



PHS4700 Physique pour les applications multimédia

PAGE COUVERTURE OBLIGATOIRE POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 01

Numéro de l'équipe : 13

Numéro de devoir : 4

Nom: Li	Prénom : Bai Wu	matricule: 2179304
Signature :		
Li, Bai Wu		
Nom: Maguin	Prénom : Dimitri	matricule: 1941849
Signature :		
<i>DimitriMaguin</i>		
Nom: Sellami	Prénom : Mohamed Sameh	matricule: 1917426
Signature :		
<i>SellamiMohamedS ameh</i>		
Nom: Darveau	Prénom : Audry	matricule: 2211388
Signature : <i>Audry</i>		
<i>Darveau</i>		

Introduction

Ce rapport a pour objectif de simuler et dessiner, l'image perçue par un observateur submergé dans un fluide qui regarde un bloc ellipsoïdal transparent, contenant un bloc rectangulaire de métal opaque coloré. Grâce à l'analyse de réfraction et au principe de la loi de Snell-Descarte, nous avons pu modéliser l'aperçu du bloc selon l'observateur immergé dans le fluide.

Théorie et équation

Dans notre simulation, nous avons un observateur dans un fluide qui observe un objet ellipsoïde contenant un bloc de métal. Pour le bloc ellipsoïde, son équation de plan est définie par :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Tel que le vecteur (4,4,11) définissant le centre de cet objet est directement inclus dans l'équation par le biais de x_0 , y_0 et z_0 . Les paramètres (a,b,c) sont posés par la simulation comme étant (3,3,9). Nous avons donc :

$$\frac{(x - 4)^2}{3^2} + \frac{(y - 4)^2}{3^2} + \frac{(z - 11)^2}{9^2} = 1$$

Ensuite, pour définir le bloc de métal, il nous suffit d'utiliser l'équation générale des plans. L'équation générale d'un plan est définie comme :

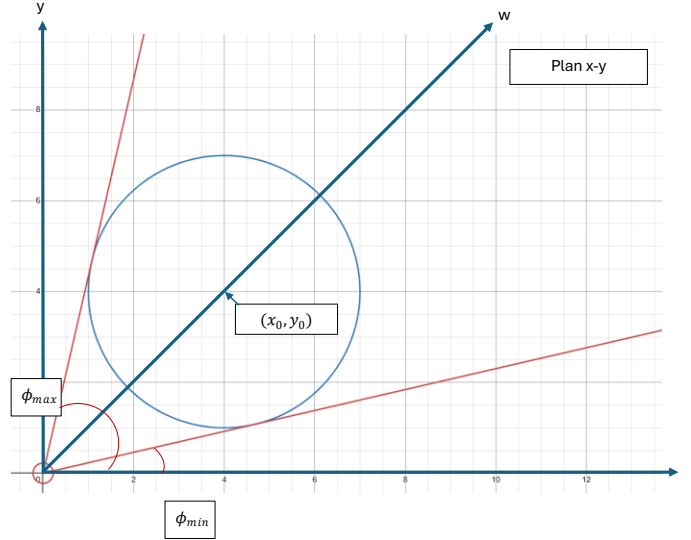
$$ax + by + cz + d = 0$$

Tel que a,b,c définisse la normale du plan dans un espace en trois dimensions et d est un décalage par rapport à celles-ci.

En posant plusieurs contraintes sur le plan, on peut définir une face. À l'aide du vecteur définissant (a,b,c), on peut choisir la direction de ce plan et avec d modifier sa position. En posant six faces de la bonne manière, on peut créer le bloc de métal.

Pour reconstituer l'image du bloc de métal perçue par l'observateur, on utilise la méthode des rayons et réfraction. Cette méthode consiste à tracer un ensemble de rayons partant de l'observateur. Ces rayons peuvent être réfléchis et réfractés au cours de leur trajectoire. Le traçage du rayon se termine lorsque ce dernier atteint le bloc de métal.

Donc, la première étape consiste à trouver le secteur angulaire optimal (les angles polaires et azimutaux limites).



