



信号与系统

Lecture

连续时间系统的系统函数

极零图

系统函数与时域特性

系统函数与频域特性

稳定性



主要内容

- 系统函数与时域特性
 - 系统函数的极零图
 - 系统函数的零极点分布与系统时域响应的关系
- 系统函数与频域特性
 - 复数的向量表示
 - 由系统函数的零极点分布勾画频响特性曲线
- 系统的稳定性



一、系统函数的极零图

实际系统的系统函数都可表示为有理分式：

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

为了更直观地看出系统的特性，常常用不同的图示方法来表示系统函数。如：

► 极点零点图

1. $H(s)$ 的零点和极点

$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \text{ 其中 } H_0 = \frac{a_m}{b_n}$$

- a. 零点 (zero): 使 $H(s)=0$ 的 s 值, 令 $N(s)=0$ 求得。
- b. 极点 (pole): 使 $H(s)=$ 无穷大的 s 值, 令 $D(s)=0$ 求得。
- c. 当 $n>m$ 时, 无穷大处有一个 $(n-m)$ 阶零点:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_m s^m}{b_n s^n} = 0$$

当 $n < m$ 时, 无穷大处有一个 $(m-n)$ 阶极点:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_m s^m}{b_n s^n} = \infty$$

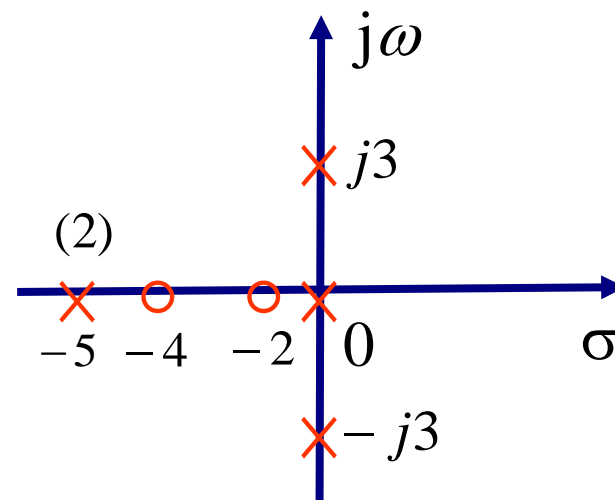
例如:
$$F(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s^2+9)(s+5)^2}$$

