

# 储油罐的变位识别与罐容表标定

罗云岗（电子信息工程），林潮阳（电子信息工程），杨雅萌（电子信息工程）

(2010 年全国一等奖)

## 摘要

在储油罐使用过程中，由于地基变形等原因，罐体会发生纵向倾斜和横向偏转变化，从而导致罐容表发生改变。本文主要研究储油罐的变位识别与罐容表标定问题。

针对小椭圆型储油罐，我们根据其空间几何特征建立模型，按照高度不同造成的油面下立体形状的差异将计算分解为三种情况，得到模型后将对应情况的油位高度每间隔 1cm 代入，整合出初步的罐容表。然后，我们利用实验数据中倾斜进油数据对油位高度为 41.1cm 至 103.5cm 范围内的误差值进行内部多项式曲线拟合，得到误差修正项，并有针对性地将其代入对应范围所在的模型中，对段内的数据进行重新标定。之后，利用倾斜进油和倾斜出油的实验数据对修正后的模型进行误差检验并与修正前的误差进行比较。为了得到更一般的结果，我们让倾斜角  $\alpha$  在一定范围内变动，进而对纵向变位参数与油位高度以及储油量的关系进行探讨。

对于实际的储油罐，为了建立罐体变位后标定罐容表的一般模型，首先我们对纵向倾斜角度  $\alpha$  和横向偏转角度  $\beta$  两个变位参数进行了分析，考虑到储油罐的对称性，我们发现两个变位参数可以分开来研究，从而降低了分析的复杂性。接着我们首先考虑纵向倾斜角度  $\alpha$  的影响，针对不同的油位情况，通过定积分建立了纵向倾斜角  $\alpha$ 、油位高度和储油量的函数关系，再将横向偏转角  $\beta$  的影响考虑进来，最终建立了两个变位参数、油位高度与罐内储油量的精确模型。

为了确定变位参数，我们建立了变位参数识别的数学模型。由于上述精确模型求解比较困难，为了简化求解过程，对上述精确模型进行了必要的改进和近似。通过改变积分次序并合理近似，模型的求解复杂度大大降低，可以利用 Matlab 求得其带变位参数的字符解。接着我们对油位高度、 $\alpha$  和  $\beta$  三个参数选定了合适的取值区间，三者组成三维的可行解空间，利用给定的实际检测数据，编写程序对变位参数的最优解进行了初步搜索，从而缩小了求解空间。然后调整参数，再次搜索，最后确定了最为合适的变位参数： $\alpha = 2.13^\circ, \beta = 4.19^\circ$

将参数带入模型，即可实现对罐容表的标定。根据要求我们给出了罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值。接着我们对两个变位参数的灵敏度进行了检验，发现总线倾斜角  $\alpha$  对罐容量的影响较大。最后我们对模型进行了准确性与可靠性的检验，对此我们对实际检测数据表中的每个油位高度，进行了计算，并得到了相邻两个油位高度间变化所对应的进/出油量的理论计算值，将此理论值与实测值比较，发现二者非常接近，平均相对误差仅为 0.58%，从而证明上述模型的准确性与可靠性。

关键词：误差修正模型 多项式曲线拟合 置信区间 灵敏度检验

## 一.储油罐变位识别与罐容表标定问题的由来

随着对汽油柴油需求的不断增大，加油站在我们的生活中变得随处可见。一般情况下，加油站停止供油的情况是很少发生的，因为每一个加油站都有自己储油的系统，并进行着科学的管理。

通常加油站都会设置若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”。他们采用流量计来测量进/出油量，用油位计来测量罐内的油位高度，利用这些数据通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

然而很多储油罐在使用了一段时间后，由于地基变形等原因，罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化，下面称为变位，从而导致罐容表与实际的情况发生偏差，有的时候甚至会发生比较严重的后果。所以按照相关规定，加油站就要对罐容表进行重新标定。而标定的前提就是要根据先前采集的数据对储油罐的变位情况进行识别，比如之前说到的纵向倾斜角度和横向偏转角度等。在识别之后，才能对罐容表进行精确地标定。

所以储油罐的变为识别和罐容表的重新标定就显得尤为重要了，这也是我们接下来要讨论这个问题的原因。

## 二.问题的初步探索

之前我们已经知道，罐体变位后会对罐容表产生影响，而具体是什么影响还有待考证。我们可以尝试给储油罐一个固定的纵向倾斜角 $\alpha$ ，观察在不同的储油量下，油位计测量的结果，并将测量结果和无倾斜的时候进行比较。从而得出变位对测量结果以及罐容表的影响。也就是说，在给定储油罐油量的情况下，分别计算在无倾斜和有倾斜情况下的油位计测量值并进行比对。或者，我们可以换个角度，先给定的有倾斜情况下的油位高度，然后通过几何关系和积分的方法直接计算有倾斜情况下的实际储油量，同时得到了新的罐容表。然后在同样储油量的情况下计算无倾斜时候的油位高度，并与之前有倾斜的油位高度进行比较。

在给定不同的 $\alpha$ 时，同理就可以获得很多组 $h$ 和储油量的关系，根据这个关系，还可以进一步的研究不同 $\alpha$ 对应的 $h$ 和储油量，得出随着 $\alpha$ 变动罐容表的变化情况。

通过这样的简单分析，我们得到了罐体变位后对罐容表的影响。这对下面我们要进行的实际储油罐的分析大有裨益。

## 三.小椭圆形储油罐的变位结果分析

由于实际储油罐的形状相对复杂，研究纵向倾斜角对罐容表的影响不是那么容易。鉴于这种情况，我们可以采用如图 3.1 的小椭圆形储油罐进行简要分析，得到具有一定倾斜角后，罐容表的变化情况。

我们选取如图 3.1 的小椭圆油罐为研究对象。

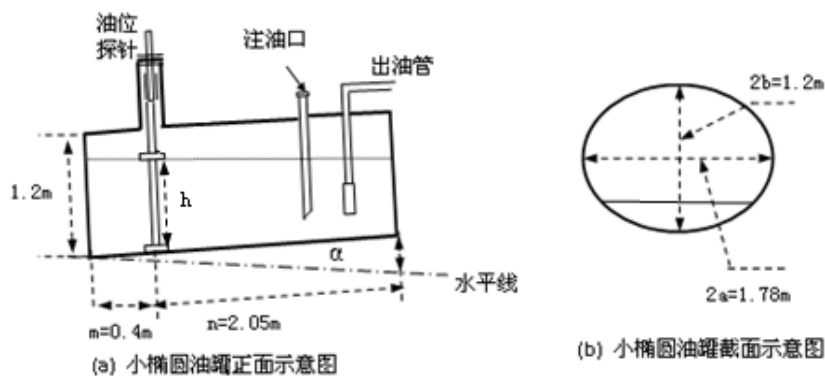


图 3.1 小椭圆形储油罐的正面和截面图

很明显，储油量的多少和油位高度以及倾斜角相关。可以通过计算得出储油量和这二者之间的关系。

在研究这个问题的时候，我们作如下假设。

### 3.1 储油量计算中的假设

1. 忽略油浮子的几何形状，把它等价于探针杆上的一个点。
2. 暂时忽略出进油管以及探针等占据的集合空间。
3. 油位探针的几何形状不会发生变化，一直与下底边垂直。

### 3.2 倾斜角为 $\alpha$ 时储油量与油位高度 $h$ 的关系

首先，我们可以对油浮子以及油面位置进行一个大致的分类，如下：

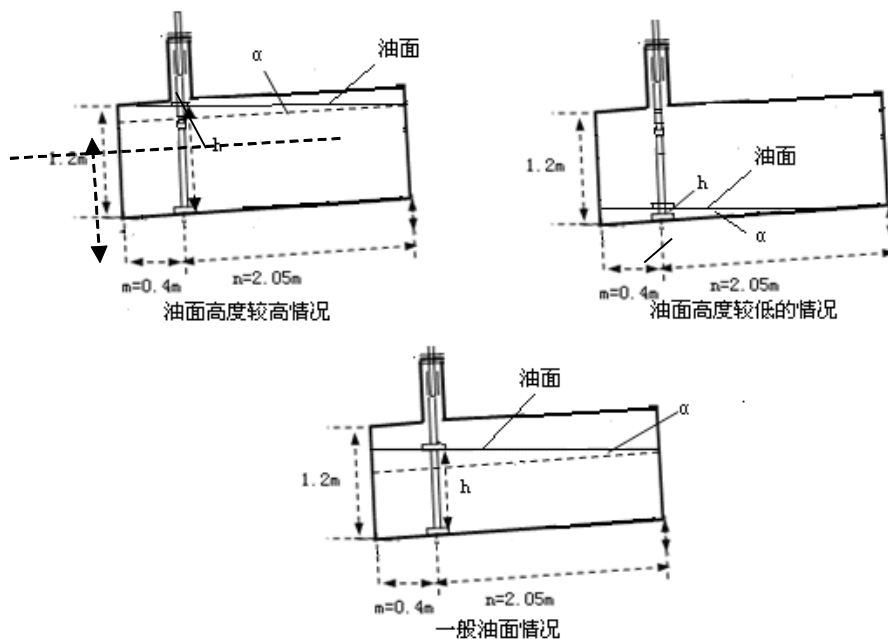


图 3.2 油面情况图

从图中我们可以看出，油面的情况基本上可以分成这样三类。油面较高的情况，油面覆盖到了油罐的顶部，随着油面的继续升高，油浮子将到达最高点，油位计测得的油位高度也将达到最大值，此时系统将默认为油罐已满（事实上油罐还未满）。油面较低的情况下，油面下降到了油罐底部，随着油面的进一步下降，油浮子可以到达最低点，油位计测得的油位高度达到最小值，此时系统默认油罐为空。这里分析的时候，我们忽略入油口和出油口位置的影响。

