

5.1 Решение алгебраических (и других) уравнений и систем.

5.2 Решение дифференциальных уравнений и систем (задача Коши и граничные задачи)*

5.3 Задания для самостоятельной работы.

5.1 Решение алгебраических (и других) уравнений и систем.

- Линейные алгебраические уравнения.
- Квадратные уравнения и алгебраические уравнения высших порядков.
- Иррациональные уравнения.
- Экспоненциальные и логарифмические уравнения.
- Тригонометрические уравнения.
- Неравенства.
- Системы линейных уравнений.
- Нелинейные уравнения и системы уравнений.

Линейные алгебраические уравнения.

Определение: Уравнение вида $ax+b=0$ с заданным базовым множеством G_x , a из G_a , b из G_b называется линейным уравнением.

Этапы решения при помощи Mathcad:

1. Ввести уравнение (знак "=" вводится при помощи комбинации [Ctrl++]).
2. Выделить курсором переменную, относительно которой должно быть решено уравнение.
3. Выбрать команду **Solve** (Вычислить) подменю **Variable** (Переменные) меню **Symbolics** (Символы).

При решении линейных уравнений (без параметров) или дробных уравнений, которые сводятся к линейным, MathCAD находит все существующие решения. Однако при этом следует правильно интерпретировать сообщения, выдаваемые системой.

Нормальный случай.

$$6 \cdot x + 2 - [3 \cdot x - 4 - [5 \cdot x - (7 \cdot x - 1) + 4] - (2 \cdot x + 5)] = 2 \cdot (x - 5) + 23$$

-3 = найденное Mathcad решение, таким образом множество решений $L=\{-3\}$

В качестве решения MathCAD выдает число - это означает,

что уравнение однозначно разрешимо (однозначное решение линейного уравнения над множеством действительных чисел, которое одновременно является областью определения этого уравнения).

Решение отсутствует.

Рассмотрим другой пример: $6 \cdot x + 2 - [3 \cdot x - 4 - [5 \cdot x - (7 \cdot x - 1) + 4] - (2 \cdot x + 5)] = 3 \cdot (x - 5) + 23$

$$6 \cdot x + 2 - [3 \cdot x - 4 - [5 \cdot x - (7 \cdot x - 1) + 4] - (2 \cdot x + 5)] = 3 \cdot (x - 5) + 23$$

Команда **Simplify**

(Упростить)

меню **Symbolics** (Символы)

(левая часть)

$$3 \cdot x + 16 = 3 \cdot (x - 5) + 23$$

Команда **Simplify**

(Упростить)

меню **Symbolics** (Символы)

(правая часть)

$$3 \cdot x + 16 = 3 \cdot x + 8$$

После выполнения описанных выше действий для нахождения решения Mathcad выдает сообщение о том, что решение не найдено.

Проанализировав данное уравнение приходим к выводу, что выданное Mathcad сообщение означает, что решений нет $L = \{\}$.

MathCAD выдает сообщение "Решение не найдено", даже если уравнение имеет "формальное решение", которое не принадлежит области определения (смотри примеры ниже).

Многозначность.

Если в качестве решения MathCAD выдает имя переменной, это означает, что множество решений уравнения совпадает с областью определения. Однако, такие понятия, как множество решений уравнения и область определения, отсутствуют в MathCAD и он не выписывает область определения. Вы можете найти область определения, решая с помощью Mathcad систему неравенств или уравнений

$$6 \cdot x + 2 - [3 \cdot x - 4 - [5 \cdot x - (7 \cdot x - 1) + 4] - (2 \cdot x + 5)] = 3 \cdot (x - 5) + 31$$

Анализ:

$$6 \cdot x + 2 - [3 \cdot x - 4 - [5 \cdot x - (7 \cdot x - 1) + 4] - (2 \cdot x + 5)] = 3 \cdot (x - 5) + 31$$

$$3 \cdot x + 16 = 3 \cdot (x - 5) + 31$$

Соотношение, выполняющееся для

$$3 \cdot x + 16 = 3 \cdot x + 16 \quad \text{всех значений } x: L = R.$$

Такой результат, выданный Mathcad после выполнения действий по решению уравнения, означает, что любое значение x из базового множества удовлетворяет этому уравнению, т. е. $L = R$.

Дробные уравнения

$$\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-7}$$

6

Команда **Solve** (Вычислить) из подменю **Variable** (Переменные) меню **Symbolics** (Символы) выдает множество решений: $L = \{6\}$.

Быстрый вариант проверки:

$$\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-7}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Решение 6 копируем в буфер, а затем выделяем маркером переменную x и активизируем команду **Substitute** (Замена) подменю **Variable** (Переменные) меню **Symbolics** (Символы) для замены переменной значением 6.

