

容器变位识别与容量表标定模型研究*

高明海, 刘守鹏

(滨州医学院卫生管理学院, 烟台 264003)

摘 要: 针对工程领域容器变位影响计量精度的问题, 建立了两端椭球冠中间圆柱型容器的变位识别和容量表标定模型. 首先, 推导出容器内液体水平截面面积公式和容器内液体体积与探针刻度的函数关系; 其次, 建立模型, 利用资料数据检验模型, 分析误差变化规律并修正模型; 最后, 运用最小二乘法估计出罐体倾斜角度和偏转角度, 得到两端球冠中间圆柱型容器的变位识别与容量表标定模型.

关键词: 椭球冠; 变位识别; 检验; 最小二乘法; 数据拟合

分类号: AMS(2000) 26A06; 00A71

中图分类号: O13; O172

文献标识码: A

1 引言

安装储油罐很难做到理想状态, 受外界因素影响, 罐体也会发生纵向倾斜和横向偏转等变化(以下称为变位), 罐容表数据会出现较大误差, 罐容表需要重新标定. 从数学角度分析, 具有代表性的储油罐是两端为不大于半个椭球冠、中间为圆柱的几何体. 本文试图从数学角度, 用定积分理论解决这种代表性容器的变位识别与罐容表标定问题. 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响, 统计数据如下:

1) 两端平头的圆柱体储油罐. 罐体在无变位和纵向变位倾斜角为 4.1° 两种情况下的实验数据可在 <http://www.mcm.edu.cn> 查到. 基于数据建立定积分模型研究罐体变位后对罐容表的影响, 并给出罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值;

2) 两端球冠中间圆柱的储油罐. 基于实际检测数据, 根据统计学理论估计变位参数(纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β), 建立、检验并确定数学模型, 给出罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值.

随着机械化工的发展, 利用变位参数和物理参数进行容器变位识别及容量表标定成为工程科研领域中的一重要课题, 它的解决对实现容器内液体容量自动化测量具有重要的现实意义. 容器容量表能否准确标定、怎样标定、为什么如此标定成为相关人员关心的问题. 以 2010 年全国大学生数学建模数据为基础, 相关专家对上面问题作了大量工作, 给出了许多好的思路, 其中部分文献只研究了两端平头的圆柱体储油罐, 得到参数值^[1-6]: $\alpha = 2.4^\circ$, $\beta = 2.1^\circ$; $\alpha = 2.2^\circ$, $\beta = 2.1^\circ$; $\alpha = 1.15^\circ$, $\beta = 5.16^\circ$; $\alpha = 4.4^\circ$, $\beta =$

收稿日期: 2012-09-18. 作者简介: 高明海(1964年7月生), 男, 副教授. 研究方向: 数学建模与多元统计分析.

*基金项目: 国家自然科学基金(11001117); 滨州医学院教学研究基金(BYJYB200838).

4.9°; $\alpha = 2.13^\circ$, $\beta = 4.4^\circ$; $\alpha = 2.4^\circ$, $\beta = 0.5^\circ$ 等. 许多文献的研究过程表述过于简单或公式推导过程过长, 掩盖了问题解决的思维过程, 从而文献可读性受到了影响. 本文深入浅出, 得到结论 $\alpha = 2.1^\circ$, $\beta = 7.4^\circ$.

2 预备知识

2.1 模型假设 (长度单位: 分米, 容积单位: 升, 角单位: 度)

- 1) 不考虑罐内液体沉淀物等原因, 以及外力对罐体原始物理参数的影响;
- 2) 储油罐变位时的纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β 均为小角度;
- 3) 忽略储油量测量的随机误差, 认为误差主要来源于系统本身.

2.2 符号说明

- 1) α, β 分别表示椭圆柱容器的纵向倾斜程度和横向偏转程度;
- 2) a, b 分别表示椭圆柱容器底面椭圆的半长轴和半短轴, L 为椭圆柱容器母线长度的一半, d 是探针到较近椭圆柱底面的距离;
- 3) A, B, C 表示椭球三个轴长度的一半, c 是两端为椭球冠的容器末端到椭圆柱底中心的距离, k 为椭球冠所在椭球的中心 (x 轴) 坐标;
- 4) V 代表容器内液体容量, h 表示液位探针刻度数值; 其它量 (θ, x, t, \dots) 为临时参数.

2.3 坐标轴旋转变换公式

首先, 设坐标系 xyz 按右手螺旋法则绕 y 轴旋转角度为 α , 得到坐标系 XYZ , 如图 1 所示. 则同一点在两个坐标系下的坐标变换公式

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha - z \sin \alpha, \\ Y = y, \\ Z = x \sin \alpha + z \cos \alpha, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

然后, 将坐标系 XYZ 绕 X 轴旋转角度 θ , 得到坐标系 $x'y'z'$, 如图 2 所示. 则

$$\begin{cases} x' = X, \\ y' = Y \cos \theta + Z \sin \theta, \\ z' = -Y \sin \theta + Z \cos \theta, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

经过连续两次旋转之后, 同一点新旧坐标 (x', y', z') 和 (x, y, z) 之间的关系式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ \sin \theta \sin \alpha & \cos \theta & \sin \theta \cos \alpha \\ \cos \theta \sin \alpha & -\sin \theta & \cos \theta \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

因为旋转系数矩阵为正交矩阵, 所以

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha & \cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \alpha & \sin \theta \cos \alpha & \cos \theta \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