下面我们将从低到高分别计算三种情况下油面高度为  $h$  的时候实际储存的油量。

I. 在油面较低的时候，如图 3.3 所示的剖面图

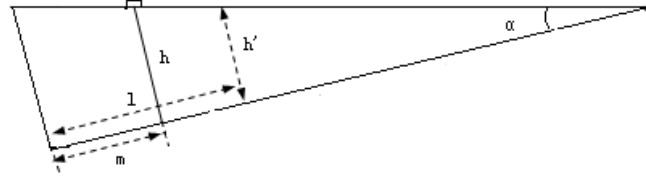


图 3.3 油面高度较低情况下的剖面图

依图易得需要满足的条件为：

$$h < n \tan \alpha \quad 0 \leq l \leq m + h \cot \alpha$$

由几何关系得， $h' = h - (l - m) \tan \alpha$ 。 $h'$  为任一截平面中液面距下端点的长度，如图 3.4 所示。

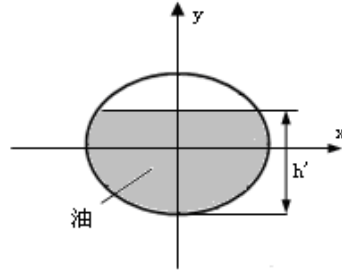


图 3.4 小椭圆油罐截面示意图

根据小椭圆油罐截面示意图，可以求得阴影部分的面积为

$$S(h') = \frac{2a}{b} \int_{-b}^{h'-b} \sqrt{b^2 - y^2} dy = \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{h'-b}{b} \sqrt{1 - \left( \frac{h'-b}{b} \right)^2} + \arcsin \frac{h'-b}{b} \right] ab \quad (3.1)$$

将  $h'$  代入上式可以求得油面较低情况下与测量油面高度  $h$  对应的储油量：

$$S_1(l) = \frac{2a}{b} \int_{-b}^{h-(l-m)\tan\alpha} \sqrt{b^2 - y^2} dy = \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{h-(l-m)\tan\alpha - b}{b} \sqrt{1 - \left( \frac{h-(l-m)\tan\alpha - b}{b} \right)^2} + \arcsin \frac{h-(l-m)\tan\alpha - b}{b} \right] ab$$

而储油总体积为：

$$V(h) = \int_0^{m+h\cot\alpha} S_1(l) dl \quad (3.2)$$

II. 当油面高度一般时，如图 3.5 所示的剖面图。

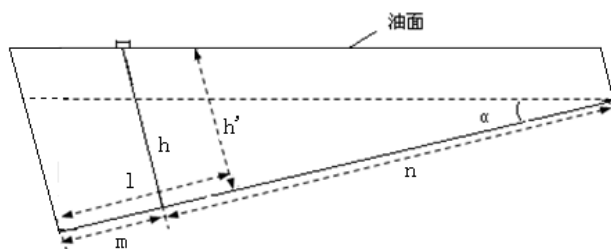


图 3.5 油面高度一般情况下的剖面图

依图易得需要满足的条件为：

$$n \tan \alpha < h \leq 2b - m \tan \alpha \quad 0 \leq l \leq m + n$$

同 I 方法求得  $h' = h - (l - m) \tan \alpha$ ，代入 (3.1) 得到  $S_2(l)$  的表达式，从而储油总体积为：

$$V(h) = \int_0^{m+n} S_2(l) dl \quad (3.3)$$

III. 油面高度较高时，如图 3.5 所示的剖面图。

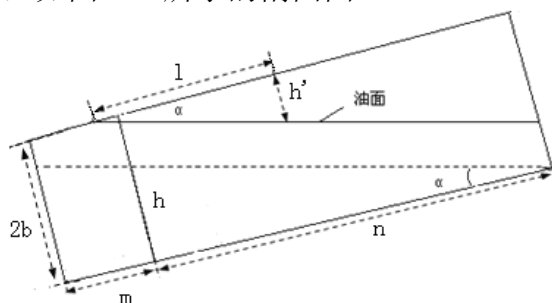


图 3.6 油面高度较高情况下的剖面图

依图易得需要满足的条件为：

$$2b - m \tan \alpha < h \leq 2b \quad 0 \leq l \leq (2b - h) \cot \alpha + n$$

为计算方便，我们采用整个储油罐体积减去油面上部体积的方法求储油量，同上方方法求得  $h' = l \tan \alpha$ ，代入 (3.1) 得到  $S_3(l)$  的表达式，储油总体积为：

$$V(h) = \pi ab(m + n) - \int_0^{(2b-h)\cot\alpha+n} S_3(l) dl \quad (3.4)$$

### 3.3 倾斜角为 $4.1^\circ$ 时储油量的精确计算

当倾斜角为  $4.1^\circ$  时，根据 3.1 的计算，可以得到当  $h < 0.1469m$  时，油位下降到油罐底部，当  $h > 1.1713m$  时，油位淹没到油罐顶部。当  $0.1469m < h < 1.1713m$  时，油位位于中间。为了确定整张罐容表，即为了让罐容表能够对应油面高度 0 到 1.2m，对于 3.2 中涉及到的三种情况都要进行分析。

在 [1, 14] 范围内，我们让 h 以 1cm 为步进，运用 MATLAB 对 3.2 中三种情况下对应 h 的储油量分别进行计算（程序见附录 1）。可以得到罐容表如表 3.1 所示。

表 3.1 罐体变位后油位高度间隔 1cm 的罐容表标定值

油位高度 (mm)	罐内油量 (L)	油位高度 (mm)	罐内油量 (L)	油位高度 (mm)	罐内油量 (L)	油位高度 (mm)	罐内油量 (L)
0	0~1.67	310	630.15	620	1885.13	930	3190.11
10	3.53	320	665.58	630	1928.51	940	3228.61

20	6.26	330	701.53	640	1971.93	950	3266.72
30	9.97	340	737.96	650	2015.37	960	3304.42
40	14.76	350	774.86	660	2058.82	970	3341.69
50	20.69	360	812.2	670	2102.28	980	3378.51
60	27.85	370	849.97	680	2145.71	990	3414.86
70	36.32	380	888.15	690	2189.13	1000	3450.72
80	46.14	390	926.72	700	2232.5	1010	3486.06
90	57.39	400	965.66	710	2275.82	1020	3520.87
100	70.13	410	1004.95	720	2319.09	1030	3555.11
110	84.4	420	1044.58	730	2362.27	1040	3588.77
120	100.25	430	1084.53	740	2405.37	1050	3621.81
130	117.75	440	1124.79	750	2448.37	1060	3654.2
140	136.92	450	1165.34	760	2491.26	1070	3685.91
150	157.82	460	1206.16	770	2534.02	1080	3716.92
160	180.26	470	1247.23	780	2576.64	1090	3747.17
170	204	480	1288.56	790	2619.12	1100	3776.64
180	228.91	490	1330.11	800	2661.42	1110	3805.27
190	254.88	500	1371.88	810	2703.55	1120	3833.01
200	281.86	510	1413.85	820	2745.49	1130	3859.82
210	309.76	520	1456.02	830	2787.22	1140	3885.62
220	338.54	530	1498.35	840	2828.74	1150	3910.33
230	368.14	540	1540.85	850	2870.02	1160	3933.86
240	398.53	550	1583.5	860	2911.06	1170	3956.06
250	429.66	560	1626.28	870	2951.83	1180	3976.66
260	461.49	570	1669.19	880	2992.33	1190	3995.54
270	494	580	1712.21	890	3032.53	1200	4012.74~4110. 15
280	527.14	590	1755.32	900	3072.43		
290	560.9	600	1798.52	910	3112		
300	595.25	610	1841.8	920	3151.23		