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$$

Рассмотрим другой пример:

Последнее уравнение (рисунок справа) условно эквивалентно уравнению: $2x=4$. Решение уравнения Mathcad: **2**. Формальное решение $x = 2$ не входит в область допустимых значений. Mathcad выдает правильное сообщение!

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{-2 \cdot x}{1-x^2}$$

Здесь также правильное решение: множество решений совпадает с областью допустимых значений $L = D$. Только следует учесть, что $D = \{R \setminus \{-1, 1\}\}$.

Решение Mathcad

Анализ:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$$

Команда **Simplify** (Упростить) меню **Symbolics** (Символы) (левая часть)

$$2 \cdot \frac{x}{[(x-2) \cdot (x+2)]} = \frac{4}{x^2-4}$$

Для левого знаменателя применяем команду **Expand** (Расширить) меню **Symbolics** (Символы).

$$2 \cdot \frac{x}{(x^2-4)} = \frac{4}{x^2-4}$$

Квадратные уравнения и алгебраические уравнения высших порядков.

Определение: Уравнение $P(x)=0$ называется алгебраическим уравнением n -го порядка, если $P(x)$ представляет собой полином степени n , при $n=2$ данное уравнение называется квадратным уравнением.

При решении такого рода уравнения необходимо выполнить те же действия, что и при решении линейных уравнений.

Квадратное уравнение.

$$x^2 + 6 \cdot x + 8 = 0$$

Команда **Solve** (Вычислить) подменю **Variable** (Переменные) меню **Symbolics** (Символы) дает решение в виде вектора: $L = \{-2, -4\}$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} <$$

$$x^2 + 6 \cdot x + 8 = 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Аналогичный результат можно получить, используя директивы системы **Smartmath**.

Для этого необходимо включить панель символьных преобразований и после ввода выражения нажать кнопку со словом **solve**. В шаблоне, появившемся после вставки ключевого слова, необходимо указать переменную, относительно которой решается уравнение.

Другой способ решения заключается в использовании команды **Factor** (Фактор) меню **Symbolics** (Символы) для разложения полинома на множители в соответствии с теоремой Виета:

$$x^2 + 6 \cdot x + 8$$

Команда **Factor** (Фактор) меню **Symbolics** (Символы)

$$(x+2) \cdot (x+4)$$

Разложение на множители

а) иррациональные корни

$$3 \cdot x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{10} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

б) комплексные корни

$$x^2 + 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2i \\ -2i \end{pmatrix}$$

с) комплексные**иррациональные корни**

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Отметим, что при иррациональных и комплексных решениях команда **Factor** (Фактор) меню **Symbolics** (Символы) не работает. Но MathCAD находит и такие решения при использовании команды **Solve**

Квадратные уравнения с комплексными коэффициентами.

$$(3 + i) \cdot x^2 - (3 - i) \cdot x + 2 + 2i = 0$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{20} \cdot i \right) \cdot (3 - i + \sqrt{2} \cdot \sqrt{-4 - 19i}) \\ \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{20} \cdot i \right) \cdot (3 - i - \sqrt{2} \cdot \sqrt{-4 - 19i}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.747 - 1.222i \\ 0.053 + 0.622i \end{pmatrix}$$

: При вводе уравнения с комплексными коэффициентами Следует вводить для i: 1i; для -i: -1i; для 2i: 2i; ни в коем случае не вводить "*"! Как видим, MATHCAD неплохо справляется и с такими задачами.

Уравнения более высокого порядка.

Mathcad может решать уравнения вплоть до порядка 4 (даже символично). Если возможно частичное разложение на множители, то разрешимы уравнения и более высокого порядка.

Кубические уравнения.**а) рациональные решения:**

$$3 \cdot x^3 + x^2 - 8 \cdot x + 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ решения}$$

б) иррациональные решения:

$$3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{73} \\ \frac{-5}{6} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{73} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.591 \\ -2.257 \end{pmatrix}$$

Уравнения четвертого порядка:

$$3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{31} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-2 + \sqrt{31}} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{31} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-2 + \sqrt{31}} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{31} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-2 - \sqrt{31}} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{31} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-2 - \sqrt{31}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.54 \\ 0.649 \\ -0.761 + 0.648i \\ -0.761 - 0.648i \end{pmatrix}$$

Уравнение седьмого порядка.

$$x^7 + 2 \cdot x^5 - 6 \cdot x^6 + 40 \cdot x^4 - 49 \cdot x^3 - 54 \cdot x^2 + 102 \cdot x - 36 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1.732 \\ -1.732 \\ 3.414 \\ 0.586 \end{pmatrix}$$

Иррациональное уравнения (уравнения с радикалами).

