



**PHS4700**  
**Physique pour les applications multimédia**

**PAGE COUVERTURE OBLIGATOIRE POUR TOUS LES  
DEVOIRS**

**Numéro du groupe : 01**

**Numéro de l'équipe : 13**

**Numéro de devoir : 3**

|  |                           |                    |
|--|---------------------------|--------------------|
| Nom: Li  | Prénom : Bai Wu           | matricule: 2179304 |
| Signature :<br><br>Li, Bai Wu                            |                           |                    |
| Nom: Maguin  | Prénom : Dimitri          | matricule: 1941849 |
| Signature :<br><br><i>Dimitri</i><br><i>Maguin</i>       |                           |                    |
| Nom: Sellami   | Prénom : Mohamed<br>Sameh | matricule: 1917426 |
| Signature :<br><br><i>SellamiMohamedSa</i><br><i>meh</i> |                           |                    |
| Nom: Darveau   | Prénom : Audry            | matricule: 2211388 |
| Signature :<br><br><i>Audry Darveau</i>                  |                           |                    |

## Introduction

Ce rapport a pour objectif d'analyser la collision entre une balle lancée et un bloc cubique, en utilisant une simulation numérique basée sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Cette approche permet de résoudre avec précision les équations différentielles décrivant les mouvements de la balle et du bloc avant et après l'impact, en tenant compte exclusivement de la gravité comme force agissant sur les deux objets.

La modélisation repose sur les lois fondamentales de la mécanique et inclut une description détaillée de l'interaction entre la balle et le bloc cubique. Le bloc influence la trajectoire et la dynamique de la balle après l'impact. En ajustant les paramètres tels que la vitesse initiale de la balle et la vitesse angulaire initiale du bloc, nous pouvons explorer comment ces variables influencent les trajectoires et les vitesses finales des deux objets.

Cette étude vise à valider les principes physiques sous-jacents aux collisions élastiques partiellement restituées, caractérisées par un coefficient de restitution de 0,8. Elle permet également de mieux comprendre les effets de la rotation initiale du bloc sur le système global. La simulation constitue un outil puissant pour étudier des scénarios réalistes, tout en intégrant des conditions comme la détection d'éventuelles collisions avec le sol, afin de prédire les trajectoires et les vitesses finales dans divers cas.

## Théorie et équation

Dans cette section, nous présentons nos démarches pour faire la simulation de la trajectoire de la balle et du bloc cubique.

D'abord, on définit  $\vec{q}$  le vecteur contenant les états d'un objet:

$$\vec{q}(t) = \begin{bmatrix} \vec{v}(t) \\ \vec{r}(t) \\ \vec{\omega} \\ \text{vec}(R(t)) \end{bmatrix}$$

où :

- $\vec{v}$  est la vitesse du centre de masse de l'objet,
- $\vec{r}$  la position du centre de masse de l'objet,
- $\vec{\omega}$  la vitesse angulaire de l'objet,
- $R$  la matrice de rotation de l'objet.

Les états initiaux de la balle et ceux du bloc sont respectivement :

$$\vec{q}_{balle}(0) = \begin{bmatrix} \vec{v}_{balle}(0) \\ (0 \ 0 \ 2)^T \\ \vec{0} \\ \text{vec}(I) \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_{bloc}(0) = \begin{bmatrix} \vec{v}_{bloc}(0) \\ (3 \ 3 \ 1)^T \\ \vec{\omega}_{bloc}(0) \\ \text{vec}(I) \end{bmatrix}$$

Ensuite, on définit  $\vec{g}(t)$  le vecteur contenant le dérivé de ces états par rapport au temps :

$$\vec{g}(t) = \frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} (0 \quad 0 \quad -9.8)^T \\ \vec{v}(t) \\ \vec{0} \\ \text{vec}(\tilde{\omega}R(t)) \end{bmatrix}$$

où :

- $\vec{v}(t)$  est la vitesse de l'objet,
- $\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\vec{\omega}_z & \vec{\omega}_y \\ \vec{\omega}_z & 0 & -\vec{\omega}_x \\ -\vec{\omega}_y & \vec{\omega}_x & 0 \end{bmatrix}$ , la matrice de vitesse angulaire de l'objet. Dans nos simulations, la force gravitationnelle est la seule force qui s'exerce sur les objets (avant la collision), donc la vitesse angulaire de l'objet demeure constante toute au long de sa trajectoire :  $\frac{d\tilde{\omega}(t)}{dt} = \vec{0}$ .