3. 4 误差分析和局部误差修正

利用模型可以求得倾斜进油实验数据对应油位高度的储油量，将它与实验测得的储油量做差，得到了一组误差值(见附录 2)。

我们先来观察下误差的分布情况：

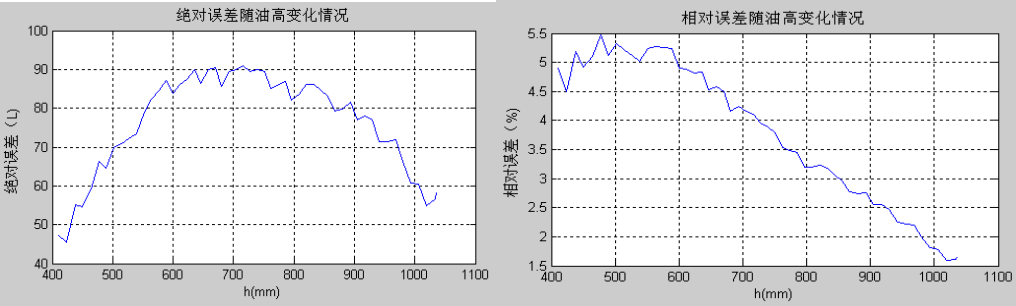


图 3.7 误差随油面高度变化情况示意图

从表中可以得到在 41cm 到 103cm 范围内，误差随着  $h$  的升高呈现先增大后减小的趋势。如图 3.8 所示。从相对误差表中可以得出，最大的相对误差为 5.47%。从误差数值以及图形可以看出，误差的来源极有可能来自于油浮子的测量不准确，因为从倾斜的情况来看，随着油位的上升，油面的面积呈现先增大后减小的趋势，这个与误差的分布情况类似。恰好这部分数据是储油罐罐容表最重要的一部分数据，因为一般油罐的油量都处于不是特别多或者特别少的状况。

另外，通过计算可知，油量计算值和实验测量值之间的残差为 319298.86  $L^2$ ，显然不能令我们满意，注意到油量的计算值普遍比实验测量值偏大，为了使这部分的数据更加精确，我们可以在计算值的后面减去一项误差项来减小误差。为此，我们采用对误差数值进行拟合的方式，求得误差项的表达式。

对表 3.2 得到的误差项进行 5 次多项式拟合，可以得到误差项为：

$$W(h) = -4.4267h^5 + 15.4111h^4 - 20.6298h^3 + 12.7936h^2 - 3.4178h + 0.3330$$

另外，为使拟合后的结果更为准确，我们通过多项式拟合所得到的误差项仅仅适用于内部数据的预测，即题目附件 1 中包括的 42cm 至 103cm 范围内的标定值，对于范围外的标定值，我们仍旧采用之前得到的结果。

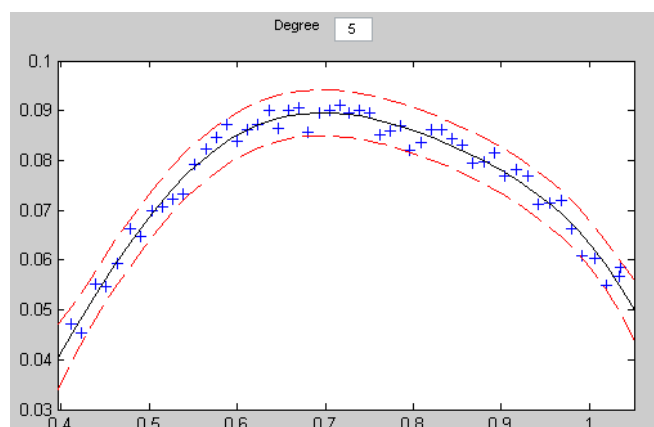


图 3.8 多项式曲线拟合结果和置信区间

图 3.8 中的中间的实线显示了所拟合的多项式曲线，另外我们利用 matlab 中的多项式曲线拟合的评价和置信区间函数 `polyconf` 给出计算值的 95% 置信区间，结果在图 3.8 中用虚线标出。从图中也可看出，实验数值均在置信区间内，从而置信度大于 95%。由此说明，所得的结果较为满意。

由于 42cm 到 103cm 恰好全在情况 II 的范围内，我们可以得到修正后的模型为：

$$V(h) = \int_0^{m+n} S_2(l) dl - W(h)$$

其中  $S_2(l)$  表达式如前所述方法易得。

模型对应的图形如下：

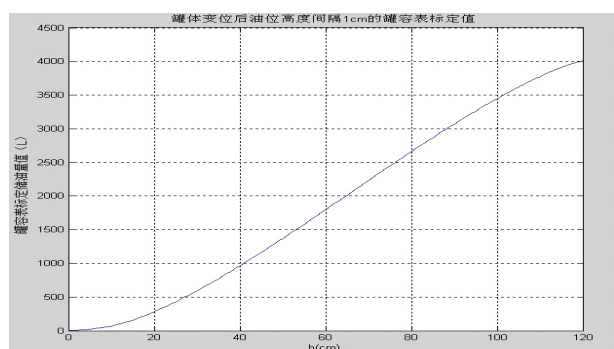


图 3.9 罐体变位后不同油位高度对应的罐容表标定值

利用这个模型得到的油面高度 42cm 到 103cm 的修正罐容表如下：

表 3.2 多项式拟合后的部分罐容表标定修正值

油位高度 (cm)	罐内油量 (L)	油位高度 (cm)	罐内油量 (L)	油位高度 (cm)	罐内油量 (L)	油位高度 (cm)	罐内油量 (L)
42	996.95	61	1755.78	80	2575.36	99	3349.48
43	1034.03	62	1798.28	81	2618.12	100	3387.34
44	1071.45	63	1840.95	82	2660.73	101	3424.87
45	1109.23	64	1883.77	83	2703.18	102	3462.07
46	1147.35	65	1926.72	84	2745.44	103	3498.92
47	1185.81	66	1969.79	85	2787.51	104	3535.43
48	1224.62	67	2012.96	86	2829.36	105	3571.59
49	1263.75	68	2056.21	87	2871.00	106	3607.41
50	1303.21	69	2099.52	88	2912.40	107	3642.87
51	1342.98	70	2142.88	89	2953.56	108	3677.99
52	1383.06	71	2186.28	90	2994.46	109	3712.74
53	1423.44	72	2229.68	91	3035.09	110	3747.13
54	1464.11	73	2273.08	92	3075.44	111	3781.16
55	1505.05	74	2316.47	93	3115.51	112	3814.80
56	1546.25	75	2359.81	94	3155.28	113	3848.05
57	1587.71	76	2403.09	95	3194.75	114	3880.88
58	1629.41	77	2446.31	96	3233.91	115	3913.26
59	1671.32	78	2489.44	97	3272.76	116	3945.13
60	1713.45	79	2532.46	98	3311.28	117	3976.41

### 3.5 修正后模型的误差分析

我们利用修正后的模型所得的结果与倾斜变位进油和倾斜变位出油的实验数据进行对比，利用不同的方法进行误差分析，以研究修正后与修正前误差的变化情况，以便对模型进行评价。

首先，与倾斜变位进油的实验数据进行对比发现，除前述的置信度大于 95% 以外，模型修正之后，计算得油量计算值和测量值之间的残差为  $230.53 L^2$ ，远小于之前的  $319298.86 L^2$ 。这就说明，经过修正后，罐容表和准确值已经相当的接近，罐容表的重新标定符合基本要求。



其次，我们利用倾斜变位出油的实验数据进行对比。由于出油的数据中无法得到储油量的具体值，但由于每次出油量一定（均为 50L），这启发我们可以对利用修正后模型求得的储油量的计算值以及实验数据的累计出油量进行一阶差分，再对一阶差分求二者的残差。经过计算得到结果为  $11.834702 L^2$ ，与对进油量的一阶差分得到的残差  $11.11844 L^2$  比较，结果十分接近，说明出油数据与进油数据一样，吻合得较为理想。

### 3.6 倾斜角 $\alpha$ 可变的分析

在之前我们的讨论中， $\alpha$  被固定成  $4.1^\circ$ ，而且我们已经得到了当有一个倾斜角  $\alpha$  时，罐容表的变化情况。现在我们让  $\alpha$  变动起来，看看  $\alpha$  如何对整个问题产生影响，以及它与油位高度和储油量的关系。

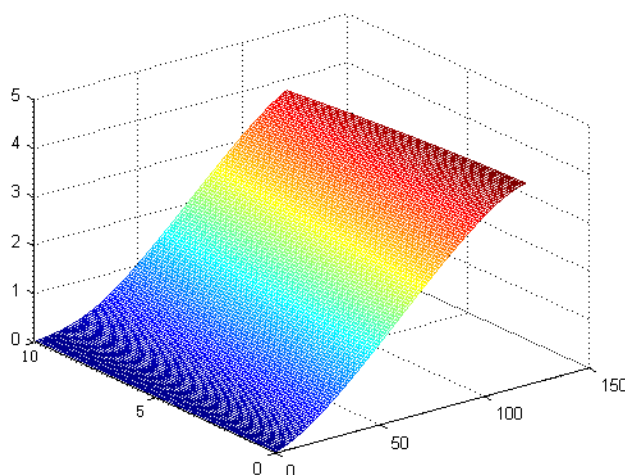


图 3.10 给定  $(\alpha, h)$  情况下的体积曲面

首先由几何关系可知，当  $0 < \alpha < \arctan \frac{2b}{m+n}$  时，油位高度的变化必然要经历前面分析的三种情况，计算得  $0 < \alpha < 26.1^\circ$ ，而当  $\alpha > 26.1^\circ$  时情况略有不同，然而如此大的倾斜角较为罕见，讨论的意义不大，因此以下的讨论仅对  $0 < \alpha < 26.1^\circ$  进行。