Корни (радикалы) могут вычисляться в MathCAD либо при помощи знака корня (клавиши [Ctrl+√]), либо как степени (клавиша [^] с дробными показателями. Знак квадратного корня вводится нажатием клавиши [√]. Знак корня и квадратный корень можно найти на панели **Calculator** (Калькулятор). Последовательность действий при решении уравнений с радикалами та же, что и при решении рассмотренных ранее уравнений.

С точки зрения теории, между решениями уравнений с радикалами и решением алгебраических уравнений имеется два важных различия, по крайней мере, при нахождении действительных решений.

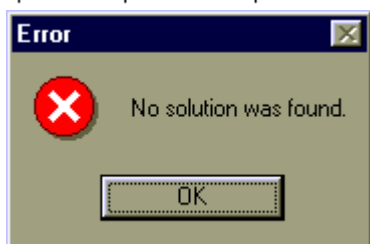
- Радикалы определены не везде в действительной области. Это обстоятельство приводит к необходимости находить область определения, прежде чем решать само уравнение. Данная проблема справедливо игнорируется MathCAD, поскольку он не может знать, во множестве каких чисел (действительных или комплексных) вы намерены решать уравнение. Выход: вы можете самостоятельно найти область определения, воспользовавшись при этом возможностями MathCAD, связанными с решениями неравенств.
- Вторая проблема, возникающая при решении уравнений с радикалами, имеет принципиальный характер. Функция x^2 (как и любая другая функция с четным показателем) на является инъективной (проблема главных значений). В связи с этим возведение в квадрат обеих частей уравнения, содержащего квадратные корни, не является эквивалентным преобразованием. Как всегда, при применении к обеим частям уравнения не инъективного преобразования увеличивается множество решений. В результате в него могут войти "фиктивные" решения. Как ни удивительно, MATHCAD сам производит проверку решений на "фиктивность".

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+9} = 5$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Классический случай решения уравнения с радикалами.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10} = -\sqrt{4x+25}$$



Mathcad распознает "фиктивные" решения (которые могут возникнуть в результате неэквивалентного преобразования "возведение в квадрат") и выдает верное сообщение: Решение не найдено. $L = \{ \}$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10} = \sqrt{4x+25} \quad 6$$

Область допустимых значений D:

$$x+3 \geq 0 \quad x+10 \geq 0 \quad 4x+25 \geq 0$$

$$(-3 \leq x) \quad (-10 \leq x) \quad \left(-\frac{25}{4} \leq x \right)$$

$$D = [-3, \infty[\quad \text{Решение: } 6$$

$$x = \left(3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$1 \quad L = \{1\}$$

$$\sqrt{x^2 + i} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (1 + i)$$

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ -1-i \end{pmatrix} \quad L = \{1+i, -1-i\}$$

Уравнения с радикалами третьей степени, как и уравнения с комплексными коэффициентами, не представляют для MathCAD никакой сложности.

Уравнения с параметрами.

При решении уравнений с параметрами MathCAD ведет себя по-разному, в зависимости от того, каким образом производятся символьные вычисления - с помощью символьного знака равенства или команд меню **Symbolics**.

В данном примере использование палитры символьных преобразований позволяет решить уравнение (**solve**) и упростить результат (**simplify**)

$$t = \frac{1}{g} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{g \cdot s} + \frac{s}{c} \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, s} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \left[\begin{array}{c} c \cdot \frac{t \cdot g + c - [c \cdot (c + 2 \cdot t \cdot g)]^{\frac{1}{2}}}{g} \\ c \cdot \frac{t \cdot g + c + [c \cdot (c + 2 \cdot t \cdot g)]^{\frac{1}{2}}}{g} \end{array} \right]$$

Экспоненциальные и логарифмические уравнения.

Определение: Уравнение, в котором независимая переменная входит в аргумент хотя бы одной экспоненциальной (логарифмической) функции, называется экспоненциальным (логарифмическим) уравнением.

Способ решения с помощью Mathcad такой же, как и для других типов уравнений.

$$5^{2 \cdot x - 3} = 5 \quad 2 \quad \text{Экспоненциальные уравнения во множестве действительных чисел не создают дополнительных сложностей в том смысле, что их область определения совпадает со множеством действительных чисел, а логарифмирование представляет собой инъективное отображение.}$$

$$3^{2 \cdot x - 1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2 \cdot x} = 11 \cdot 9^{x-2} \quad 2$$

$$3^{2 \cdot x} - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\ln(9)}{\ln(3)} \\ \frac{\ln(27)}{\ln(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Если при решении экспоненциального уравнения возникают проблемы, их, как правило, можно устранить посредством вспомогательного логарифмирования. В крайнем случае можно обратиться к численным методам (См. Решение нелинейных уравнений и систем).