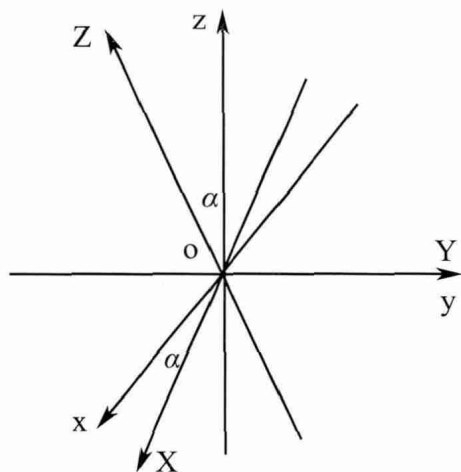


图1: 绕 y 轴旋转角度为 α

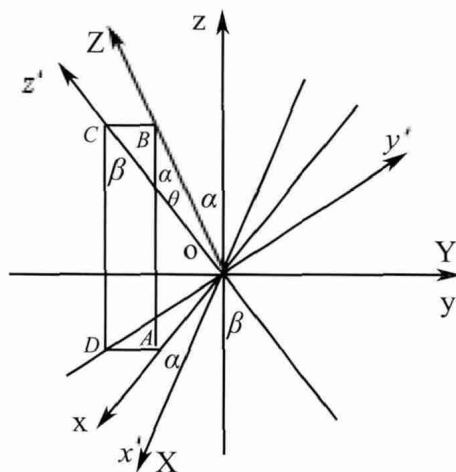


图2: xyz, XYZ 与 $x'y'z'$ 的关系图

设 β 是 z' 轴与 z 轴的夹角, 则它也是两平面 xoy 和 $x'oy'$ 的二面角, 如图2所示. 图中 $ABCD$ 是一个矩形, BA 垂直于 xoy 平面, DA 垂直于 zox 平面.

$$OB = OC \cos \theta, \quad AB = OB \cos \alpha = OC \cos \theta \cos \alpha, \quad CD = OC \cos \beta.$$

因为 $AB = CD$, 所以得到 $\cos \theta \cos \alpha = \cos \beta$, 即 α, θ 和 β 可以相互确定. 在具有旋转关系的两个坐标系 xyz 和 $x'y'z'$ 中, 同一个点的新旧坐标完全可以通过两个旋转指标 α 和 β 相互确定. 根据公式(1)或(2)可以实现同一曲面(或曲线)方程在两坐标系中的形式转换, 以及同一点在不同坐标系下的坐标互算.

下面分别推导变位椭圆柱体和椭球冠的体积计算公式, 并给出具有变位参数 (α, β) 的容器内液体容量 V 与液位探针刻度 h 的函数关系. 思路是先求液体水平截面面积 $S(t)$, 再给出液体体积的定积分表达式 $V = g(h)$.

2.4 椭圆柱面与水平平面交线

2.4.1 变位椭圆柱面与水平平面的交线性状

设无变位椭圆柱面母线平行于 x 轴, 假设椭圆柱足够长. 变位后状态如图3所示.

设变位椭圆柱面在 $x'y'z'$ 中为标准方程为

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1,$$

由(1)式可以得到在坐标系 xyz 中, 变位椭圆柱面与水平平面 $z = t$ 的交线在 xoy 坐标平面内的投影方程

$$\frac{(x \sin \theta \sin \alpha + y \cos \theta + t \sin \theta \cos \alpha)^2}{a^2} + \frac{(x \cos \theta \sin \alpha - y \sin \theta + t \cos \theta \cos \alpha)^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

为证实该曲线的几何性状, 对(3)式左端的二次型做正交变换, 设

$$\begin{cases} x = x'' \cos \gamma - y'' \sin \gamma, \\ y = x'' \sin \gamma + y'' \cos \gamma, \end{cases}$$

把旋转公式代入(3)式并展开, 令二次乘积项系数为零可得 γ . 经过配方, (3)转化为

$$\frac{(x'' - x_0)^2}{m^2} + \frac{(y'' - y_0)^2}{n^2} = 1,$$

其中 x_0 和 y_0 是只与 a, b, α, β (或 θ)和 γ 有关的常数. m 和 n 除了与 a, b, α, β (或 θ)和 γ 常数有关外, 还受到变量 t 的约束. 可以确定, 椭圆柱面与水平平面的交线是椭圆, 如图4.

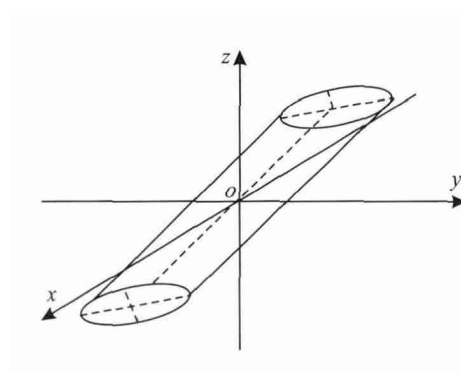


图3: 变位后的椭圆柱体

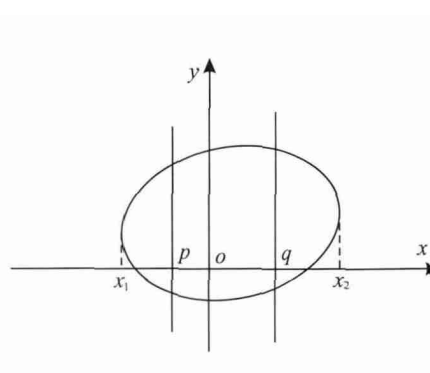


图4: 椭圆柱面与水平平面交线示意图

2.4.2 交线上坐标 x 的取值范围

因为椭圆柱不可能无限长, 所以水平平面与椭圆柱面的交线性状随着 t 的变化而变化, 交线形状可能是椭圆的一部分, 在变位角度小的情况下, 如图5所示. 按 y 展开(3)式, 解关于 y 的一元二次方程, 得到交线椭圆在 xoy 坐标平面上投影(如图4、图5和图6所示)的最小坐标 x_1 、最大坐标 x_2 :

$$x_1 = -t \cos \alpha - \csc \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

$$x_2 = -t \cos \alpha + \csc \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

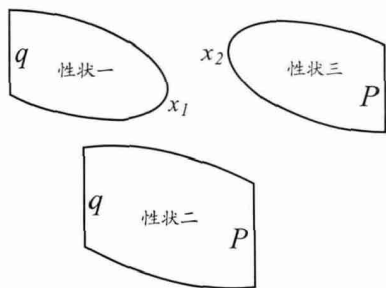


图 5: 三种交线性状(液面的)