Pour trouver les angles azimutaux limites, il suffit de trouver la pente des droites tangentes. Pour ce faire, on se met dans le référentiel de l'observateur et projette l'ellipsoïde sur le plan xy. L'équation de l'ellipsoïde devient alors $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. En remplaçant $y = mx$ dans l'équation de l'ellipse, on obtient :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(mx - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \left(\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2my_0}{b^2}\right)x + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

$$A = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), B = -\left(\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2my_0}{b^2}\right), C = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$$

Notez que $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, puisque c'est une tangente, donc il devrait avoir seulement une solution (point) possible.

$$B^2 = 4AC$$

$$\left(\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2my_0}{b^2}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$$

Comme on veut trouver la pente m de la tangente, on isole m :

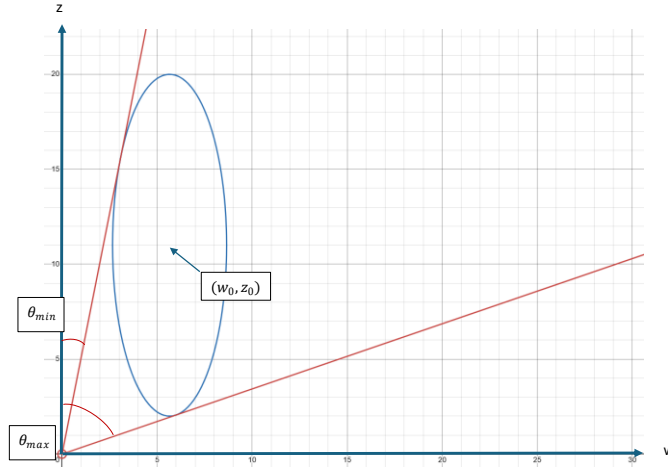
$$(x_0^2 - a^2)m^2 + (-x_0y_0)m + (y_0^2 - b^2) = 0$$

$$m = \frac{-(-x_0 y_0) \pm \sqrt{(-x_0 y_0)^2 - 4(x_0^2 - a^2)(y_0^2 - b^2)}}{2(x_0^2 - a^2)}$$

Les angles azimutaux limites sont alors :

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{mx}{x}\right) = \arctan(m)$$

En ce qui concerne les angles polaires, ils atteignent le maximum et le minimum dans la direction w partant de l'observateur vers le centre de l'ellipse (projection de l'ellipsoïde sur le plan xy). Pour trouver les angles polaires limites, il faut alors calculer la pente des tangentes sur le plan wz :



Ici, $w_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Ensuite, on suit les mêmes étapes que précédemment, comme celles utilisées pour déterminer les angles azimutaux limites :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan(m)$$

Une fois les angles limites trouvés, on utilise la relation suivante pour calculer les angles des rayons partant de l'observateur :

$$\theta_n = \theta_- + \frac{(\theta_+ - \theta_-)}{2N}(2n - 1)$$

$$\phi_m = \phi_- + \frac{(\phi_+ - \phi_-)}{2M}(2m - 1)$$

La seconde étape de la méthode des rayons et de réfraction est d'envoyer des rayons dans différentes directions et de déterminer lorsqu'il y aura des collisions. Le vecteur direction unitaire d'un rayon est :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$v_x = \sin(\theta)\cos(\phi), \quad v_y = \sin(\theta)\sin(\phi), \quad v_z = \cos(\theta)$$

Pour tracer un rayon de lumière, nous utiliserons l'équation d'une droite en trois dimensions données par :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + t\vec{v}$$

Tel que, \vec{r} est un point sur la droite et t la distance entre $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}(0)$. Dans notre cas, nous séparons le vecteur en trois équations pour simplifier l'écriture du code de la simulation.

On obtient alors les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) = x_0 + tv_x$$

$$y(t) = y_0 + tv_y$$

$$z(t) = z_0 + tv_z$$

Pour trouver le prochain point de collision ou d'incidence, il suffit de trouver les intersections entre la droite du rayon et l'ellipsoïde et les six faces (plans avec contraintes). Le prochain point de collision sera calculé avec la distance t la plus petite.