$$s = -2, s = -4,$$

$$s = 0, \pm j3, s = -5$$

2. 极-零图

系统函数一般为 s 的实有理函数, 其极点和零点的分布关于实轴对称。



极零图



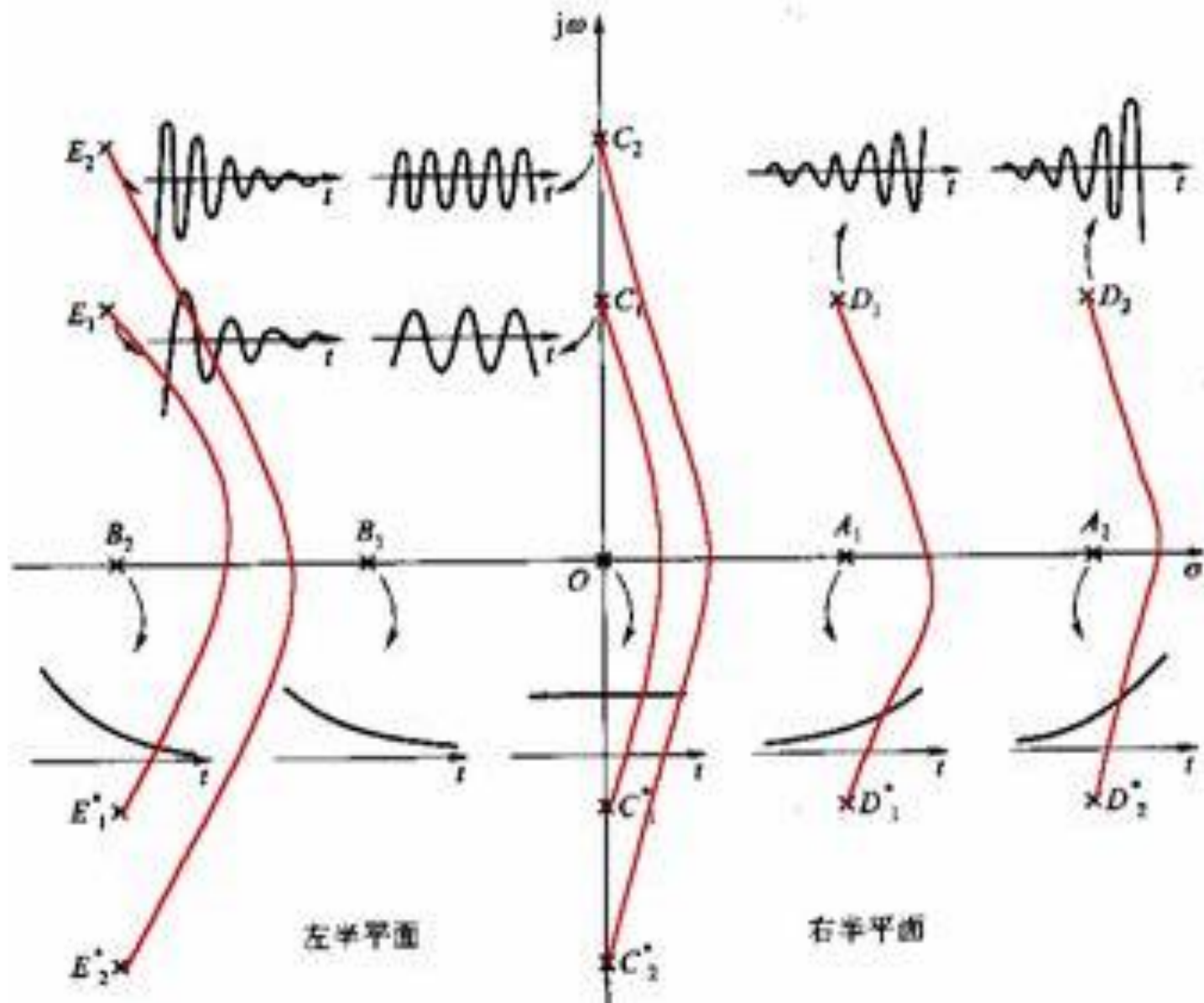
二、系统函数与时域特性

1. $H(s)$ 极点与单位冲激响应模式的关系

2. $H(s)$ 、 $E(s)$ 极点分布与响应的关系

3. $H(s)$ 零点对系统时域特性的影响

1. $H(s)$ 极点与单位冲激响应模式的关系





小结:

- $H(s)$ 在左半平面的极点 对应 $h(t)$ 中的暂态分量。
- $H(s)$ 在虚轴上的单极点 对应 $h(t)$ 中的稳态分量。
- $H(s)$ 在虚轴上二阶或更高阶极点及右半平面的极点 对应 $h(t)$ 中随时间的增长而增长的分量。

极点的分布只能说明 $h(t)$ 所具有的函数的模式，
而不能说明时间函数 $h(t)$ 的大小及相位。

2. $H(s)$ 、 $E(s)$ 极点分布与响应的关系

(1) 由经典的微分方程可知:

完全解 = 齐次解 + 特解



自由响应



强迫响应

(2) 由工作状态决定:

完全解 = 暂态响应 + 稳态响应

(3) 由因果关系决定:

完全解 = 零输入响应 + 零状态响应

自由响应与强迫响应

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{\prod_{l=1}^m (s - z_l)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^u (s - x_j)}{\prod_{i=1}^v (s - q_i)}$$

来自H(s)
的极点

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i} + \sum_{j=1}^v \frac{k_j}{s - q_j}$$

来自E(s)
的极点

自由响应

$$r(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^v k_j e^{q_j t}$$

强迫响应

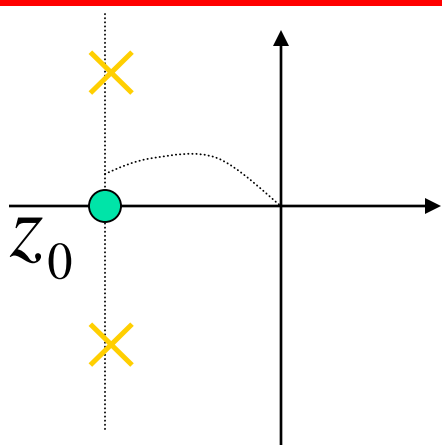


小结:

- $H(s)$ 的极点决定了自由响应时间函数的模式。
- $E(s)$ 的极点决定了强迫响应时间函数的模式。
- 自由响应与强迫响应的幅度和相位与 $H(s)$ 和 $E(s)$ 均有关。

