第一章绪论



信号的定义、分类、描述 典型的连续时间信号

信号

信号的运算

「<u>信号的自变量的变换</u> <u>信号的时域运算</u>

奇异信号 信号的分解

系统

系统的定义、分类

线性时不变系统

线性特性 时不变性 微分特性 因果性



例题



- <u>例题1</u>: 画函数波形
- 例题2: 冲激函数的性质
- 例题3: 信号的运算
- 例题4: 列写系统的微分方程
- 例题5: 系统的线性特性
- 例题6: 系统的时不变特性
- 例题7: 系统的因果性

例1-1



粗略绘出下列各函数式的波形图

$$(1) f_1(t) = u(t^2 - 1) \qquad (2) \quad f_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \left[e^{-t} \cos t u(t) \right]$$
分析

描绘信号波形是本课程的一项基本训练,在绘图 时应注意信号的基本特征,对所绘出的波形,应标出 信号的初值、终值及一些关键的值,如极大值和极小 值等,同时应注意阶跃、冲激信号的特点。

$$(1) f_1(t) = u(t^2 - 1)$$



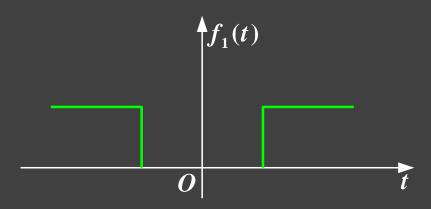
由于 $u(t^2-1)=u[(t-1)(t+1)]$, 根据u(t)的特性可知:

$$(t+1)(t-1) > 0$$
 $u(t^2-1) = 1$
 $(t+1)(t-1) < 0$ $u(t^2-1) = 0$

从而求得

$$u(t^2-1) = \begin{cases} 1 & |t| > 1 \\ 0 & |t| < 1 \end{cases}$$

波形图为





(2)
$$f_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[e^{-t} \cos t u(t) \right]$$



此题应注意冲激信号的性质

日本原代音 写明性例

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(t)] = \delta(t) \qquad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

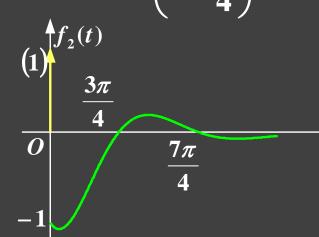
$$f_4(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}\cos t u(t)]$$

$$= (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)u(t) + e^{-t}\cos t\delta(t)$$

$$= -e^{-t}(\cos t + \sin t)u(t) + \delta(t)$$

$$= -\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)u(t) + \delta(t)$$

波形如下图





例1-2



求下列函数值

$$(1) f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \left[e^{-t} \delta(t) \right] (2) f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-3\tau} \delta'(\tau) \mathrm{d} \tau$$

分析

本例目的在于熟悉并正确应用冲激函数的性质。

解答



$$(1) f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[e^{-t} \delta(t) \right]$$



方法一:
$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [e^{-t}\delta(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\delta(t)] = \delta'(t)$$

方法二:
$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[e^{-t} \delta(t) \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[e^{-t} \right] \delta(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\delta(t) \right] e^{-t}$$

$$= -e^{-t} \delta(t) + e^{-t} \delta'(t)$$

$$= -\delta(t) + \delta'(t) + \delta(t)$$

$$= \delta'(t)$$

说明 方法二没有注意利用冲激函数的性质,求解过程较繁。另外,对冲激偶信号的性质 $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

往往被错误写成

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t)$$

从而得出错误结论



$$(2) f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-3\tau} \delta'(\tau) d\tau$$



$$= \int_{-\infty}^{t} \left[\delta'(\tau) + 3\delta(\tau) \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t} 3\delta(\tau) d\tau$$

$$= \delta(t) + 3u(t)$$

说明

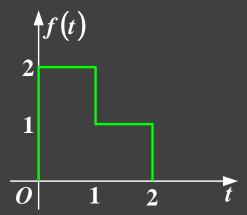
 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$ 表示的是变量的函数; $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau$ 表示的是函数f(t)的积分值。



例1-3



已知信号f(t)的波形如图(a)所示,请画出下列函数的波形



$$(1)f(6-2t)$$

$$(2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(6-2t)]$$

分析

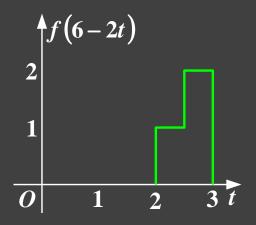
在描绘某些信号的波形时,有时不必求出函数的表达式,而可直接利用信号运算及相应的波形变换图解。 画(2)的波形时,应先画出(1)的波形。

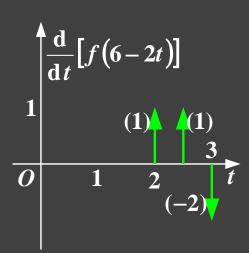
需要注意,对信号的基本运算都是对独立的、单一的变量t而言的,而不是对变量at或at+b进行变换。





解答





说明

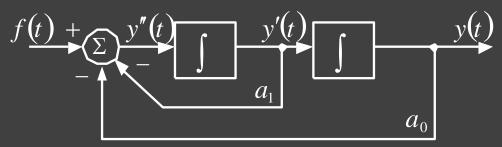
对信号的波形进行微分变换时,应注意在函数的跳变点处会出现冲激信号。



例1-4



某连续系统的框图如图(a)所示,写出该系统的微分方程。



分析

系统框图有两个积分器。故描述该系统的是二阶微分方程。由于积分器的输出是其输入信号的积分,因而积分器的输入信号是输出信号的一阶导数。

图中设右方积分器的输出信号为y(t)

则其输入信号为 y(t)

左方积分器的输入信号为y"(t) 从加法器入手,找其入出关系。





由加法器的输出,得

$$y''(t) = -a_1y'(t) - a_0y(t) + f(t)$$

将上式除f(t)以外的各项移到等号左端,得

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

说明

连续系统或离散系统除用数学方程描述外,还可用框图表示系统的激励与响应之间的数学运算关系,一个方框图可以表示一个具有某种功能的部件,也可以表示一个子系统。每个方框内部的具体结构并非是考察重点,只注重其输入输出之间的关系。



由系统框图列写微分(或差分)方程的步

- 选中间变量 $x(\cdot)$ 。对于连续系统,设其最右端积分器的输出为x(t);对于离散系统,设其最左端迟延单元的输入为x(n);
- 写出各加法器输出信号的方程;
- 消去中间变量x(·)。

如果已知系统的微分或差分方程,也可以画出相应的框图。但解不是唯一的。



例1-5



判断方程 $y(t)=x^2(t)$ 描述的系统是否为线性系统?

分析

在检验一个系统的线性时,重要的是要牢记:系统必须同时满足可加性和齐次性。

解答

设 $x_1(t), x_2(t)$ 为两个输入信号

先经系统

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

再线性运算

$$ay_1(t)+by_2(t)=ax_1^2(t)+bx_2^2(t)$$





设 $x_3(t)$ 为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合,先线性运算再经系统

$$x_3(t) \to y_3(t) = x_3^2(t) = [ax_1(t) + bx_2(t)]^2$$

$$= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

$$= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

先经系统再线性运算与先线性运算再经系统结果不等, 所以系统是非线性的。



例1-6



判断系统
$$y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$$
 是否为线性时不变系统?

此系统的作用是展宽输入系统的信号,一切变换都是对t而言

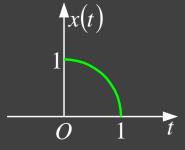
$$x(t)$$
 经系统, $t \to \frac{t}{2}$ $x\left(\frac{t}{2}\right)$ 时移, $t \to t_0$ $x\left(\frac{t-t_0}{2}\right)$ (1)

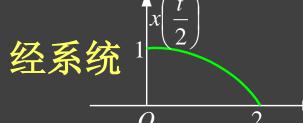
$$x(t)$$
 时移, $t \to t_0$ 会系统, $t \to \frac{t}{2}$ $x\left(\frac{t}{2} - t_0\right)$ 会 会 $x(t - t_0)$ 会 $x(t - t_0)$ 会 $x(t - t_0)$ 会 $x(t - t_0)$ $x(t - t_0)$

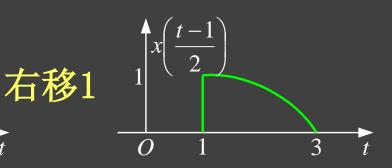


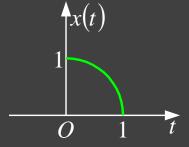
图解说明



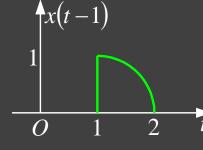




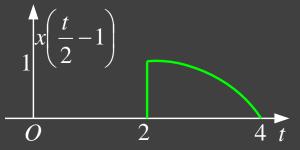








经系统



例1-7



系统的输入为x(t),输出为y(t),系统关系如下,判断系统是否是因果系统.

(1)
$$y(t) = x(t)\cos(t+1)$$
 (2) $y(t) = x(-t)$

分析

在检验一个系统的因果性时,重要的是要考查系统的输入-输出关系,同时要把输入信号的影响仔细地从在系统定义中所用到的其它函数的的影响区分开来。







$$(1) y(t) = x(t)\cos(t+1)$$

在这个系统中,任何时刻t的输出等于在同一时刻的输入再乘以一个随时间变化的函数,因此仅仅是输入的当前值影响了输出的当前值,可以得出该系统是因果系统。

$$(2) y(t) = x(-t)$$

在某个正的时刻 t_0 的输出 $y(t_0)=x(-t_0)$,仅仅决定于输入在时刻 $(-t_0)$ 的值, $(-t_0)$ 是负的,因此属于 t_0 的过去时刻,这时可能要得出该系统是因果的结论。然而,我们总是要检查在全部时间上的输入-输出关系,对于t<0,如 t=-4,y(-4)=x(4)

所以在这一时间上输出就与输入的将来有关。 因此,该系统不是因果系统。



第二章连续时间系统时域分析



建立系统的数学模型 状态变量描述法

求 解 系统 响 应

满足换路定则 $\begin{cases} u_c(0_+) = u_c(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$ 起始点有跳变: <u>求跳变量</u>

零输入响应:用经典法求解零状态响应:卷积积分法求解

卷积积分法: 求零状态响应

例题



- 例题1: 连续时间系统求解(经典法,双零法)
- <u>例题2</u>: 求冲激响应(n>m)
- 例题3: 求冲激响应(n < m)
- 例题4: 求系统的零状态响应
- 例题5: 卷积
- 例题6: 系统互联





描述某LTI系统的微分方程为

$$\frac{d^{2} r(t)}{dt^{2}} + 3 \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) = 2 \frac{de(t)}{dt} + 6e(t)$$

已知 $r(0_{-}) = 2, r'(0_{-}) = 0, e(t) = u(t)$, 求系统的全响应,

并指出零输入响应,零状态响应,自由响应,强迫响应。

分析



在求解系统的完全响应时,要用到有关的三个量是:

 $r^{(k)}(0_{-})$: 起始状态,它决定零输入响应;

 $r_{75}^{(k)}(0_+)$: 跳变量,它决定零状态响应;

 $r^{(k)}(0_+)$: 初始条件,它决定完全响应;

这三个量之间的关系是

$$r^{(k)}(0_{+})-r^{(k)}(0_{-})=r_{zs}^{(k)}(0_{+})$$

分别利用

$$r_{zs}^{(k)}\left(\mathbf{0}_{+}\right) r^{(k)}\left(\mathbf{0}_{+}\right)$$

求零状态响应和完全响应,需先确定微分方程的特解。



解:



将e(t) = u(t)代入原方程有

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d} t^2} + 3 \frac{\mathrm{d} r(t)}{\mathrm{d} t} + 2r(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$$

<u>方法一:</u>利用 $r'(0_+),r(0_+)$ 先来求完全响应,再求零输入

响应,零状态响应等于完全响应减去零输入响应。

方法二: 用方法一求零输入响应后,利用跳变量

$$r_{zs}'(0_+), r_{zs}'(0_+)$$

来求零状态响应,零状态响应加上零输入响应等于完全响应。

本题也可以用卷积积分求系统的零状态响应。



方法一



1. 完全响应

该完全响应是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + 2r(t) = 2\delta(t) + 6u(t) \tag{1}$$