Pour trouver l'intersection entre le rayon et l'ellipsoïde, on remplace les équations paramétriques dans l'équation de l'ellipsoïde :

$$\frac{((x_0 + tv_x) - x_1)^2}{a^2} + \frac{((z_0 + tv_z) - y_1)^2}{b^2} + \frac{((z_0 + tv_z) - z_1)^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}\right)t^2 + \left(\frac{2v_x}{a^2} + \frac{2v_y}{b^2} + \frac{2v_z}{c^2}\right)t + \left(\frac{(x_0 - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{b^2} + \frac{(z_0 - z_1)^2}{c^2} - 1\right) = 0$$

$$A = \left(\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}\right)$$

$$B = \left(\frac{2v_x}{a^2} + \frac{2v_y}{b^2} + \frac{2v_z}{c^2}\right)$$

$$C = \left(\frac{(x_0 - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{b^2} + \frac{(z_0 - z_1)^2}{c^2} - 1\right)$$

$$t_{\text{ellipsoïde}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Si $B^2 - 4AC \leq 0$, on va considérer que le rayon n'est pas en collision avec l'ellipsoïde.

Pour trouver l'intersection entre le rayon et une face, on remplace les équations paramétriques dans l'équation du plan :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a(x_0 + tv_x) + b(z_0 + tv_z) + c(z_0 + tv_z) + d = 0$$

$$(av_x + bv_y + cv_z)t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$$

$$A = (av_x + bv_y + cv_z)$$

$$B = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$$

$$t_{face} = -\frac{B}{A}$$

Si $A = 0$, on va considérer qu'il n'y a pas d'intersection. Si $\vec{r}(t)$ ne respecte pas les contraintes de dimension de la face, on va aussi ignorer ce t .

Une fois qu'on a calculé ces t , on pourra alors trouver le prochain point d'incidence :

$$\vec{r}(t_{min}) = \vec{r}(0) + t_{min}\vec{v}$$

Tel que $t_{min} = \min(t_{face1}, t_{face2}, t_{face3}, t_{face4}, t_{face5}, t_{face6}, t_{ellipsoide}) > 0$. Si t_{min} n'existe pas, il n'y a pas de point d'incidence, donc on peut arrêter le traçage de ce rayon.

La troisième étape de la méthode des rayons et de réfractions est mettre à jour la direction du rayon et calculer la position suivante du rayon jusqu'à ce que le rayon sorte de l'ellipsoïde ou atteinte une des faces du bloc de métal.

La direction du rayon sortante dépend s'il y a eu une réflexion ou une réfraction. Le rayon est réfléchi lorsque le sinus de l'angle de réfraction est plus grand que 1 (réflexion totale interne). Sinon, une partie du rayon est réfléchi et l'autre réfractée (réflexion et réfraction). Pour simplifier notre simulation, nous supposons que le rayon est soit réfléchi, soit réfracté. La probabilité de chaque phénomène sera déterminée par le coefficient de réflexion pour la réflexion et le coefficient de transmission pour la réfraction.

Pour trouver le sinus de l'angle de réfraction, on utilise la seconde loi de Snell-Descartes qui est définie comme étant :

$$s_i = \sin \theta_i = \vec{v}_i \cdot \vec{k}$$

$$s_t = \sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} s_i = \frac{n_i}{n_t} \vec{v}_i \cdot \vec{k}$$

Tel que \vec{v}_i est le vecteur direction unitaire du rayon incident, \vec{k} le vecteur tangent à la normale du plan d'incidence, s_i est le sinus de l'angle d'incidence et s_t est le sinus de l'angle de réfraction.

Notez que \vec{k} le vecteur tangent à la normale du plan d'incidence est donné par :

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

$$\vec{j} = \frac{\vec{v}_i \times \vec{i}}{|\vec{v}_i \times \vec{i}|}$$

$$\vec{i} = \begin{cases} \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, & \vec{v} \cdot \vec{N} \leq 0 \\ -\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, & \vec{v} \cdot \vec{N} > 0 \end{cases}$$

$$\vec{N} = \left(\frac{X-4}{a^2}, \frac{Y-4}{b^2}, \frac{Z-11}{c^2} \right)$$

Tel que \vec{i} est la normale du plan de réflexion, \vec{j} la normale du plan d'incidence, \vec{N} est la normale sortante à un point de l'ellipsoïde. Si le rayon est à l'intérieur de l'ellipsoïde ($\vec{v} \cdot \vec{N} > 0$), il faut aussi inverser la normale ($-\vec{N}$).

