第二题建模省流版

z

2025 年 8 月 9 日

摘要

考虑到罐体同时进行垂直和水平偏转的运算复杂性，我们将偏转状态视为先上下偏转 α 角度，再左右偏转 β 角度，这样的处理方法极大的减少了建模的复杂性。

1 纵向倾角 α 与油位高度及罐内储油量之间的定量关系

建立坐标系如下：原点选取为对称中心 为了计算的便利性，将油罐分为三部分计算容积：左侧球冠内的储油体积、中间圆柱体内的储油体积与右侧球冠体内的储油体积，根据油罐的左右对称性，只需求出圆柱体和球冠体两部分的容积计算公式。

1.1 考虑纵向倾角

油罐的正视图如下：其中直线 AF 表示油位面，其斜率为:-$\tan\alpha$, 进一步求得直线方程:

$$z = -\tan\alpha(y+2) + h - R$$

球冠体的半径 r 满足关系式:

$$R^2 + (r-1)^2 = r^2$$

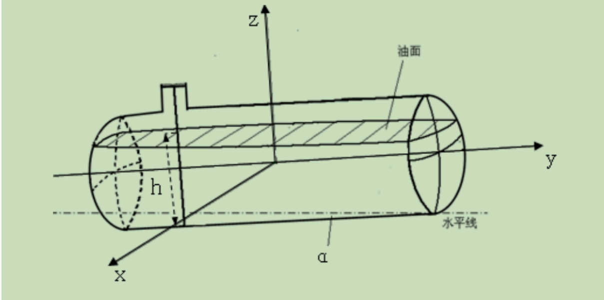

图 1: Enter Caption

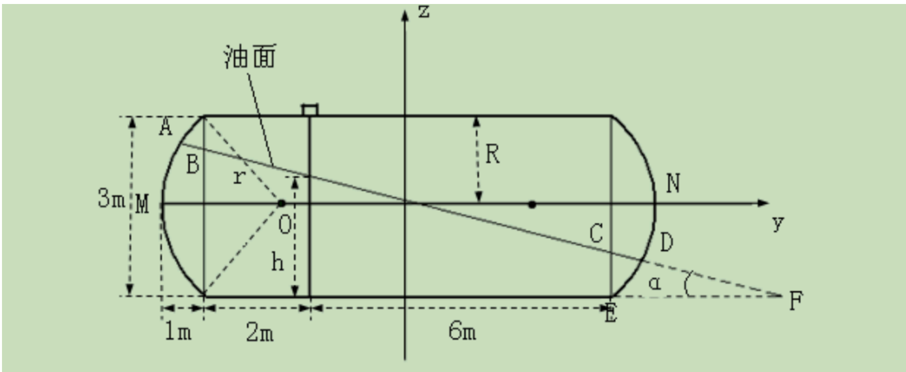

图 2: Enter Caption

由于 R=1.5m，代入得到 r=1.625m

从而得到左右圆弧的方程为:

$$(y+3.375)^2+z^2=r^2$$

$$(y-3.375)^2+z^2=r^2$$

点 A 为直线与左圆弧的交点，设其在 yoz 平面的坐标为 (y_A,z_A)，点 D 为直线与右圆弧的交点，同样设其坐标为 (y_D,z_D),F 点为直线 AF 与油罐最低轮廓线的交点。计算得到:

$$z_F=\frac{h}{\tan\alpha}-2$$

$$z_A=\frac{1.375\tan a+h-R-\sqrt{R^2\tan^4\alpha+(1.375^2+R^2)\tan^2\alpha+2.75(h-R)\tan\alpha+(h-R)^2}}{1+\tan^2\alpha}$$

step1. 对于圆柱体，与第一题类似，其储油量表示为:

若油位面高度中等，即满足限制条件:

$$z_F=\frac{h}{\tan\alpha}-2>4,\frac{3-h}{\tan\alpha}>2$$

则

$$V_1=\int_{-4}^{4}S_1(y)dy$$

若油位面偏低，即满足 $-2\le z_F=\frac{h}{\tan\alpha}-2\le 4$, 则

$$V_1=\int_{-4}^{\frac{h}{\tan\alpha}-2}S_1(y)dy$$

若油位面偏高，即满足 $-4\le\frac{h-3}{\tan\alpha}-2\le -2$, 则

$$V_1=8\pi R^2-\int_{\frac{h-3}{\tan\alpha}-2}^{4}dy\int_{z(y)}^{R}\sqrt{R^2-z^2}dz=8\pi R^2-\int_{\frac{h-3}{\tan\alpha}-2}^{4}dy\int_{-\tan\alpha(y+2)+h-R}^{R}\sqrt{R^2-z^2}dz$$