Enfin, on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, une technique numérique pour résoudre des équations différentielles ordinaires (EDO), pour trouver les états suivants d'un objet:

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

où :

- $\Delta t = 0.000 \text{ s}$  est l'intervalle de temps entre deux instants consécutifs de calcul,
- $\vec{k}_1 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1})$ ,
- $\vec{k}_2 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2}\vec{k}_1, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2})$ ,
- $\vec{k}_3 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2}\vec{k}_2, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2})$ ,
- $\vec{k}_4 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \Delta t\vec{k}_3, t_{n-1} + \Delta t)$ .

Pour calculer la trajectoire de la balle et du bloc jusqu'à ce qu'ils entrent en collision ou frappent le sol, nous avons utilisé une approche résumée par l'algorithme suivant :

---

#### Algorithme Devoir3

---

```

1  Répéter :
2      incrémenter  $t$  par  $\Delta t$ .
3       $\vec{q}_{\text{bloc}}(t + \Delta t) = \text{RungeKutta4}(\vec{q}_{\text{bloc}}(t), \Delta t)$ 
4      Si  $t \geq$  le temps où la balle est lancé
5           $\vec{q}_{\text{balle}}(t + \Delta t) = \text{RungeKutta4}(\vec{q}_{\text{balle}}(t), \Delta t)$ 
6  Tant que qu'aucune collision ne soit détectée.

7  Si les positions de la balle et du bloc ne sont pas assez précises
8      décrémenter  $t$  par  $\Delta t$ 
9      diviser  $\Delta t$  par 10
10  Aller à ligne 1

11 retourner  $\vec{q}_{\text{balle}}$  et  $\vec{q}_{\text{bloc}}$ 
```

---

| Collision  | Condition nécessaire   | Condition nécessaire et suffisante  | Condition suffisante   |
|------------|--|---|--|
| Balle-sol  | $z_{balle} - R_{balle} \leq 0$                                     |   |  |
| Bloc-sol   | $z_{bloc} - R_{bloc,min} \leq 0$                                   | $\min([z_{coin,1}, z_{coin,2}, \dots, z_{coin,8}]) \leq 0$  | $z_{bloc} - R_{bloc,max} \leq 0$                                   |
| Bloc-balle | $ \vec{r}_{bloc} - \vec{r}_{balle}  \leq R_{bloc,min} + R_{balle}$ | $\forall i \in \{j \mid r_{p,j} = r_{balle,j}\},  r_{balle,i}  < \frac{A_{bloc}}{2}$ $\wedge \sum_{i \in \{j \mid r_{p,j} = \frac{A_{bloc}}{2}\}} (r_{balle,i} - r_{p,i})^2 \leq R^2$ | $ \vec{r}_{bloc} - \vec{r}_{balle}  \leq R_{bloc,max} + R_{balle}$ |

Pour déterminer s'il y a eu une collision, il faut d'abord vérifier si les conditions nécessaires à la collision sont satisfaites. Si elles ne le sont pas, il faut ensuite vérifier si les conditions suffisantes à la collision sont remplies. Si elles ne le sont toujours pas, il faut enfin vérifier les conditions nécessaires et suffisantes. Cette approche permet d'éviter de vérifier les conditions nécessaires et suffisantes à chaque intervalle de temps  $\Delta t$ , ce qui peut être coûteux en termes de temps, puisque, pendant la majeure partie de la trajectoire, il n'y a pas de collision.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait collision entre la balle et le sol est :

$$z_{balle} - R_{balle} \leq 0$$

où  $z_{balle}$  est la position en z du centre de masse de la balle et  $R_{balle} = 0.02m$  est le rayon de la balle. Si cette condition n'est pas satisfaite, il faut vérifier si le bloc a subi une collision.

Les conditions nécessaires pour qu'il y ait collision entre le bloc et le sol ou le bloc et la balle sont

$$\begin{aligned} z_{bloc} - R_{bloc,min} &\leq 0 \\ |\vec{r}_{bloc} - \vec{r}_{balle}| &\leq R_{bloc,min} + R_{balle} \end{aligned}$$

où  $z_{bloc}$  est la position en z du centre de masse du bloc et  $R_{bloc,min} = \frac{A_{bloc}}{2} \sqrt{3}$  est le rayon minimal de la sphère englobant le bloc. Si ces conditions sont satisfaites, il faut également vérifier les conditions suffisantes de collision du bloc.

Une condition suffisante pour qu'il y ait collision entre le bloc et le sol est :

$$z_{bloc} - R_{bloc,max} \leq 0$$

où  $R_{bloc,max} = \frac{A_{bloc}}{2}$  est le rayon maximal de la sphère englobée par le bloc.

Une condition suffisante pour qu'il y ait collision entre le bloc et la balle est :

$$|\vec{r}_{bloc} - \vec{r}_{balle}| \leq R_{bloc,max} + R_{balle}$$

Si aucune de ces conditions sont remplies, il faut vérifier les conditions nécessaires et suffisantes pour conclure s'il y a une collision ou non.