Donc, si $s_t > 1$, le rayon sera réfléchi et sa direction sortante sera :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_i - 2\vec{i}(\vec{v}_i \cdot \vec{i})$$

Sinon, le rayon aura une probabilité R d'être réfléchi et une probabilité T d'être réfracté.

$$P(\vec{v} = \vec{v}_r) = R$$

$$P(\vec{v} = \vec{v}_t) = T$$

$$\vec{v}_t = -\vec{i} \cdot \sqrt{1 - s_t^2} + \vec{k} \cdot s_t$$

$$T = 1 - R$$

Tel que \vec{v}_t est la direction du rayon réfracté, R le coefficient de réflexion et T le coefficient de transmission.

Il reste à définir le coefficient de réflexion. Dans notre cas, nous supposons que la surface est parfaite. Dans le but de résoudre ce problème, nous utilisons les équations de Fresnel

en considérant la lumière d'un point de vue magnétique et électrique et supposant qu'elle n'est pas polarisée :

$$R = \frac{1}{2} \{r_{TE}^2 + r_{TM}^2\}$$

$$r_{TE} = \frac{n_{in} \cos(\theta_i) - n_{out} \cos(\theta_r)}{n_{in} \cos(\theta_i) + n_{out} \cos(\theta_r)}$$

$$r_{TM} = \frac{n_{out} \cos(\theta_i) - n_{in} \cos(\theta_r)}{n_{out} \cos(\theta_i) + n_{in} \cos(\theta_r)}$$

Tel que R_{TE} est le coefficient de réflexion pour l'amplitude électrique, R_{TM} est le coefficient de réflexion pour l'amplitude magnétique, θ_i est l'angle incident et θ_r est l'angle de réflexion.

Lorsque $\theta_i = \theta_r = 0$, l'équation se simplifie à :

$$R_{TE} = R_{TM} = \left(\frac{n_{in} - n_{out}}{n_{in} + n_{out}} \right)^2$$

Après avoir trouvé la direction \vec{v} du rayon sortant, on doit trouver le prochain point d'incidence en suivant les mêmes étapes que précédemment :

$$\vec{r}' = \vec{r} + t_{min} \vec{v}$$

$$t_{min} = \min(t_{face1}, t_{face2}, t_{face3}, t_{face4}, t_{face5}, t_{face6}, t_{ellipsoide}) > 0$$

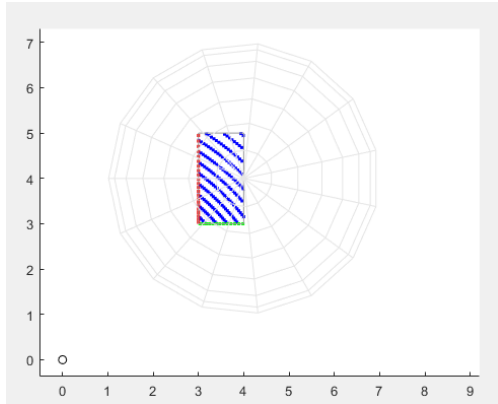
On répète la troisième étape jusqu'à ce que le rayon sorte de l'ellipsoïde (t_{min} n'existe pas) ou qu'il atteigne une des faces du bloc de métal.

Présentation et analyse des résultats

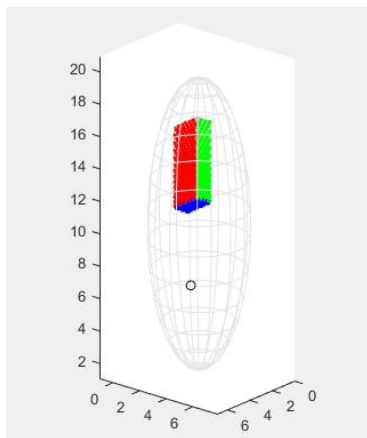
Analyse de cas 1 :

```
nout = 1;
nin  = 1;
poso = [0 0 5];
```