$$\log(x + 3) + \log(2 \cdot x) = \log(x + 9) + \log(2 \cdot x - 4)$$

$$\frac{9}{2}$$

Решение Mathcad

Значительно больше сложностей возникает при решении логарифмических уравнений. Область определения этих уравнений, если рассматривать их во множестве действительных чисел, как правило, не совпадает с действительной числовой прямой. MathCAD рассматривает логарифмические уравнения в комплексной области, т.е. не учитывая область определения.

$$2 \cdot \ln(x+3) - 3 \cdot \ln(x+2) + \ln(x+1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2} \\ \left[\frac{-1}{4} \cdot (4\sqrt{5} - 4) \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot (4\sqrt{5} - 4) \left(\frac{1}{3}\right) \right]^3 - 1 \\ \left[\frac{-1}{4} \cdot (4\sqrt{5} - 4) \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot (4\sqrt{5} - 4) \left(\frac{1}{3}\right) \right]^3 - 1 \\ \frac{-3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \\ \left[\frac{1}{4} \cdot (4\sqrt{5} + 4) \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot (4\sqrt{5} + 4) \left(\frac{1}{3}\right) \right]^3 - 1 \\ \left[\frac{1}{4} \cdot (4\sqrt{5} + 4) \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot (4\sqrt{5} + 4) \left(\frac{1}{3}\right) \right]^3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.382 \\ -0.382 \\ -0.382 \\ -2.618 \\ -2.618 \\ -2.618 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \\ \frac{-3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.382 \\ -2.618 \end{pmatrix}$$

В данном примере показано, что MathCAD иногда находит решения (и даже действительные) там, где их быть не может (проблемы с комплексным логарифмом). Но нахождение области определения позволяет прийти к верному решению.

Проверка: $2 \cdot \ln(x_1 + 3) - 3 \cdot \ln(x_1 + 2) + \ln(x_1 + 1) = 0$
 $2 \cdot \ln(x_2 + 3) - 3 \cdot \ln(x_2 + 2) + \ln(x_2 + 1) = -6.283i$

$$L = \{-0.382\}$$

Область допустимых значений D:

$$x+3 > 0 \quad x+2 > 0 \quad x+1 > 0$$

$$(-3 < x) \quad (-2 < x) \quad (-1 < x)$$

$$D =]-1, \infty[$$

$$\log(1-x) + \log(x-4) - \log(x^2 - 5x + 6) = 2$$

$$D: \quad 1-x > 0 \quad x-4 > 0 \quad x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$(x < 1) \quad (4 < x)$$

$$x < 1 \text{ и } x > 4! \quad D = \{\}$$

$$\begin{pmatrix} x < 2 \\ 3 < x \end{pmatrix}$$

Насколько полезным может быть предварительное нахождение области определения, показывает следующий пример. Область определения пустое множество, следовательно, множество решений $L = \{\}$.

Тригонометрические уравнения.

Сложность решения уравнений, содержащих тригонометрические функции, состоит прежде всего в том, что функций, обратных к тригонометрическим, не существует, а существуют лишь бесконечно многозначные обратные отображения. Поэтому приходится мириться с тем, что любое вычислительное средство сможет найти только главное значение обратного выражения. Чтобы получить множество решений, необходимо самостоятельно воссоздать побочные значения обратного отображения.

Для тангенса (и котангенса) этого главного значения достаточно посредством периодического продолжения $\text{atan}(x) + k\pi$, где k - целое представить все решения. При решении уравнений с тангенсами и котангенсами возникает также вполне разрешимая проблема, связанная с тем, что данные функции определены не во всех точках числовой прямой.

$$\tan(x) + \cos(x) = 1 + \sin(x)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \cdot \pi \\ -\frac{3}{4} \cdot \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.785 \\ -2.356 \end{pmatrix}$$

Данный пример показывает, что вышеуказанное ограничение не играет особой роли при решении уравнений с помощью MathCAD. Поскольку синус и косинус определены для всех значений аргумента, вопрос об области определения при решении уравнений, содержащих только эти тригонометрические функции, как правило, отпадает.