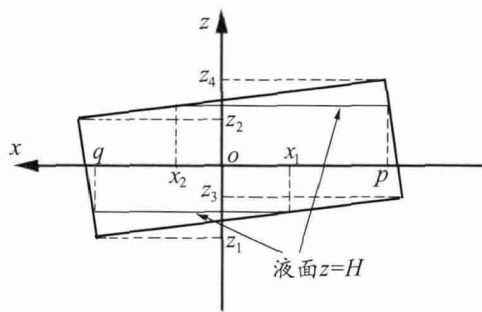


图 6: 椭圆柱内液面纵切图

2.4.3 椭圆柱底平面与水平平面交线在 xoy 坐标平面上的投影

在图 3 中, 设柱体长为 $2L$, 则前后两底面中心坐标分别是 $(L \cos \alpha, 0, -L \sin \alpha)$ 和 $(-L \cos \alpha, 0, L \sin \alpha)$, 若视平行向量作用相同, 则它们的法向量可以视为 $(\cos \alpha, 0, -\sin \alpha)$, 因此, 两底面方程为

$$(x - L \cos \alpha) \cos \alpha - (z + L \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

$$(x + L \cos \alpha) \cos \alpha - (z - L \sin \alpha) \sin \alpha = 0.$$

随着 t 的变化, 前后两底平面与水平平面 $z = t$ 可能相交, 交线是平行于 y 轴的直线. 设两直线在平面直角坐标系 xoy 中的投影分别为 $x = q$ 和 $x = p$, 如图 4、图 5 和图 6 所示. 解得

$$p = t \tan \alpha - L \sec \alpha, \quad q = t \tan \alpha + L \sec \alpha.$$

2.4.4 椭圆柱体内液体水平截面积

椭圆柱面与水平平面 $z = t$ 的交线有多种性状, 在纵向倾斜角较小的情况下, 有三种性状, 它们是椭圆面的一部分, 如图 5 所示. 交线所在平面垂直于 z 轴, 在 zox 平面内的投影如图 6 所示. 在给定 x 值的情况下, 解方程 (3) 式求出两个 y 值

$$y_{1,2} = \frac{-(x \sin \alpha + t \cos \alpha)(b^2 - a^2) \sin 2\theta}{2(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)} \pm \frac{ab}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - (x \sin \alpha + t \cos \alpha)^2}.$$

不失一般性, 只给出性状二(两条直线之间的部分椭圆平面图)面积

$$\begin{aligned} S(t) &= \varphi(t, p, q) = \int_p^q |y_2 - y_1| dx \\ &= \frac{ab(q \sin \alpha + t \cos \alpha)}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sin \alpha} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - (q \sin \alpha + t \cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{ab(p \sin \alpha + t \cos \alpha)}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sin \alpha} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - (p \sin \alpha + t \cos \alpha)^2} \\
& + \frac{ab}{\sin \alpha} \left(\arcsin \frac{q \sin \alpha + t \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} - \arcsin \frac{p \sin \alpha + t \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \right),
\end{aligned}$$

其中 t 为变量, p 和 q 由 t , L 和 α 确定.

2.4.5 变位椭圆柱体内液体体积

1) 两底面的最高点和最低点. 为计算容器内液体体积, 需要求出椭圆柱两底的最高点和最低点, 如图 6 所示. 根据椭圆柱方程和底面方程得到

$$\begin{aligned}
z_1 &= -L \sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \\
z_2 &= -L \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \\
z_3 &= L \sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \\
z_4 &= L \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.
\end{aligned}$$

2) 体积计算公式. 首先确定液面探针刻度 h 与液面坐标平面 $z = H$ 的关系. H 由两部分构成, 一是与探针刻度有关的量 $h \cos \beta$; 二是由两次变位形成的量 $-(L-d) \sin \alpha - b \cos \alpha \cos \theta$, 即 $H = (h-b) \cos \beta - (L-d) \sin \alpha$. 容器内液体体积

$$\begin{aligned}
V &= g(h) = \int_{z_1}^H \varphi(t, p, q) dt \\
&= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sin \alpha} \\
&\quad \times \int_{z_1}^H (q \sin \alpha + t \cos \alpha) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - (q \sin \alpha + t \cos \alpha)^2} dt \\
&\quad - \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sin \alpha} \\
&\quad \times \int_{z_1}^H (p \sin \alpha + t \cos \alpha) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - (p \sin \alpha + t \cos \alpha)^2} dt \\
&\quad + \frac{ab}{\sin \alpha} \left(\int_{z_1}^H \arcsin \frac{q \sin \alpha + t \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} dt \right. \\
&\quad \left. - \int_{z_1}^H \arcsin \frac{p \sin \alpha + t \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} dt \right).
\end{aligned}$$

由于 α 较小, 所以平行于液面的液体截面性状有三种, 如图 5 和图 6 所示.

性状一: $z_1 \leq H < z_3$, 此时容器内液体体积计算公式为

$$V = g_1(h) = \int_{z_1}^H \varphi(t, x_1, q) dt.$$

性状二: $z_3 \leq H < z_2$, 此时容器内液体体积计算公式为

$$V = g_2(h) = \int_{z_1}^{z_3} \varphi(t, x_1, q) dt + \int_{z_3}^H \varphi(t, p, q) dt.$$

性状三: $z_2 \leq H \leq z_4$, 此时容器内液体体积计算公式为

$$V = g_3(h) = \int_{z_1}^{z_3} \varphi(t, x_1, q) dt + \int_{z_3}^{z_2} \varphi(t, p, q) dt + \int_{z_2}^H \varphi(t, p, x_2) dt.$$

性状三可能存在探针度量不到区间 $H \in (b \cos \beta - (L - d) \sin \alpha, z_4]$, 即 $h > 2b$ 时, 该范围可以分段度量, 假设已经定义在其中, 不单独给出.