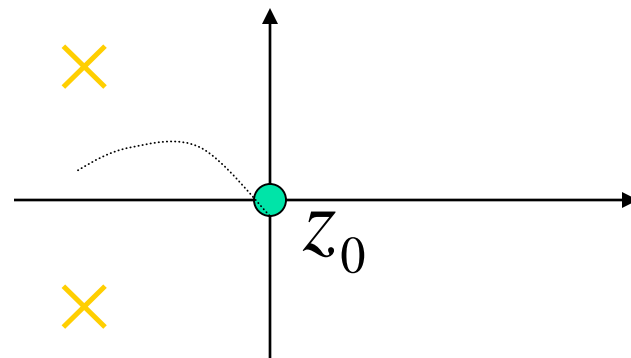
3. $H(s)$ 零点对系统时域特性的影响

$$H_1(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$



零点移动
到原点

$$H_2(s) = \frac{s}{(s + a)^2 + \omega^2}$$



$$h(t) = e^{-at} \cos \omega t$$

$$h(t) = e^{-at} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{\omega}\right)^2} \cos(\omega t - \varphi)$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{a}{\omega}\right)$$

结论：零点的分布只影响时域函数的幅度和相移，
不影响振荡频率

$$h(t) = e^{-at} \cos \omega t$$

幅度

$$h(t) = e^{-at} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{\omega}\right)^2} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{\omega}\right)$$

相移

三、系统函数的z-p点分布与频响特性

频响特性是指系统在正弦信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。根据 $H(s)$ 在 s 平面的零、极点分布情况可以绘制出频响特性曲线。

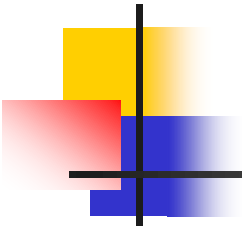
系统稳定时，令 $H(s)$ 中 $s = j\omega$ ，则得系统频响特性

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性

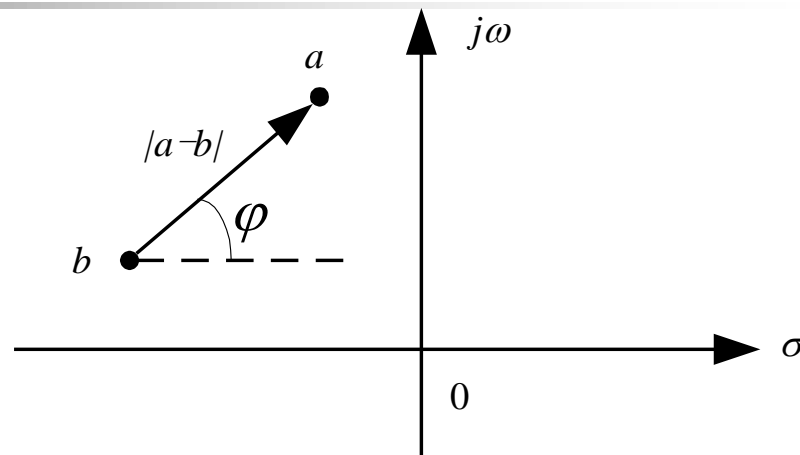
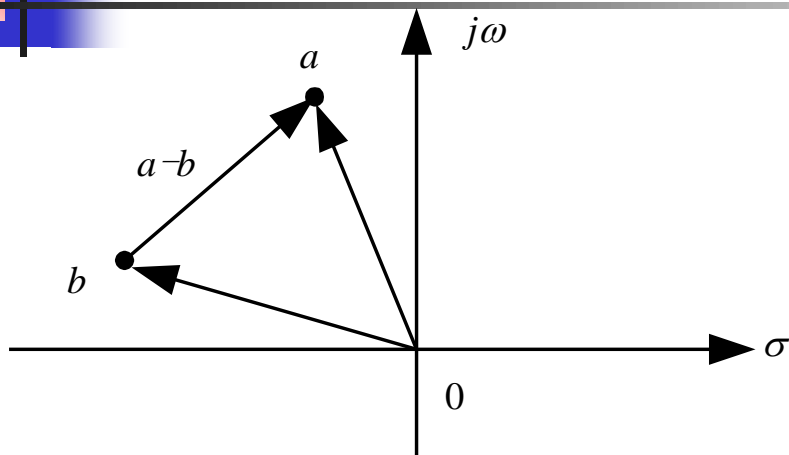
相频特性