我们利用三种情况的具体算法，在不加误差修正项的情况下编程进行计算，求得  $0 < \alpha < 10^\circ$  且  $\alpha$  步进为  $0.1$ ， $0 \leq h < 120mm$  且  $h$  步进为  $1mm$  情况下  $(\alpha, h)$  对应的储油量值。所得的三维曲面如图 3.7 所示，在这个曲面的正视图中，可以得到在一定  $\alpha$  情况下，储油量和油位高度  $h$  的变化关系。其情况恰与图 3.6 所示形状相吻合。

从图 3.7 中分解出曲面的等高线如图 3.8 所示。等高线表示，在相同储油量情况下， $\alpha$  和  $h$  之间的关系。从图中可以很明显的看出，当储油量一定的时候， $h$  随着  $\alpha$  的增大而增大。这也就是说，如果  $\alpha$  增大， $h$  将增大，罐容表在不进行修正的情况下将会显示偏大的数据。而且， $\alpha$  越大，罐容表的偏差也越大。

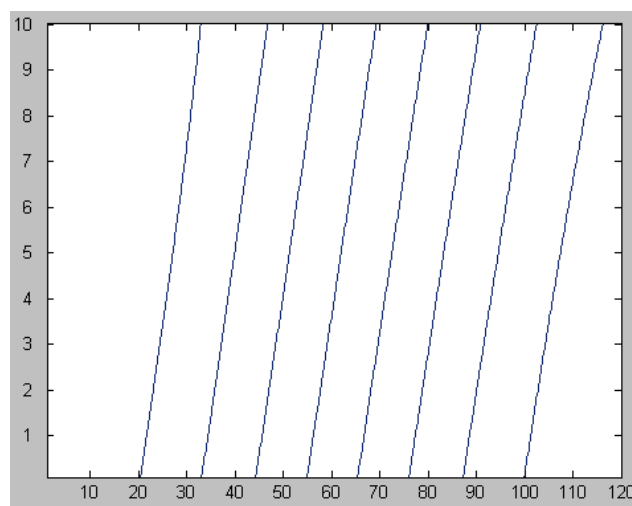


图 3.11 二维等高线图

## 四.实际储油罐的变位识别

### 4.1 罐体变位后储油量与油位高度及变位参数间的一般关系

#### 4.1.1 问题剖析

为了获得罐体变位后罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 $\alpha$ 和横向偏转角度 $\beta$ ）间的精确关系，首先对变位参数对油位高度及罐内储油量的影响进行分析。纵向倾斜角度 $\alpha$ 对油位高度及罐内储油量的影响与前面的分析结果类似，然而由于本问题中还涉及到横向偏转角度 $\beta$ 的影响，这无疑增加了分析的复杂性。若同时考虑纵向倾斜与横向偏转，从而直接得到对应得精确的模型，思路上比较清晰连贯，然而真正入手去做会发现分析与求解过程相当复杂。

为了便于入手，我们可以将上述过程分解。对于一个罐体发生变位的储油罐，其最后的罐体变位情况可以认为是分两步达到的：首先，纵向倾斜 $\alpha$ 角，然后再横向偏转 $\beta$ 角。接下来进一步分析我们发现以下情况：考虑到本文研究的储油罐其主体为圆柱体，两端为球冠体，具有完美的轴对称特性，所以当储油罐纵向倾斜 $\alpha$ 后，再发生横向偏转，罐内油平面也会随着而偏转，达到平衡后油平面与罐体的相对位置与未偏转之前的情况完全一致，唯一改变的是油位计随着罐体发生了相同的偏转，从而与油平面的相对位置发生了改变。可见由于罐体具有对称性，罐体的纵向倾斜与横向偏转可以分开考虑。下面分别对两种情况进行分析。

#### 4.1.2 纵向倾斜角 $\alpha$ 与油位高度及罐内储油量间的定量关系

为了便于问题的研究，建立如下图的坐标系，原点选为罐体的对称中心。

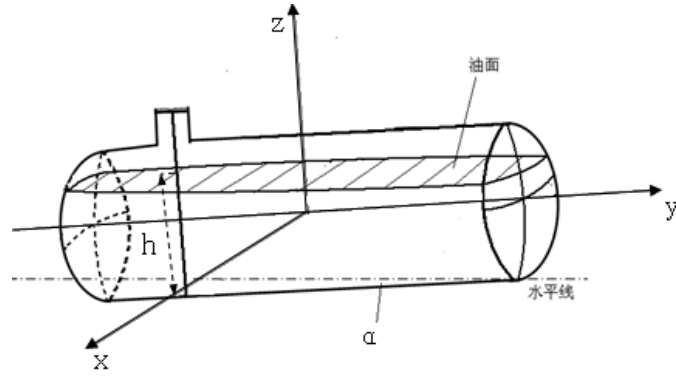


图 4.1

由图中可以看出罐内储油量有三部分组成，左边球冠体内的储油体积，中间圆柱体内体积以及右边球冠体内的体积（当油很少时，右边球冠体内也可能没有储油），而左右两边球冠体内的储油量计算方法一样，所以只需要研究圆柱体和球冠体两部分的体积计算公式即可。下面分别对这两种情况进行讨论。

上面图 4.1 的正视图如下图所示：

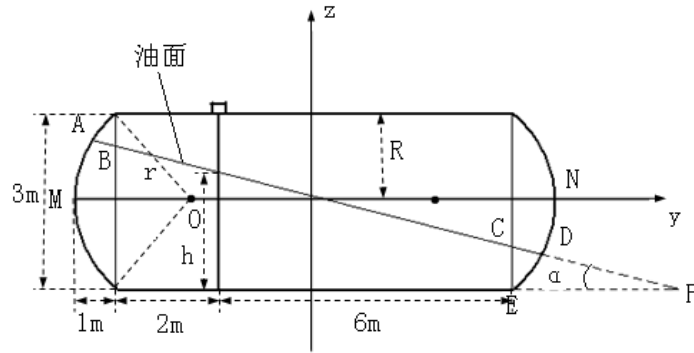


图 4.2

油位面的正面投影线为图中的直线  $AF$ ，其斜率为： $-\tan \alpha$ ，直线  $AF$  过点  $(-2, h-R)$ ，于是得直线方程：

$$z = -\tan \alpha (y + 2) + h - R \quad (4.1)$$

球冠体的轮廓线为圆弧，其半径  $r$  可由下面的关系得到：

$$R^2 + (r-1)^2 = r^2 \quad (4.2)$$

$R = 1.5m$  为圆柱体横截面半径。代入得  $r = 1.625m$

从而得到左右圆弧的方程：

$$(y + 3.375)^2 + z^2 = r^2 \quad (4.3)$$

$$(y - 3.375)^2 + z^2 = r^2 \quad (4.4)$$

图中 A 点为直线与左边圆弧的交点，设其在  $yo z$  平面内的坐标为  $(y_A, z_A)$ ，同样 D 点记为  $(y_D, z_D)$ 。F 点为直线  $AF$  与油罐最低轮廓线的交点。不难得到：

$$z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2$$

$$Z_A = \frac{1.375 \tan \alpha + h - R - \sqrt{R^2 \tan^4 \alpha + (1.375^2 + R^2) \tan^2 \alpha + 2.75(h - R) \tan \alpha + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 \alpha}$$

I. 对圆柱体而言, 分析方法与前面讨论的小椭圆储油罐的方法类似。其储油量可表示为:

若油位面中等高度, 漫到右边球冠部分, 但未与上轮廓线相交, 即满足  $z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 > 4$ , 且  $\frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -4$ , 则

$$V_1 = \int_{-4}^4 S_1(y) dy$$

若油位面较低, 与底边相交, 即满足  $-2 \leq z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 \leq 4$ , 则

$$V_1 = \int_{-4}^{z_F} S_1(y) dy = \int_{-4}^{\frac{h}{\tan \alpha} - 2} S_1(y) dy$$

若油位面较高, 与上轮廓线相交, 既满足  $-4 < \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -2$ , 则

$$V_1 = 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan \alpha} - 2}^4 dy \int_{z(y)}^R \sqrt{R^2 - z^2} dz = 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan \alpha} - 2}^4 dy \int_{-\tan \alpha (y+2) + h - R}^R \sqrt{R^2 - z^2} dz$$