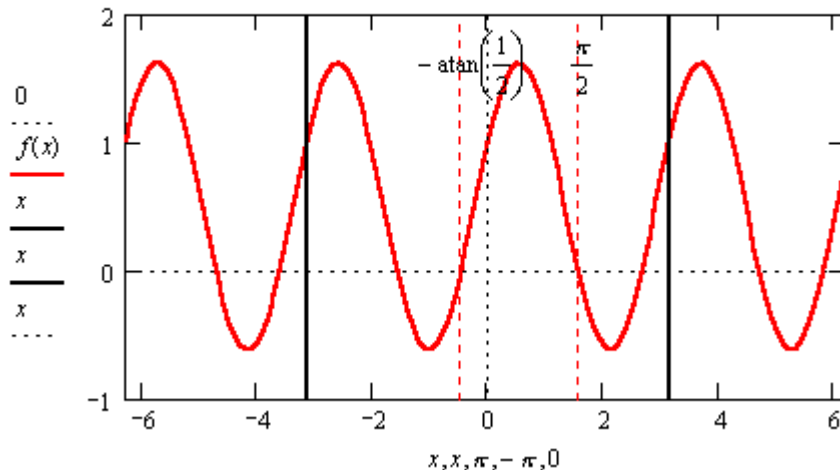
<

Вместо этого возникает другая сложность: обратные функции $\text{asin}(x)$ и $\text{acos}(x)$, значениями которых являются главные значения обратных отображений, не дают всех решений в рамках одного периода (2π).

$$\cos(x)^2 + \sin(2 \cdot x) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \pi \\ -\text{atan}\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ -0.464 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \cos(x)^2 + \sin(2 \cdot x) \quad x := -2 \cdot \pi, -2 \cdot \pi + 0.1 .. 2 \cdot \pi$$



$$\sin(4 \cdot x) + \sin(2 \cdot x) = 0$$

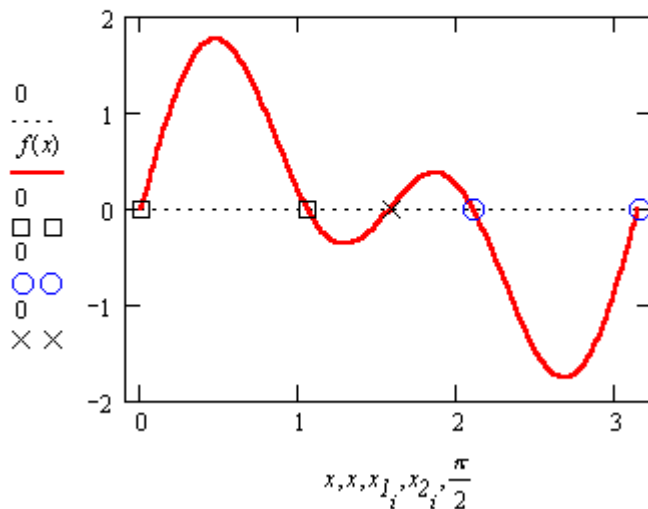
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \pi \\ \frac{1}{3} \cdot \pi \\ -\frac{1}{3} \cdot \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.571 \\ 1.047 \\ -1.047 \end{pmatrix}$$

Поскольку остается неясным, какое именно из значений обратного отображения MathCAD рассматривает в качестве главного при решении уравнений, оказывается сложно получить еще одно значение, отстоящее от главного менее чем на период; тем самым задача была бы решена с точностью до периода. В подобных ситуациях на выручку приходит построение графиков.

$$f(x) := \sin(4x) + \sin(2x)$$

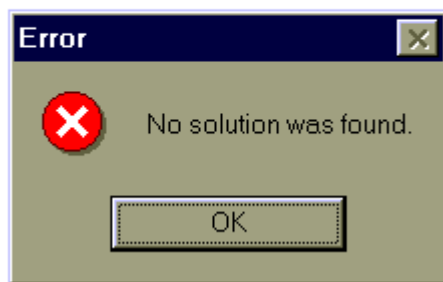
$$i := 0..1 \quad x_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \cdot \pi \end{pmatrix} \quad x_2 := \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - x_1$$

$$x := 0, 0.02 \dots \pi$$



$$\frac{\sin(2x)}{1 - \cos(2x)} = 0$$

Реакция Mathcad:



Данный пример демонстрирует пределы возможности MathCAD. Решение в лоб не дает никаких результатов.

Анализ:

$$\frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{1 - (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)} \quad \text{или} \quad \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x)^2 + \sin(x)^2 - (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)}$$

Команда Simplify
из меню Symbolics:

$$< \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = 0$$

Команда Solve

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \pi \\ -\frac{1}{2} \cdot \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ -1.571 \end{pmatrix}$$

Проведя дополнительные преобразования, нам все-таки удастся найти решение.

Неравенства.

MathCAD обладает достаточно мощными возможностями для решения неравенств. Эти возможности уже использовались нами ранее для нахождения области определения уравнений, содержащих функции, определенные не во всех точках числовой прямой.

Неравенства, как и уравнения, можно решать либо с использованием символического знака равенства, либо, отметив переменную следом курсора, посредством выполнения команды **Solve** (Вычислить) подменю **Variable** (Переменные) меню **Symbolics** (Символы). В разных неравенствах могут быть использованы различные знаки неравенств.