Le bloc touche le sol si et seulement si au moins un de ses coins touche le sol. Soit :

$$\vec{r}_{coin,i} = \frac{A_{bloc}}{2} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

la position d'un coin  $i$  dans le référentiel du bloc. Pour qu'on puisse vérifier si un des coins touche le sol, il faut ramener leur position dans le référentiel global :

$$\vec{r}_{coin,i}^G = R^{G \leftarrow Bloc} \vec{r}_{coin,i}^{Bloc} + \vec{r}_{bloc} = \begin{bmatrix} x_{coin,i} \\ y_{coin,i} \\ z_{coin,i} \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante est alors :

$$\min([z_{coin,1}, z_{coin,2}, \dots, z_{coin,8}]) \leq 0$$

Pour déterminer si une collision entre le bloc et la balle a eu lieu, une approche valide serait de vérifier tous les types de collisions possibles entre les deux objets dans le référentiel du bloc.

$$\vec{r}_{balle}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T (\vec{r}_{balle}^G - \vec{r}_{bloc}^G)$$

Étant donné que le bloc possède 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets, il y a au total 26 types de points de contact, chacun avec des conditions de collision légèrement variées. Le tableau suivant en montre quelques exemples.

| Points de contact potentiels | Position          | Conditions nécessaires et suffisantes                |
|------------------------------|-------------------|--|
| Face 1                       | $[a \ y \ z]^T$   | $(x - (a))^2 \leq R^2$<br>$ y  < a$<br>$ z  < a$     |
| Face 4                       | $[x \ -a \ z]^T$  | $(y - (-a))^2 \leq R^2$<br>$ x  < a$<br>$ z  < a$    |
| Arête 2                      | $[x \ a \ -a]^T$  | $(y - (a))^2 + (z - (-a))^2 \leq R^2$<br>$ x  < a$   |
| Arête 8                      | $[-a \ y \ -a]^T$ | $(x - (-a))^2 + (z - (-a))^2 \leq R^2$<br>$ y  < a$  |
| Sommet 1                     | $[a \ a \ a]^T$   | $(x - (a))^2 + (y - (a))^2 + (z - (a))^2 \leq R^2$   |
| Sommet 7                     | $[-a \ -a \ a]^T$ | $(x - (-a))^2 + (y - (-a))^2 + (z - (a))^2 \leq R^2$ |

Où  $a = \frac{A_{bloc}}{2}$  est la moitié de l'arête du bloc et  $(x, y, z) = \vec{r}_{balle}$  est la position du centre de masse de la balle dans le référentiel du bloc. Notez qu'au lieu de vérifier ces 26 conditions nécessaires et suffisantes, il est possible de les généraliser sous la forme suivante :

$$\sum_{i \in \{j \mid r_{p,j} = \pm \frac{A_{bloc}}{2}\}} (r_{balle,i} - r_{p,i})^2 \leq R^2 \quad \wedge \quad \forall i \in \{j \mid r_{p,j} = r_{balle,j}\}, |r_{balle,i}| < \frac{A_{bloc}}{2}$$

où  $r_{p,i}$  et  $r_{p,j}$  sont les coordonnées du point de contact  $\vec{r}_p$  dans le référentiel du bloc. Si un des 26 points satisfait cette condition, cela indique qu'il y a une collision entre le bloc et la balle (à ce point). Sinon, il n'y a pas de collision.

Finalement, s'il y a une collision entre la balle et le bloc, on doit calculer les vitesses linéaires et angulaires après la collision de la balle et du bloc. Pour ce faire, on va utiliser la méthode des conditions initiales et on suppose qu'il n'y a pas aucun frottement dans notre collision. Donc, seulement l'impact de la rotation va être considéré. Afin de simplifier les calculs, on va plutôt les effectuer dans le référentiel du bloc en premier.

- $\vec{r}_{balle}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T (\vec{r}_{balle}^G - \vec{r}_{bloc}^G)$
- $\vec{v}_{balle}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T \vec{v}_{balle}^G$
- $\vec{\omega}_{balle}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T \vec{\omega}_{balle}^G = (R^{G \leftarrow Bloc})^T \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{r}_{bloc}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T (\vec{r}_{bloc}^G - \vec{r}_{bloc}^G) = \vec{0}$
- $\vec{v}_{bloc}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T \vec{v}_{bloc}^G$
- $\vec{\omega}_{bloc}^{Bloc} = (R^{G \leftarrow Bloc})^T \vec{\omega}_{bloc}^G$

Les positions et vitesses relatives du point de contact par rapport au centre de masse de la balle (a) et à celui du bloc (b) sont :