$S_1(y)$  为垂直于 Y 轴的纵截面的面积, 如下图

$$S_1(y) = 2 \int_{-R}^{z(y)} \sqrt{R^2 - z^2} dz = 2 \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz$$

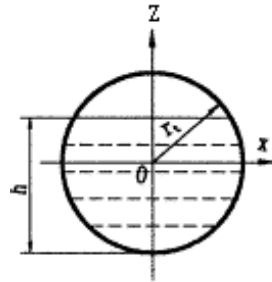


图 4.3

于是圆柱体部分的储油量为:

$$V_1 = \begin{cases} 2 \int_{-4}^4 dy \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 > 4 \text{ and } 4 \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -4 \\ 2 \int_{-4}^{\frac{h}{\tan \alpha} - 2} dy \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } -2 \leq z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 \leq 4 \\ 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan \alpha} - 2}^4 dy \int_{-\tan \alpha (y+2) + h - R}^R \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } -4 < \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -2 \end{cases}$$

II. 对球冠部分而言, 设左右球冠部分的体积分别为  $V_2$ 、 $V_3$ , 现讨论  $V_2$  的计算。

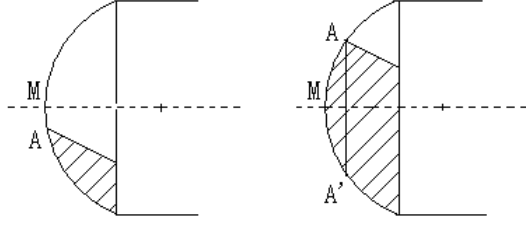


图 4.4

若 A 点的位置位于 M 点之上，即满足  $z_A > 0$ ，则储油量分两部分计算，左部为一球形封头，由文献[1]得其体积计算公式为：

$$V_{21} = \pi m^2 \left( r - \frac{m}{3} \right)$$

其中， $r$  为球的半径， $m$  为弓形的高，此处  $m = y_A + 5$ 。而右半部的体积可表示为：

$$V_{22} = \int_{y_A}^{-4} S_2(y) dy$$

$$S_2(y) = 2 \int_{-r(y)}^{z(y)} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz$$

$$\text{其中， } r(y) = \sqrt{r^2 - (y + 3.375)^2}$$

$$z(y) = -\tan \alpha (y + 2) + h - R$$

$$\text{此时， } V_2 = V_{21} + V_{22}$$

若 A 点的位置位于 M 点之下，即满足  $z_A < 0$ ，则储油量只需要按上面第二部分计算即可。

有以上分析，可得左半部分球冠体的储油量可表示为：

$$V_2 = \begin{cases} \pi(y_A + 5)^2 \left( r - \frac{y_A + 5}{3} \right) + 2 \int_{y_A}^{-4} \int_{-\sqrt{r^2 - (y+3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } z_A > 0 \\ 2 \int_{y_A}^{-4} \int_{-\sqrt{r^2 - (y+3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } z_A \leq 0 \end{cases}$$

III. 对右边的球冠部分的体积，按同样的分析方法可得：

$$V_3 = \begin{cases} \pi(5 - y_D)^2 \left( r - \frac{5 - y_D}{3} \right) + 2 \int_4^{y_D} \int_{-\sqrt{r^2 - (y+3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } z_D > 0 \\ 2 \int_4^{y_D} \int_{-\sqrt{r^2 - (y+3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } z_D \leq 0 \end{cases}$$

#### 4.1.3 横向偏转角 $\beta$ 对油位高度的影响分析

根据前面 4.1.1 的分析可知，横向偏转角  $\beta$  不影响实际的油位高度，但由于油位探测装置会随着罐体一起旋转，导致油位高度的标示值发生变化，从而影响罐容量的正确表示，二者之间的变化关系可由下图说明。

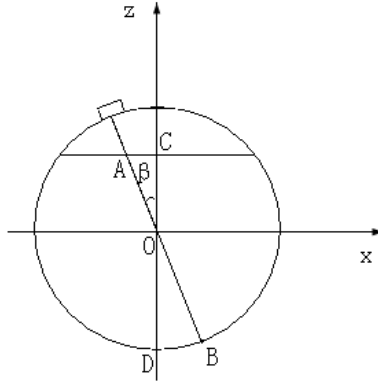


图 4.5

如图所示，储油罐的实际油位高度用  $CD = h$  表示，油位表指示的油位高度为  $AB = H$ ，有几何关系可得：

$$h = (H - R) \cos \beta + R$$

上述关系式表征了，实际的油位高度与油位表指示高度之间的关系。

#### 4.1.4 一般模型的最终确立

根据上面的分析我们可以建立罐体变位后储油量  $V$ ，与油位的标示高度  $H$ ，以及变位参数——纵向倾斜角  $\alpha$ ，横向偏转角  $\beta$ ——之间的一般关系。该模型可表述为：

$$V(H, \alpha, \beta) = V[h(H, \beta), \alpha] = V_1[h(H, \beta), \alpha] + V_2[h(H, \beta), \alpha] + V_3[h(H, \beta), \alpha]$$

其中，满足条件：

$$h(H, \beta) = (H - R) \cos \beta + R$$

$$V_1 = \begin{cases} 2 \int_{-4}^4 dy \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 > \text{ and } 4 \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -4 \\ 2 \int_{-4}^{\frac{h}{\tan \alpha} - 2} dy \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } -2 \leq z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 \leq 4 \\ 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan \alpha} - 2}^4 dy \int_{-\tan \alpha (y+2) + h - R}^R \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } -4 < \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -2 \end{cases}$$

$$V_2(h, \alpha) = \begin{cases} \pi(y_A + 5)^2 \left(r - \frac{y_A + 5}{3}\right) + 2 \int_{y_A}^{-4} \int_{-\sqrt{r^2 - (y+3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } 0 < z_A \leq R \\ 2 \int_{y_A}^{-4} \int_{-\sqrt{r^2 - (y+3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } -R \leq z_A \leq 0 \end{cases}$$

$$V_3(h, \alpha) = \begin{cases} \pi(5 - y_D)^2 \left(r - \frac{5 - y_D}{3}\right) + 2 \int_4^{y_D} \int_{-\sqrt{r^2 - (y-3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } 0 < z_D \leq R \\ 2 \int_4^{y_D} \int_{-\sqrt{r^2 - (y-3.375)^2}}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{r^2(y) - z^2} dz dy & \text{if } -R \leq z_D \leq 0 \end{cases}$$

$$Z_A = \frac{1.375 \tan a + h - R - \sqrt{R^2 \tan^4 a + (1.375^2 + R^2) \tan^2 a + 2.75(h - R) \tan a + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 a}$$

$$Z_D = \frac{-5.375 \tan \alpha + h - R + \sqrt{R^2 \tan^4 \alpha + (5.375^2 + R^2) \tan^2 \alpha - 10.75(h - R) \tan \alpha + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 \alpha}$$

## 4.2 储油罐的变位参数识别

### 4.2.1 精确模型的简化与近似

利用上述给出的精确模型，再结合实际的测量数据，理论上可以确定储油罐的两个变位参数，其关键步骤是上述积分的求解。由于上述积分是定积分，如果给定参数的实际值，利用数值积分的方法必定能得到结果。然而本问题的难点在于需要在参数未确定的情况下进行带参变量积分，利用积分结果进行下一步分析。对上面积分式的观察可以发现，该定积分是分段的，会出现 5 种情况，若逐个进行讨论将会很繁琐，而且其中的某些二重积分带有参变量，形式复杂，很难得到其解析解。而若将对参数进行遍历赋值再积分，运算时间代价很大。

为了解决上述问题，我们将上述模型做了一点修改和近似，从而大大改善了运算效率，为下一步的变位参数确定扫清了障碍，同时又没有对计算精度造成较大的影响。此处的改进主要针对球冠部分的体积，换一个方向进行积分，不仅避免了分段讨论，同时又便于求解，具体见下面的分析：

上述球冠部分积分，如果选择从左到右对垂直于轴向的截面进行积分，则会随着油位面的正向投影线与球冠轮廓线的交点的位置不同而出现分段。为此，我们考虑从下到上对平行于 XOY 平面的截面积分，然而由于油面相对于 XOY 面有倾斜，所以不妨采用图 4.6 所示的近似进行分析。