$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

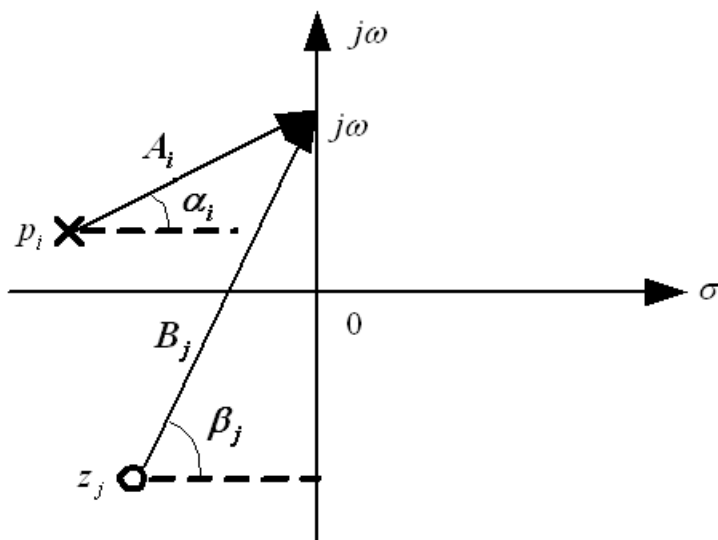
$$H(j\omega) = H_0 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

$$j\omega - z_i \qquad j\omega - p_i$$

复数a和b及a-b的向量表示



$$a - b = |a - b| e^{j\varphi}$$



$$j\omega - z_i = B_i e^{j\beta_i}$$

— 零点矢量

$$j\omega - p_i = A_i e^{j\alpha_i}$$

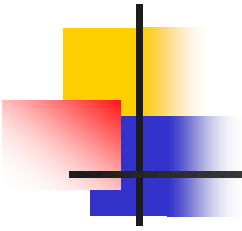
— 极点矢量

系统频响函数的向量表示

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$

令 $j\omega - z_i = B_i e^{j\beta_i}$, $j\omega - p_i = A_i e^{j\alpha_i}$

得
$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m B_i e^{j\beta_i}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\alpha_i}} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m B_i}{\prod_{i=1}^n A_i} e^{j(\sum_i \beta_i - \sum_l \alpha_l)}$$


$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m B_i}{\prod_{i=1}^n A_i}$$

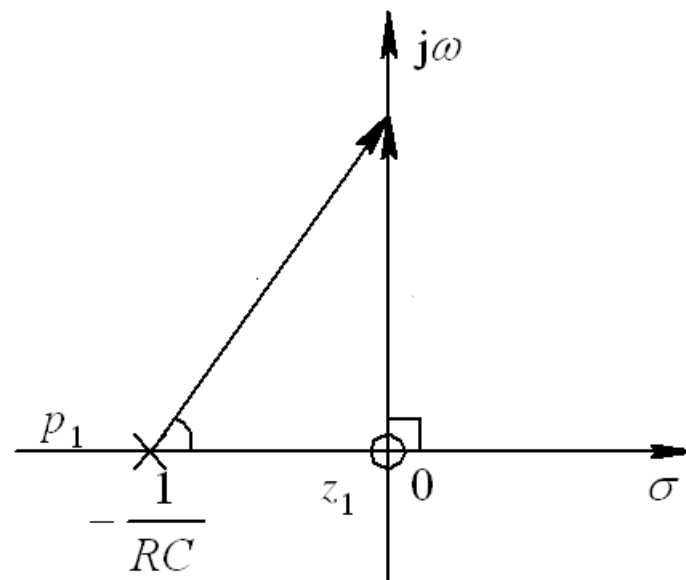
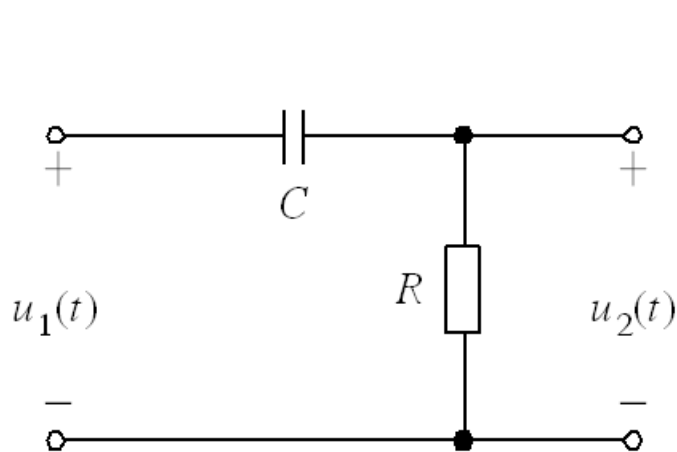
幅频特性等于零点矢量模的乘积除以极点矢量模的乘积