且满足 $r(0_{-})=2,r'(0_{-})=0$ 的解

方程(1)的特征方程为

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

特征根为

$$\alpha_1 = -1$$
, $\alpha_2 = -2$





方程(1)的齐次解为

$$r(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

因为方程(1)在t>0时,可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + 2r(t) = 6u(t) \tag{2}$$

显然,方程(1)的特解可设为常数D,把D代入方程(2)求得

$$D=3$$

所以方程(1)的解为

$$r(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 3$$

下面由冲激函数匹配法定初始条件



由冲激函数匹配法定初始条件



据方程(1)可设

$$\frac{d^{2} r(t)}{dt^{2}} = a\delta(t) + b\Delta u(t)$$

$$\frac{d r(t)}{dt} = a\Delta u(t)$$

$$r(t) 无跳变$$

代入方程(1),得

$$a\delta(t)+b\Delta u(t)+3a\Delta u(t)+2r(t)=2\delta(t)+6u(t)$$

匹配方程两端的 $\delta(t)$,及其各阶导数项,得

$$a=2$$





所以

$$r'(0_+) = r'(0_-) + a = 0 + 2 = 2$$

 $r(0_+) = r(0_-) = 2$

把
$$r'(0_+)=2, r(0_+)=2代入$$

$$r(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 3$$

得 $A_1 = 0, A_2 = -1$,所以系统的完全响应为

$$r(t) = -e^{-2t} + 3 \qquad t \ge 0$$

再求零输入响 $\dot{\omega}_{zi}(t)$



2. 求零输入响应



因为激励为零,零输 λ 响应 $r_{zi}(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}r(t)}{dt} + 2r(t) = 0 \tag{3}$$

且满足
$$r_{zi}(0_+) = r_{zi}(0_-) = r(0_-) = 2$$
,
$$r_{zi}'(0_+) = r_{zi}'(0_-) = 4r'(0_-) = 0 \quad 的解.$$

(3) 式的特征根为

$$\alpha_1 = -1$$
, $\alpha_2 = -2$

方程(3)的齐次解即系统的零输入响应为

$$r_{zi}(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-2t}$$



$$r_{zi}(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-2t}$$

由
$$r_{zi}(0_+)=2$$
, $r_{zi}'(0_+)=0$, 代入(4)式解得

$$B_1 = 4, B_2 = -2$$

所以,系统的零输入响应为

$$r_{zi}(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}$$
 $t \ge 0$

下面求零状态响应



3. 求零状态响应



零状态响应=完全响应—零输入响应,即

$$r_{zs}(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$$
 $t \ge 0$

因为特解为3,所以 强迫响应是3,自由响应是 $-4e^{-t}+e^{-2t}$

方法二



零状态响应 $r_{zs}(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + 2r(t) = 2\delta(t) + 6u(t) \tag{5}$$

且满足 $r_{zs}(0_{-})=r_{zs}'(0_{-})=0$ 的解

由于上式等号右边有 $\delta(t)$ 项,故 $r_{zs}''(t)$ 应含有冲激函数,从而 $r_{zs}'(t)$ 将发生跳变,即 $r_{zs}'(0_+)\neq r_{zs}'(0_-)$

 $\overline{\text{mr}_{zs}(t)}$ 在t=0处是连续的。

以上分析可用下面的数学过程描述

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r_{zs}(t) + a\delta(t) + b\Delta u(t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{zs}(t) + a\Delta u(t)$$





代入 (5) 式

$$a\delta(t)+b\Delta u(t)+3a\Delta u(t)+2r(t)=2\delta(t)+6u(t)$$

根据在t=0时刻,微分方程两端的 $\delta(t)$ 及其各阶导数应该平衡相等,得

$$a=2$$

于是

$$r_{zs}'(0_+) = r_{zs}'(0_-) + a = 2$$
 $r_{zs}(0_+) = r_{zs(0^-)} = 0$

t>0时,方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d} t^2} + 3 \frac{\mathrm{d} r(t)}{\mathrm{d} t} + 2r(t) = 6u(t)$$





齐次解为 $D_1e^{-t}+D_2e^{-2t}$,特解为3,于是有

$$r_{zi}(t) = D_1 e^{-t} + D_2 e^{-2t} + 3$$

由初始条件 $r_{zs}'(0_+)=2, r_{zs(0^+)}=0$ 得

$$D_1 = -4, D_2 = 1$$

所以,系统的零状态响应为

$$r_{zs}(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$$
 $(t \ge 0)$

方法一求出系统的零输入响应为

$$r_{zi}(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}$$
 $t \ge 0$

完全响应=零状态响应+零输入响应,即

$$r(t) = -e^{-2t} + 3 \qquad (t \ge 0)$$

例2-2



已知某系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d} t^2} + 5 \frac{\mathrm{d} r(t)}{\mathrm{d} t} + 6r(t) = 3 \frac{\mathrm{d} e(t)}{\mathrm{d} t} + 2e(t)$$

试求其冲激响 $\triangle h(t)$.

分析

冲激响应是系统对单位冲激信号激励时的零状态响应。 在系统分析中,它起着重要的作用。下面我们用两种方 法来求解本例。

方法一: 奇异函数项相平衡法

方法二: 齐次解法



方法一: 奇异函数项相平衡法



首先求方程的特征根,得

$$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -3$$

因为微分方程左边的微分阶次高于右边的微分阶次, 冲激响应为

$$h(t) = (A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t})u(t)$$
 (1)

对上式求导,得

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = (A_1 + A_2)\delta(t) + (-2A_1e^{-2t} - 3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{\mathrm{d}t^2} = (A_1 + A_2)\delta'(t) + (-2A_1e^{-2t} - 3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$+ (4A_1e^{-2t} + 9A_2e^{-3t})u(t)$$





将
$$e(t) = \delta(t)$$
,以及上述三个等式代入原微分方程,整理

$$(A_1 + A_2)\delta'(t) + (3A_1 + 2A_2)\delta(t) = 3\delta'(t) + 2\delta(t)$$

则得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ 3A_1 + 2A_2 = 2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_1 = -4 \\ A_2 = 7 \end{cases}$$

代入(1)得

$$h(t) = (-4e^{-2t} + 7e^{-3t})u(t)$$



方法二: 齐次解法



先求方程
$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} + 5\frac{dr(t)}{dt} + 6r(t) = \delta(t)$$
的解 $\hat{h}(t)$,得
$$\hat{h}(t) = (C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t})u(t)$$

初始条件

$$\begin{cases}
\hat{h}(0^+) = 0 \\
\hat{h}'(0^+) = 1
\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

即

$$\hat{h}(t) = \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$



$$\therefore h(t) = 3 \frac{\mathrm{d} \hat{h}(t)}{\mathrm{d} t} + 2 \hat{h}(t)$$

$$= 3(-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) + 3(e^{-2t} - e^{-3t})\delta(t) + 2(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

$$= 3(-2e^{-2t} + 3e^{-3t})u(t) + 2(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

$$= (7e^{-3t} - 4e^{-2t})u(t)$$

说明: 齐次解法相对于奇异函数项相平衡法和冲激函数匹配法的优点是在求 $\hat{h}(t)$ 时,只可能n>m,无需考虑其它情况;由于n个初始条件是固定不变的,即

$$\hat{h}(0^{+}) = \hat{h}'(0^{+}) = \cdots = \hat{h}^{(n-2)}(0^{+}) = 0, \quad \hat{h}^{(n-1)}(0^{+}) = \frac{1}{C_{0}}$$

其中 C_0 是微分方程中 $\frac{\mathbf{d}^n}{\mathbf{d}t^n}h(t)$ 项前面的系数,因而给计算带来了方便。



例2-3



若激励为e(t),响应r(t)的系统的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+3e(t)$$

求系统的冲激响应.

解答

将 $e(t) = \delta(t)$ 代入方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+2h(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)+3\delta(t) \qquad (1)$$

方法一: 奇异函数项相平衡法

方法二: 冲激函数匹配法



方法一: 奇异函数项相平衡法



由于微分方程的右端比左端还高一阶,故冲激响应设成

$$h(t) = A_1 e^{-2t} u(t) + A_2 \delta(t) + A_3 \delta'(t)$$
 (2)

将(2)式代入(1)式,得

$$\begin{cases} A_1 + 2A_2 = 3 \\ A_2 + 2A_3 = 2 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

解得冲激响应

$$h(t) = e^{-2t}u(t) + \delta(t) + \delta'(t)$$

阶跃响应

$$g(t) = \int_{0^{-}}^{t} h(\tau) d\tau = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) u(t) + \delta(t)$$



方法二:冲激函数匹配法



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) + 2r(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(t) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) + 3\delta(t) \tag{1}$$

微分方程的齐次解为

$$h(t) = B_1 e^{-2t} \tag{3}$$

下面用冲激函数匹配法求初始条件,设

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + d\Delta u(t)$$
$$r(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)$$

上述两等式代入方程(1),经整理得

$$a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + d\Delta u(t) + 2a\delta'(t) + 2b\delta(t) + 2c\Delta u(t)$$
$$= \delta''(t) + 3\delta'(t) + 3\delta(t)$$



根据在t=0时刻,微分方程两端的冲激 函数及其各阶导数应该平衡相等,解得于 于是



a=1

b = 1

|c| = 1

$$r(0^+)=r(0^-)+c=1$$

把
$$r(0^+)=1$$
代入(3)式,求得 $A_1=1$,考虑 $n=1,m=2,n< m$,

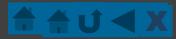
h(t)中应加上 δ 函数匹配过程中出现的s(t)及其导数项

$$\delta'(t)\cdots\delta'(t)\cdots\delta^{(m-n)}(t)$$

故冲激响应为

$$h(t) = e^{-2t}u(t) + \delta(t) + \delta'(t)$$

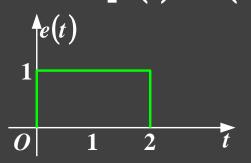
说明:两种方法求得的结果一致。一般说来,<u>第二种方法</u> 比<u>第一种方法</u>简单,特别是对高阶方程。

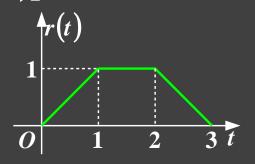


例2-4



已知线性时不变系统的一对激励和响应波形如下图所示, 求该系统对激励的 $e(t) = \sin \pi t [u(t) - u(t-1)]$ 零状态响应。



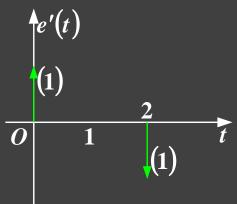


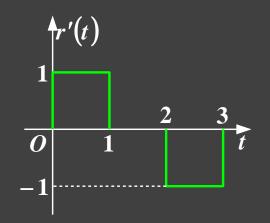
解答

对激励和响应分别微分一次,得

$$e'(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$$

$$r'(t) = [u(t) - u(t-1)] - [u(t-2) - u(t-3)]$$









当激励为
$$e'(t) = \delta(t)$$
时,响应为 $r'(t) = u(t) - u(t-1)$ 于是,当激励为 $e(t) = \delta(t)$ 时,响应为 $r(t) = u(t) - u(t-1)$ 即 $h(t) = u(t) - u(t-1)$

当激励为
$$e(t) = \sin \pi t [u(t) - u(t-1)]$$
时的零状态响应为

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

$$= \{\sin \pi t [u(t) - u(t-1)]\} * [u(t) - u(t-1)]$$

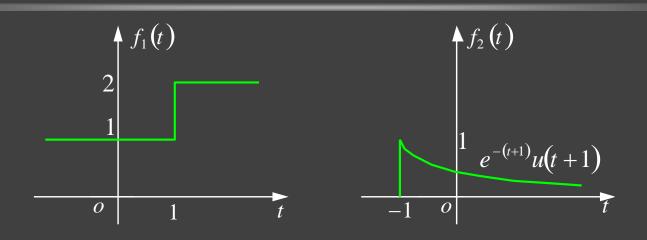
$$= \int_0^t \sin \pi \tau \, d\tau [u(t) - u(t-2)] + \int_{t-1}^1 \sin \pi \tau \, d\tau [u(t) - u(t-2)]$$

$$= \frac{2}{\pi} (1 - \cos \pi t) [u(t) - u(t-2)]$$



例2-5 计算卷积 $f_1(t)*f_2(t)$, 并画出波形.