$f(x) \leq g(x)$ комбинация [Ctrl+9] Знаки "больше" и "меньше" могут вводиться непосредственно с клавиатуры. Все остальные знаки можно вводить при помощи панели **Evaluation** (Вычисления), либо сочетанием клавиш.
 $f(x) \geq g(x)$ комбинация [Ctrl+0]
 $f(x) \neq g(x)$ комбинация [Ctrl+3]

$$\frac{2x-3}{5x+4} < \frac{2x+3}{x-5} \quad \left[\begin{array}{l} x < \frac{-9}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{87} \\ \left(\frac{-4}{5} < x\right) \cdot \left(x < \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{87}\right) \\ 5 < x \end{array} \right]$$

$$\frac{-9}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{87} = -4.582$$

$$\frac{-9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{87} = 0.082$$

Линейные неравенства и неравенства с дробно-рациональными функциями не составляют сложности для MathCAD.

$$L = \{ x \mid x < -4.582 \text{ или } (x > -0.8 \text{ und } x < 0.082) \text{ или } x > 5 \} =]-\infty, -4.582[\cup]-0.8, 0.082[\cup]5, \infty[= \mathbb{R} \setminus ([-4.582, -0.8] \cup [0.082, 5])$$

$$a \cdot x - b \leq 0$$

$$\left(\text{signum}(a) \cdot x \leq \text{signum}(a) \cdot \frac{b}{a} \right)$$

$$a \cdot x - b \leq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x \\ \text{assume}, a > 0 \end{array} \right. \rightarrow x \leq \frac{b}{a}$$

Неравенства с параметрами удобно анализировать с использованием знака символического равенства, если значения параметра ограничены некоторыми условиями.

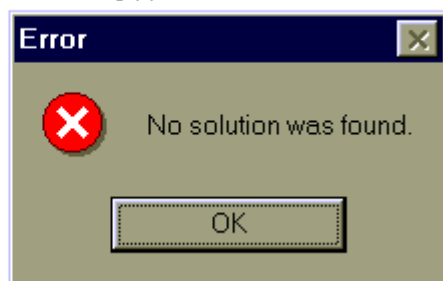
$$a \cdot x - b \leq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x \\ \text{assume}, a < 0 \end{array} \right. \rightarrow -x \leq \frac{-b}{a}$$

a) $2 \cdot \exp(x) - 5 < 0$

b) $2 \cdot \exp(x)^2 - 5 \geq 0$

$$\left(x < \ln\left(\frac{5}{2}\right) \right) \quad \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0.916$$

$$L =]-\infty, 0.916[$$



При решении неравенств, содержащих трансцендентные функции, возможности MathCAD ограничены.

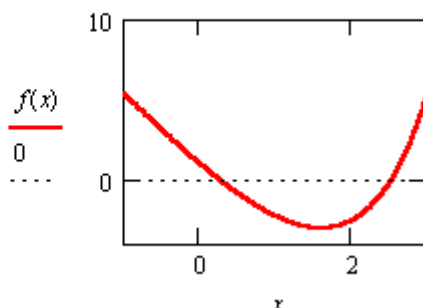
$$\exp(x) - 5 \cdot x < 0 \quad f(x) := \exp(x) - 5 \cdot x$$

График: $x := -1, -0.99..$

$$x := 0 \quad \text{root}(f(x), x) = 0.259$$

$$x := 3 \quad \text{root}(f(x), x) = 2.543$$

$$L =]0.259, 2.543[$$



В данном примере MathCAD не может решить неравенство при использовании символического процессора. На помощь приходят графики и функция численного решения уравнений **root**. Для работы этой функции необходимо задать начальное приближение для искомого решения.

Системы линейных уравнений.

Для численного решения линейных систем уравнений в MathCAD имеется специальная функция:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \mathbf{lsolv}(A, B)$$

Она решает систему линейных алгебраических уравнений вида $A \cdot X = B$, выдавая решение - вектор X .

A - матрица коэффициентов размерности $n \times n$;

B - вектор свободных членов размерности n ;

X - вектор неизвестных пока решений.

$$X1 := \mathbf{lsolve}(A, B) \quad X1 = \begin{pmatrix} 1.909 \\ 3.195 \\ 5.045 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1 \cdot d + 22.3 \cdot k &= 17.5 \\ -1 \cdot d + 24.7 \cdot k &= 23.8 \end{aligned} \quad A \equiv \begin{pmatrix} -1 & 22.3 \\ -1 & 24.7 \end{pmatrix} \quad b \equiv \begin{pmatrix} 17.5 \\ 23.8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix} \equiv A^{-1} \cdot b \quad \begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41.038 \\ 2.625 \end{pmatrix}$$

Эквивалентной для MathCAD формой представления систем линейных уравнений является матричная форма.