综上所述, 得到圆柱体内液体体积与液位刻度 h 的函数关系式

$$V = g(h) = \begin{cases} g_1(h), & z_1 \leq H < z_3, \\ g_2(h), & z_3 \leq H < z_2, \\ g_3(h), & z_2 \leq H \leq z_4. \end{cases} \quad (4)$$

考虑到参数 a, b, d, L, α 和 β 对容器内液体容积 V 的影响, 容积 V 与刻度 h 的关系记为

$$V = f(h, a, b, d, L, \alpha, \beta) = g(h). \quad (5)$$

2.5 椭球面与水平平面的截痕曲线

容器结构一般是两端为不大于半个椭球的几何曲面, 如图7所示. 设顶点到圆柱底面椭圆中心的距离已知为 c , 容器变位前, 前底与后底所在椭球分别为 (通常 k 已知)

$$\frac{(x-k)^2}{C^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1, \quad \frac{(x+k)^2}{C^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1.$$

前底椭球与圆柱底平面 $x = L$ 的交线为底面椭圆. 联立圆柱面和椭球方程解得

$$A = a(L + c - k) / \sqrt{c(2L + c - 2k)},$$

$$B = b(L + c - k) / \sqrt{c(2L + c - 2k)}, \quad C = L + c - k.$$

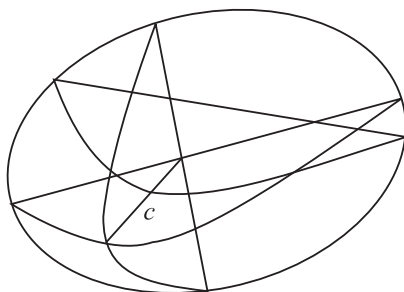


图7: 容器两端椭球面

2.5.1 前端椭球容器内液体容量

与圆柱问题同理, 变位椭球面与平面 $z = t$ 的交线在 xoy 坐标平面内投影为椭圆

$$\frac{(x \cos \alpha - t \sin \alpha - k)^2}{C^2} + \frac{(x \sin \theta \sin \alpha + y \cos \theta + t \sin \theta \cos \alpha)^2}{A^2} + \frac{(x \cos \theta \sin \alpha - y \sin \theta + t \cos \theta \cos \alpha)^2}{B^2} = 1.$$

按 y 展开, 得交线顶点的坐标

$$x_4 = \left[\frac{(t + k \sin \alpha)(B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta)}{C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha} - t \right] \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{C \sqrt{B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta} \sqrt{C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t + k \sin \alpha)^2}}{C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha}.$$

如图 8 所示, 此时, 椭圆弓形面积为

$$\begin{aligned} S = \varphi_1(t) &= \int_q^{x_4} |y_2 - y_1| dx \\ &= \frac{\pi ABC [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t + k \sin \alpha)^2]}{2 [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{AB \{ C^2 (t + k \sin \alpha) + (L - k) [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha] \}}{C \cos \alpha (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]} \\ &\quad \times \sqrt{(B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha [C^2 - (L - k)^2] - C^2 (t + L \sin \alpha)^2} \\ &\quad - \frac{ABC [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t + k \sin \alpha)^2]}{[C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \times \arcsin \frac{C^2 \sin \alpha (t + k \sin \alpha) + (L - k) [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]}{C \cos \alpha \sqrt{(B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t + k \sin \alpha)^2]}}. \end{aligned}$$

前端椭球容器内液体容量函数为

$$V = g_4(h) = \int_{z_1}^H \varphi_1(t) dt.$$

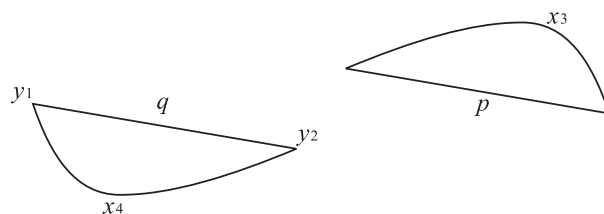


图 8: 椭球面与水平平面的交线

2.5.2 后端椭球容器内液体容量

同理, 只需把上式中 k 换为 $-k$ 、 L 换成 $-L$ 并调整符号, 则可得

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \left[\frac{(t - k \sin \alpha)(B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta)}{C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha} - t \right] \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\
 &\quad - \frac{C \sqrt{B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta} \sqrt{C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha} - (t - k \sin \alpha)^2}{C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha}, \\
 S &= \varphi_2(t) = \int_{x_3}^p |y_2 - y_1| dx \\
 &= -\frac{\pi ABC [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t - k \sin \alpha)^2]}{2 [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad + \frac{AB \{C^2(t - k \sin \alpha) - (L - k)[C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]\}}{C \cos^2 \alpha (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]} \\
 &\quad \times \sqrt{(B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha [C^2 - (L - k)^2] - C^2(t - L \sin \alpha)^2} \\
 &\quad + \frac{ABC [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t - k \sin \alpha)^2]}{[C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad \times \arcsin \frac{C^2 \sin \alpha (t - k \sin \alpha) - (L - k)[C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha]}{C \cos \alpha \sqrt{(B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) [C^2 \sin^2 \alpha + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \alpha - (t - k \sin \alpha)^2]}}.
 \end{aligned}$$

后端椭球容器内液体容量函数为

$$V = g_5(h) = \int_{z_3}^H \varphi_2(t) dt.$$

这种情况可能存在探针度量不到区间 $H \in (b \cos \beta - (L - d) \sin \alpha, z_4]$, 即 $h > 2b$ 时, 该范围可以分段度量, 假设已经定义在 g_5 中, 不单独给出. A, B 和 C 由 a, b, c, L 和 k 确定, 考虑到公式的简洁性, 保留 A, B 和 C 形式.