斯哈

此题如果直接利用卷积微分与积分性质计算,则将得出错误的结果。

其原因在于 $f_1(t)$ 在 $t = -\infty$ 时不等于零;

从图形上看, $f_1'(t)$ 只在t=1点有一个冲激信号 $\delta(t-1)$

然而,对此微分信号积分并不能恢复原信号 $f_1(t)$,即

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d} f_1(\tau)}{\mathrm{d} \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - 1) \mathrm{d} \tau = u(t - 1) \neq f_1(t)$$





从原理上看,如果

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{\mathrm{d} f_1(t)}{\mathrm{d} t} * \int_{-\infty}^t \frac{\mathrm{d} f_1(\tau)}{\mathrm{d} \tau} d\tau$$

则应有

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\mathrm{d} f_1(\tau)}{\mathrm{d} \tau} \mathrm{d} \tau$$

很容易证明,上式成立的充要条件是 $\lim_{t \to \infty} f_1(t) = 0$

显然,所有的时限信号都满足上式。对于时限信号,可 以放心地利用卷积的微分与积分性质进行卷积计算。

此题若将 $f_1(t)$ 看成两个信号的叠加,则也可以利用该性 质计算:

$$f_1(t) = 1 + u(t-1)$$
 $f_2(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$



$$s(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

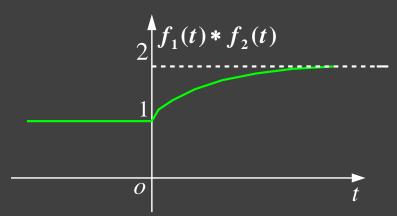
$$= [1 + u(t-1)] * e^{-(t+1)}u(t+1)$$

$$= 1 * e^{-(t+1)}u(t+1) + u(t-1) * e^{-(t+1)}u(t+1)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\tau+1)}u(\tau+1)d\tau+\frac{du(t-1)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}e^{-(\tau+1)}u(\tau+1)d\tau$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} e^{-(\tau+1)} d\tau + \delta(t-1) * \int_{-1}^{t} e^{-(\tau+1)} d\tau$$

$$=1+\int_{-1}^{t-1}e^{-(\tau+1)}\,\mathrm{d}\,\tau=1+\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$



注意:
$$1*e^{-(t+1)}u(t+1)\neq e^{-(t+1)}u(t+1)$$

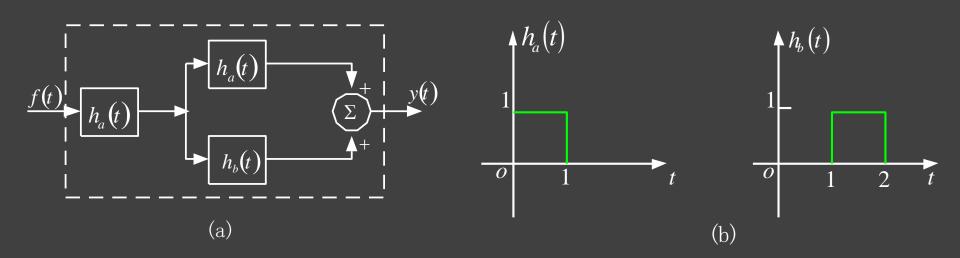


例2-6



对图(a)所示的复合系统由三个子系统构成,已知各子系统的冲激响应如图(b)所示。

- (1)求复合系统的冲激响应h(t), 画出它的波形;
- (2)用积分器、加法器和延时器构成子系统 $h_a(t)$ 和 $h_b(t)$ 的框图;



分析



本例的总系统是几个子系统串、并联组合而成的。 对因果系统而言, 串联系统的冲激响应等于各串联子 系统的冲激响应卷积; 并联系统的冲激响应等于各并 联子系统的冲激响应相加。

系统的零状态响应,可以用系统的微分方程求解,也可以用系统的冲激响应与激励信号的卷积求解。后一种方法回避了起始点跳变问题,但是,这种方法只限于求零状态响应,不能求完全响应。其原因在于卷积运算是一种线性运算,它满足叠加性、齐次性与时不变性。而当系统的起始状态不为零时,系统的完全响应不满足叠加性、齐次性与时不变性。

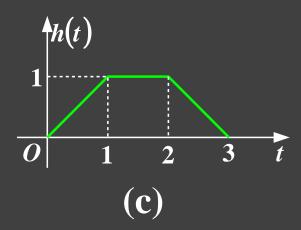
(1) 求h(t)



当 $f(t) = \delta(t)$ 时,系统的零状态响应为h(t),复合系统的冲激响应为

$$h(t) = h_a(t) * [h_a(t) + h_b(t)]$$

其波形如图



(2)子系统 $h_a(t)$ 和 $h_b(t)$ 的框图



由于

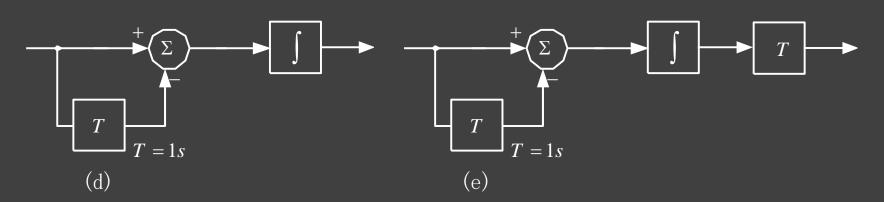
$$h_a(t) = u(t) - u(t-1) = [\delta(t) - \delta(t-1)] * u(t)$$

 $h_a(t)$ 框图如图(d)所示

子系统 $h_a(t)$ 和 $h_b(t)$ 的关系为

$$h_b(t) = h_a(t-1)$$

故 $h_{b}(t)$ 的框图如图(e)所示





第三章 傅里叶变换



一. 周期信号的傅里叶级数

期矩形脉冲信号的频谱特点

二. 傅里叶变换

定义及傅里叶变换存在的条件 典型非周期信号的频谱 冲激函数和阶跃信号的傅里叶变换 性质+卷积定理→应用:调制和解调→频分复用 周期信号的傅里叶变换:由一些冲激函数组成 抽样信号的傅里叶变换→抽样定理→应用:时分复用



例题



- 例题1: 傅里叶级数——频谱图
- 例题2: 傅里叶变换的性质
- 例题3: 傅里叶变换的定义
- 例题4: 傅里叶变换的性质
- 例题5: 傅里叶变换的性质
- 例题6: 傅里叶变换的性质
- 例题7: 傅里叶变换的性质、频响特性
- 例题8: 傅里叶变换的性质
- · 例题9: 抽样定理
- 例题10: 周期信号的傅里叶变换

例3-1



周期信号

$$f(t) = 3\cos t + \sin\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(8t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

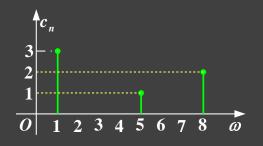
- 1. 画出单边幅度谱和相位谱;
- 2. 画出双边幅度谱和相位谱。

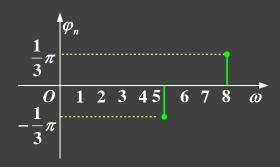
解答

$$f(t) = 3\cos t + \cos\left(5t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(8t - \frac{2\pi}{3} + \pi\right)$$
$$= 3\cos t + \cos\left(5t - \frac{1}{3}\pi\right) + 2\cos\left(8t + \frac{\pi}{3}\right)$$

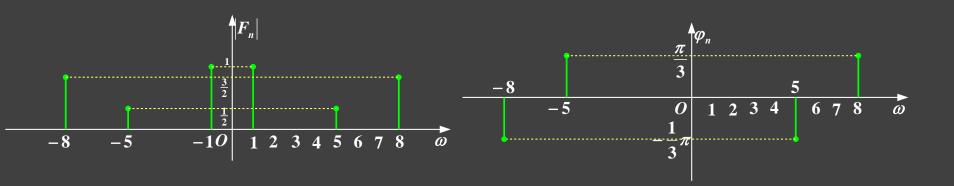


单边幅度谱和相位谱





双边幅度谱和相位谱

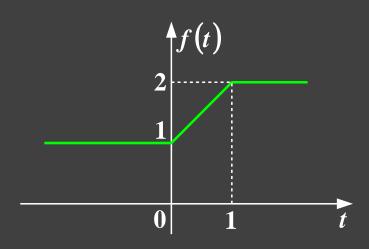




例3-2



求信号f(t)的傅里叶变换 $F(\omega)$ 。



解答

分析: f(t)不满足绝对可积条件,故无法用定义求其傅里叶变换,只能利用已知典型信号的傅里叶变换和性质求解。下面用三种方法求解此题。

方法一: 利用傅里叶变换的微分性质方法二: 利用傅里叶变换的积分性质方法二: 线性性质



方法一: 利用傅里叶变换的微分性质



要注意直流,设 $f_{A}(t)$ 为交流分量, $f_{D}(t)$ 为直流分量,则

$$f(t) = f_A(t) + f_D(t)$$

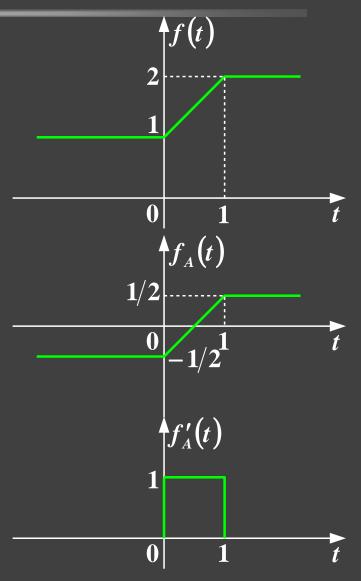
$$F(\omega) = F_A(\omega) + F_D(\omega)$$

其中

$$f_{D}(t) = \frac{1}{2} [f(-\infty) + f(\infty)] = \frac{3}{2}$$

$$F_{D}(\omega) = 3\pi\delta(\omega)$$

$$f'(t) = f'_{A}(t)$$







$$\therefore f_A'(t) = G_1\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore j\omega F_A(\omega) = \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega}$$

$$\therefore F_{A}(\omega) = \frac{\operatorname{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$\therefore F(\omega) = F_A(\omega) + F_D(\omega) = \frac{\operatorname{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}}{j\omega} + 3\pi\delta(\omega)$$



方法二: 利用傅里叶变换的积分性质



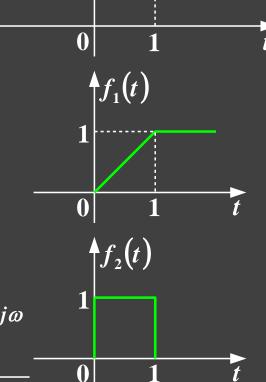
$$f(t)=1+f_1(t)$$
 $f_1(t)$ 为 $f_2(t)$ 的积分

$$F_2(\omega) = \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega}$$

$$\therefore F_1(\omega) = \left[\pi(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega}$$

$$= \pi(\omega) + \frac{\operatorname{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}}{j\omega}$$

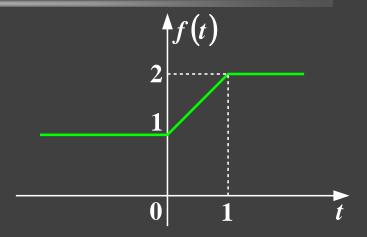
$$\therefore F(\omega) = F[1] + F_1(\omega) = 3\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2}$$



