



PHS4700
Physique pour les applications multimédia

**PAGE COUVERTURE OBLIGATOIRE POUR TOUS LES
DEVOIRS**

Numéro du groupe : 01

Numéro de l'équipe :13

Numéro de devoir : 3

Nom: Li	Prénom : Bai Wu	matricule: 2179304
Signature :		
Li, Bai Wu		
Nom: Maguin	Prénom : Dimitri	matricule: 1941849
Signature :		
<i>Dimitri Maguin</i>		
Nom: Sellami	Prénom : Mohamed Sameh	matricule: 1917426
Signature :		
<i>SellamiMohamedSa meh</i>		
Nom: Darveau	Prénom : Audry	matricule: 2211388
Signature :		
<i>Audry Darveau</i>		

Introduction

Ce rapport a pour objectif d'étudier la trajectoire d'une balle soumise à diverses forces physiques en utilisant une simulation numérique. Grâce à une approche basée sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, nous modélisons le comportement dynamique de la balle dans un environnement réaliste, prenant en compte sa vitesse, position, sa et les forces appliquées à différents instants.

La simulation repose sur les lois fondamentales de la mécanique et permet d'explorer plusieurs configurations physiques, notamment la gravité, la résistance de l'air, et l'effet Magnus dû à la rotation de la balle. En ajustant les paramètres de la simulation, nous pouvons analyser comment ces forces influencent la trajectoire de la balle et la vitesse de son centre de masse.

En plus de fournir des informations précises sur la position et la vitesse de la balle, cette simulation nous permet de tester différents scénarios représentatifs de conditions réelles. Ainsi, cette étude vise non seulement à vérifier les principes physiques sous-jacents, mais aussi à comprendre leur impact sur le mouvement de la balle dans des situations complexes.

Théorie et équation

Dans cette section, nous présentons nos démarches pour faire la simulation de la trajectoire de la balle. Notez que le référentiel choisi pour tous nos simulations est le point localisée au sol et alignée avec le coin de la table situé à droite d'un joueur placé derrière la table.

D'abord, on définit un vecteur contenant les états initiaux de la balle :

$$\vec{q}_0 = \begin{bmatrix} \vec{v}_{b,0} \\ \vec{r}_{b,0} \\ \vec{\omega}_b \\ \text{vec}(R(0)) \end{bmatrix}$$

où :

- $\vec{v}_{b,0}$ est la vitesse initiale de la balle,
- $\vec{r}_{b,0}$ la position initiale de la balle,
- $\vec{\omega}_b$ la vitesse angulaire de la balle,
- $R(0)$ la matrice de rotation de départ.

La matrice $R(0)$ est définie par :

$$R(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

puisque aucune rotation n'a encore eu lieu par rapport au référentiel.

Ensuite, on définit un vecteur contenant le dérivé de ces états par rapport au temps pour permettre de mettre à jour les états initiaux de la balle :

$$\vec{g}(t) = \frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \vec{a}_b(t) \\ \vec{v}_b(t) \\ \vec{0} \\ \text{vec}(\vec{\omega}R(t)) \end{bmatrix}$$

où :

- $\vec{a}_b(t)$ est l'accélération de la balle,
- $\vec{v}_b(t)$ vitesse de la balle.

Comme la vitesse angulaire de la balle est supposée constante dans nos simulations, sa dérivée par rapport au temps est donc nulle :

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = 0 \rightarrow \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}$$

Le dérivé de la matrice de rotation $R(t)$ est défini comme :

$$\frac{dR(t)}{dt} = \tilde{\omega}R(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\vec{\omega}_{b,z} & \vec{\omega}_{b,y} \\ \vec{\omega}_{b,z} & 0 & -\vec{\omega}_{b,x} \\ -\vec{\omega}_{b,y} & \vec{\omega}_{b,x} & 0 \end{bmatrix} R(t)$$

Enfin, on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, une technique numérique pour résoudre des équations différentielles ordinaires (EDO), pour trouver les états suivants de la balle :

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

où :

- $\vec{q}(t) = \begin{bmatrix} \vec{v}_b(t) \\ \vec{r}_b(t) \\ \vec{\omega}_b \\ \text{vec}(R(t)) \end{bmatrix}$ est l'état de la balle à l'instant t ,
- $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ est l'intervalle de temps entre deux instants consécutifs de calcul,
- $\vec{k}_1 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1})$,
- $\vec{k}_2 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2}\vec{k}_1, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2})$,
- $\vec{k}_3 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2}\vec{k}_2, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2})$,
- $\vec{k}_4 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \Delta t\vec{k}_3, t_{n-1} + \Delta t)$.