$$\phi(\omega) = \sum_i \beta_i - \sum_l \alpha_l$$

相频特性等于零点矢量相角和减去极点矢量相角和

给定一系列频率 ω 的值，由这两个式子就可以算出一系列的模量和相位的值，因此可以分别画出幅频和相频曲线。

例 一个由RC组成的滤波器如图所示, 试分析其频响特性。



解: 系统函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

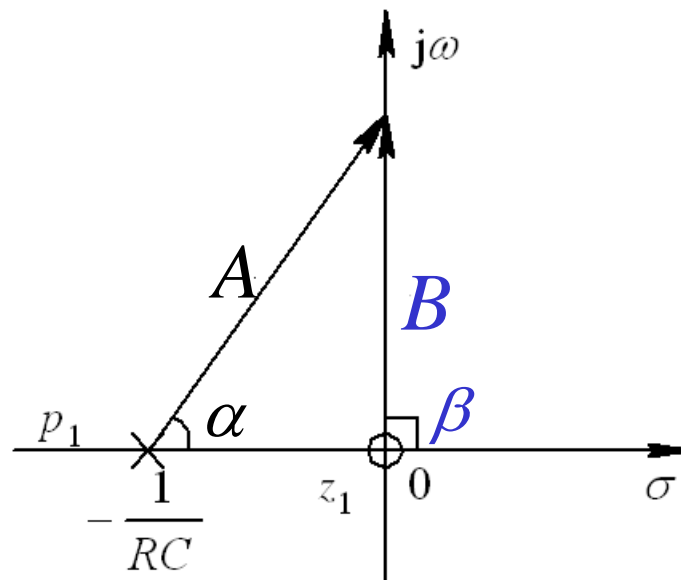
$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

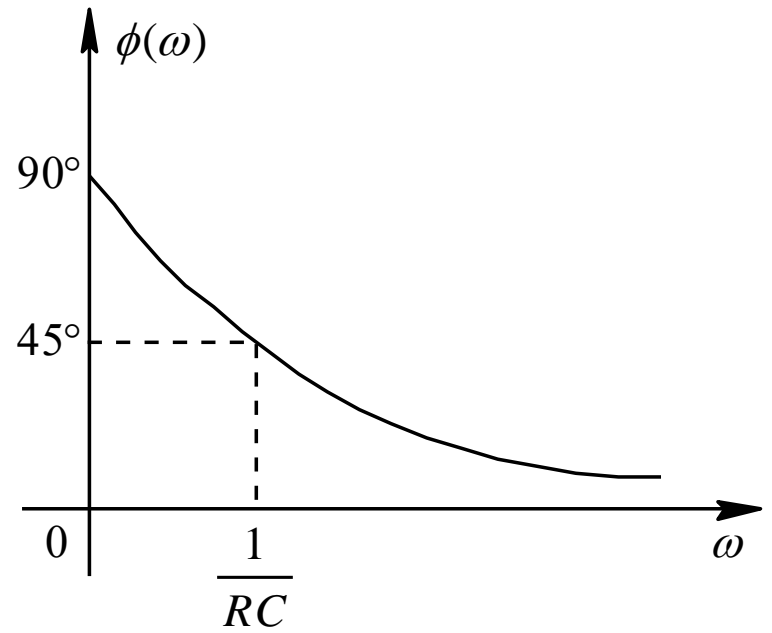
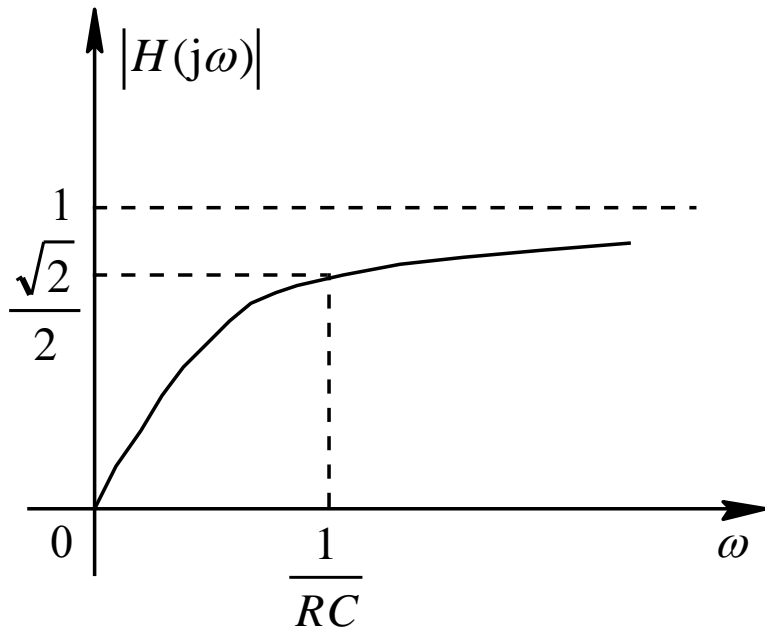
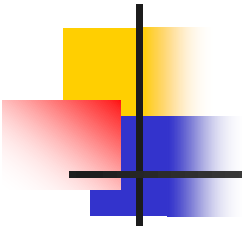
$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