方法三: 利用线性性质进行分解



此信号也可以利用线性性 质进行分解,例如



$$f(t) = u(-t) + (t+1)[u(t) - u(t-1)] + 2u(t-1)$$

$$\updownarrow \qquad \qquad \updownarrow \qquad \qquad \updownarrow$$

$$\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \frac{1}{j\omega} - \frac{2}{j\omega} e^{-j\omega} + \frac{1 - e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} 2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega} e^{-j\omega}$$

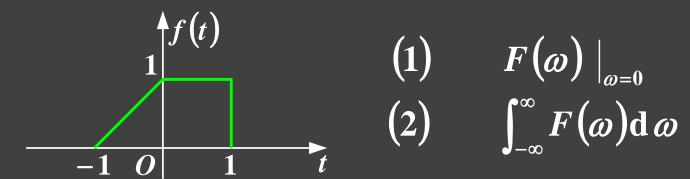
$$\therefore F(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} + 3\pi\delta(\omega)$$



例3-3



已知信号f(t)波形如下,其频谱密度为 $F(j\omega)$,不必求出 $F(j\omega)$ 的表达式,试计算下列值:



解答

$$(1)F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore F(0) = F(\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.5$$



$$(2)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

 $\diamondsuit t=0$,则

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0) = 2\pi$$

例3-4



已知
$$F_1(\omega) = F[f_1(t)]$$
,利用傅里叶变换的性质求 $F_2(\omega) = F[f_1(6-2t)]$ 。

解答

方法一:

按反褶一尺度一时移次序求解

$$F_1(\omega) = F[f_1(t)]$$

$$F[f_1(-t)] = F_1(-\omega)$$

$$F[f_1(-2t)] = \frac{1}{2}F_1\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

对t时移
$$\frac{6}{2}$$
,得
$$F[f_1(6-2t)] = \frac{1}{2}F_1\left(-\frac{\omega}{2}\right)e^{-j3\omega}$$



方法二:



按反褶一时移一尺度次序求解

$$F_1(\omega) = F[f_1(t)]$$

$$F[f_1(-t)] = F_1(-\omega)$$

对t时移6,得

$$F[f_1(6-t)] = F_1(-\omega)e^{-j6\omega}$$

对t压缩2倍

$$F[f_1(6-2t)] = \frac{1}{2}F_1\left(-\frac{\omega}{2}\right)e^{-j3\omega}$$

方法三

利用傅里叶变换的性质
$$F[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

这里 $a = -2, t_0 = -6$ 代入上式,得

$$F[f_1(6-2t)] = \frac{1}{2}F_1\left(-\frac{\omega}{2}\right)e^{-j3\omega}$$

其它方法自己练习。





已知升余弦信号
$$f(t) = \frac{E}{2} \left| 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right| \quad (0 \le |t| \le \tau),$$

利用频移性质求其频谱密度函数,并与矩形脉冲信号

$$f_1(t) = E\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$
的频谱比较。
解:

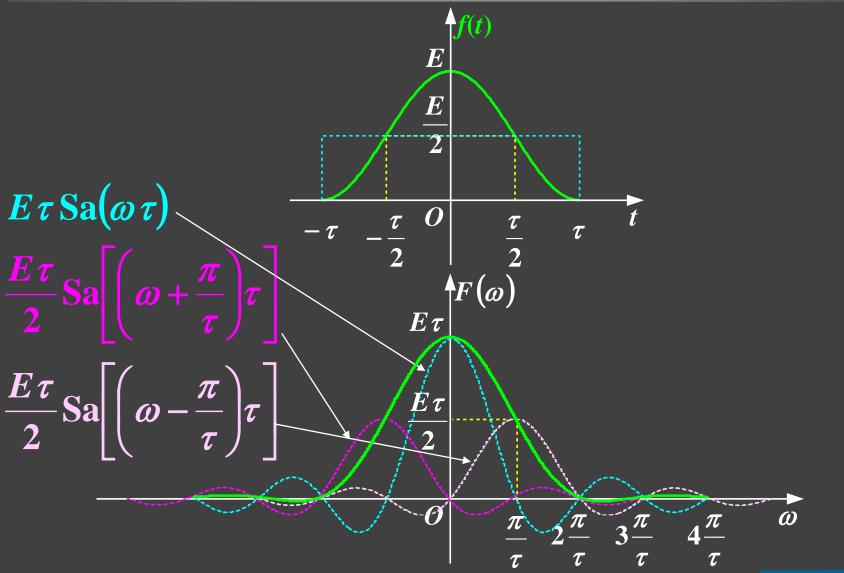
$$f(t) = \left[\frac{E}{2} + \frac{E}{4}e^{j\frac{\pi t}{\tau}} + \frac{E}{4}e^{-j\frac{\pi t}{\tau}}\right] \left[u(t+\tau) - u(t-\tau)\right]$$

$$E\tau \operatorname{Sa}(\omega\tau) \quad \frac{E\tau}{2} \operatorname{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] \quad \frac{E\tau}{2} \operatorname{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]$$



升余弦脉冲的频谱

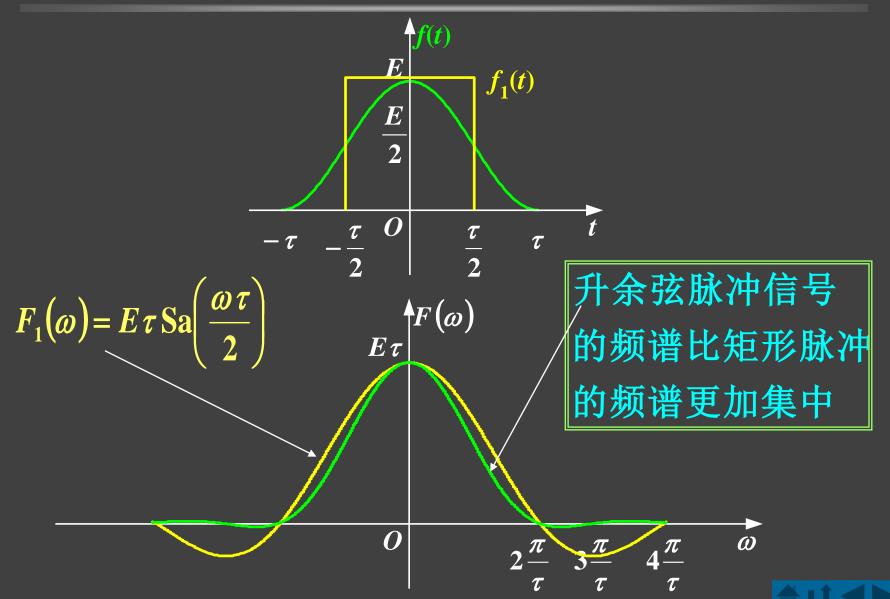






比较





例3-6已知双Sa信号

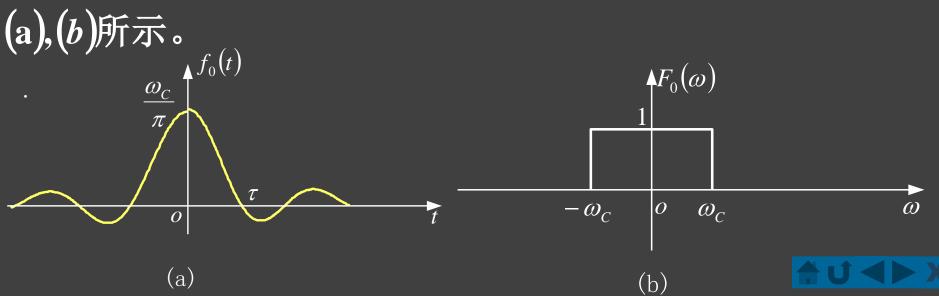


$$f(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \{ Sa(\omega_c t) - Sa[\omega_c (t - 2\tau)] \}$$
 试求其频谱。

解答

$$f_0(t) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t)$$

因 $f_0(t)$ 为Sa波形,其频谱 $F_0(\omega)$ 为矩形。 $f_0(t)$ 和f(t)的波形如图(a),(b)所示。



$$f_0(t-2\tau)$$
的波形如图 (c) 所示。



已知

$$F[f_0(t)] = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$(|\omega| < \omega_c)$$

$$(|\omega| < \omega_c)$$

由时移特性得到

$$F[f_0(t-2\tau)] = \begin{cases} e^{-j2\omega\tau} & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| < \omega_c) \end{cases}$$

因此f(t)的频谱等于

$$F(\omega) = F[f_0(t)] - F[f_0(t-2\tau)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-j2\omega\tau} & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| < \omega_c) \end{cases}$$





从中可以得到幅度谱为

$$|F(\omega)| = \begin{cases} 2|\sin(\omega\tau)| & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| < \omega_c) \end{cases}$$

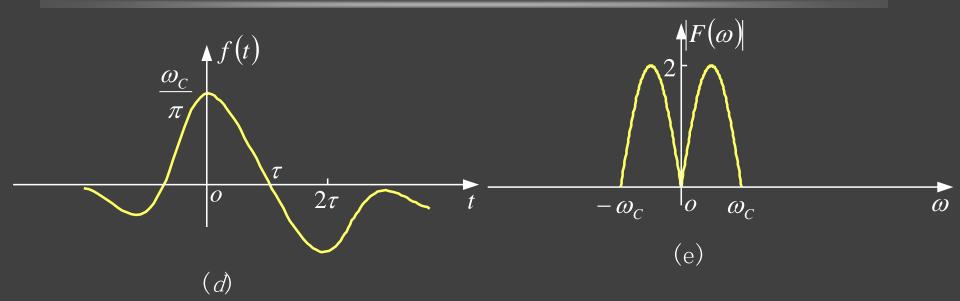
在实际中往往取
$$\tau = \frac{\pi}{\omega_c}$$
,此时上式变成

$$|F(\omega)| = \begin{cases} 2 \left| \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_c}\right) \right| & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| < \omega_c) \end{cases}$$

双Sa信号的波形和频谱如图(d)(e)所示。









例3-7-8



求图(a)所示函数的傅里叶变换。

解答

引入辅助信号 $f_1(t)$, 如图 (b).

由对称关系求 $F_1(\omega)$

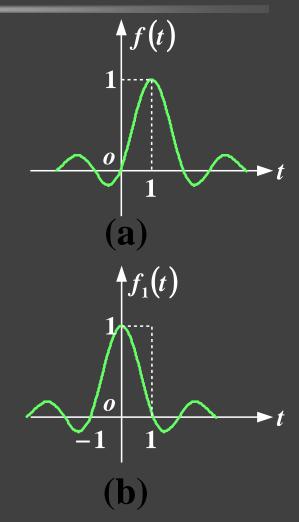
$$F_1(\omega) = G_{2\pi}(\omega)$$

又因为

$$f(t) = f_1(t-1)$$

得



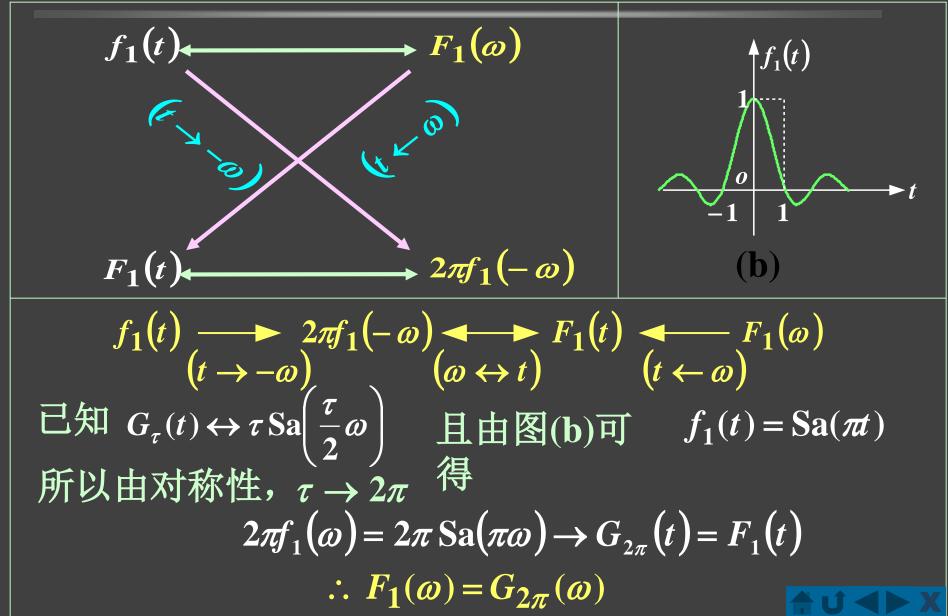


频谱图



由对称关系求 $F_1(\omega)$

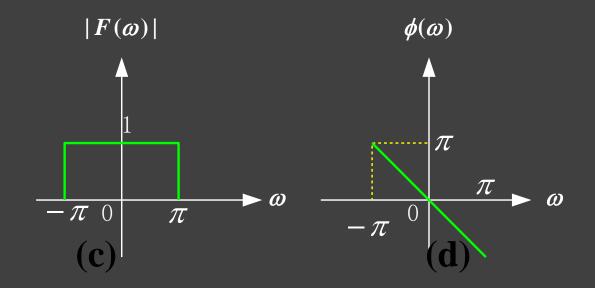




幅频、相频特性



幅频、相频特性分别如图 (c)(d)所示。



幅度频谱无变化,只影响相位频谱

相移
$$\omega t_0 \begin{cases} 左 & -\omega t_0 \\ 左 & \omega t_0 \end{cases}$$



例3-8



已知信号
$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos t & |t| \le \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$

