Devoir 1

Date de distribution : 9 septembre 2024

Date de remise : 1er octobre 2024

Moment d'inertie et accélération angulaire

Le problème consiste à étudier le comportement de la navette spatiale américaine et de son lanceur illustrés à la figure 1 (voir wikiwand). Le système navette-lanceur sera simulé en utilisant des cônes et des cylindres, comme illustré à la figure 2. Le système de coordonnées du laboratoire est décrit à la figure 2 (l'origine du système de référence est localisée au bas et au centre de la navette lorsqu'elle est sur la rampe de lancement).

Figure 1: Navette spatiale américaine avec son lanceur vue du haut (gauche) et de face (droite).

Les dimensions et masses des différentes composantes de la navette spatiale et de son lanceur décrites, en termes de cylindres et de cônes à la figure 2, sont les suivantes :

- La navette

  Nous supposerons ici qu'elle peut être représentée par un cylindre plein vertical de hauteur $h_{1,n} = 27.93$ m et de rayon $r_{1,n} = 3.5$ m sur lequel est déposé un cône plein de hauteur $h_{2,n} = 9.31$ m et de rayon $r_{2,n} = r_{1,n}$. La masse volumique de la navette est uniforme, la masse totale au décollage étant de 109 tonnes.

- Le réservoir

  Il peut être représenté par un cylindre plein vertical de hauteur $h_{1,r} = 39.1$ m et de rayon $r_{1,r} = 4.2$ m sur lequel est déposé un cône plein de hauteur $h_{2,r} = 7.8$ et de rayon $r_{2,r} = r_{1,r}$. Les deux tiers inférieurs du réservoir d'une hauteur totale de 46.9 m contiennent 108 tonnes d'hydrogène (masse volumique uniforme) et le tiers supérieur

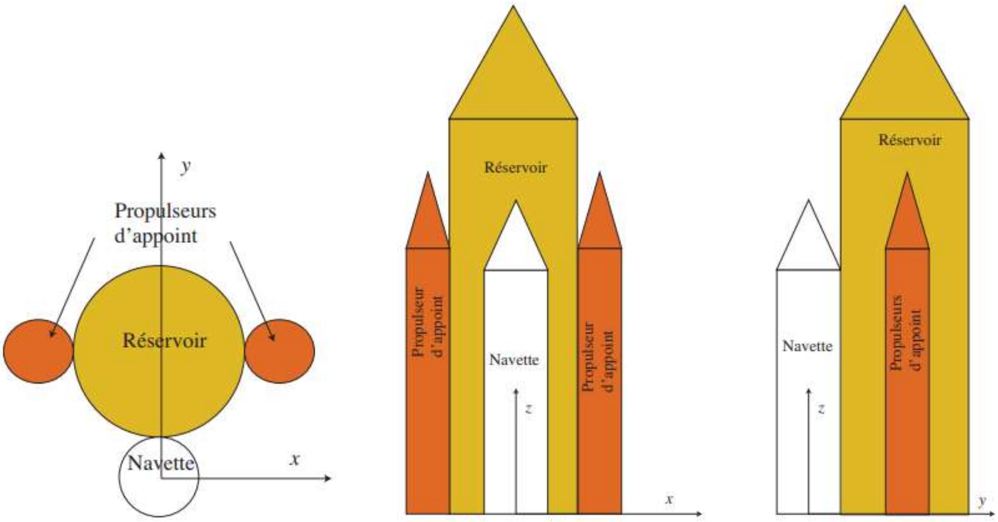

Figure 2: Modèle de la navette spatiale américaine avec son lanceur vue du haut (gauche), de côté (centre) et de face (droite)

(incluant le cône) contient 631 tonnes d'oxygène (masse volumique uniforme). Pour simplifier les calculs, nous négligerons la masse des parois du réservoir.

- Les propulseurs d'appoint

  Ils peuvent être représentés par des cylindres pleins verticaux de hauteur $h_{1,p} = 39.9$ m et de rayon $r_{1,p} = 1.855$ m sur lesquels sont déposés des cônes pleins de hauteur $h_{2,p} = 5.6$ et de rayon $r_{2,p} = r_{1,p}$. La masse volumique des propulseurs est uniforme, la masse totale au décollage de chaque propulseur est de 469 tonnes. Ils sont attachés au réservoir, le centre des propulseurs dans la direction y correspondant au centre du réservoir dans la même direction.

L'origine du système de coordonnées du laboratoire (voir figure 2) correspond à la position d'un point situé au bas et au centre du cylindre composant la navette (point où la force exercée par le moteur de la navette est appliquée).