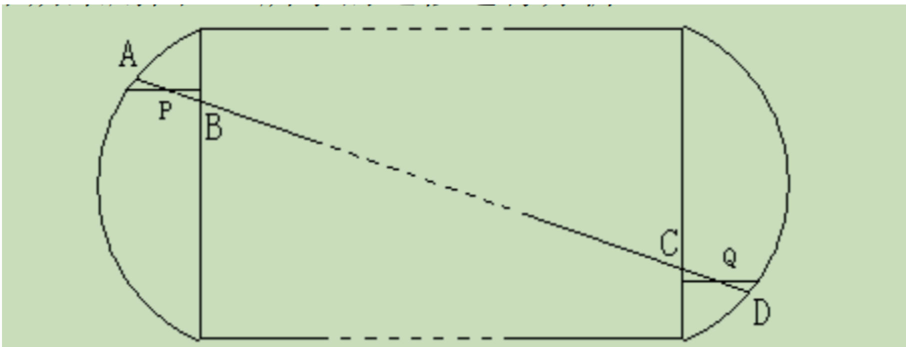

图 3: Enter Caption

$S_1(y)$ 为垂直于 Y 轴的纵截面的面积

$$S_1(y) = 2\int_{-R}^{z(y)} \sqrt{R^2 - z^2}dz = 2\int_{-R}^{-\tan\alpha(y+2)+h-R} \sqrt{R^2 - z^2}dz$$

综上，圆柱体部分的储油量为:

$$\begin{cases} 2\int_{-4}^{4} dy \int_{-R}^{-\tan\alpha(y+2)+h-R} \sqrt{R^2 - z^2}dz & if \quad z_F = \frac{h}{\tan\alpha} - 2 > 4 \quad and \quad \frac{h-3}{\tan\alpha - 2 < -4} \\ 2\int_{-4}^{\frac{h}{\tan\alpha}-2} dy \int_{-R}^{-\tan\alpha(y+2)+h-R} \sqrt{R^2 - z^2}dz & if \quad -2 \leq z_F = \frac{h}{\tan\alpha} - 2 \leq 4 \\ 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan\alpha}-2} dy \int_{-\tan\alpha(y+2)+h-R}^{R} \sqrt{R^2 - z^2}dz & if -4 < \frac{h-3}{\tan\alpha} - 2 < -2 \end{cases}$$

step2. 对于球冠部分，分别设左右球冠部分的体积为 V_2, V_3
为简化计算，考虑到实际偏转角度较小，我们对左冠体的油面做出近似，图示如下:

我们以线段 AB 的中点 P(0,y_P, z_P) 作水平直线，作为油面的近似, 于是球冠部分的储油体积为:

$$V_2 = \int_{-R}^{Z_p} S(z)dz \qquad -R \leq z_P \leq R$$

由于左球面方程为

$$x^2 + (y + 3.375)^2 + z^2 = r^2$$

于是对应的截面面积为

$$S(z) = 2\int_0^{x(z)} (-4 - y(x, z))dx = \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0+3.375)^2}} (\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625)dx$$

代入直线方程得到左冠的储油体积为:

$$V_2 = 2\int_{-R}^{z_p} dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0+3.375)^2}(\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625)dx}$$

$$z_P = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

$$z_B = 2\tan\alpha + h - R$$

$$z_A = \frac{1.375\tan\alpha + h - R - \sqrt{R^2\tan^4\alpha + (1.375^2 + R^2)\tan^2\alpha + 2.75(h-R)\tan\alpha + (h-R)^2}}{1+\tan^2\alpha}$$

根据油罐的左右对称性，同理得到右边球冠的储油体积为:

$$V_3 = 2\int_{-R}^{z_Q} dz \int_0^{\sqrt{r^2-z^2-(y_0+3.375)^2}(\sqrt{r^2-x^2-z^2}-0.625)dx} \qquad -R\le z_Q\le R$$

$$z_Q = \frac{1}{2}(z_C + z_D)$$

$$z_C = -6\tan\alpha + h - R$$

$$z_D = \frac{-5.375\tan\alpha + h - R + \sqrt{R^2\tan^4\alpha + (5.375^2 + R^2)\tan^2\alpha - 10.75(h-R)\tan\alpha + (h-R)^2}}{1+\tan^2\alpha}$$

1.2 考虑横向倾角 β

由于油罐的纵截面为圆形，所以横向偏转角 β 不会实际的油位高度，但是由于油位探测装置会随罐体一同转动，于是测量的油位高度会有所改变

将实际油位高度用 h 表示，测量的油位高度用 H 表示，二者关系如下：

$$h = (H-R)\cos\beta + R$$

1.3 一般模型的确立

该模型的一般表达式为:

$$V(H,\alpha,\beta) = V[h(H,\beta),\alpha] = V_1[h(H,\beta),\alpha] + V_2[h(H,\beta),\alpha] + V_3[h(H,\beta),\alpha]$$