求该信号的傅里叶变换。

解答

分析:该信号是一个截断函数,我们既可以把该信号看成是周期信号 $(1+\cos t)$ 经过门函数 $G_{2\pi}(t)$ 的截取,也可以看成是 $G_{2\pi}(t)$ 被信号 $(1+\cos t)$ 调制所得的信号.有以下三种解法:

方法一: 利用频移性质

方法二: 利用频域卷积定理

方法三: 利用傅里叶变换的时域微积分特性



方法一: 利用频移性质



利用频移性质:由于

$$f(t) = (1 + \cos t)G_{2\pi}(t)$$

利用欧拉公式,将 $(1+\cos t)$ 化为虚指数信号,

f(t) 就可以看成是门函数 $G_{2\pi}(t)$ 被虚指数信号调制的

结果。在频域上,就相当于对 $G_{2\pi}(t)$ 的频谱进行平移。

$$f(t) = (1 + \cos t)G_{2\pi}(t)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}\right)G_{2\pi}(t)$$

又因

$$G_{2\pi}(t) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{Sa}(\pi\omega) = \frac{2\sin \pi\omega}{\omega}$$





所以根据频移性质,可得

$$F(\omega) = F[f(t)]$$

$$= \frac{2\sin \pi\omega}{\omega} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\sin \pi(\omega - 1)}{\omega - 1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\sin \pi(\omega + 1)}{\omega + 1}$$

$$= -\frac{2\sin \pi\omega}{\omega}$$

方法二: 用频域卷积定理



将 f(t)看成是信号 $(1+\cos t)$ 经过窗函数 $G_{2\pi}(t)$ 的截取,即时域中两信号相乘

$$f(t) = (1 + \cos t)G_{2\pi}(t)$$

根据频域卷积定理有

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F[1 + \cos t] * F[G_{2\pi}(t)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)\right]*\frac{2\sin\pi\omega}{\omega}$$

$$=-\frac{2\sin\pi\omega}{\omega(\omega^2-1)}$$

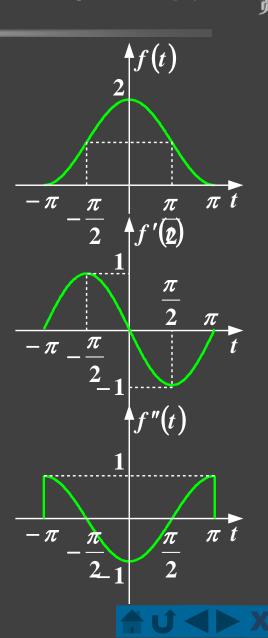


方法三: 利用傅里叶变换的时域微积分特势

$$f(t), f'(t), f''(t)$$
的波形为:

由图可知

$$f''(t) = -\cos t G_{2\pi}(t)$$
$$= -[f(t) - G_{2\pi}(t)]$$





对上式两端取傅里叶变换,可得

$$(j\omega)^2 F(\omega) = -\left[F(\omega) - \frac{2\sin\pi\omega}{\omega}\right]$$

即

$$(1-\omega^2)F(\omega) = \frac{2\sin \pi\omega}{\omega}$$

由于f'(t)和f''(t)均为能量信号,其傅里叶变换在 $\omega = 0$ 处都等于0,根据时域积分特性, $F(\omega)$ 中不可能含有 $\delta(\omega)$ 项,因此可将 $(1-\omega^2)$ 项移到方程右边,即

$$F(\omega) = -\frac{2\sin \pi\omega}{\omega(\omega^2 - 1)}$$



例3-9



求信号f(t) = Sa(100t)的频宽(只计正频率部分),若对 f(t)进行均匀冲激抽样,求奈奎斯特频率 f_N 和奈奎斯特周期 T_N 。

解答

(1)要求出信号的频宽,首先应求出信号的傅里叶变换 $F(\omega)$

已知

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega \tau}{2} = 100\omega, \text{则} \tau = 200$$

$$\therefore G_{200}(t) \leftrightarrow 200 \operatorname{Sa}(100\omega)$$



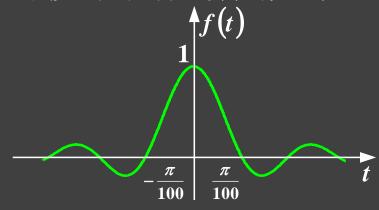


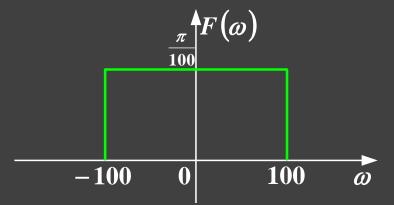
$$\frac{1}{200}G_{200}(t) \leftrightarrow \operatorname{Sa}(100\omega)$$

利用傅里叶变换的对称性

Sa(100t)
$$\leftrightarrow 2\pi \cdot \frac{1}{200} G_{200}(\omega) = \frac{\pi}{100} G_{200}(\omega)$$

f(t)的波形和频谱图如下





所以信号的频带宽度为

$$\therefore f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \text{Hz}$$

$$\omega_m = 100 \, \text{rad/s}$$





最高抽样频率(奈奎斯特频率)为

$$f_{N} = 2f_{m} = \frac{100}{\pi} \text{Hz}$$

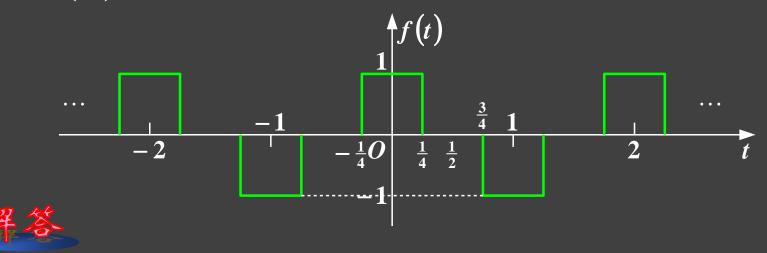
奈奎斯特间隔 (即最大允许抽样间隔) 为

$$T_N = \frac{1}{f_N} = \frac{\pi}{100}$$
s

例3-10



已知周期信号f(t)的波形如下图所示,求f(t)的傅里叶变换 $F(\omega)$ 。



分析: 求信号的傅里叶变换一般有两种解法。

方法一: 将信号转化为单周期信号与单位冲激串 $\delta_T(t)$

的卷积,用时域卷积定理来求解;

方法二: 利用周期信号的傅里叶级数求解。



方法一



将信号转化为单周期信号与单位冲激串的卷积。

$$\iint_{\frac{1}{2}} f_1(t) = G_{\frac{1}{2}}(t) * \left[\delta(t) - \delta(t-1) \right] \leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Sa} \left(\frac{\omega}{4} \right) \left(1 - e^{-j\omega} \right)$$

易知f(t)的周期为2,则有

$$f(t) = f_1(t) * \delta_T(t) \qquad T = 2$$

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega) \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\omega - n\pi)$$





由时域卷积定理可得

$$F(\omega) = F[f_1(t)] \cdot F[\delta_T(t)]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Sa} \left(\frac{\omega}{4}\right) \left(1 - e^{-j\omega}\right) \cdot \sum_{n = -\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - n\pi)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n = -\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \left(1 - e^{-jn\pi}\right) \delta(\omega - n\pi)$$

$$= 2 \sum_{n = -\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \left[1 - (-1)^n\right] \delta(\omega - n\pi)$$



方法二:利用周期信号的傅里叶级数求解 "

f(t)的傅里叶级数为

$$F_{n} = \frac{1}{T} \int_{T} f(t) \cdot e^{-j\omega_{1}t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[G_{\frac{1}{2}}(t) - G_{\frac{1}{2}}(t-1) \right] e^{-jn\pi t} dt$$

$$= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\pi} \left[1 - (-1)^{n} \right]$$

所以

$$F(\omega) = F[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\pi)$$
$$= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n} [1 - (-1)^n] \delta(\omega - n\pi)$$



第四章 拉氏变换、连续时间系统的s域分析



- 一. 拉普拉斯变换 {拉氏变换的<u>定义</u> 典型信号的拉氏变换
- 二.单边拉氏变换逆变换的求法 { 围线积分法
- 三. 拉氏变换的基本性质
- 四. 用拉普拉斯变换法分析电路
- 五. 系统函数 系统函数的定义



例题



- 例题1: 求拉氏变换
- 例题2: 求拉氏变换,拉氏变换的性质
- 例题3: 拉氏变换的微分性质
- 例题4: 系统函数, 求解系统的响应
- 例题5: 用拉氏变换法分析电路

例4-1



求下列函数的拉氏变换 f(t) = tu(t-1)

分析

拉氏变换有单边和双边拉氏变换,为了区别起见,本书以F(s)表示 f(t) 单边拉氏变换,以 $F_{B}(s)$ 表示 f(t) 双边拉氏变换.若文字中未作说明,则指单边拉氏变换.单边拉氏变换只研究 $t \geq 0$ 的时间函数,因此,它和傅里叶变换之间有一些差异,例如在时移定理,微分定理和初值定理等方面.本例只讨论时移定理.请注意本例各函数间的差异和时移定理的正确应用。

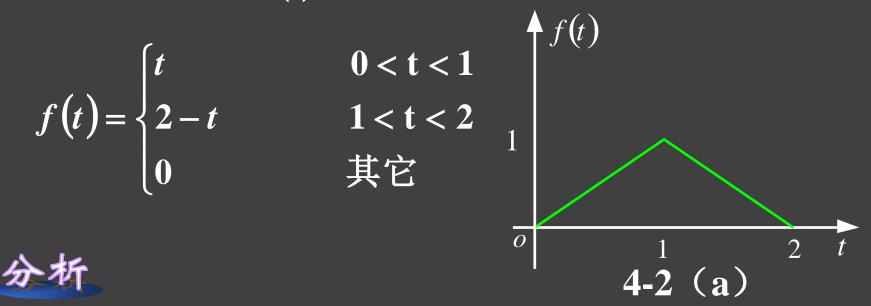
解答

$$F(s) = L[tu(t-1)] = L[(t-1)u(t-1) + u(t-1)] = \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)e^{-s}$$