But du devoir

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab qui permet de calculer la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire du système navette-propulseur pour différentes conditions initiales. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[pcmNL INL alphaNL]=Devoir1(AngRot,vangulaire,forces,posNL)
```

Les données d'entrée pour cette fonction sont :

- `AngRot` représente l'angle de rotation (en radians) de la navette autour de l'axe des x.
- `vangulaire` est le vecteur $\vec{\omega}$ décrivant la vitesse angulaire (en radians/s) de la navette autour de son centre de masse.
- `forces` est un vecteur de trois composantes indiquant les forces (Newton) exercées par le moteur de la navette et les propulseurs. Ainsi :
  - `forces(1)` est la force exercée par le moteur de la navette. Cette force est dans la direction de l'axe du cylindre composant la navette et est exercée au bas et au centre de ce cylindre ;
  - `forces(2)` est la force exercée par le propulseur de gauche. Cette force est dans la direction de l'axe du cylindre composant le propulseur de gauche et est exercée au bas et au centre de ce cylindre ;
  - `forces(3)` est la force exercée par le propulseur de droite. Cette force est dans la direction de l'axe du cylindre composant le propulseur de droite et est exercée au bas et au centre de ce cylindre.
- `posNL` est le vecteur $\vec{r}_n$ indiquant la position de la navette dans l'espace. Il correspond à la position d'un point situé au bas et au centre du cylindre composant la navette (point où est appliquée la force `forces(1)`.

Les résultats produits par cette fonction Matlab sont :

- `pcmNL`, le vecteur $\vec{r}_{c,n}$ indiquant la position du centre de masse du système navette-lanceur ;
- `INL`, le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_n$ du système navette-lanceur par rapport à son centre de masse dans le système du laboratoire ;
- `alphaNL`, le vecteur $\vec{\alpha}_{c,n}$ indiquant l'accélération angulaire du système navette-lanceur autour de son centre de masse.

Simulations requises

Vous devez ensuite utiliser cette fonction pour analyser deux différentes situations :

- Cas 1.

  Le système navette-lanceur est sur la rampe de lancement ($\vec{r}_n = (0, 0, 0)^T$). Sa vitesse angulaire est alors nulle. La force appliquée par le moteur de la navette est de 11 MN et les forces exercées par chacun des propulseurs de 8.75 MN (au bas et au centre de chacun des propulseurs). Ces forces sont dirigées dans la direction z.

- Cas 2.

  Un accident se produit lorsque le système navette-lanceur atteint une hauteur d'environ 50 m ($\vec{r}_n = (0, -19.6075, 50)^T$ m), car le propulseur d'appoint de droite (voir figure 2 au centre) s'éteint de façon inopinée. La vitesse angulaire du système navette-lanceur autour de son centre de masse est $\vec{\omega} = (-0.54, 0, 0)^T$ rad/s et le propulseur d'appoint de droite n'exerce plus aucune force sur le système. La navette a aussi subi une rotation d'un angle $-\pi/3$ autour de l'axe x après les 4 secondes requises pour atteindre cette altitude. Ici, vous pouvez supposer que les masses du réservoir et des propulseurs d'appoint sont demeurées constantes pendant cette même période de temps. La force appliquée par le moteur de la navette est toujours de 11 MN et celle du propulseur de gauche de 8.75 MN (au bas et au centre de chacun des propulseurs). Ces forces sont dirigées dans la direction correspondant aux axes des cylindres qui composent la navette et le propulseur.

Moment d'inertie et centre de masse d'un cône plein de masse volumique uniforme

Le cône plein de direction z décrit à la figure 3 a un rayon r, une hauteur h et une masse m. Son axe est centré au point $x = 0$ et $y = 0$. Son volume est

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \,,$$

son centre de masse est localisé à $\vec{r}_c = (0, 0, h/4)^T$ et son moment d'inertie par rapport au centre de masse est

$$\boldsymbol{I} = m \begin{pmatrix} \frac{12r^2+3h^2}{80} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12r^2+3h^2}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3r^2}{10} \end{pmatrix}$$

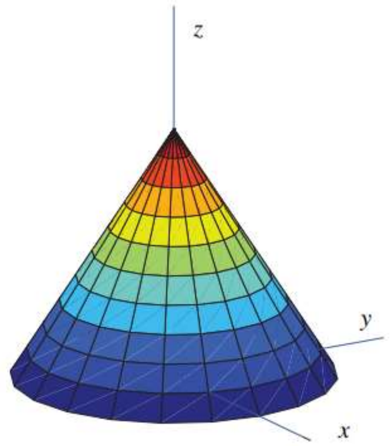

Figure 3: Géométrie d'un cône plein.