要掌握：特征方程，特征根，
  自由响应，受迫响应
- 常微分方程“换肤”：算子表示，转移算子
- 单位冲激函数，单位阶跃函数
- 零输入响应
- 信号的分解

课外作业

阅读：2.1-2.5　　　预习：2.6-2.9

作业：2.4（3），2.5(1)，2.7