零点矢量为 $j\omega - z = Be^{j\beta}$, 极点矢量为 $j\omega - p = Ae^{j\alpha}$,
于是

$$|H(j\omega)| = \frac{B}{A}$$

$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha$$





高通滤波器

四、系统的稳定性

前面讨论了 $H(s)$ 零、极点分布与系统时域特性、频响特性的关系，作为 $H(s)$ 零、极点分析的另一重要应用是借助它来研究线性系统的稳定性。

系统的冲激响应 $h(t)$ 或系统函数 $H(s)$ 集中表征了系统的本性，他们也反映了系统是否稳定。判定系统是否稳定，可从时域或 s 域两方面进行。

对于因果系统，观察在时间 t 趋于无限大时， $h(t)$ 是增长、还是趋于有限值或者消失，这样可确定系统的稳定性。

1. $H(s)$ 极点分布与系统稳定性的关系

在系统理论研究中，按照 $h(t)$ 呈衰减或增长的两种情况将系统划分为稳定系统与非稳定系统两大类。对因果系统：

1. **稳定系统**：如果 $H(s)$ 的**全部**极点落于 s 左半平面（不包括虚轴），则系统稳定。

如果 $H(s)$ 中分子的幂次 m 比分母的幂次 n 大，则不能大于1。

2. **不稳定系统**：如果 $H(s)$ 的极点落于 s 右半平面，或在虚轴上具有二阶以上的极点，则系统不稳定。

3. **临界稳定系统**：如果 $H(s)$ 的极点落于 s 平面虚轴上，且只有一阶，则系统临界稳定。

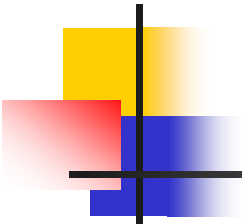
稳定系统的另一种定义

一个系统在零状态下任何有界的输入产生有界的输出，则称此系统是稳定的。这是“有界输入有界输出”（BIBO）意义下的稳定。其数学表达式为：

若系统输入 $|e(t)| < M_e$ ，则系统输出 $|r(t)| < M_r$ ，
则称此系统是稳定的。

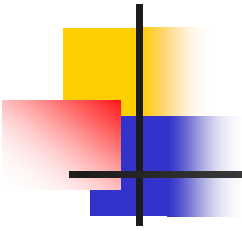
这个定义对因果或非因果系统均适用。

对因果系统，从BIBO稳定性定义考虑与考察 $H(s)$ 极点分布来判断稳定性具有统一的结果，仅在类型划分上略有差异，只有稳定与非稳定两类。



不过以上定义在检验上不具备规范的可操作性, 因为我们不可能对每一种有界输入的响应进行求解。于是, 就有了另外一种较为明晰简练、易于验证的定义, 即一个系统是稳定的充分必要条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$



因果	$h(t) = 0, \quad t < 0$	
稳定	$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) < \infty$	
	因果系统	$\int_0^{\infty} h(t) < \infty$
		系统函数 $H(s)$ 的所有极点全部位于 s 平面的左半开平面