例4-2



求三角脉冲函数 f(t)如图4-2(a)所示的象函数



和傅里叶变换类似,求拉氏变换的时,往往要借助基本信号的拉氏变换和拉氏变换的性质,这比按拉氏变换的定义式积分简单,为比较起见,本例用多种方法求解。







方法一: 按定义式求解

方法二: 利用线性叠加和时移性质求解

方法三: 利用微分性质求解

方法四: 利用卷积性质求解



方法一: 按定义式求解



$$F(s) = \int_{0_{-}}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0_{-}}^{1} te^{-st}dt + \int_{1}^{2} (2-t)e^{-st}dt$$

$$= t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_{0_{-}}^{1} + \int_{0_{-}}^{1} \frac{1}{s}e^{-st}dt + 2\int_{0_{-}}^{1} e^{-st}dt - \int_{1}^{2} te^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^{2}}e^{-s} + \frac{1}{s^{2}} - \frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^{2}}e^{-s}$$

$$= \frac{1}{s^{2}}(1-e^{-s})^{2}$$



方法二: 利用线性叠加和时移性质求解



由于

$$f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

$$L[tu(t)] = \frac{1}{s^{2}}$$

$$L[f(t-t_{0})] = F(s)e^{-st_{0}}$$

于是

$$F(s) = \frac{1}{s^{2}} \left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s} \right)$$
$$= \frac{1}{s^{2}} \left(1 - e^{-s} \right)^{2}$$



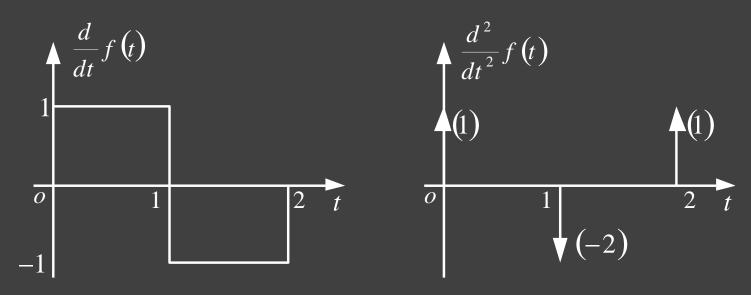
方法三: 利用微分性质求解



分析

信号的波形仅由直线组成,信号导数的象函数容易求得,或者信号经过几次微分后出现原信号,这时利用微分性质比较简单。

将f(t)微分两次,所得波形如图4-2(b)所示







$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = L\left[\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)\right] = (1 - e^{-s})^2$$

根据微分性质

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - f'(0^-) - sf(0^-)$$

由图4-2(b)可以看出

$$f(0^{-})=0, \qquad f'(0^{-})=0$$

于是

$$s^2F(s) = (1-e^{-s})^2$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 - e^{-s}\right)^2$$



方法四: 利用卷积性质求解

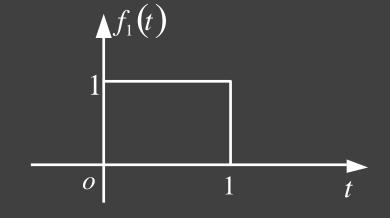


f(t) 可看作是图4-2(c) 所示的矩形脉冲 $f_1(t)$ 自身的

$$f(t) = f_1(t) * f_1(t)$$

于是,根据卷积性质

$$F(s) = F_1(s)F_1(s)$$



而

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \left(1 - e^{-s} \right)$$

所以

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 - e^{-s}\right)^2$$



例4-3



应用微分性质求图4-3(a)中的 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 象函数下面说明应用微分性质应注意的问题,图4-3(b)是 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 的导数 $f_1'(t)$, $f_2'(t)$, $f_3(t)$ 的波形。

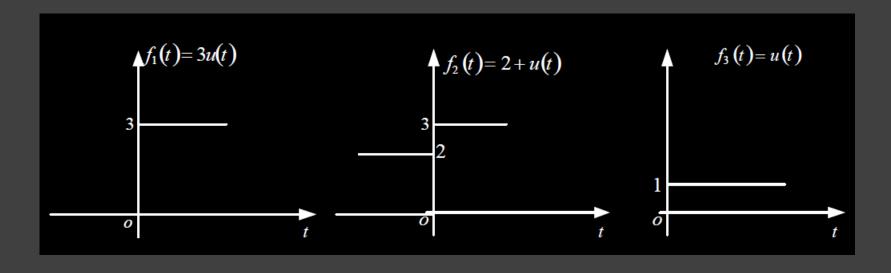
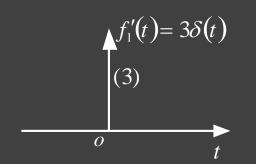


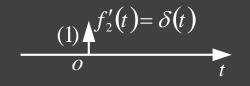
图4-3 (a)













说明

图4-4 (b)

(1) 对于单边拉氏变换,由于 $f_1(t) = f_2(t)u(t)$, 故二者的象 函数相同,即

$$F_1(s) = F_2(s) = \frac{3}{s}$$

$$(2)$$
虽然 $F_1(s) = F_2(s)$,但 $f_1(t) \neq f_2(t)$,因而
$$L[f_1'(t)] \neq L[f_2'(t)]$$



对于 $f_1(t)$,由于 $f_1(0)=0$,故



$$L[f_1'(t)] = sF(s) - 0 = 3$$

对于
$$f_2(t)$$
, 由于 $f_2(0)=2$, 故

$$L[f_2'(t)] = sF(s) - 2 = 1$$

(3)虽然
$$f_2(t)$$
和 $f_3(t)$ 一阶导数相同,但 $f_2(0_-)=2$, $f_3(0_-)=0$,

因此

$$f_2(t) = \int_0^t \delta(x) dx + f_2(0) = \int_0^t \delta(x) dx + 2$$

$$f_3(t) = \int_0^t \delta(x) dx + f_3(0) = \int_0^t \delta(x) dx$$

因而

$$F_2(s) = \frac{1}{s} F[\delta(t)] + \frac{1}{s} f_2(0) = \frac{3}{s}$$

$$F_3(s) = \frac{1}{s} F[\delta(t)] + \frac{1}{s} f_3(0) = \frac{1}{s}$$

这是应用微分性质应特别注意的问题。





由图4-3(b)知

$$L[f_1'(t)] = sF(s) - 0 = 3$$
 $\square F_1(s) = \frac{3}{s}$

$$L[f_2'(t)] = sF(s) - 2 = 1$$
 $\bigcup F_2(s) = \frac{3}{s}$

$$f_3(t) = \int_{0_{-}}^{t} \delta(x) dx \qquad \text{MIF}_3(s) = \frac{1}{s} F[\delta(t)] + \frac{1}{s} f_3(0_{-}) = \frac{1}{s}$$

例4-4



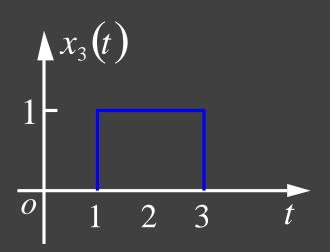
某线性时不变系统,在非零状条件不变的情况下,三种 不同的激励信号作用于系统

当输入
$$x_1(t) = \delta(t)$$
时,系统的输出为 $y_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$;

当输入
$$X_2(t) = u(t)$$
时,系统的输出为 $Y_2(t) = 3e^{-t}u(t)$;

当输入x3(t)为图中所示的矩形脉冲时,求此时系统的输出

 $y_3(t)$







$$y_1(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zi}(t) + h(t)$$



$$y_2(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}^{(-1)}(t) = y_{zi}(t) + h^{(-1)}(t) = y_{zi}(t) + g(t)$$

$$y_1(t) - y_2(t) = h(t) + h^{(-1)}(t) = \delta(t) - 2e^{-t}$$

$$H(s) - \frac{1}{s}H(s) = 1 - \frac{2}{s+1}$$

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$$

$$y_{zi}(t) = y_1(t) - h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

阶跃响应

$$g(t) = y_2(t) - y_{zi}(t) = e^{-t}u(t)$$

则

$$y_3(t) = y_{zi}(t) + g(t-1) - g(t-3)$$

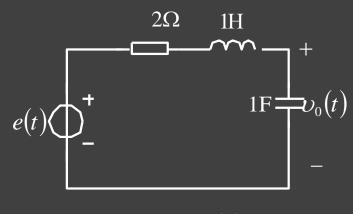
= $2e^{-t}u(t) + e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-3)}u(t-3)$



例4-5



电路如图4-5(a)所示



(1) 求系统的冲激响应。

- 4-5(a)
- (2) 求系统的起始状态 $i_L(0_-)$, $\upsilon_C(0_-)$, 使系统的零输入响应等于冲激响应。
- (3) 求系统的起始状态,使系统对 u(t)的激励时的完全响应仍为u(t)





(1) 求系统的冲激响应。



系统冲激响应h(t)与系统函数H(s)是一对拉氏变换的关系。 对H(s)求逆变换可求得h(t),这种方法比在时域求解微分方程简便。

利用s域模型图4-5(b)可直写出图4-5(a)电路的系统函数

判例第

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$
神激响应 $\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

 $h(t) = L^{-1}[H(s)] = te^{-t}u(t)$



(2) 求系统的起始状态



为求得系统的零输入响应,应写出系统的微分方程或给出带有初值的s域模型。下面我们用s域模型求解。图4-5(a)电路的s域模型如图4-5(b)。

由图4-5(b)可以写出

$$V_{o}(s) = \frac{E(s) - \frac{1}{s} \upsilon_{c}(0_{-}) + i_{L}(0_{-})}{2 + s + \frac{1}{s}} + \frac{1}{s} \upsilon_{c}(0_{-})$$

$$= \frac{E(s)}{s^{2} + 2s + 1} + \frac{(s + 2)\upsilon_{c}(0_{-}) + i_{L}(0_{-})}{s^{2} + 2s + 1}$$
零狀态响应 零输入响应

☆ U < > X



上式中第二项只和系统起始状态有关,因此该项是零输入响应的拉氏变换。依题意的要求,该项应和H(s)相等,从而得

$$(s+2)\upsilon_{C}(0_{-})+i_{L}(0_{-})=1$$

故系统的起始状态

$$\upsilon_{C}(0_{-}) = 0$$

$$i_{L}(0_{-}) = 1$$



说明



通过本例可以看出,改变系统的起始状态可以使系统的完全响应满足某些特定要求。本质上,系统的零输入响应完全由系统的起始状态决定,对一个稳定系统而言,零输入响应是暂态响应中的一部分,因此,改变系统的起始状态只能改变系统的暂态响应,使暂态响应满足某些特定要求,例如,本例要求暂态响应为零。

(3) 求系统的起始状态,



当激励信号e(t) = u(t)根据式(1)求得完全响应

$$V_{o}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{s^{2} + 2s + 1} + \frac{(s + 2)\upsilon_{c}(0_{-}) + i_{L}(0_{-})}{s^{2} + 2s + 1}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{-s - 2}{s^{2} + 2s + 1} + \frac{(s + 2)\upsilon_{c}(0_{-}) + i_{L}(0_{-})}{s^{2} + 2s + 1}$$
(2)

由该式容易看出,要使完全响应 $v_o(t)$ 等于激励信号u(t),有

$$(s+2)\upsilon_{C}(0_{-})+i_{L}(0_{-})-s-2=0$$

从而求得系统的起始状态

$$\upsilon_{C}(\mathbf{0}_{-}) = \mathbf{1}$$

$$i_{L}(\mathbf{0}_{-}) = \mathbf{0}$$



第五章 傅里叶变换应用



一.系统函数

$$f(x) = \begin{cases} h(t) \to H(j\omega) \\ \text{从频域电路模型按系统函数的定义式求} \end{cases}$$
 求法: $H(j\omega) = \frac{系统零状态响应的傅立叶变换}{系统激励的傅立叶变换}$

应用: {研究信号的基本传输特性: <u>无失真传输</u> 建立滤波器的基本概念: <u>理想低通滤波器</u> <u>频率响应特性</u>的物理意义

二.调制与解调



例题



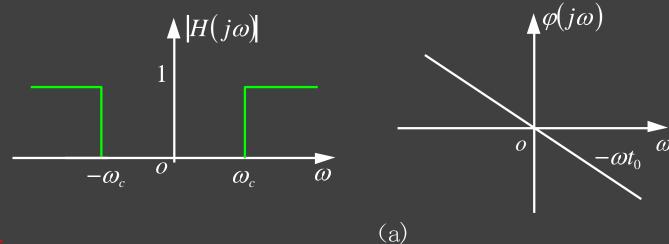
- 5例题1: 由系统函数求冲激响应
- 5例题2: 求系统函数及零状态响应
- 5例题3: 正弦信号作为输入的稳态响应
- 5例题4: 希尔伯特变换
- 5例题5: 抽样,低通滤波器,调幅