Image 1 : Condition initial pour le cas 1



Graphique 1 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 1



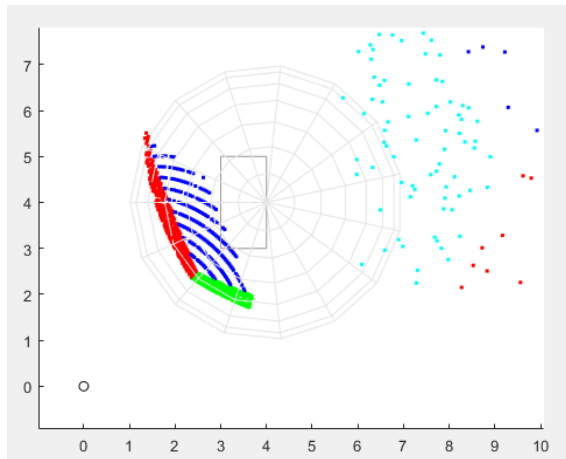
Graphique 2 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 1 en 3D

Pour le cas 1, l'observateur se trouve à la position $[0 \ 0 \ 5]$ cm. L'indice de réfraction du milieu de l'observateur et celui du bloc coloré sont tous les 2 égaux à 1. Ainsi, $n_{out} = n_{in} = 1$, ce qui fait que le sinus de l'angle de réfraction est égal au sinus de l'angle d'incidence ($\sin r = \sin i$). Il n'y a donc ni réfraction, ni réflexion. Le rayon traverse le plan de réfraction en ligne droite car l'angle est le même. Cela nous est confirmé par la simulation, les projections des faces colorées du bloc ne présentent pas de distorsion, elles sont fidèles à la forme géométrique du bloc. Cela est d'ailleurs clairement visible dans le graphique 2.

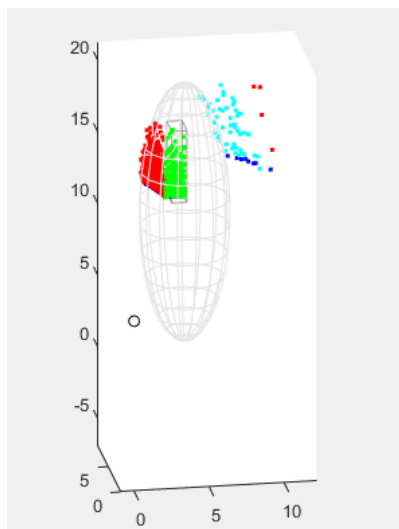
Analyse de cas 2 :

```
nout = 1;
nin  = 1.5;
pos0 = [0 0 5];
```

Image 2 : Condition initial pour le cas 2



Graphique 3 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 2



Graphique 4 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 2 en 3D

Pour le cas d'analyse 2, l'observateur se situe toujours à la même position, cependant, l'indice de réfraction du bloc coloré est de 1,5 et celui de l'observateur est de 1. Puisque les indices de réfraction sont différents, nous ne sommes plus dans un cas où le rayon traverse en ligne droite comme dans la simulation 1. Ici les rayons arrivant sur le bloc sont réfléchis ou réfractés.

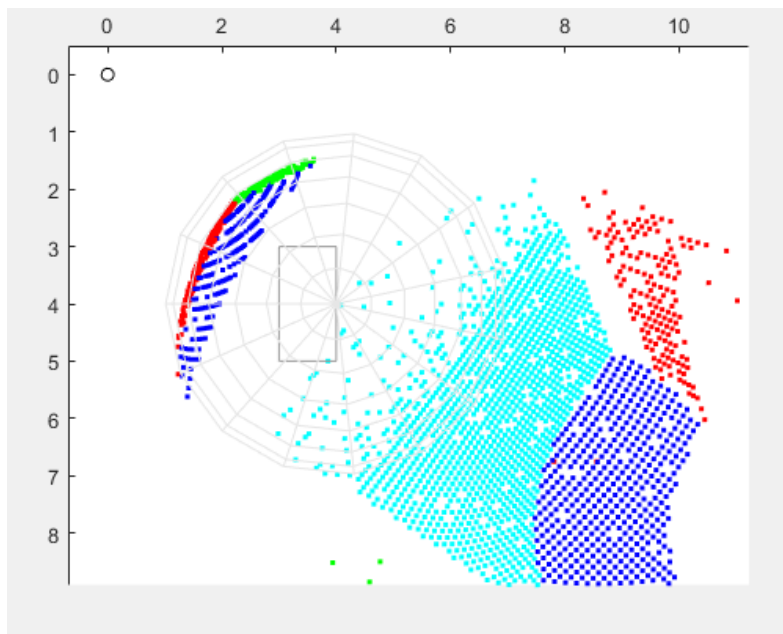
En observant notre simulation (graphes 3 et 4), on confirme que l'observateur voit les faces colorées du bloc de façon déviées et déplacées. Il semble aussi observer la couleur d'une