2.6 具有变位参数 (α, β) 两端椭球冠中间圆柱容器内液体容量

两端为椭球冠中间为圆柱的几何体内液体容量 V 与液位探针刻度 h 的函数关系为

$$V = g(h) = \begin{cases} g_1(h) + g_4(h), & z_1 \leq H < z_3, \\ g_2(h) + g_4(h) + g_5(h), & z_3 \leq H < z_2, \\ g_3(h) + g_4(h) + g_5(h), & z_2 \leq H \leq z_4. \end{cases} \quad (6)$$

考虑到变位参数 (α, β) 和物理参数 a, b, c, d, L, k 对容器内液体容量 V 的影响, V 与液面高度 h 的函数关系记为

$$V = F(h, a, b, c, d, L, \alpha, \beta, k) = g(h). \quad (7)$$

说明: 对于球冠特殊情况, $a = b = r$, k 由 c 和 r 确定; (4) 和 (5) 式分别相当于 $c = 0$ 时的 (6) 和 (7) 式. 它们是圆柱容器变位识别与容量表标定模型的理论基础.

3 储油罐变位识别积分模型

根据实验数据, 我们分两种情况讨论容器变位识别与容量表标定模型: 一是两端平底的椭圆柱储油罐; 二是两端球冠中间圆柱的储油罐. 图9给出了两种容器及其各参数.

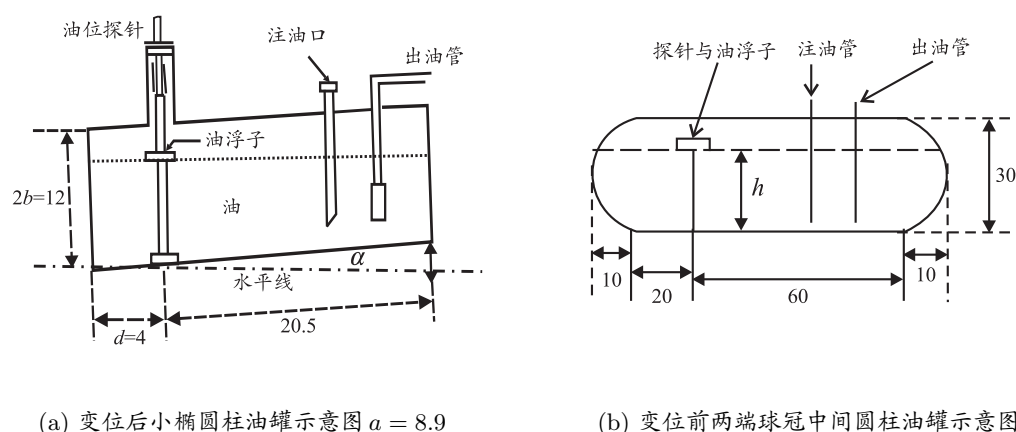


图9: 两种油罐示意图

3.1 平底椭圆柱储油罐变位识别定积分模型

因为理论值与实验值之间存在误差, 只有补偿误差, 才可得到正确模型. 容量表标定一般需要插值求解, 外推插值往往产生过大的误差. 油罐进出油都需要刻度为零时的油量值为基础, 此时误差也比较小, 因此在需要的情况下, 补加数据 $h = 0$ 或 $2b$ 时的数据点.

3.1.1 无变位储油罐内油容量理论值与实验值误差分析

1) 数据分析模型求解. 参数 $a = 8.9$, $b = 6$, $d = 4$, $L = 12.25$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$. 无变位进油实验采集了78对数据 (h, V) , h 介于 $1.5 \sim 12$ 之间、 V 介于 $312 \sim 3970$ 之间, 补加 $(0, 0)$ 后数据量为79对. 在 Matlab 环境中分别作出理论值和实验值 V 与高度 h 的函数曲线对比图. 差分线是近似于一条与 h 轴平行的直线, $\text{diff}(E) \approx -1.7750$, 如图10所示.

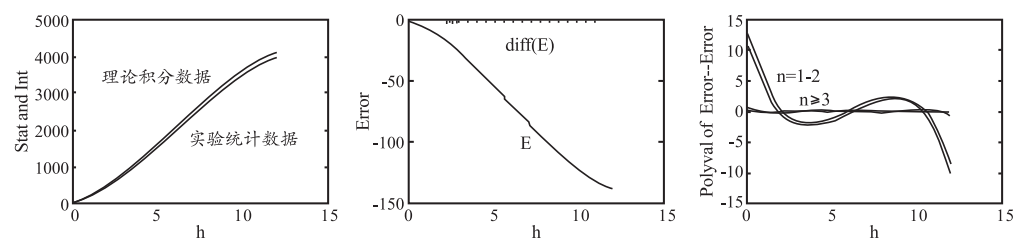


图10: 实验数据与理论数据走势及其之差分析

图像显示信息：一是实验数据比理论数据小；二是两者差别(实验值与理论值之差绝对值)随着 h 的增大而增大，在开始和结束进油时，误差变化率存在变小的趋势，中间近似匀速变化特征。理论值与实际值之间的误差需要补偿，由(5)或 $c=0$ 的(6)式，模型为

$$V_e = f(h, 8.9, 6, 4, 12.25, 0^\circ, 0^\circ) + \Delta V(h), \quad (8)$$

其中 V_e 为油量标定值， f 为理论值函数， ΔV 为系统误差。

在假设条件下，系统误差可以解释为是由容器壁厚度及其均匀程度、探针构件、出油构件、进油构件等物理因素造成的。如果内部构件粗细均匀表面平滑，则可以利用把误差归结为壁厚的等效思想解决。此处采用多项式函数拟合方法。

拟合多项式函数的次数对精度影响比较大，经过拟合分析得出：低次(一次和二次)拟合之间差别不大，它们波动大；高次(三次及以上)拟合之间相差很小，且波动小(近似于一条直线)；低次拟合与高次拟合之间精度差别较大，高次拟合比低次拟合精度明显高，理论上讲次数越高越好。考虑到运算量方面，选用三次拟合函数相对合理。拟合结果为

$$\Delta V(h) = -0.0881h^3 - 1.5941h^2 - 5.2588h + 0.6634.$$

所给刻度上的绝对误差平均为0.1471，最大为0.4931；相对误差平均为0.0131%，最大0.1583%。罐满时的油量 $V_e(12) \approx 3970.4781$ 。