- $\vec{r}_{balle,p} = \vec{r}_p - \vec{r}_{balle}$
- $\vec{r}_{bloc,p} = \vec{r}_p - \vec{r}_{bloc} = \vec{r}_p - \vec{0} = \vec{r}_p$
- $\vec{v}_{balle,p} = \vec{v}_{balle} + \vec{\omega}_{balle} \times \vec{r}_{balle,p} = \vec{v}_{balle} + \vec{0} \times \vec{r}_{balle,p} = \vec{v}_{balle}$
- $\vec{v}_{bloc,p} = \vec{v}_{bloc} + \vec{\omega}_{bloc} \times \vec{r}_{bloc,p}$

On définit la normale  $\hat{n}$  comme un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface de la balle, pointant vers son centre de masse :

$$\hat{n} = -\frac{\vec{r}_{balle,p}}{|\vec{r}_{balle,p}|}$$

La magnitude de l'impulsion  $j$  est donnée par :

$$j = -(1 + \varepsilon) \frac{\hat{n} \cdot (\vec{v}_{balle,p} - \vec{v}_{bloc,p})}{\frac{1}{m_{balle}} + \frac{1}{m_{bloc}} + G_{balle} + G_{bloc}}$$

où :

- $\varepsilon_c = 0.8$  est le coefficient de restitution lors d'une collision entre la balle et le bloc,
- $m_{balle} = 0.050 \text{ kg}$ , la masse de la balle,
- $m_{bloc} = 1.200 \text{ kg}$ , la masse du bloc,
- $G_{bloc} = \hat{n} \cdot [I_{bloc}^{-1}(\vec{r}_{bloc,p} \times \hat{n}) \times \vec{r}_{bloc,p}]$ ,
- $G_{balle} = \hat{n} \cdot [I_{balle}^{-1}(\vec{r}_{balle,p} \times \hat{n}) \times \vec{r}_{balle,p}] = \vec{0}$ , car le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles  $(\vec{r}_{balle,p}, \hat{n})$  est nul;
- $I_{bloc} = \frac{m_{bloc} A_{bloc}}{6} I$ , est le moment d'inertie du bloc par rapport à son centre masse dans le référentiel du bloc.

Le vecteur impulsion  $\vec{J}$  est donné par :

$$\vec{J} = j\hat{n} + j_t\hat{t} = j\hat{n} + \vec{0} = j\hat{n}$$

puisque le frottement entre la balle et le bloc est négligé dans notre simulation. Les vitesses linéaires et angulaires de la balle et du bloc après la collision sont alors :

- $\vec{v}_{balle}(t_f^+) = \vec{v}_{balle}(t_f^-) + \frac{\vec{J}}{m_{balle}}$
- $\vec{v}_{bloc}(t_f^+) = \vec{v}_{bloc}(t_f^-) - \frac{\vec{J}}{m_{bloc}}$
- $\vec{\omega}_{balle}(t_f^+) = \vec{\omega}_{balle}(t_f^-) + I_{balle}^{-1}(\vec{r}_{balle,p} \times \vec{J}) = \vec{0} + I_{balle}^{-1} \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{\omega}_{bloc}(t_f^+) = \vec{\omega}_{bloc}(t_f^-) + I_{bloc}^{-1}(\vec{r}_{bloc,p} \times \vec{J})$

Il reste donc à revenir dans le référentiel global :

- $\vec{v}_{balle}^G(t_f^+) = R^{G \leftarrow Bloc} \vec{v}_{balle}^{Bloc}(t_f^-)$
- $\vec{v}_{bloc}^G(t_f^+) = R^{G \leftarrow Bloc} \vec{v}_{bloc}^{Bloc}(t_f^-)$
- $\vec{\omega}_{balle}^G(t_f^+) = R^{G \leftarrow Bloc} \vec{\omega}_{balle}^{Bloc}(t_f^-) = R^{G \leftarrow Bloc} \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{\omega}_{bloc}^G(t_f^+) = R^{G \leftarrow Bloc} \vec{\omega}_{bloc}^{Bloc}(t_f^-)$

## Présentation et analyse des résultats

Tableau 0 : Conditions initiales pour les 6 tirs à simuler.