face opposée à sa vue (la face du bloc de couleur cyan). Cela est certainement dû au fait que malgré que les rayons soient réfractés, d'autres ont été réfléchis plusieurs fois avant de toucher les faces opposées, permettant à l'observateur de voir l'arrière du bloc.

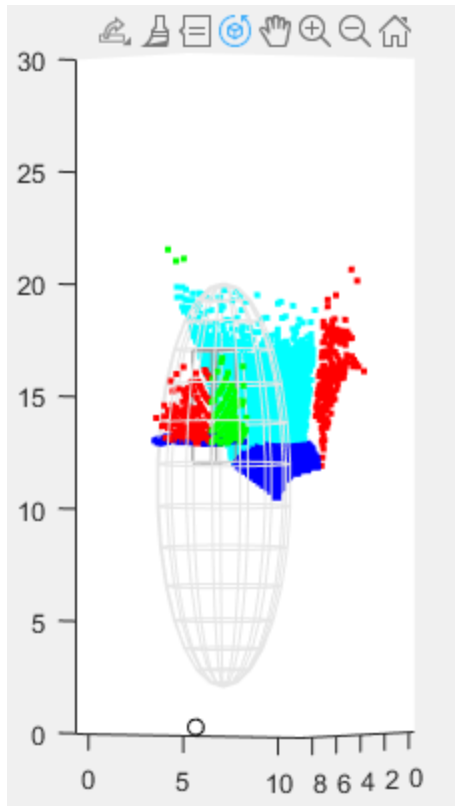
Analyse de cas 3 :

```
nout = 1;  
nin  = 1.5;  
pos0 = [0 0 0];
```

Image 3 : Condition initial pour le cas 3



Graphique 5 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 3



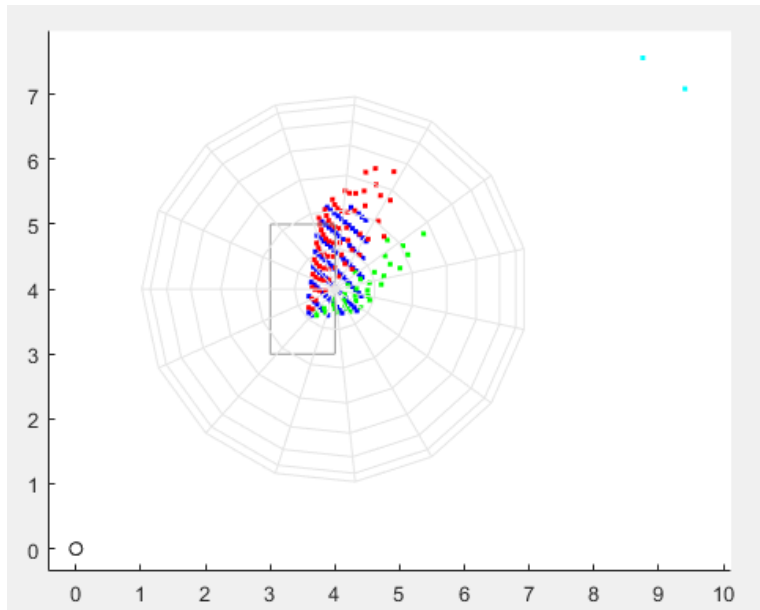
Graphique 6 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 3 en 3D