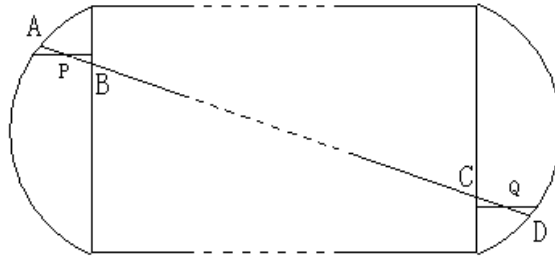


图 4.6

由于油罐的纵向倾斜角很小，所以 AB 线段也几乎平行于油罐的对称轴，同时为了尽可能减小误差，在此我们用 A 点和 B 点的中点  $P(0, y_p, z_p)$  来作为 Z 轴方向的积分上限，于是球冠部分的体积可表示为：

$$V_2 \approx \int_{-R}^{z_p} S(z) dz \quad -R \leq z_p \leq R$$

左边球面方程为：

$$x^2 + (y + 3.375)^2 + z^2 = r^2$$

于是：  $y = -3.375 - \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$

$$S(z) = 2 \int_0^{x(z)} (-4 - y(x, z)) dx = \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0 + 3.375)^2}} (\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625) dx$$

$$\text{而} \quad z_p = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

利用直线  $z = -\tan \alpha (y + 2) + h - R$  与  $y = -4$  得

$$z_B = 2 \tan \alpha + h - R$$

而  $z = -\tan \alpha (y+2) + h - R$  与  $(y+3.375)^2 + z^2 = r^2$  的左边的交点即为  $z_A$   
于是的左边球冠部分的储油体积:

$$V_2 \approx 2 \int_{-R}^{z_P} dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0 + 3.375)^2}} (\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625) dx \quad -R \leq z_P \leq R$$

$$z_P = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

$$z_B = 2 \tan \alpha + h - R$$

$$Z_A = \frac{1.375 \tan a + h - R - \sqrt{R^2 \tan^4 a + (1.375^2 + R^2) \tan^2 a + 2.75(h - R) \tan a + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 a}$$

考虑到左右两边的对称性, 讨论右边时, 只需要确定积分上限  $z_F$  即可, 可得  
右边球冠部分的储油体积:

$$V_3 \approx 2 \int_{-R}^{z_Q} dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0 + 3.375)^2}} (\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625) dx \quad -R \leq z_Q \leq R$$

$$z_Q = \frac{1}{2}(z_C + z_D)$$

$$z_C = -6 \tan \alpha + h - R$$

$$Z_D = \frac{-5.375 \tan a + h - R + \sqrt{R^2 \tan^4 a + (5.375^2 + R^2) \tan^2 a - 10.75(h - R) \tan a + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 a}$$

由此得到简化与近似处理后的模型, 表述如下:

$$V(H, \alpha, \beta) = V[h(H, \beta), \alpha] = V_1[h(H, \beta), \alpha] + V_2[h(H, \beta), \alpha] + V_3[h(H, \beta), \alpha]$$

其中, 满足条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} h(H, \beta) = (H - R) \cos \beta + R \\ V_1 = \begin{cases} 2 \int_{-4}^4 dy \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 > \text{and } 4 \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -4 \\ 2 \int_{-4}^{\frac{h}{\tan \alpha} - 2} dy \int_{-R}^{-\tan \alpha (y+2) + h - R} \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } -2 \leq z_F = \frac{h}{\tan \alpha} - 2 \leq 4 \\ 8\pi R^2 - \int_{\frac{h-3}{\tan \alpha} - 2}^4 dy \int_{-\tan \alpha (y+2) + h - R}^R \sqrt{R^2 - z^2} dz & \text{if } -4 < \frac{h-3}{\tan \alpha} - 2 < -2 \end{cases} \\ V_2 \approx 2 \int_{-R}^{z_E} dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0 + 3.375)^2}} (\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625) dx & -R \leq z_E \leq R \\ V_3 \approx 2 \int_{-R}^{z_F} dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2 - (y_0 + 3.375)^2}} (\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - 0.625) dx & -R \leq z_D \leq R \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} z_E = \frac{1}{2}(z_A + z_B) \\ z_B = 2 \tan \alpha + h - R \\ Z_A = \frac{1.375 \tan \alpha + h - R - \sqrt{R^2 \tan^4 \alpha + (1.375^2 + R^2) \tan^2 \alpha + 2.75(h - R) \tan \alpha + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 \alpha} \\ z_F = \frac{1}{2}(z_C + z_D) \\ z_C = -6 \tan \alpha + h - R \\ Z_D = \frac{-5.375 \tan \alpha + h - R + \sqrt{R^2 \tan^4 \alpha + (5.375^2 + R^2) \tan^2 \alpha - 10.75(h - R) \tan \alpha + (h - R)^2}}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

#### 4.2.2 变位参数识别的数学模型

变位参数的确定依赖于与实验数据，经过对实验数据的分析，发现其中两项数据是关键性数据，根据这两项数据，建立合适的模型便可以确定变位参数的取值。这两项数据为：“油位高度”和“进/出油量”，由于实验进行时，罐容表还未进行标定，所以表中的“油量容积”是不准确的，不能作为估计变位参数的依据。

要利用上述数据估计参数，需要找到理论模型与实测值的关系。对一组给定的油位高度和变位参数，根据上述模型，可以计算出其理论油量容积，即：

$$V_i = V(H_i, \alpha_j, \beta_k)$$

由于实验数据可以利用的是进/出油量，而进/出油量恰好为两个相邻的高度值对应的油量容积之差，即

$$\Delta V_i = V_{i+1} - V_i = V(H_{i+1}, \alpha_j, \beta_k) - V(H_i, \alpha_j, \beta_k)$$

而理论值与实测值之间的关系可表述为：

$$\Delta V_i = V(H_{i+1}, \alpha_j, \beta_k) - V(H_i, \alpha_j, \beta_k) = \Delta V'_i + \xi_{ijk}$$

变位识别就是寻找特定的变位参数，使得实测值  $\Delta V'$  与理论值  $\Delta V$  间误差或残差最小。对于本题，就是对于给定的某组油位高度序列  $\{H_n\}$ ，其对应的进/出油量实测值序列  $\{\Delta V'_n\}$  与理论值序列  $\{\Delta V_n\}$  的残差最小。其中残差可表述为：

$$\delta_{jk} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_{ijk}^2}$$

于是该变位参数识别模型可表述为：

$$\min \delta_{jk} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_{ijk}^2}$$

$$s.t. \quad \xi_{ijk} = \Delta V_i - \Delta V'_i$$

#### 4.2.3 模型的求解与变位参数确定

利用数学软件 Matlab，可以对上述模型进行求解，由于上述积分可以得到其带变量的字符解，从而大大提升下一步求解的运算速度。求解算法和求解流程如下：

(1) 利用 Matlab 软件解出上述模型中带参变量积分的解析解，并用该表达式替换上述积分式。

(2) 选取合适的  $(H, \alpha, \beta)$  的范围，使其满足  $\frac{h}{\tan \alpha} - 2 > 4$ ，即将油平面的变化范围限定到中间油罐的中间部分，经估计，参数可选择下面的范围：

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 10^\circ \\ 0 \leq \beta \leq 20^\circ \\ 1.7m \leq H \leq 2.4m \end{cases}$$

(3) 对上述区间内的  $\alpha$  与  $\beta$  角，以  $0.1^\circ$  的步进遍历取值，得到  $\alpha(1:m)$ ， $\beta(1:n)$  两个一维数组，同时选取“实际储油罐采集数据”表中“显示油高”一项中位于区间  $[1.7m, 2.4m]$  数据，组成  $H(1:t)$ ，利用这三个一维数组组成的三维数据空间，对每种组合，代入上述模型求解其对应的油量体积。

(4) 对于上一步得到的  $m \times n \times t$  的三维矩阵（用  $A(m, n, t)$  表示）作如下处理：用  $A(m, n, 2:t) - A(m, n, 1:t-1)$ ，得到一新的三维矩阵

$B(m, n, t-1) = A(m, n, 2:t) - A(m, n, 1:t-1)$ ，此矩阵代表数组  $H(1:t)$  中每个高度值，变化到其相邻的高度时对应的出油量或进油量的理论值。

(5) 求每组变位参数  $\alpha$  与  $\beta$  所对应的理论出油量（或进油量）与实测进油量（或出油量）的残差，选择最小残差对应的  $\alpha$  与  $\beta$  值。

(6) 上述步骤为第一次粗选，接下来根据粗选  $\alpha$  与  $\beta$ ，在其领域内取值，并重新估计  $H$  的范围（由于  $\alpha$  与  $\beta$  的范围减小，所以油位高度可选的范围扩大），对  $\alpha$  与  $\beta$  以更小的步进重复上述(3)(4)(5)步的过程，从而得到更为精确的  $\alpha$  与  $\beta$  值。

上述过程中之所以要计算每次高度变化对应的理论出油量（或进油量），而不直接利用油量的总体积，是因为实验数据表中所给的“显示油量容积”一项应该是未标定之前的数据，不是准确值，所以不能用来确定参数。但进油量或出油量对应的值应该是基本准确的，于是进行第(3)步的处理。