2) 模型检验。利用出油数据检验模型，出油数据采集规律是：每出油50升，记录下相应刻度，基于这组刻度值求出模型值增量 ΔV ，由分布列 $|\Delta V - 50|$ 得到每50升油量误差的最大值为0.0931、极差为0.0925、平均值为0.0293，相对误差为0.0586%，模型精度符合要求。

在假设出油前容器满(经过检验得知这种假设是合理的)情况下作过数据分析，数据分析图走势与上面分析一致，限于篇幅，略去相关内容。

3.1.2 具有变位参数 (α, β) 储油罐内油容量理论值与实验值误差分析

1) 数据分析及模型求解。参数 $a = 8.9$, $b = 6$, $d = 4$, $L = 12.25$, $\alpha = 4.1^\circ$, $\beta = 4.1^\circ$ ，变位进油实验采集了53对数据 (h, V) ， h 介于4.1~11.4之间、 V 介于960~3500之间，为了降低外推插值的过大误差，结合模型(8)补加数据 $(0, 2.3364)$ 和 $(h(z_4), V_e(12))$ ，即 $(13.4695, 3970.4781)$ 。在Matlab环境中分别作出理论值和实验值 V 与标尺刻度 h 的函数曲线对比图，如图11。

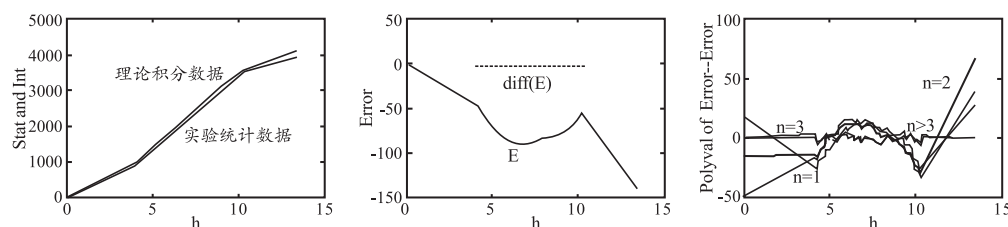


图 11: 实验数据与理论数据走势图及其之差分析

理论值与实验值之差绝对值分布列最大值为 6.2175、极差为 6.2062、平均值为 2.0542, 差值线两端线性是由补加点所致, 中间部分显示开始进油和进油结束时变化率相对较小, 差值分布列的差分线是一条与 h 轴近似平行的直线 $\text{diff}(E) \approx -2.5984$, 说明差值变化平稳. 根据 (5) 或 $c = 0$ 的 (6) 式, 对误差进行补偿后得到进油模型

$$V_e(h) = f(h, 8.9, 6, 4, 12.25, 4.1^\circ, 4.1^\circ) - 0.1065h^4 + 2.7229h^3 - 20.7405h^2 + 35.2299h - 0.6521. \quad (9)$$

2) 模型检验与分析. 利用出油数据检验模型, 出油数据采集规律是每出油 50 升记录下相应刻度, 基于这组刻度值求出模型值增量, 由分布列 $|\Delta V - 50|$ 得到每 50 升油量误差的最大值为 8.2528、极差为 8.2420、平均值为 2.7695, 相对误差为 5.5462%, 相对无变位情况有较大变化, 但可以肯定模型精度符合要求.

变位参数 (α, β) 不全为零的实验数据与理论数据相差比较大, 经过分析可以得到, 其主要原因可归结为: 一是变位使探针油浮子与探针部件之间产生了摩擦力, 导致浮子到达不了合理位置; 二是浮子浸入角度发生了变化, 浸入油体产生浮力的部位发生了变化. 理论上讲, 出油时油浮子自身重力要克服摩擦力才能够下滑, 结果是浮子实际下降位移比应该下降位移小, 从而容器内实际油量小于理论油量. 进油时浮力需要克服摩擦力才能上升, 所以进油时罐内实际油量会大于理论进油量. 在部件表面均匀平滑条件下, 探针在部件不同部位的摩擦力应是常量, 误差可以通过给 h 一个增量得到抵消. 从数学角度讲, 给 h 一个增量仍然可以体现在误差补偿多项式中, 此处不单独考虑这种变位造成的误差.

无变位系统误差补偿为三次多项式, 从数学理论角度分析, 这是合理的, 因为体积是长度的三次函数; 变位参数不全为零时误差补偿为四次多项式, 这说明变位对误差产生了影响, 误差比较复杂.

3) 容量表标定. 根据模型 (8), 得表 1.

表 1: 罐容量标定值 (高度单位: cm, 容量单位: L)

高度	油量	高度	油量	高度	油量	高度	油量
0	2.3521	31	611.9311	61	1756.1923	91	3037.3162
1	7.4704	32	644.6619	62	1798.4916	92	3077.8408
2	13.1901	33	677.7697	63	1840.9979	93	3118.0719
3	19.4271	34	711.4627	64	1883.6113	94	3157.9023
4	26.3971	35	745.4486	65	1926.4320	95	3197.3243
5	34.1157	36	780.0349	66	1969.2599	96	3236.3301
6	42.7978	37	815.0289	67	2012.2946	97	3274.9118
7	52.3586	38	850.3376	68	2055.3353	98	3312.9609
8	63.0126	39	886.1677	69	2098.4812	99	3350.5689
9	74.8743	40	922.4258	70	2141.7312	100	3387.5269
10	87.8579	41	958.9181	71	2184.9837	101	3424.0259

续表 1: 罐容量标定值(高度单位: cm, 容量单位: L)