其中:

$$h(H,\beta) = (H-R)\cos\beta + R$$

$$V_1 = \begin{cases} 2\int_{-4}^{4} dy \int_{-R}^{-\tan\alpha(y+2)+h-R} \sqrt{R^2-z^2}dz & if z_F = \frac{h}{\tan\alpha} - 2 > 4 \quad and \quad \frac{3-h}{\tan\alpha} > 2 \\ 2\int_{-4}^{\frac{h}{\tan\alpha}-2} dy \int_{-R}^{-\tan\alpha(y+2)+h-R} \sqrt{R^2-z^2}dz & if -2 \le z_F = \frac{h}{\tan\alpha} - 2 \le 4 \\ 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan\alpha}-2}^{4} dy \int_{-\tan\alpha(y+2)+h-R}^{R} \sqrt{R^2-z^2}dz & if -4 < \frac{h-3}{\tan\alpha} - 2 < -2 \end{cases}$$

$$V_2(h,\alpha) = 2\int_{-R}^{z_E} dz \int_0^{\sqrt{r^2-z^2-(y_0+3.375)^2}} (\sqrt{r^2-x^2-z^2} - 0.625)dx \quad if -R \le z_E \le R$$

$$V_3(h,\alpha) = 2\int_{-R}^{z_F} dz \int_0^{\sqrt{r^2-z^2-(y_0+3.375)^2}} (\sqrt{r^2-x^2-z^2} - 0.625)dx \quad -R \le z_D \le R$$

$$z_A = \frac{1.375\tan\alpha + h - R - \sqrt{R^2\tan^4\alpha + (1.375^2 + R^2)\tan^2\alpha + 2.75(h-R)\tan\alpha + (h-R)^2}}{1+\tan^2\alpha}$$

$$z_D = \frac{-5.375\tan\alpha + h - R + \sqrt{R^2\tan^4\alpha + (5.375^2 + R^2)\tan^2\alpha - 10.75(h-R)\tan\alpha + (h-R)^2}}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\begin{cases} z_E = \frac{1}{2}\ z_A + z_B) \\ z_B = 2\tan\alpha + h - R \\ z_F = \frac{1}{2}(z_C + z_D) \\ z_C = -6\tan\alpha + h - R \end{cases}$$

2 储油罐的变位参数识别

2.1 变位参数识别的基本思想

变位参数的确定依赖于实验数据，附件二的主要实验数据为：油位高度和进/出油量
对于一组给定的油位高度和变位参数，根据上述模型可以计算出理论油量体积:

$$V_i = V(H_i, \alpha_j, \beta_k)$$

实验数据给的进/出油量实际上是两个相邻高度对应的油量容积之差:

$$\Delta V_i = V_{i+1} - V_i = V(H_{i+1}, \alpha_j, \beta_k) - V(H_i, \alpha_j, \beta_k)$$

理论值与实测值之间的关系可表述为:

$$\Delta V_i = \Delta V_i' + \xi_{ijk}$$

变位识别即为寻求特定的变位参数，使得实测值 $\Delta V'$ 与理论值 ΔV 之间的残差最小。其中残差可表述为:

$$\delta_{ik} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_{ijk}^2}$$

于是该变位参数的识别模型为:

$$min\delta_{jk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_{ijk}^2} \quad \xi - ijk = \Delta V_i - \Delta V_i'$$

2.2 变位参数的具体求解步骤

一: 利用编程软件解出上述模型的含参变量积分的解析解，并将该表达式替换积分式
二: 根据资料限定参数满足:

$$\begin{cases} 0 \le \alpha \le 10^\circ \\ 0 \le \beta \le 20^\circ \\ 1.7m \le H \le 2.4m \end{cases}$$

三：对上述区间内的 α, β 角，以 $0.1°$ 的步遍历取值，得到 $\alpha(1; m), \beta(1; n)$ 两个一位数组，同时选取数据中显示油高中位于区间 [1.7m,2.4m] 的数据，组成 H(1;t), 利用这三个一维数组组成的三维数据空间，对每种组合代入上述模型求解其对应的油量体积

四: 对于上一步得到的 m 的三维矩阵（用 A(m,n,t) 表示）作如下处理：用 A(m,n,2;t)-A(m,n,1;t-1) 得到新的三维矩阵,B(m,n,t-1)=A(m,n,2;t)-A(m,n1;t-1), 此矩阵代表数组 H(1;t) 中每个高度值，变化到其相邻高度时对应的出油量或进油量的理论值

五: 求出每组变位参数 α, β 对应的理论出油量（进油量）与实测进油量（出油量）的残差，选择最小残差对应的 α, β 值

六: 经过粗选后对 α, β 以更小的步重复上述过程