Notez que les états suivants de la balle dépendent aussi des options (3) de simulations. Ces options offrent des différents niveaux de réalisme en intégrant diverses forces que la balle peut subir :

$$\sum \vec{F} = \begin{cases} \vec{F}_g, & \text{option} = 1 \\ \vec{F}_g + \vec{F}_v, & \text{option} = 2 \\ \vec{F}_g + \vec{F}_v + \vec{F}_M, & \text{option} = 3 \end{cases}$$

Pour l'option 1, on tient compte seulement de la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = m_b(0, 0, -9.8)^T$$

Tel que m_b est la masse de la balle et -9.8 m/s^2 l'accélération gravitationnelle que la balle subit.

Pour l'option 2, on prend en compte aussi la force de frottement visqueux :

$$\vec{F}_v(\vec{v}_b(t)) = -\frac{1}{2} A \rho C_v |\vec{v}_b(t)| \vec{v}_b(t)$$

Tel que A l'aire efficace sur la balle, ρ la masse volumique de l'air et C_v est le coefficient de frottement visqueux.

Pour l'option 3, on prend aussi en considération la force de l'effet de Magnus :

$$\vec{F}_M(\vec{v}_b(t), \vec{\omega}_b(t)) = 4\pi R_b^3 \rho C_M (\vec{\omega}_b \times \vec{v}_b)$$

Tel que R_b est le rayon de la balle, ρ la masse volumique de l'air et C_M est le coefficient de Magnus.

Pour calculer la trajectoire de la balle jusqu'à ce qu'elle entre en collision avec le filet, la table ou le sol, nous avons utilisé une approche résumée par l'algorithme suivant :

Algorithme Devoir2

```

1       $t_i = [0]$ 
2       $\Delta t = 0.0001$ 
3       $\vec{q}_i = [\vec{q}_0]$ 
4       $n = 0$ 

5      Répéter :
6           $n = n + 1$ 
7           $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ 
8           $\vec{q}_n = \vec{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$ 
9      Tant que la balle n'a pas traversé le filet, la table ou le sol ( $coup = -1$ )

10     Si  $\vec{\epsilon}(\vec{q}_i) \nlessapprox 1 \times 10^{-9}$  :
11          $n = n - 1$ 
12          $\Delta t = \Delta t / 10$ 
13         Aller à ligne 5

14     extraire  $\vec{v}_{b,f}, x, y, z$  de  $\vec{q}_i$ 

15     retourner  $coup, \vec{v}_{b,f}, t_i, x, y, z$ 

```

Notez que pour garantir une précision $\pm 0.001 \text{ m}$ sur les positions finales de la balle en x, y et z, nous avons veillé à ce que la différence entre les positions avant la traversée et après la traversée soit inférieure à $1 \times 10^{-9} \text{ m}$:

$$\epsilon_x = dx = |x_n - x_{n-1}| < 1 \times 10^{-9}$$

$$\epsilon_y = dy = |y_n - y_{n-1}| < 1 \times 10^{-9}$$

$$\epsilon_z = dz = |z_n - z_{n-1}| < 1 \times 10^{-9}$$

Si la balle traverse le filet, on peut réduire la borne supérieure de l'erreur en x :

$$\epsilon_x = \begin{cases} \left| \frac{L_t}{2} - R_b \right|, & \text{si la balle traverse par la gauche.} \\ \left| \frac{L_t}{2} + R_b \right|, & \text{si la balle traverse par la droite.} \end{cases}$$

Si la balle traverse la table ou le sol, la borne supérieure de l'erreur en z est alors :

$$\epsilon_z = \begin{cases} |h_t + R_b - z_{n-1}|, & \text{si la balle traverse la table.} \\ |R_b - z_{n-1}|, & \text{si la balle traverse le sol.} \end{cases}$$

Présentation et analyse des résultats

La tableau 0 présente les conditions initiales de la balle pour réaliser nos simulations.

Tableau 0 : Conditions initiales pour les 4 coups à simuler.