Pour le cas d'analyse 3, nous gardons les mêmes valeurs pour les indices de réfraction du bloc et du milieu de l'observateur mais nous changeons ça positions ([0 0 5]cm à [0 0 0]cm). Selon le résultat de notre simulation, nous remarquons une déviation plus intense des rayons lumineux, en effet, les faces du bloc semblent encore plus étalées (Graphique 5 et 6) que pour le cas de la simulation 2. Cela est sûrement dû à la nouvelle position de l'observateur. Étant donné qu'il se retrouve plus bas, l'angle d'incidence des rayons lumineux ont un angle plus large lorsqu'ils pénètrent le bloc de réfraction, causant une distorsion plus intense.

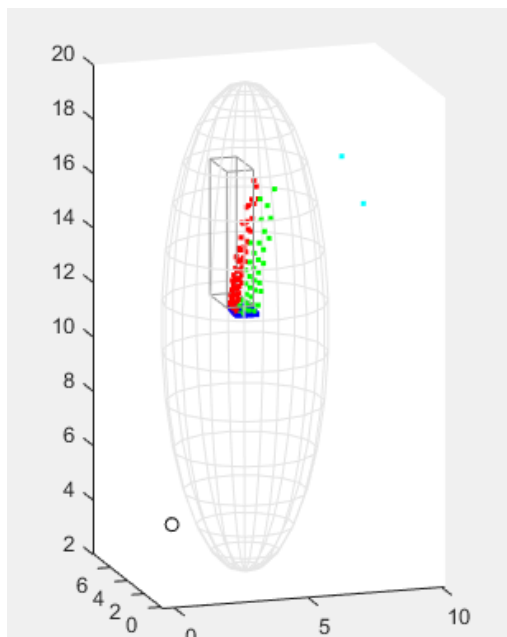
Analyse de cas 4 :

```
nout = 1.2;
nin = 1;
poso = [0 0 5];
```

Image 4 : Condition initial pour le cas 4



Graphique 7 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 4



Graphique 8 : Représentation du bloc vue par l'observateur pour le cas 4 en 3D

Pour le cas 4, l'observateur se trouve à la position $[0\ 0\ 5]$ cm mais contrairement au cas précédent, c'est l'indice de réfraction du milieu de l'observateur qui a un indice de

réfraction plus élevé : $n_{out} = 1.2$ et $n_{in} = 1$. Dans la simulation 4, nous avons $n_{out} > n_{in}$, contrairement à $n_{in} < n_{out}$ dans les cas 2 et 3. On voit qu'il n'y a pas beaucoup de rayons qui ont atteint le prisme. Puisque $n_{out} > n_{in}$, les angles de réfraction sont plus grands que les angles d'incidence. Cela va causer plus de réflexions et de réfractions qui font diverger les rayons, ce qui rend l'atteinte du prisme difficile. Donc, l'ellipsoïde agit comme une lentille divergente.

Conclusion

En conclusion, les effets de réflexion et de réfraction ont été observés. Lorsque les indices de réfraction des deux milieux sont identiques (cas 1), les rayons traversent directement, comme prévu. Lorsque l'indice de réfraction du bloc ellipsoïdal est plus élevé (cas 2 et 3), ce dernier agit comme une lentille convergente, permettant à davantage de rayons d'atteindre le prisme. Les rayons atteignant les faces opposées (cyan) du prisme nécessitent plusieurs réflexions internes et créent donc une image plus loin. En revanche, lorsque l'indice de réfraction du bloc est inférieur (cas 4), beaucoup de rayons incidents divergent et sont réfléchis. Étant donné que ce bloc agit comme une lentille divergente, il y a peu de réflexion totale interne possible. Par conséquent, les rayons parcourent une courte distance et n'atteignent pas les faces opposées du prisme. Malgré ces effets observables, on a quand même de la difficulté à savoir si notre simulation fonctionne parfaitement ou s'il y a des bogues. Notre plus grande difficulté rencontrée lors de la simulation est la validation des résultats. Contrairement aux devoirs 1 à 3, il est très difficile de savoir si les résultats sont cohérents sans avoir une idée précise de l'apparence attendue de l'image finale.