根据上述求解步骤，编写 Matlab 程序（见附录），第一步粗选，所选高度数据为位于区间  $[1.7, 2.4]$  的 16 个数据，得到变位参数  $\alpha$  与  $\beta$  的估计区间：

$$\alpha \in [1.8^\circ, 2.5^\circ], \beta \in [3^\circ, 6^\circ]。$$

接下来在做一步粗选，高度数据选择处于区间  $[1.71730m, 2.49006m]$  之间的 100 个数据，角度步进  $0.1$  度，得到残差最小对应的变位参数为：

$$\alpha = 2.1^\circ, \beta = 4.2^\circ \text{ 对应残差为: } \delta = 0.01261$$

最后选步进为  $0.01$  度，用区间  $[2.6322m, 1.1069m]$  内的 209 个数据，得到最小残差对应的变为角度为： $\alpha = 2.13^\circ, \beta = 4.19^\circ$  对应残差为： $\delta = 0.01258$

于是变位参数得到确定，分别为：纵向倾斜角  $\alpha = 2.13^\circ$ ；横向偏转角  $\beta = 4.19^\circ$

为了形象的表征纵向倾斜角和横向偏转角与残差大小的变化关系，对区间  $\alpha \in [0, 5^\circ], \beta \in [0, 9^\circ]$  之内的数据，画出二者与残差大小关系的图像如下图所示。有图可以看出，纵向倾斜角对残差的影响较大，在给定纵向倾斜角的情况下，横向偏转角对残差的影响则不明显。

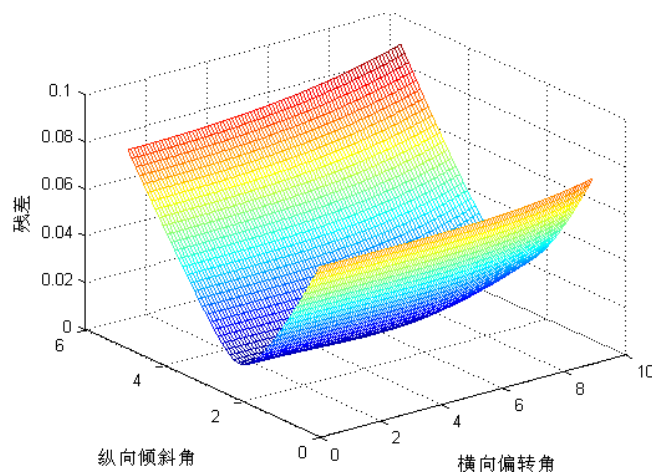


图 4.7 变位参数与残差的三维曲面图

### 4.2.3 罐体变位后的罐容标定

将上述求得的变位参数带入模型中，令油位高度间隔为 10cm 依此变化，利用 Matlab 编程（程序见附录）即可求得罐体变位后的罐容标定值。结果如下表所示。

表 4.1 罐体变位后的罐容标定表

油位高度(mm)	罐内容量(L)	油位高度(mm)	罐内容量(L)	油位高度(mm)	罐内容量(L)
0	0-46.30	1100	19248.27	2200	49304.04
100	354.46	1200	21923.23	2300	51758.62
200	1062.1	1300	24656.41	2400	54092.97
300	2215.61	1400	27431.85	2500	56286.14
400	3693.09	1500	30234	2600	58314.46
500	5421.42	1600	33047.53	2700	60149.95
600	7358.79	1700	35857.18	2800	61757.05
700	9474.08	1800	38647.68	2900	63083.59
800	11741.77	1900	41403.61	3000	64341.26-
900	14139.72	2000	44109.21		64664.44
1000	16648	2100	46748.31		

### 4.3 变位参数的灵敏度检验

为了进一步讨论，哪个参数对罐容量的影响较为显著，我们对两个参数进行灵敏度检验。检验方法是确定一个参数，让另一个参数变化，观察对应的计算数据偏离实测数据的大小程度。下面给出了两个参数的灵敏度曲线。

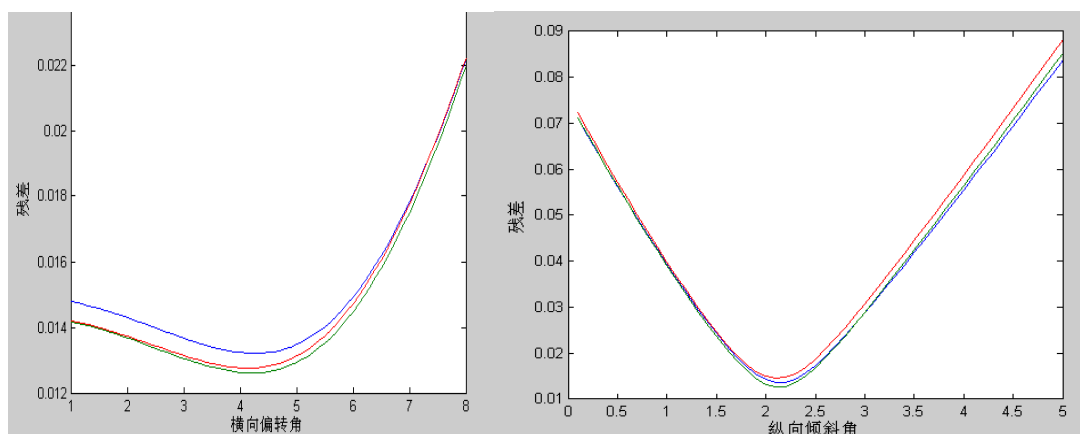


图 4.8 纵向倾斜角与横向偏转角的灵敏度曲线

上图中左边为横向偏转角的灵敏度曲线，图中三条曲线分别为 $\alpha$ 为 2.0，2.1，2.2 度时，残差随横向偏转角的变化曲线，可以发现 $\beta$ 角从 1 度变化到 8 度，残差在区间[0.012,0.022]间变动。右图为纵向倾斜角 $\alpha$ 的灵敏度曲线，三条曲线分别为 $\beta$ 等于 2，4，6 度时，残差随 $\alpha$ 的变化曲线。二者对比不难发现纵向倾斜角 $\alpha$ 对罐容量的影响较为显著。

为了形象的表征纵向倾斜角和横向偏转角与残差大小的变化关系，对区间 $\alpha \in [0,5^\circ], \beta \in [0,9^\circ]$ 之内的数据，画出二者与残差大小关系的三维图像如下图所示。由图可以看出，纵向倾斜角对残差的影响较大，在给定纵向倾斜角的情况下，横向偏转角对残差的影响则不明显。

### 4.4 模型检验

为了进一步检验模型的可靠性与方法的正确性，我们利用对表中的所有试验数据进行了对应的理论值的计算，得到了每相邻两个油位高度值对应的出油量值，下面列出了部分计算结果。

表 3.2 出油量理论值与实测值对比表

显示油高/mm	出油量/L	理论出油量/L	绝对误差	相对误差	显示油高/mm	出油量/L	理论出油量/L	绝对误差	相对误差
2483.61	55.00	55.63	0.63	0.0113	2347.37	87.95	87.37	0.58	0.0066
2474.79	189.53	189.51	0.02	0.0001	2341.46	138.59	138.44	0.15	0.0011
2472.37	52.96	52.21	0.75	0.0143	2331.15	241.94	242.58	0.64	0.0026
2469.66	59.96	58.58	1.38	0.0236	2321.11	236.55	237.52	0.97	0.0041
2462.44	154.21	156.63	2.42	0.0155	2318.51	62.47	61.71	0.76	0.0123
2459.47	65.27	64.67	0.60	0.0093	2312.52	143.05	142.50	0.55	0.0039
2449.29	222.81	222.68	0.13	0.0006	2305.25	173.97	173.54	0.43	0.0025
2439.11	223.49	224.26	0.77	0.0034	2299.08	147.01	147.78	0.77	0.0052
2429.89	205.20	204.45	0.75	0.0037	2290.51	206.67	206.02	0.65	0.0031

2426.39	76.96	77.94	0.98	0.0126	2282.23	199.37	199.88	0.51	0.0025
2417.80	192.39	192.05	0.34	0.0018	2277.31	118.74	119.15	0.41	0.0034
2410.61	162.33	161.57	0.76	0.0047	2271.00	153.10	153.22	0.12	0.0008
2398.88	263.86	265.18	1.32	0.0050	2268.84	52.79	52.55	0.24	0.0045
2390.39	193.37	193.14	0.23	0.0012	2257.00	288.44	289.01	0.57	0.0020
2380.39	228.18	228.78	0.60	0.0026	2253.33	89.57	89.90	0.33	0.0037
2373.85	151.83	150.36	1.47	0.0098	2250.27	77.67	75.07	2.60	0.0346
2367.52	146.07	146.08	0.01	0.0001	2244.54	140.75	140.86	0.11	0.0008
2357.27	236.81	237.69	0.88	0.0037	2240.56	97.47	98.05	0.58	0.0059
2354.44	65.60	65.87	0.27	0.0041	2233.66	171.12	170.39	0.73	0.0043
2351.11	77.52	77.64	0.12	0.0016	2228.27	132.29	133.46	1.17	0.0088