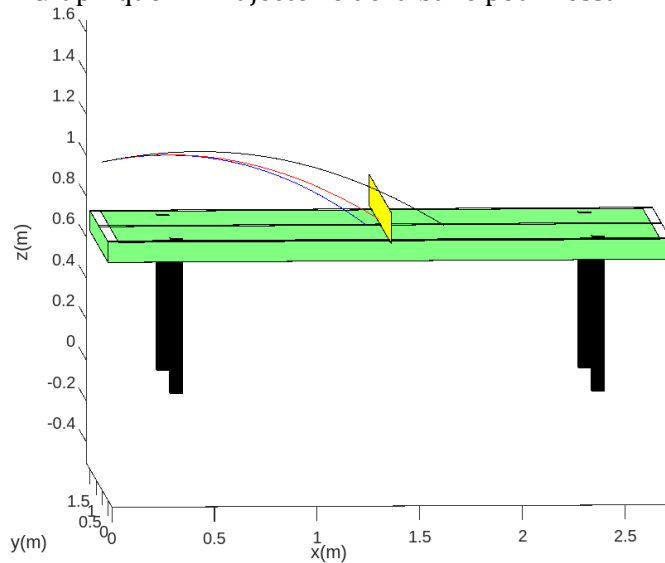
Essai	$\vec{r}_{b,i} (m)$	$\vec{v}_{b,i} (m/s)$	$\vec{\omega}_{b,i} (rad/s)$
1	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.50 \\ 1.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.00 \\ 0.00 \\ 0.80 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ -70.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.40 \\ 1.14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.00 \\ 1.00 \\ 0.20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 100.00 \\ -50.0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 2.74 \\ 0.50 \\ 1.14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5.00 \\ 0.00 \\ 0.20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 100.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.30 \\ 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.00 \\ -2.00 \\ 0.20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 10.00 \\ -100.00 \end{bmatrix}$

Dans la prochaine section, nous présenterons les résultats et l'analyse des simulations.

Tableau 1 : Résultats de l'essai 1.

Option	$t_f (s)$	Coup	$\vec{v}_{b,f} (m/s)$	$\vec{r}_{b,f} (m)$
1	0.33752600	2	$\begin{bmatrix} 4.00000000 \\ 0.00000000 \\ -2.50774500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.35010000 \\ 0.50000000 \\ 0.81179668 \end{bmatrix}$
2	0.35423625	1	$\begin{bmatrix} 3.31676564 \\ 0.00000000 \\ -2.50087169 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.29270098 \\ 0.50000000 \\ 0.77990000 \end{bmatrix}$
3	0.46265970	0	$\begin{bmatrix} 3.42644022 \\ 0.00000000 \\ -2.10258261 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.66692221 \\ 0.50000000 \\ 0.77990000 \end{bmatrix}$

Graphique 1 : Trajectoire de la balle pour l'essai 1.

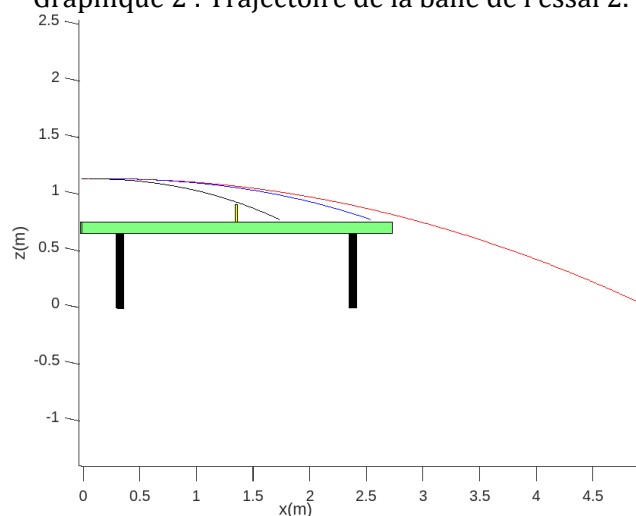


Dans le tableau 1, nous remarquons que la balle a été freinée par la force de frottement visqueux dans l'option 2. Pour cette raison, la balle est restée dans l'air plus longtemps (temps final plus grand). Dans l'option 3, la balle passe par-dessus le filet, donc la force de Magnus semble avoir augmenté la vitesse finale en z de la balle. Rappelons que la force de Magnus est résultante du produit vectoriel des vecteurs vitesse angulaire et vitesse. Dans les conditions initiales de la balle pour l'essai 1, le vecteur vitesse angulaire est orienté vers y- et le vecteur vitesse vers x, donc le produit vectoriel de ces deux vecteurs est orienté vers z. C'est pourquoi la force de Magnus pousse la balle vers le haut.

Tableau 2 : Résultats de l'essai 2.