高度	油量	高度	油量	高度	油量	高度	油量
11	102.1773	42	995.9506	72	2228.3371	102	3459.8564
12	117.7460	43	1033.2289	73	2271.6895	103	3495.0089
13	134.7776	44	1070.9587	74	2315.0386	104	3529.5736
14	153.2851	45	1108.9450	75	2358.3821	105	3563.3402
15	173.2815	46	1147.2929	76	2401.7172	106	3596.3985
16	194.6793	47	1186.0071	77	2444.9409	107	3628.6378
17	217.0910	48	1224.9920	78	2488.1501	108	3660.0472
18	240.5287	49	1264.3519	79	2531.3412	109	3690.6156
19	264.9042	50	1303.9905	80	2574.4106	110	3720.1316
20	290.0291	51	1343.8118	81	2617.3543	111	3748.7835
21	316.1149	52	1384.0190	82	2660.2679	112	3776.2595
22	342.7725	53	1424.4153	83	2702.9471	113	3802.6473
23	370.2129	54	1465.1038	84	2745.4871	114	3827.8346
24	398.3466	55	1506.0869	85	2787.8829	115	3851.7087
25	427.0839	56	1547.2673	86	2830.0291	116	3874.2566
26	456.5350	57	1588.6468	87	2872.0204	117	3895.0652
27	486.5096	58	1630.2276	88	2913.7509	118	3914.1210
28	517.0174	59	1672.0113	89	2955.2146	119	3931.2104
29	548.1676	60	1713.9991	90	2996.4052	120	3946.3193
30	579.7692						

不包含系统误差时, 罐容量最大理论值约为 4110.1457. 以上分析过程和结果显示, 数据分布合理, 容量表精度高.

3.2 两端球冠中间圆柱储油罐变位识别积分模型

3.2.1 模型建立

若两端为球冠, 则 (7) 式中的参数 k 由其它参数确定. 由数据资料得 $a = b = 15$, $c = 10$, $d = 20$, $L = 40$, $A = B = C = 16.25$, $k = 33.75$. 在假设条件下, 设油罐变位后积分模型为

$$V_e(h) = F(h, 15, 15, 10, 20, 40, \alpha, \beta, 33.75) + \Delta V(h).$$

3.2.2 参数估计

根据数据资料特点以及统计要求, 把数据分成四组: 第一组为补油前出油量; 第二组为补油后出油量; 第三组为补油前刻度油量; 第四组为补油后刻度油量. 利用介于 46~264cm 之间的第一组 302 个数据 $V_0(h)$ 作为基础估计变位参数, 第三组数据建立模型, 第二组和第四组数据检验模型. 参数 α 和 β 由下面最小二乘函数求出 (可以给

出 α 和 β 的一个合理范围)

$$\sum_{i=1}^{301} \{ |F(h_{i+1}, 15, 15, 10, 20, 40, \alpha, \beta, 33.75) - F(h_i, 15, 15, 10, 20, 40, \alpha, \beta, 33.75)| - V_0(h) \},$$

最优解为 $\alpha = 2.1^\circ$, $\beta = 7.4^\circ$, 最优值为 29958.5905.

3.2.3 模型求解与检验

根据优化参数值得到模型

$$V_e(h) = F(h, 15, 15, 10, 20, 40, 2.1^\circ, 7.4^\circ, 33.75) + \Delta V(h).$$

利用第三组数据拟合系统误差. 根据椭圆柱容器模型分析可知, 变位后灌满的实际容量与理论值之差较大, 因此, 把罐满时的理论数据作为补加值没有说服力, 但 $h = 0$ 时的初始理论值与实际数值差别不大, 所以补加初始数据点 $(0, 56.9707)$, 数据容量为 303. 理论值和实际值与油位刻度 h 的函数曲线对比, 如图 12, $\text{diff}(E) \approx -5.3022$. 从统计分析图可以看出油量实验数据大于理论值, 这可以解释为: 第一, 虽然变位没造成罐内油容量增加, 但刻度增大了, 因而显示油量大于实际油量; 第二, 变位角度较大.

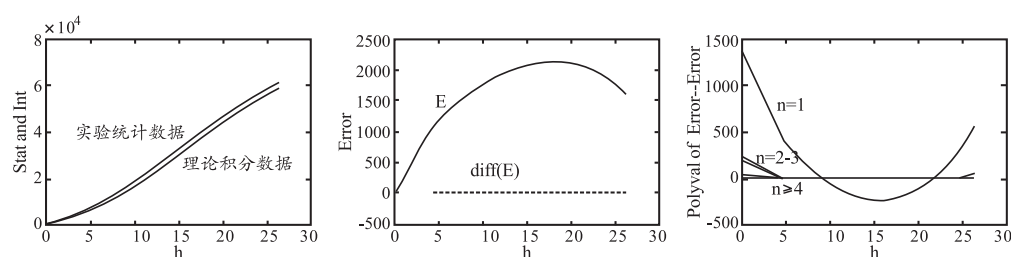


图 12: 实验数据与理论数据走势图及其之差分析

最后, 得到容量表标定模型为

$$V_e(h) = F(h, 15, 15, 10, 20, 40, 2.1^\circ, 7.4^\circ, 33.75) - 0.0095h^4 + 0.5292h^3 - 16.1138h^2 + 289.9924h + 35.8416.$$

利用第二和第四组数据检验模型, 可得: 出油量相对误差最大 0.1100%、平均 0.0303%, 显示油量相对误差最大 0.0038%、平均 0.0003%, 各种数据表明模型精度高.

3.2.4 容量表标定

不考虑系统误差时, 罐容量最大理论值约为 64664.4488. 从统计容量表 2 可以看出, 最大刻度时模型数据大于理论值, 类似情况在文献中也存在, 个别文献中最后一个标定值

在 65900 以上, 平底储油罐标定也存在同样问题. 这种现象不能从系统误差角度得到合理解释, 可以归结为物理参数的准确性、误差拟合准确程度、步长选择以及程序设计方面的原因, 因为物理参数准确性和罐体结构标准程度、误差补偿准确程度都会影响到结果, 步长精度会影响变位参数精度, 参数搜索过程中算法优劣程度也会影响截断误差的积累, 最终影响结果.