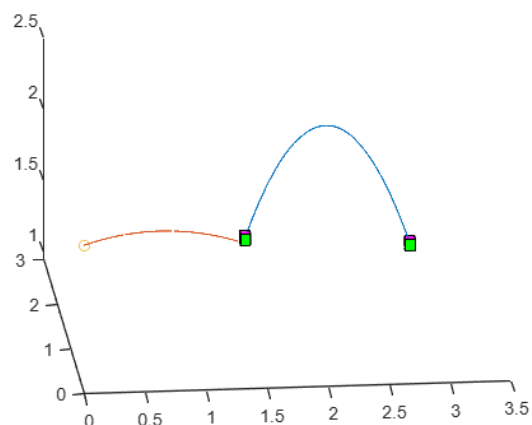
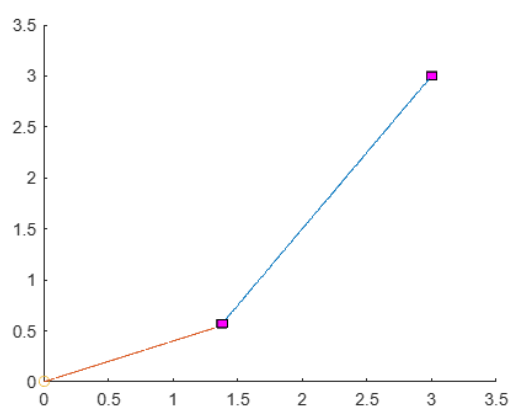
| Tir | $t_l$ (s) | $\vec{v}_{bloc,i}$ (m/s)                      | $\vec{\omega}_{b,i}$ (rad/s)                  | $\vec{v}_{balle,i}$ (m/s)  |
|-----|-----------|---|---|--|
| 1   | 0.545454  | $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 5.000000 \\ 2.000000 \\ 0.642424 \end{bmatrix}$ |
| 2   |           |   | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$  |  |
| 3   | 0.071429  | $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 7.000000 \\ 0.000000 \\ 0.408340 \end{bmatrix}$ |
| 4   |           |   | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$  |  |
| 5   | 0.600000  | $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5.000000 \\ 2.000000 \\ 0.642424 \end{bmatrix}$ |
| 6   | 0.100000  |   | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 5.000000 \\ 2.000000 \\ 0.100000 \end{bmatrix}$ |

## Simulation 1

Tableau 1 : Résultats du tir 1.

|                       | Balle  | Bloc  |       |
|-----------------------|--|---|-------|
| Résultat              | La balle a touché le bloc.                                   |   |       |
| $t_f$                 | 0.80960  |   | s     |
| $\vec{r}_f$           | $\begin{bmatrix} 1.3210 \\ 0.5284 \\ 1.3808 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 1.3808 \\ 0.5712 \\ 1.8363 \end{bmatrix}$    | m     |
| $\vec{v}(t_f^-)$      | $\begin{bmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \\ -1.9467 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} -2.0000 \\ -3.0000 \\ -2.9341 \end{bmatrix}$ | m/s   |
| $\vec{v}(t_f^+)$      | $\begin{bmatrix} -7.4815 \\ 0.2339 \\ -1.9467 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1.4799 \\ -2.9264 \\ -2.9341 \end{bmatrix}$ |       |
| $\vec{\omega}(t_f^-)$ | $\vec{0}$  | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$    | rad/s |
| $\vec{\omega}(t_f^+)$ |  | $\begin{bmatrix} 0.5922 \\ -4.1854 \\ 16.7429 \end{bmatrix}$  |       |

Graphique 1 : Trajectoires de la balle et du bloc du tir 1.



On constate que, suite à la collision, les composantes x et y des vitesses angulaires de la balle et du bloc ont été modifiées, tandis que la composante z reste inchangée. Cela s'explique par le fait que les forces de contact sont égales et opposées. Ainsi, si la force agit uniquement sur les composantes x et y de la balle, elle doit également agir uniquement sur les composantes x et y du bloc.

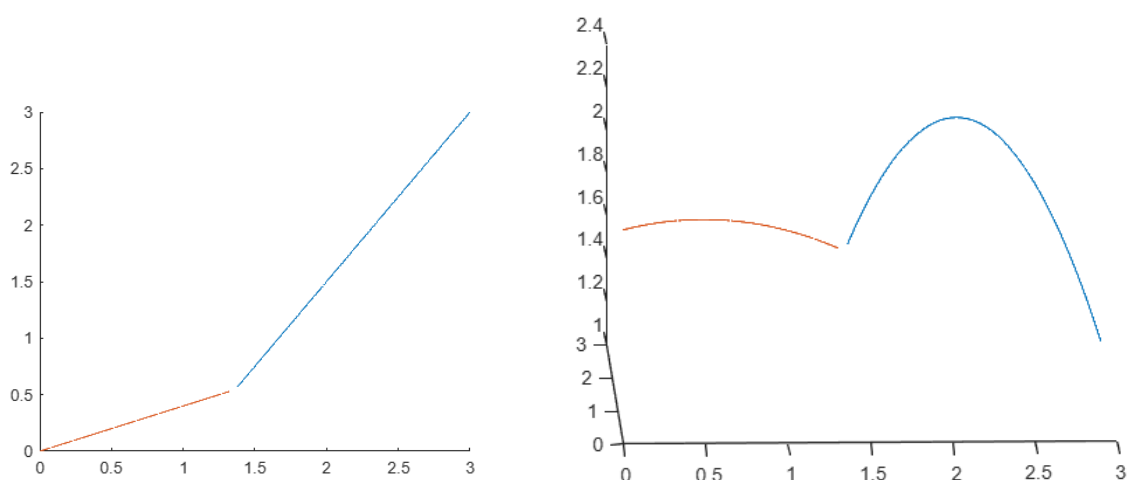


## Simulation 2

Tableau 2 : Résultats du tir 2.