Option	t_f (s)	Coup	$\vec{v}_{b,f}$ (m/s)	$\vec{r}_{b,f}$ (m)
1	0.49895631	3	$\begin{bmatrix} 10.00000000 \\ 1.00000000 \\ -4.68977185 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.98956311 \\ 0.89895631 \\ 0.01990000 \end{bmatrix}$
2	0.30676754	0	$\begin{bmatrix} 7.00818821 \\ 0.70081882 \\ -2.41238894 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.55859167 \\ 0.65585917 \\ 0.77990000 \end{bmatrix}$
3	0.20066932	0	$\begin{bmatrix} 7.43627904 \\ -0.19177766 \\ -3.54162890 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.74996425 \\ 0.47047076 \\ 0.77990000 \end{bmatrix}$

Graphique 2 : Trajectoire de la balle de l'essai 2.

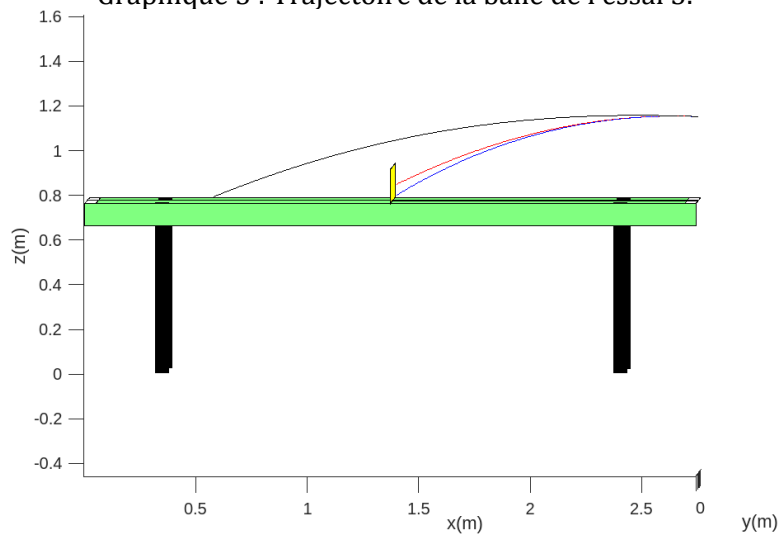


À première vue, tous les coups ont réussi à dépasser le filet contrairement aux résultats de l'essai 1, ceci peut être expliqué par le fait que la vitesse initiale en x de la balle est beaucoup plus importante cette fois-ci. En comparant la trajectoire rouge (option 1) et la trajectoire bleue (option 2), on observe que la balle a réussi à atterrir sur la table si on tient compte de la force de frottement visqueux. Ceci peut s'expliquer par le fait que la balle a été ralentie par la force de frottement visqueux qui s'oppose à sa vitesse. Cette explication est corroborée par la différence entre les composantes des vecteurs vitesse finale des deux options. En tenant compte de la force de Magnus (option 3), on constate que la balle atterrit plus vite sur la table, car le temps final et la position finale en x sont plus petits et sa vitesse vers le bas est plus importante. Cela est expliqué par la force de Magnus : l'équation montre que la direction de la force est déterminée par le produit vectoriel entre la vitesse angulaire et la vitesse. Comme la vitesse angulaire initiale est principalement orientée vers y+ et z-, et la vitesse initiale vers x+, le produit vectoriel donne un vecteur orienté vers y- et z-, ce qui explique pourquoi la force de Magnus pousse la balle vers le bas (et vers la droite) et entraîne son atterrissage sur la table. Les résultats de l'essai 2 sont donc cohérents avec la théorie.

Tableau 3 : Résultats de l'essai 3.

Option	t_f (s)	Coup	$\vec{v}_{b,f}$ (m/s)	$\vec{r}_{b,f}$ (m)
1	0.27002000	2	$\begin{bmatrix} -5.00000000 \\ 0.00000000 \\ -2.44619600 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.38990000 \\ 0.50000000 \\ 0.83674108 \end{bmatrix}$
2	0.29707261	2	$\begin{bmatrix} -4.12296703 \\ 0.00000000 \\ -2.48434332 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.38990000 \\ 0.50000000 \\ 0.78792668 \end{bmatrix}$
3	0.49101914	0	$\begin{bmatrix} -4.11243881 \\ 0.00000000 \\ -1.66394686 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.56788278 \\ 0.50000000 \\ 0.77990000 \end{bmatrix}$

Graphique 3 : Trajectoire de la balle de l'essai 3.