例5-1



题图(a)是理想高通滤波器的幅频特性和相频特性, 求此理想高通滤波器的冲激响应。



解答

因为

$$|H(j\omega)| = 1 - [u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]$$
$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$





所以

$$H(j\omega) = \{1 - [u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]\}e^{-j\omega t_0}$$

$$= e^{-j\omega t_0} - [u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]e^{-j\omega t_0}$$

$$h(t) = \delta(t - t_0) - \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

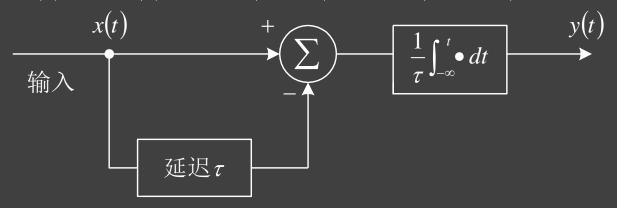
例5-2



系统的结构如下图所示,这是一种零阶保持器,它广泛 应用在采样控制系统中。

(1)求出该系统的系统函数 $H(j\omega)$ 。

(2)若输入
$$x(t) = \delta(t) + 2\delta(t-\tau) + 3\delta(t-2\tau)$$
,求输出 $y(t)$ 。



解答

(1)
$$h(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{t} [\delta(t) - \delta(t - \tau)] dt$$
$$= \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t - \tau)]$$





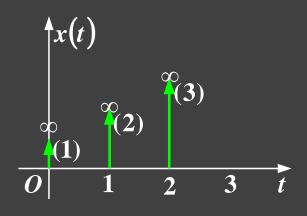
$$\therefore H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau} \left(1 - e^{-j\omega\tau}\right)$$

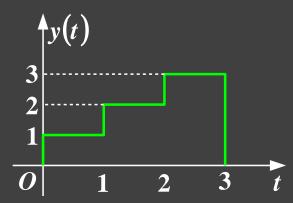
$$(2)y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$= \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t - \tau)]$$

$$+ \frac{2}{\tau} [u(t - \tau) - u(t - 2\tau)]$$

$$+ \frac{3}{\tau} [u(t - 2\tau) - u(t - 3\tau)]$$







例5-3



已知某系统的系统函数 $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 5}$ 输入信号x(t)为

 $(1)\cos 3t$, $(2)\sin t$, 试求系统的零状态响应y(t)。

解答

(1) 方法1

$$X(\omega) = \pi \left[\delta(\omega + 3) + \delta(\omega - 3) \right]$$

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 5}$$

$$\therefore Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$= \frac{\pi}{5 - j3} \delta(\omega + 3) + \frac{\pi}{5 + j3} \delta(\omega - 3)$$





$$=\frac{\pi}{\sqrt{5^2+3^2}}e^{j\tan^{-1}\frac{3}{5}}\delta(\omega+3)+\frac{\pi}{\sqrt{5^2+3^2}}e^{-j\tan^{-1}\frac{3}{5}}\delta(\omega-3)$$

$$: \delta(\omega+3) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}e^{-3t} \qquad \delta(\omega-3) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}e^{3t}$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{2\sqrt{5^2 + 3^2}} e^{j\left(-3t + \tan^{-1}\frac{3}{5}\right)} + \frac{1}{2\sqrt{5^2 + 3^2}} e^{j\left(3t - \tan^{-1}\frac{3}{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5^2 + 3^2}} \cos \left(3t - \tan^{-1}\frac{3}{5}\right)$$

方法2



方法2



$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 5} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 3^2}} e^{j\tan^{-1}\frac{\omega}{5}}$$

即幅度加权
$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2+3^2}}$$
 ,相移 $-\tan^{-1}\frac{\omega}{5}$

:. cos 3t作为输入的输出为

$$\frac{1}{\sqrt{3^2+5^2}}\cos\!\left(3t-\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)$$

(2) 同理 $\sin t$ 作为输入的输出为

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+5^2}}\sin\left(t-\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$$



例5-4



试利用另一种方法证明因果系统的 $R(j\omega)$ 与 $X(j\omega)$ 被希尔伯特变换相互约束。

(1)已知h(t) = h(t)u(t), $h_e(t)$ 和 $h_o(t)$ 分别为h(t)的偶分量和奇分量, $h(t) = h_e(t) + h_o(t)$, 证明

$$h_e(t) = h_o(t)\operatorname{sgn}(t)$$
 $h_o(t) = h_e(t)\operatorname{sgn}(t)$

(2)由傅氏变换的奇偶虚实关系已知

$$H(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_e(t)] = R(j\omega) \qquad \mathcal{F}[f_o(t)] = jX(j\omega)$$

利用上述关系<u>证明</u> $R(j\omega)$ 与 $X(j\omega)$ 之间满足希尔伯特变换关系。







根据定义

$$h_e(t) = \frac{1}{2} [h(t) + h(-t)];$$
 $h_o(t) = \frac{1}{2} [h(t) - h(-t)]$
所以
$$h_e(t) \operatorname{sgn}(t) = \frac{1}{2} [h(t) + h(-t)] \cdot \operatorname{sgn}(t)$$

$$= \frac{1}{2} [h(t) + h(-t)] \cdot [u(t) - u(-t)]$$

$$= \frac{1}{2} [h(t)u(t) - h(t)u(-t) + h(-t)u(t) - h(-t)u(-t)]$$

$$\therefore h(t) = h(t)u(t)$$

h(-t)u(t) = 0

 $\therefore h(t)u(-t)=0$



$$h_e(t)\operatorname{sgn}(t) = \frac{1}{2} [h(t)u(t) - h(-t)u(-t)]$$

$$= \frac{1}{2} [h(t) - h(-t)]$$

$$= h_o(t)$$

同理
$$h_e(t)\operatorname{sgn}(t) = h_o(t)$$

<u>(2)</u>





$$R(j\omega) = \mathcal{F}[f_e(t)] = \mathcal{F}[f_o(t)\operatorname{sgn}(t)]$$

根据频域卷积定理

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathcal{F}[f_o(t)] * \mathcal{F}[\text{sgn}(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} jX(j\omega) * \frac{2}{j\omega}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

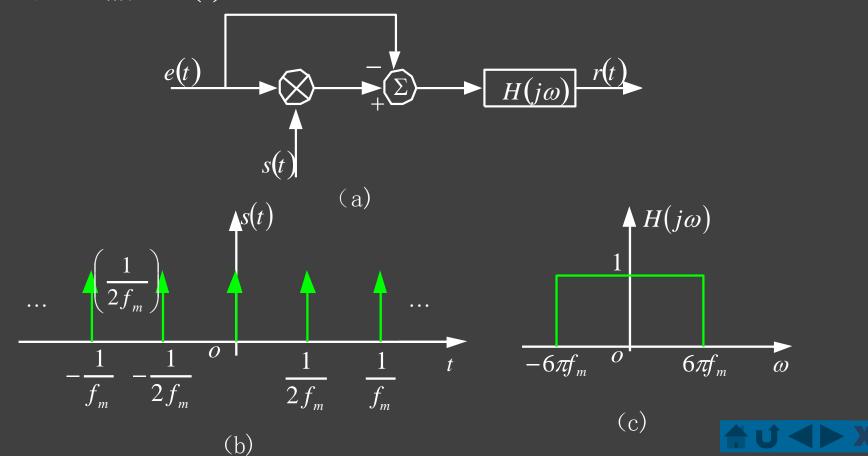
同理
$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$



例5-5



图(a)所示为幅度调制系统,输入信号e(t)为限带实信号,带宽为 f_m ; s(t)为周期性冲激序列,如图(b)所示; $H(j\omega)$ 为理想低通滤波器,带宽为3 f_m 如图(c)所示,,求系统的输出r(t)。



解:



e(t)与s(t)相乘相当于以奈奎斯特抽样率对e(t)进行理想抽样,所以乘法器输出可表示为

$$y_{s}(t) = e(t) \cdot \frac{1}{2f_{m}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(t - \frac{n}{2f_{m}} \right)$$

其对应的傅里叶变换为

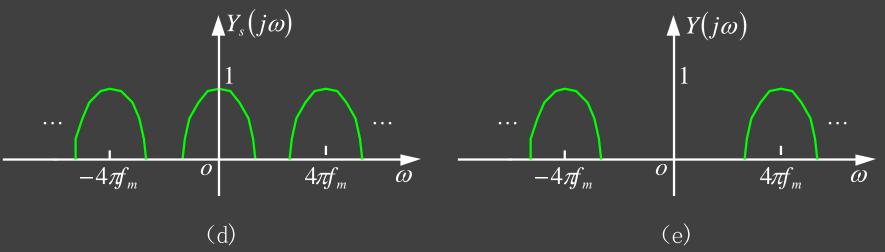
$$Y_{s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} E(\omega) * \frac{1}{2f_{m}} \cdot 4\pi f_{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 4n\pi f_{m})$$

$$= E(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 4n\pi f_{m})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(\omega - 4n\pi f_{m})$$



因为抽样满足奈奎斯特抽样率,因而e(t)被抽样后, $y_s(t)$ 信号对应的频谱不会重叠。如图(d)所示



抽样信号与原信号在加法器中进行减法运算,因而加法器输出信号的傅里叶变换为

$$Y(\omega) = Y_s(\omega) - E(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(\omega - 4n\pi f_m) - E(\omega)$$

频谱 $Y(j\omega)$ 如图(e)所示

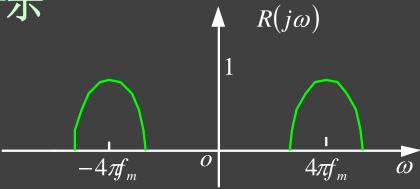




这样总的输出信号的傅立叶变换为

$$R(\omega) = Y(\omega)H(\omega) = E(\omega + 4\pi f_m) + E(\omega - 4\pi f_m)$$

频谱 $R(j\omega)$ 如图(f)所示



(f)

因此系统的输出为

$$r(t) = F^{-1} \left[E(\omega + 4\pi f_m) + E(\omega - 4\pi f_m) \right]$$

$$= e(t) e^{-j4\pi f_m t} + e(t) e^{j4\pi f_m t}$$

$$= e(t) \left[e^{-j4\pi f_m t} + e^{j4\pi f_m t} \right] = 2e(t) \cos 4\pi f_m t$$

这是一个抑制载波的调幅系统



第六章信号的矢量空间分析



- 一.信号的正交函数分解
- 二.完备正交函数分集、帕塞瓦尔定理
- 三.相关
- 四. 能量谱和功率谱
- 五.相关、能量谱和功率谱的应用

线性系统的传输特性

匹配滤波器

码分复用、码分多址通信



例题



- 6例题1: 信号的正交分解
- 6例题2: 相关函数
- 6例题3: 功率密度谱
- 6例题4: 能量密度谱
- 6例题5: 匹配滤波器

例6-1

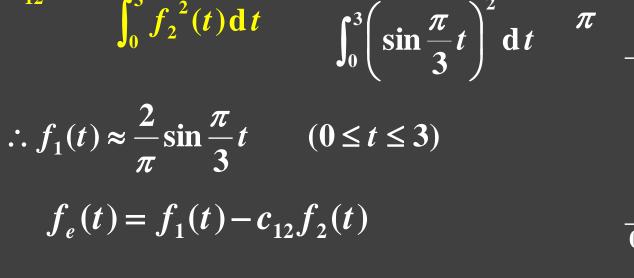
用正弦波逼近三角函数,..