|                       | Balle   | Bloc  |       |
|-----------------------|---|---|-------|
| Résultat              | La balle a touché le bloc.                                    |   |       |
| $t_f$                 | 0.81005   |   | s     |
| $\vec{r}_f$           | $\begin{bmatrix} 1.3232 \\ 0.5293 \\ 1.8268 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 1.3799 \\ 0.5699 \\ 1.8350 \end{bmatrix}$    | m     |
| $\vec{v}(t_f^-)$      | $\begin{bmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \\ -1.9511 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} -2.0000 \\ -3.0000 \\ -2.9385 \end{bmatrix}$ | m/s   |
| $\vec{v}(t_f^+)$      | $\begin{bmatrix} -0.2735 \\ -9.9474 \\ -1.9511 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1.7803 \\ -2.5022 \\ -2.9385 \end{bmatrix}$ |       |
| $\vec{\omega}(t_f^-)$ | $\vec{0}$   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 15.0000 \end{bmatrix}$   | rad/s |
| $\vec{\omega}(t_f^+)$ |   | $\begin{bmatrix} 3.8005 \\ -1.6775 \\ -3.0934 \end{bmatrix}$  |       |

Graphique 2 : Trajectoires de la balle et du bloc du tir 2.



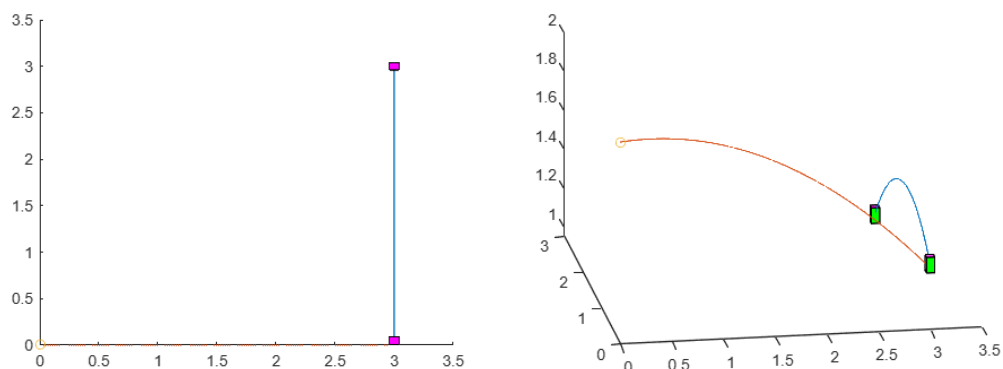
Les conditions initiales du tir 2 sont similaires à celles du tir 1, à la différence que le bloc possède cette fois une vitesse angulaire non nulle. Les résultats restent globalement proches de ceux obtenus précédemment. Cependant, la rotation du bloc a entraîné une variation plus significative des composantes y des vitesses de la balle et du bloc.

### Simulation 3

Tableau 3 : Résultats du tir 3.

|                       | Balle   | Bloc   |       |
|-----------------------|---|--|-------|
| Résultat              | La balle a touché le bloc.                                    |  |       |
| $t_f$                 | 0.49175   |  | s     |
| $\vec{r}_f$           | $\begin{bmatrix} 2.9424 \\ 0.0000 \\ 1.3059 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 3.0000 \\ 0.0495 \\ 1.2904 \end{bmatrix}$   | m     |
| $\vec{v}(t_f^-)$      | $\begin{bmatrix} 7.0000 \\ 0.0000 \\ -3.7110 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ -6.0000 \\ -1.8191 \end{bmatrix}$ | m/s   |
| $\vec{v}(t_f^+)$      | $\begin{bmatrix} -6.4411 \\ -7.2840 \\ -3.7110 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.5600 \\ -5.6965 \\ -1.8191 \end{bmatrix}$ |       |
| $\vec{\omega}(t_f^-)$ | $\vec{0}$   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$   | rad/s |
| $\vec{\omega}(t_f^+)$ |   | $\begin{bmatrix} -4.4137 \\ 8.1446 \\ 9.6205 \end{bmatrix}$  |       |

Graphique 3 : Trajectoires de la balle et du bloc du tir 3.