Представленные таким образом системы можно решать как символично, так и численно.

Хорошей альтернативой решению систем в матричной форме является так называемый **solve block** (Блок решения). Он удобен тем, что при его использовании уравнения записываются не в матричной, а в обычной форме, а также тем, что позволяет решать нелинейные уравнения и вводить ограничительные условия для определяемого решения. Блок решения применяется как для нахождения численного решения, так и для отыскания решения в символьном виде.

Синтаксис Блока решения:

Given

Уравнения

Ограничительные условия

Find(v1, v2, ..., vn) - возвращает значение одной

или ряда переменных для точного решения

vi - переменные, которые надо найти.

Последовательность действий при численном решении:

$$\begin{aligned} s_1 &:= 1 & s_2 &:= 1 & t &:= 1 \\ \text{Given} \\ s_1 + s_2 &= 180 & s_1 &= 44 \cdot t \\ s_2 &= 80 \cdot (t - 1) \\ v &:= \mathbf{Find}(s_1, s_2, t) & v &= \begin{pmatrix} 92.258 \\ 87.742 \\ 2.097 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Задаем начальные (стартовые) значения для искомых переменных.
- Закключаем уравнения в блок решения, начинающийся ключевым словом **Given** и заканчивающийся ключевым словом **Find(v1,v2,...vn)**.
- Если после слова **Find(v1,v2,...vn)** ввести знак равенства [=], MathACD выдаст численное решение.

Given

$$i1 = i2 + i3 \quad i2 \cdot R2 = i3 \cdot R3 \quad u0 = i1 \cdot R1 + i2 \cdot R2$$

$$\text{Find}(i1, i2, i3) \rightarrow \begin{bmatrix} u0 \cdot \frac{(R2 + R3)}{(R2 \cdot R1 + R3 \cdot R1 + R3 \cdot R2)} \\ R3 \cdot \frac{u0}{(R2 \cdot R1 + R3 \cdot R1 + R3 \cdot R2)} \\ u0 \cdot \frac{R2}{(R2 \cdot R1 + R3 \cdot R1 + R3 \cdot R2)} \end{bmatrix}$$

При символьном решении не надо вводить начальные значения, а после ключевого слова **Find(v1,v2,...vn)** вместо знака равенства следует ввести символьный знак равенства (при помощи комбинации **[Ctrl+.]** или соответствующей пиктограммы панели **Evaluation**).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \quad A^{-1} \cdot b = \dots$$

Matrix is singular.
Cannot compute its inverse.

Блок решения:

многозначность решения
в параметрической форме

Given

$$a + 2b = 3$$

$$2a + 4b = 6$$

$$\text{Find}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot b + 3 \\ b \end{pmatrix}$$

Существует еще одно важное отличие между блоком решения и использованием матричных операций. Если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, матричные методы оказываются непригодными. В таком случае система не имеет решений или разрешима неоднозначно. Если же применить блок решения, MathCAD распознает неоднозначность и выдает решение в параметрической форме.

Нелинейные уравнения и системы уравнений.

Многие уравнения, например трансцендентные, и системы из них не имеют аналитических решений. Однако они могут решаться численными методами с заданной погрешностью (не более значения, заданного системной переменной **(TOL)**). Для простейших уравнений вида $F(x)=0$ решение находится с помощью функции

Root(Выражение, Имя_переменной)

Эта функция возвращает значение переменной с указанным уровнем точности, при котором выражение дает 0.

$$g(x) := x^3 + e^x \quad x := 0$$

$$x0 := \text{root}(g(x), x) \quad x0 = -0.773$$

$$xx := \text{root}\left[\left(x^3 + e^x\right), x\right] \quad xx = -0.773$$

Функция реализует вычисления итерационным методом, причем можно задать начальное значение переменной. Это особенно полезно, если возможно несколько решений. Тогда выбор решения определяется выбором начального значения переменной. Пример ниже иллюстрирует технику применения функции **root** для вычисления корней кубического полинома.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 21x - 52$$

$$x := 0 \quad x1 := \text{root}(f(x), x) \quad x1 = 4$$

$$j := \sqrt{-1} \quad x := 1 + 1 \cdot j$$

$$x2 := \text{root}\left[\frac{f(x)}{(x - x1)}, x\right] \quad x2 = 1 + 3.464i$$

$$x3 := \text{root}\left[\frac{f(x)}{(x - x1) \cdot (x - x2)}, x\right] \quad x3 = 1 - 3.464i$$

Как известно, кубическое уравнение обязательно имеет хотя бы один кубический корень $x1$. Он найден вначале функцией **root**. Два других корня могут оказаться и комплексными. Функция **root** может отыскивать и такие корни. Для поиска второго корня, $x2$, первый исключается делением $F(x)$ на $(x-x1)$. Соответственно для поиска третьего корня, $x3$, $F(X)$ делится еще и на $(x-x2)$.