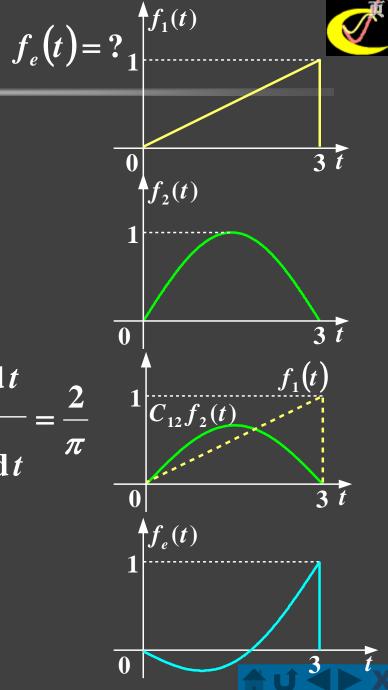
$$f_1(t) = \frac{t}{3}, \ 0 \le t \le 3$$

$$f_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right), \ 0 \le t \le 3$$

$$c_{12} = \frac{\int_0^3 f_1(t) \cdot f_2(t) \, \mathrm{d} t}{\int_0^3 f_2^2(t) \, \mathrm{d} t} = \frac{\int_0^3 \frac{t}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} t \, \mathrm{d} t}{\int_0^3 \left(\sin \frac{\pi}{3} t\right)^2 \, \mathrm{d} t} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore f_1(t) \approx \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} t \qquad (0 \le t \le 3)$$





例6-2 讨论 $f(t) = \cos \omega_0 t$ 与 $g(t) = \sin \omega_0 t$ 的相关性。



解答 f(t)与g(t)的互相关函数为

$$R_{fg}\left(\tau\right) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_{0} t \sin \omega_{0} \left(t - \tau\right) dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[-\sin \omega_0 \tau + \sin \left(2\omega_0 t - \omega_0 \tau \right) \right] dt$$

$$= -\frac{\sin \omega_0 \tau}{2} + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \left(2\omega_0 t - \omega_0 \tau\right) dt$$

$$= -\frac{\sin \omega_0 \tau}{2} + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T-\tau}^{T-\tau} \sin \omega_0 t' dt'$$

$$(t' = 2t - \tau)$$

$$= -\frac{\sin \omega_0 \tau}{2} + \lim_{T \to \infty} \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0 T} \bigg|_{-T - \tau}^{T - \tau}$$

$$=-rac{\sin \omega_0 au}{2}$$



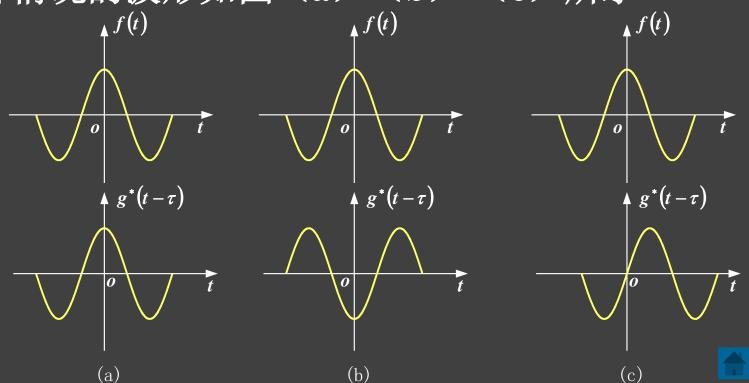
$$(a)R_{fg}\left(-\frac{\pi}{2\omega_0}\right)$$
= 正的最大,二者最相似



$$(b)R_{fg}\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right)$$
=负的最大,二者反极性最相似;

$$(c)R_{fg}(0)=0$$
,二者最不相似正交)。

三种情况的波形如图(a)(b)(c)所示



例6-3



试确定下列信号的功率,并画出它们的功率谱 $A\cos(2000\pi) + B\sin(200\pi)$;

解答

此f(t)信号只含有二个频率成分,所以功率分布在 $\omega_1 = 200\pi, \omega_2 = 2000\pi$ 处

$$\omega_1$$
处功率为
$$\frac{1}{T}\int_0^T (A\cos 200\pi t)^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

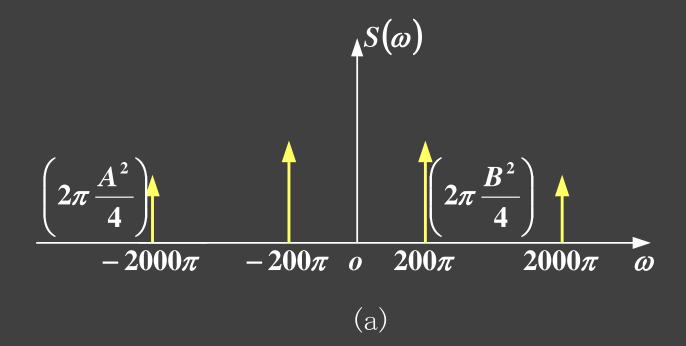
$$\omega_2$$
处功率为
$$\frac{1}{T}\int_0^T (B\cos 2000\pi t)^2 dt = \frac{B^2}{2}$$

总功率为
$$P = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} = \frac{1}{2} (A^2 + B^2)$$





功率谱按 $\pm \omega_1$, $\pm \omega_2$ 分布,在各频率处功率分别为 $\frac{A^2}{4}$, $\frac{B^2}{4}$ 。功率谱如图(a)所示



方法二



$$f(t) = A\cos(2000\pi t) + B\sin(200\pi t)$$

$$=\frac{A}{2}\left(e^{j\omega_{2}t}+e^{-j\omega_{2}t}\right)+\frac{B}{2j}\left(e^{j\omega_{1t}}-e^{-j\omega_{1}t}\right)$$
功率谱(功率密度)为:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$=2\pi \left\{ \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^{2} \left[\delta(\omega-10\omega_{1})+\delta(\omega+10\omega_{1})\right]}{+\left(\frac{B}{2}\right)^{2} \left[\delta(\omega-\omega_{1})+\delta(\omega+\omega_{1})\right]} \right\}$$

总功率为:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{A^{2}}{2} + \frac{B^{2}}{2} = \frac{1}{2} (A^{2} + B^{2})$$

例6-4

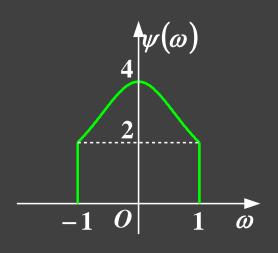


信号 $e(t) = 2e^{-t}u(t)$ 通过截至频率 $\omega_c = 1$ 的理想低通滤波器 试求响应的能量谱密度,以图形示出。

$$\psi_e(\omega) = |E(\omega)|^2 = \frac{4}{\omega^2 + 1}$$
 响应信号的能量谱密度为:

$$\psi(\omega) = |H(\omega)|^2 |E(\omega)|^2$$

$$= \frac{4}{\omega^2 + 1} [u(\omega + 1) - u(\omega - 1)]$$





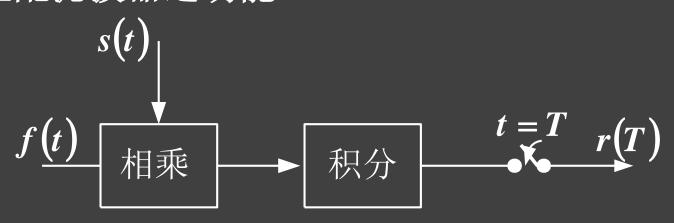
例6-5



若匹配滤波器输入信号为f(t),冲激响应为

$$h(t) = s(T-t)$$
 , \Re :

- (1) 给出描述输出信号r(t)的表达式;
- (2) 求 t = T时刻的输出 r(t) = t(T);
- (3) 由以上结果证明,可利用题图(a)的框图来实现 匹配滤波器之功能。







(1)
$$r(t) = f(t) \otimes h(t) = f(t) \otimes s(T-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot s(T-t+\tau) d\tau$$

(2)
$$r(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot S(T - T + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot s(\tau) d\tau$$

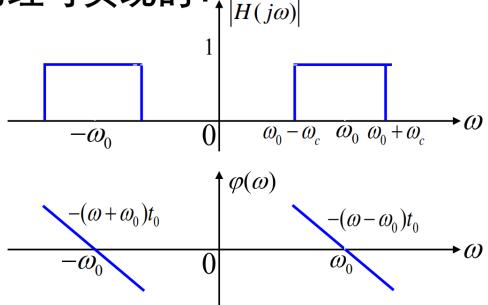
(3) 由题图(a) 可知:

在开关前:
$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot s(t) d\tau$$

经开关后,
$$t = T$$
 时有输出 $r(T) = \int_{-\infty}^{T} f(t) \cdot s(t) dt$

等式右边是定积分,结果与变量无关。

一个理想带通滤波器的幅度特性与相移特性如图所示。求它的冲激响应,画响应波形,说明此滤波器是否是物理可实现的? $_{|H(j\omega)|}$



解:本题可利用理想低通滤波器和傅里叶变换频移性质求解。 定义

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

其逆变换 $h_1(t)=F^{-1}[H_1(j\omega)]=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$ 。根据题图所示滤波器频响特性,

有 $H(j\omega)=H_1[j(\omega+\omega_c)]+H_1[j(\omega-\omega_c)]$,利用傅里叶变换的频移特性有

$$h(t) = F^{-1} [H(j\omega)]$$

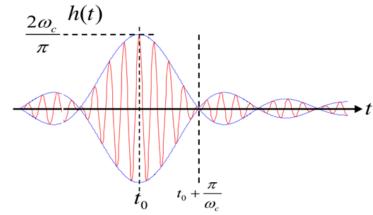
$$= F^{-1} \{H_1[j(\omega + \omega_0)]\} + F^{-1} \{H_1[j(\omega - \omega_0)]\}$$

$$= h_1(t) e^{-j\omega_0 t} + h_1(t) e^{j\omega_0 t}$$

$$= 2h_1(t) \cos(\omega_0 t)$$

$$= \frac{2\omega_c}{\pi} \cos(\omega_0 t) Sa[\omega_c(t - t_0)]$$

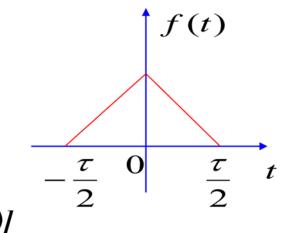
冲激响应 h(t) 的波形如右图所示

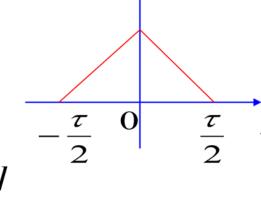


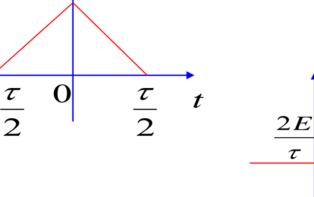
从时域看,物理可实现系统是因果的,即冲激响应须满足 h(t)=0, $\forall t < 0$ 。因此本系统物理不可实现。

4 求图示波形的频谱
$$f(t) = (E - \frac{2E}{\tau}t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{2E}{\tau}t)]$$

$$f(t) = (E - \frac{2E}{\tau}t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2})]$$
$$+ (E + \frac{2E}{\tau}t)[\varepsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t)]$$

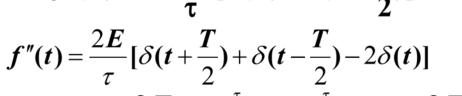






 $f'(t) = -\frac{2E}{\tau} \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2}) \right] + \frac{2E}{\tau} \left[\varepsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t) \right] \frac{\tau}{2}$

$$(t) = (E - \frac{2E}{\tau}t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2}t)] + (E + \frac{2E}{\tau}t)[\varepsilon(t + \frac{\tau}{2}t) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2}t)]$$



$$f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[\delta(t + \frac{1}{2}) + \delta(t - \frac{1}{2}) - 2\delta(t)\right]$$

$$F[f''(t)] = \frac{2E}{\tau} \left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - 2J\right] = \frac{2E}{\tau} \left[2\cos(\omega\frac{\tau}{2}) - 2J\right] = -\frac{8E}{\tau}\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$(e^{-\tau} + e^{-\tau})^{2} = -\frac{8E}{\tau} \sin^{2}(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$f''(t)$$

$$\frac{\tau}{\tau}$$

$$\frac{\tau}{2}$$

$$(-\frac{4E}{\tau})$$

由微分性:
$$(j\omega)^2 F(j\omega) = -\frac{8E}{\tau} \sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{-\frac{8E}{\tau} \sin^2(\frac{\omega\tau}{4})}{(j\omega)^2} = \frac{E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$