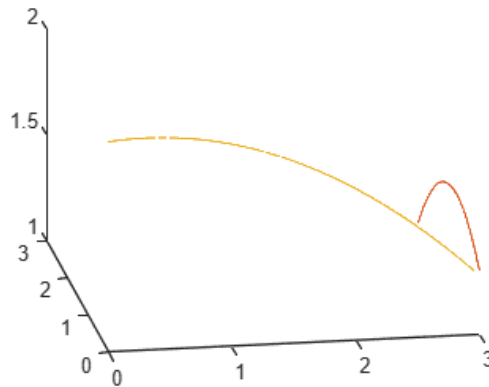
On constate que les vitesses en x et en y de la balle subissent des variations majeures après la collision, tandis que celles du bloc restent quasi inchangées. Cela s'explique par le fait que la masse du bloc est supérieure à celle de la balle, rendant plus difficile la variation de la vitesse du bloc. On remarque aussi que la collision a induit significativement une vitesse angulaire dans le bloc.

## Simulation 4

Tableau 4 : Résultats du tir 4.

|                       | Balle   | Bloc   |       |
|-----------------------|---|--|-------|
| Résultat              | La balle a touché le bloc.                                    |  |       |
| $t_f$                 | 0.49292   |  | s     |
| $\vec{r}_f$           | $\begin{bmatrix} 2.9506 \\ 0.0000 \\ 1.3015 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 3.0000 \\ 0.0425 \\ 1.2882 \end{bmatrix}$   | m     |
| $\vec{v}(t_f^-)$      | $\begin{bmatrix} 7.0000 \\ 0.0000 \\ -3.7225 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ -6.0000 \\ -1.8306 \end{bmatrix}$ | m/s   |
| $\vec{v}(t_f^+)$      | $\begin{bmatrix} 0.3992 \\ -13.3157 \\ -3.7225 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.2750 \\ -5.4452 \\ -1.8306 \end{bmatrix}$ |       |
| $\vec{\omega}(t_f^-)$ | $\vec{0}$   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 15.0000 \end{bmatrix}$  | rad/s |
| $\vec{\omega}(t_f^+)$ |   | $\begin{bmatrix} -6.9144 \\ 3.4276 \\ 0.2746 \end{bmatrix}$  |       |

Graphique 4 : Trajectoires de la balle et du bloc du tir 4.



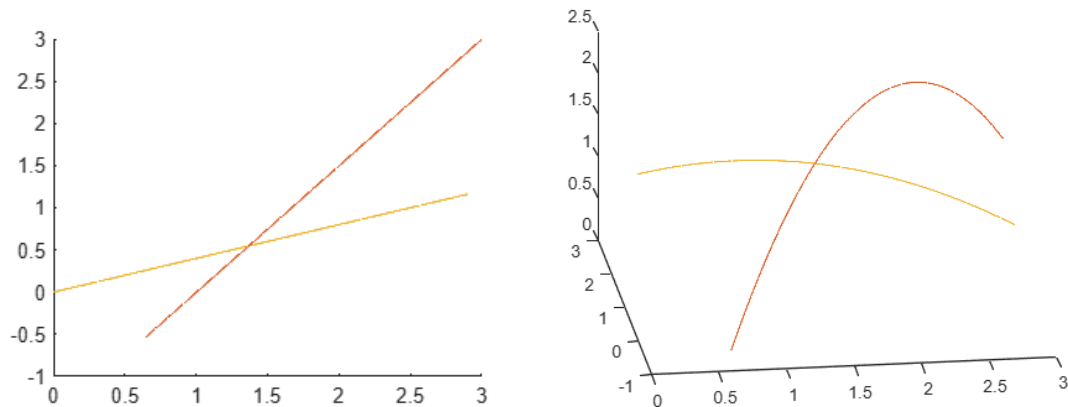
Comme dans la simulation 2, une vitesse angulaire initiale est appliquée au bloc. Les résultats restent similaires à ceux de la simulation 3, mais la rotation du bloc a significativement influencé la direction du vecteur vitesse de la balle après la collision. En raison de la rotation du bloc, la balle ne frappe pas nécessairement le même point de contact, ce qui peut modifier l'orientation de la force normale et entraîner une direction différente pour la vitesse de la balle.

## Simulation 5

Tableau 5 : Résultats du tir 5.

|                       | Balle   | Bloc  |       |
|-----------------------|---|---|-------|
| Résultat              | Le bloc a touché le sol.                                    |   |       |
| $t_f$                 | 1.18128   |   | s     |
| $\vec{r}_f$           | $\begin{bmatrix} 2.9064 \\ 1.1626 \\ 0.7178 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0.6374 \\ -0.5438 \\ 0.0688 \end{bmatrix}$   | m     |
| $\vec{v}(t_f^-)$      | $\begin{bmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \\ -5.0541 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2.0000 \\ -3.0000 \\ -6.5766 \end{bmatrix}$ | m/s   |
| $\vec{v}(t_f^+)$      | $\begin{bmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \\ -5.0541 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2.0000 \\ -3.0000 \\ -6.5766 \end{bmatrix}$ |       |
| $\vec{\omega}(t_f^-)$ | $\vec{0}$   | $\begin{bmatrix} -5.0000 \\ -5.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$  | rad/s |
| $\vec{\omega}(t_f^+)$ |   | $\begin{bmatrix} -5.0000 \\ -5.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$  |       |

Graphique 5 : Trajectoires de la balle et du bloc du tir 5.