表 2: 罐容量标定值 (高度单位: dm, 油量单位: L)

高度	油量	高度	油量	高度	油量	高度	油量
0	92.8123	8	13399.9886	16	35159.0127	24	55898.4643
1	699.2663	9	15898.9946	17	37975.0976	25	57981.1797
2	1683.2957	10	18493.6525	18	40760.9996	26	59877.4995
3	3078.9171	11	21166.9155	19	43500.6904	27	61557.4479
4	4762.9132	12	23902.5674	20	46177.6217	28	62983.6447
5	6670.6332	13	26684.9237	21	48774.5670	29	64103.1727
6	8764.0769	14	29498.6103	22	51273.4256	30	64807.6010
7	11014.9414	15	32328.3889	23	53654.9653		

3.2.5 灵敏度分析

通过改变参数分析模型值变化情况, 得到结论: 在 h 较小的情况下, 变位参数的变化对 V 影响相对明显, 在 h 较大时影响很小.

4 模型的优缺点评价

4.1 优点及创新点

- 1) 推理思路清晰, 建模过程简单易读, 模型精度高. 模型建立过程不涉及复杂数学理论, 仅使用高等数学教材中常见的基础方法, 整个解决过程简单明了;
- 2) 利用经典数学方法得到了容积精确表达式, 并在程序中给出了积分结果, 说明了积分可以精确计算, 结果也不十分复杂;
- 3) 考虑了外推插值运算对误差的影响. 合理补加 h 最小或最大时的数据点, 充分利用数据资料, 提高了拟合精度, 得到不同于文献的结果, 保留了完整的分析数据;
- 4) 编写了通用性 Matlab 和 Maple 程序, 使数据分析过程准确、表达形式简化;
- 5) 本文从一般角度给出了容器假设, 模型具有一般参数形式, 适应于中间为椭圆柱两端为椭球冠的罐体, 模型具有普适性.

4.2 缺点

- 1) 模型中的运算表达式对数据敏感, 数据一旦偏离定义域就会出现复数结果, 对这一情况的处理可能会影响到运算结果, 所以需要精确计算和数值计算相结合, 对计算反复检验, 研究过程较长;

- 2) Matlab 搜索步长 0.1 度值可能影响参数的精度. Maple 程序运算量大、运算过程长, 也会对参数求解精度产生影响, 程序的错误处理能力有待于进一步改进;
- 3) 模型的误差补偿没有采用分段补偿方式, 程序算法设计有待于进一步改进;
- 4) 若球缺高接近半径, z_1 和 z_4 的值可能存在误差; 对不可度量范围叙述少.

5 模型推广与结论

因为模型理论完全是高等数学基础知识, 所以即便是非数学专业的大学生也可以方便阅读, 这对于参加数学建模活动的大学生具有较大的帮助作用. 模型具有普适性, 适合任意合理的物理参数和变位参数, 模型可以应用到相同结构液体罐容器容积表标定问题中.

参考文献:

- [1] 赵晓颖, 姜凤利, 王广利, 等. 储油罐变位识别与罐容表标定的研究[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(7): 1637-1641
Zhao X Y, Jiang F L, Wang G L, et al. Study on displacement recognition and capacity table calibration of oil tank[J]. Science Technology and Engineering, 2012, 12(7): 1637-1641
- [2] 杨辉跃, 王见厚, 李冬, 等. 卧式储油罐罐体变位模型与罐容表标定[J]. 后勤工程学院学报, 2012, 28(1): 26-30
Yang H Y, Wang J H, Li D, et al. Model of horizontal tank for tank strap table calibration[J]. Journal of Logistical Engineering University, 2012, 28(1): 26-30
- [3] 刘田, 汪锐, 陶瑞, 等. 储油罐的变位识别与罐容表标定[J]. 四川兵工学报, 2011, 32(2): 65-68
Liu T, Wang R, Tao R, et al. Displacement recognition of the oil tank and tank capacity charts calibration[J]. Journal of Sichuan Ordnance, 2011, 32(2): 65-68
- [4] 窦雯虹, 梅钰, 陈振勋, 等. 储油罐的变位识别与罐容表标定模型[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(6): 829-840
Dou J H, Mei Y, Chen Z X, et al. Model of the identification of oil tank's position and the calibration of tank capacity table[J]. Pure and Applied Mathematics, 2011, 27(6): 829-840
- [5] 王宁, 王有江, 徐引擎, 等. 储油罐的变位识别与罐容表标定[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(3): 397-405
Wang N, Wang Y J, Xu Y Q, et al. The displacements recognition of oil tank and demarcation of tank capacity charts[J]. Pure and Applied Mathematics, 2011, 27(3): 397-405
- [6] 朱毅鑫, 裴静文, 陈磊. 储油罐变位识别与罐容表标定问题的研究[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(4): 556-561
Zhu Y X, Pei J W, Chen L. Study of identification of oil tank dislocation and recalibration problem[J]. Pure and Applied Mathematics, 2011, 27(4): 556-561

Research on the Model of Deformed Identification of Container's Position and Calibration of the Capacity Table

GAO Ming-hai, LIU Shou-peng

(School of Health Management, Binzhou Medical University, Yantai 264003)

Abstract: In engineering areas, the measurement accuracy is often affected by the deformed position of a container, so we establish the model of deformed identification of container's position and the calibration of capacity table in which the middle is cylindroid and two ends are ellipsoid. Firstly, we deduce an area formula of the level section of the liquid in the container, and the function relationship between the container's liquid volume and the probe. Secondly, we test the established model through the data and analyze the deviation change to revise the model. Finally, by utilizing the least square method, we estimate the tilt angle and the deflexion angle of the container, which is cylindroid in the middle and spherical in the two ends, and we obtain the deformed identification model of the container's position and the calibration of capacity table.

Keywords: ellipsoid; deformation identification; test; least square method; data fitting

Received: 18 Sep 2012. **Accepted:** 20 Mar 2013.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11001117); the Teaching Study Fund of Binzhou Medical University (BYJYB200838).