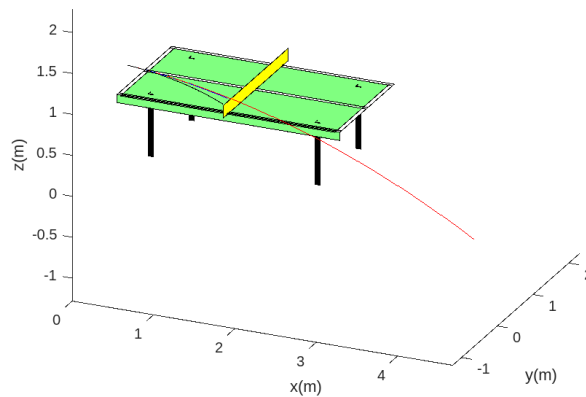


Avec l'option 1, la balle touche le filet. Avec l'option 2, la balle touche également le filet, mais elle est à une position z plus basse, malgré le fait que sa vitesse en y demeure inchangée. Cela ne peut être expliqué que par le ralentissement de sa vitesse en x dû à la force de frottement visqueux, comme on peut le constater dans le tableau (temps et vitesse finaux en z plus faibles). En incluant la force de Magnus (option 3), la balle atterrit sur le côté opposé de la table. En examinant les conditions initiales de la balle, on remarque que sa vitesse angulaire initiale est orientée vers y et sa vitesse initiale principalement vers x . La force de Magnus, résultant de ce produit vectoriel, est donc orientée vers le haut. Cela explique pourquoi la balle atterrit sur le côté opposé, et pourquoi sa vitesse en x et en z reste relativement inchangée entre les options 2 et 3, tandis que sa vitesse en y augmente. Une fois de plus, les résultats de nos simulations sont plausibles.

Tableau 4 : Résultats de l'essai 4.

Option	t_f (s)	Coup	$\vec{v}_{b,f}$ (m/s)	$\vec{r}_{b,f}$ (m)
1	0.46810996	3	$\begin{bmatrix} 10.00000000 \\ -2.00000000 \\ -4.38747764 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.68109963 \\ -0.63621993 \\ 0.01990000 \end{bmatrix}$
2	0.14851555	2	$\begin{bmatrix} 8.28603050 \\ -1.65720610 \\ -1.16481419 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.35010000 \\ 0.02998000 \\ 0.92538042 \end{bmatrix}$
3	0.15265922	2	$\begin{bmatrix} 7.76837304 \\ -3.19173789 \\ -1.35393097 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.35010000 \\ -0.10347645 \\ 0.90782239 \end{bmatrix}$

Graphique 4 : Trajectoire de la balle de l'essai 4.



En observant les trois trajectoires, on constate que la balle a réussi à passer par-dessus le filet uniquement avec l'option 1. Cela s'explique par l'absence de force de frottement visqueux dans cette option (vitesse finale en x inchangée). La trajectoire noire est considérablement déviée de la trajectoire rouge, contrairement à la trajectoire bleue. Cette déviation est due à la force de Magnus : le produit vectoriel entre le vecteur de vitesse angulaire orienté vers z^- et le vecteur vitesse orienté vers x donne un vecteur orienté vers y^- . C'est pourquoi la trajectoire noire est déviée vers la droite.

Dans tous les essais, la vitesse finale en x demeure inchangée lorsque seule la force gravitationnelle est incluse. On remarque dans chaque essai l'effet de la force de frottement visqueux sur la vitesse finale de la balle. On observe également l'effet de la force de Magnus, particulièrement en comparant les essais 1 et 2 : dans le premier cas, la force de Magnus pousse la balle vers le haut, tandis que dans le second, elle la pousse vers le bas. Donc, nos simulations semblent fonctionner correctement.

Conclusion

Bien que nos simulations semblent fonctionner correctement, car les effets des différentes forces sur la trajectoire de la balle sont observés et cohérents avec la théorie, il est difficile d'évaluer la précision des résultats. C'est d'ailleurs l'un des plus grands défis rencontrés. En effet, la précision de nos résultats dépend fortement de l'intervalle de temps (Δt) choisi. Un intervalle trop grand peut produire des résultats erronés, même si les effets des forces sont visibles, tandis qu'un intervalle trop petit est coûteux en temps et en mémoire. Choisir le meilleur intervalle n'est donc pas évident. De plus, n'ayant pas de solutions analytiques pour ce problème, nous ne connaissons pas l'écart entre les résultats de nos simulations et les valeurs réelles. Cela nous cause des problèmes, car nous ne pouvons pas savoir si nos simulations sont suffisamment précises ou même si notre programme est valide.