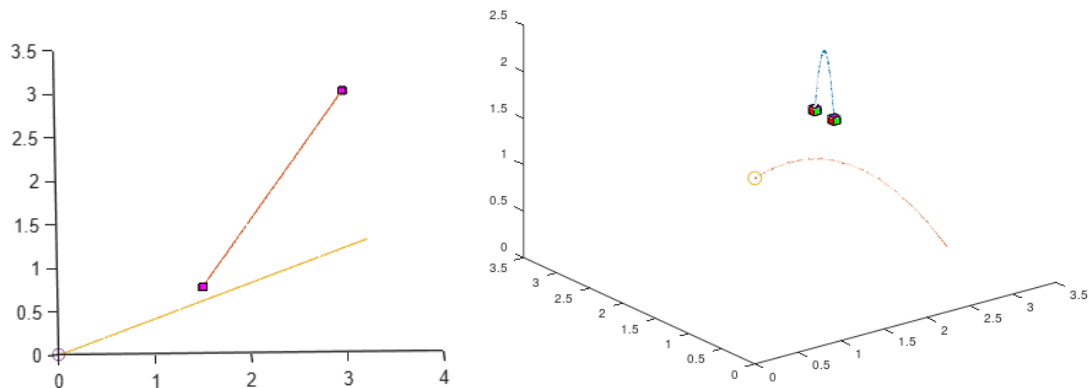
Dans cette simulation, aucune collision n'a lieu, et le bloc touche le sol en premier. Comme la seule force agissant sur le bloc et la balle est la gravité et qu'il n'y a pas de collision entre eux, seule la vitesse en z des deux objets a varié.

## Simulation 6

Tableau 6 : Résultats du tir 6.

|                       | Balle   | Bloc  |       |
|-----------------------|---|---|-------|
| Résultat              | La balle a touché le sol.                                   |   |       |
| $t_f$                 | 0.74586   |   | s     |
| $\vec{r}_f$           | $\begin{bmatrix} 3.2298 \\ 1.2919 \\ 0.0200 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 1.5083 \\ 0.7624 \\ 2.0034 \end{bmatrix}$    | m     |
| $\vec{v}(t_f^-)$      | $\begin{bmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \\ -6.2304 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2.0000 \\ -3.0000 \\ -2.3094 \end{bmatrix}$ | m/s   |
| $\vec{v}(t_f^+)$      | $\begin{bmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \\ -6.2304 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2.0000 \\ -3.0000 \\ -2.3094 \end{bmatrix}$ |       |
| $\vec{\omega}(t_f^-)$ | $\vec{0}$   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$    | rad/s |
| $\vec{\omega}(t_f^+)$ |   | $\begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$    |       |

Graphique 6 : Trajectoires de la balle et du bloc du tir 6.



Les conditions initiales de cette simulation sont similaires à celles des précédentes. Cependant, comme la balle a été lancée plus tôt ( $t_i$  est plus petit), elle a atteint le sol en premier, ce qui explique le temps final plus court. En l'absence de collision, seule la vitesse en  $z$  de la balle et du bloc a été modifiée sous l'effet de la gravité.

En général, on remarque lorsqu'il y a une collision entre la balle et bloc, la vitesse de la balle subit une plus grande variation, ce qui est conforme avec les théories, car la balle possède une masse beaucoup plus petite que le bloc. On a aussi remarqué que les forces de contact semblent être égales et opposées.

## Conclusion

Bien que nos simulations semblent fonctionner correctement, car les effets de la collision sont observés et cohérents avec la théorie, il est difficile d'évaluer la précision des résultats. C'est d'ailleurs l'un des plus grands défis rencontrés. En effet, la précision de nos résultats dépend fortement de l'intervalle de temps ( $\Delta t$ ) choisi. Un intervalle trop grand peut produire des résultats erronés, alors qu'un intervalle trop petit est coûteux en temps et en mémoire. Choisir le meilleur intervalle n'est donc pas évident. De plus, n'ayant pas de solutions analytiques pour ce problème, nous ne connaissons pas l'écart entre les résultats de nos simulations et les valeurs réelles. Cela nous cause des problèmes, car nous ne pouvons pas savoir si nos simulations sont suffisamment précises ou même si notre programme est valide.