Эту процедуру можно распространить и на поиск корней полиномов более высокой степени, однако надо помнить, что найти корни полинома можно гораздо более изящным и простым способом - используя операцию символьных вычислений.

Функция поиска корней многочлена polyroots

Для поиска корней обычного полинома $p(x)$ степени n MathCAD содержит очень удобную функцию:

polyroots(V)

$$V := \begin{pmatrix} -52 \\ 21 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g(x) := \sum_{i=0}^3 x^i \cdot V_i$$

$$y := \text{polyroots}(V) \quad y = \begin{pmatrix} 1 + 3.464i \\ 1 - 3.464i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Она возвращает вектор корней многочлена (полинома) степени n , коэффициенты которого находятся в векторе V , имеющем длину равную $n+1$.

Заметим, что корни полинома могут быть как вещественными, так и комплексными числами. Не рекомендуется пользоваться этой функцией, если степень полинома выше пятой-шестой, так как тогда трудно получить малую погрешность вычисления корней.

При решении систем нелинейных уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом — директивой **Given** — и имеющий следующую структуру:

Given

Уравнения

Ограничительные условия

Выражения с функциями **Find** и **Minerr**

В блоке используется одна из следующих двух функций:

Find(v1, v2, ..., vn) — возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения;

Minerr(v1, v2, ..., vn) — возвращает значение одной или ряда переменных для приближенного решения.

$x := 1 \quad y := -1$

Given

$$x^3 + \sin(y) = 25$$

$$y^2 - \cos(x) = 27 \quad y < 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.888 \\ -5.102 \end{pmatrix}$$

Между этими функциями существуют принципиальные различия. Первая функция используется, когда решение реально существует (хотя и не является аналитическим). Вторая функция пытается найти максимальное приближение даже к несуществующему решению путем минимизации среднеквадратичной погрешности решения.

$$r(z) := z^2 - 2 \cdot z + 1.5$$

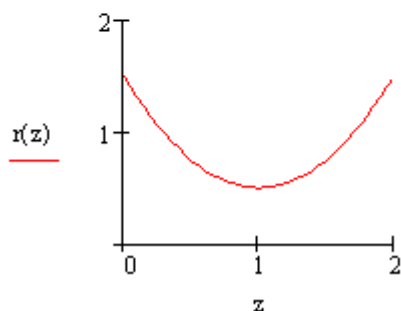
$$z := 0 \quad \text{Given} \quad r(z) = 0 \quad z0 := \text{Find}(z)$$

$$z := 0 \quad \text{Given} \quad r(z) = 0 \quad z0 := \text{MinErr}(z)$$

$$z := 0, 0.05 \dots 2$$

$$z0 = 1$$

При использовании функции **Minerr** для решения систем нелинейных уравнений надо проявлять известную осторожность и обязательно предусматривать проверку решений. Нередки случаи, когда решения могут оказаться ошибочными, чаще всего из-за того, что из нескольких корней система предлагает нереальный (или не представляющий интереса) корень. Полезно как можно точнее указывать начальные приближения к решению.



5.3. Задания для самостоятельной работы

1. Найдите решения систем уравнений (если они существуют!) с помощью блоков **Given...Find, Given...Minner**. Проверьте, все ли решения найдены.

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + 3y = 1 \\ -x^2 + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - y = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

2. Найдите корни многочлена $y(x) = 2x^3 + 20x^2 - 2x + 100$ с помощью функций **root** и **polyroots**. (Обратите внимание на значение системной переменной **TOL**).

3. Найти решение уравнений в заданных точках и на заданном диапазоне:

$f(x) = \cos(x^2) + \sin(3x)$; начальные приближения: $x_1=5$; $x_2=7$; $x_3=8$;
диапазон: $x \in [2; 2,5]$

4. Найти решение систем уравнений матричным способом и при помощи функции **Find** (начальные приближения – произвольные)

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 8x_1 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,098x_1 - 0,746x_2 + 0,645x_3 + 0,546x_4 = -0,676 \\ -0,078x_1 + 0,357x_2 + 0,746x_3 + 0,146x_4 = 0,347 \\ 0,756x_1 - 0,856x_2 - 0,644x_3 + 0,857x_4 = 0,485 \\ 0,376x_1 + 0,754x_2 - 0,865x_3 - 1,098x_4 = 0,682 \end{cases}$$