计算结果显示，理论计算数据与实验值的最大绝对误差为 2.89L，最大相对误差为 2.87%，平均相对误差仅为 0.58%。从上表中的数据可以看出，其最大绝对误差为 2.42L，最大相对误差为 2.60%，平均相对误差仅为 0.60%。由此可见上述模型比较准确，从而反映出建模方法比较可靠。

## 五 模型评价与改进

本文主要研究了储油罐的变位识别及罐容表标定问题。针对小椭圆型储油罐，我们根据其空间几何特征建立模型，得到模型后将对应情况的油位高度每间隔 1cm 代入，整合出初步的罐容表。然后利用实验数据对油位高度为 41.1cm 至 103.5cm 范围内的误差值进行内部多项式曲线拟合，得到误差修正项，再对段内的数据进行重新标定。并对修正前后的误差做了比较，发现修正结果较为理想。

对于实际的储油罐，经过分析发现两个变位参数可以分开来研究，从而降低了分析的复杂性。接着我们分别研究两个变位参数对管容量的影响，最终建立了两个变位参数、油位高度与罐内储油量的精确模型。

为了确定变容参数，我们建立了变位参数识别模型，并对储油量的精确模型做了合理的近似，从而能够方便的求解模型。利用 Matlab 软件，编写了对应的求解程序，最后确定了变位参数的具体值。并对其进行了灵敏度检验。最后将参数带入模型，对罐容表做了的标定。根据要求我们给出了罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值。最后我们对模型进行了准确性与可靠性的检验。对此我们对实际检测数据表中的每个油位高度，进行了计算，并得到了相邻两个油位高度间变化所对应的进/出油量的理论计算值，将此理论值与实测值比较，发现二者非常接近，平均相对误差仅为 0.58%，从而证明上述模型的准确性与可靠性。

总体而言，我们的计算结果准确度高，模型可靠性好，具有一定得实用性，比较完美的解决了本文研究的问题。不足之处是，由于时间的原因未能对近似算法的误差做出估计。然而我们已经有了想法解决这一问题。由于精确模型之所以难以求解是因为模型中参数没有确定，从而不容易进行积分运算。如果我们将近似模型确定的参数值代入精确模型中，再进行求解就会方便很多，这样利用精确模型的求解结果就可以对近似模型的误差做出估计，并可对求解结果做出进一步的修正。

## 参考文献

- [1] 姜英明 立置凸形封头液位与体积关系 上海金山石化设计院 石油化工设备 2001。
- [2] 宋叶志 贾东永, MATLAB 数值分析与应用 北京: 机械工业出版社 2009. 7 14-20。

## 附录 1 未修正的储油量计算 matlab 程序

```
clear
clc
syms x
format long
H=[ 0
    0.01
    0.02
    0.03
    0.04
    0.05
    0.06
    0.07
    0.08
    0.09
    0.1
    0.11
    0.12
    0.13
    0.14
    0.15
    0.16
    0.17
    0.18
    0.19
    0.2
    0.21
    0.22
    0.23
    0.24
    0.25
    0.26
    0.27
    0.28
    0.29
```

0.3  
0.31  
0.32  
0.33  
0.34  
0.35  
0.36  
0.37  
0.38  
0.39  
0.4  
0.41  
0.42  
0.43  
0.44  
0.45  
0.46  
0.47  
0.48  
0.49  
0.5  
0.51  
0.52  
0.53  
0.54  
0.55  
0.56  
0.57  
0.58  
0.59  
0.6  
0.61  
0.62  
0.63  
0.64  
0.65  
0.66  
0.67  
0.68  
0.69  
0.7  
0.71  
0.72  
0.73

0.74  
0.75  
0.76  
0.77  
0.78  
0.79  
0.8  
0.81  
0.82  
0.83  
0.84  
0.85  
0.86  
0.87  
0.88  
0.89  
0.9  
0.91  
0.92  
0.93  
0.94  
0.95  
0.96  
0.97  
0.98  
0.99  
1  
1.01  
1.02  
1.03  
1.04  
1.05  
1.06  
1.07  
1.08  
1.09  
1.1  
1.11  
1.12  
1.13  
1.14  
1.15  
1.16  
1.17



```

1.18
1.19
1.2];
v=pi*4.1/180;
a=0.4;
b=2.05;
n=1.2;
m=1.78;

for i=1:15
    h=H(i);

    S2=(pi/2+(h+(a-x)*tan(v)-n/2)/n^2.*sqrt(1-((h+(a-x)*tan(v)-n/2)/n^2).^2)+asin((h+(a-x)*tan(v)-n/2)/n^2))*m*n/4;
    v2(i)=int(S2,x,0,a+h*cot(v));
end
for i=16:118
    h=H(i);
    S2=(pi/2+((a-x)*tan(v)-n/2+h)/n^2.*sqrt(1-(((a-x)*tan(v)-n/2+h)/n^2).^2)+asin(((a-x)*tan(v)-n/2+h)/n^2))*m*n/4;
    v2(i)=int(S2,x,0,a+b);
end
for i=119:121
    h=H(i);

    S2=(pi/2+(x*tan(v)-n/2)/n^2.*sqrt(1-((x*tan(v)-n/2)/n^2).^2)+asin((x*tan(v)-n/2)/n^2))*m*n/4;
    vv2(i)=int(S2,x,0,(n-h)*cot(v)+b);
    v2(i)=pi/4*m*n*(a+b)-vv2(i);
end
V2=eval(v2);
V1=V2'
```

**附录 2** 倾斜进油测量与计算所得相关数据

油位高度 (cm)	油量计算值 (L)	油量测量值 (L)	误差 (L)
41.129	1010.047479	962.86	47.18748
42.345	1058.331566	1012.86	45.47157
43.833	1118.047449	1062.86	55.18745
45.054	1167.533302	1112.86	54.6733
46.39	1222.145946	1162.86	59.28595
47.774	1279.197602	1212.86	66.3376
48.937	1327.486698	1262.86	64.6267
50.256	1382.607462	1312.79	69.81746
51.469	1433.604819	1362.79	70.81482

52.684	1484.955474	1412.73	72.22547
53.888	1536.08348	1462.73	73.35348
55.196	1591.874322	1512.73	79.14432
56.44	1645.147695	1562.73	82.41769
57.656	1697.398009	1612.73	84.66801
58.874	1749.885664	1662.73	87.15566
59.956	1796.62139	1712.73	83.89139
61.162	1848.81363	1762.73	86.08363
62.344	1900.049758	1812.73	87.31976
63.558	1952.736498	1862.73	90.0065
64.628	1999.209741	1912.73	86.47974
65.859	2052.697061	1962.73	89.96706
67.022	2103.231079	2012.73	90.50108
68.063	2148.449019	2062.73	85.71902
69.303	2202.272525	2112.73	89.54252
70.467	2252.739433	2162.73	90.00943
71.645	2303.736096	2212.73	91.0061
72.766	2352.174601	2262.73	89.4446
73.939	2402.746054	2312.73	90.01605
75.09	2452.236446	2362.73	89.50645
76.155	2497.895199	2412.73	85.1652
77.343	2548.656044	2462.73	85.92604
78.539	2599.555214	2512.73	86.82521
79.604	2644.689373	2562.73	81.95937
80.827	2696.277268	2612.73	83.54727
82.08	2748.837449	2662.73	86.10745
83.28	2798.871626	2712.73	86.14163
84.447	2847.222533	2762.73	84.49253
85.629	2895.862685	2812.73	83.13268
86.76	2942.069122	2862.73	79.33912
88.006	2992.568449	2912.73	79.83845
89.292	3044.213003	2962.73	81.483
90.434	3089.642798	3012.73	76.9128
91.734	3140.83172	3062.73	78.10172
92.99	3189.722926	3112.73	76.99293
94.142	3234.047873	3162.73	71.31787
95.46	3284.11583	3212.73	71.38583
96.809	3334.606754	3262.73	71.87675
98.014	3379.023596	3312.73	66.2936
99.241	3423.549133	3362.73	60.81913
100.634	3473.18917	3412.73	60.45917
101.907	3517.656776	3462.73	54.92678

103.424	3569.457479	3512.73	56.72748
103.536	3573.228322	3514.74	58.48832

### 附录3 不同纵向倾斜参数下储油量计算的 matlab 程序

```

clear
clc
syms x
format long
H=[ 0.01
    0.02
    0.03
    0.04
    0.05
    0.06
    0.07
    0.08
    0.09
    0.1
    0.11
    0.12
    0.13
    0.14
    0.15
    0.16
    0.17
    0.18
    0.19
    0.2
    0.21
    0.22
    0.23
    0.24
    0.25
    0.26
    0.27
    0.28
    0.29
    0.3

```

0.31  
0.32  
0.33  
0.34  
0.35  
0.36  
0.37  
0.38  
0.39  
0.4  
0.41  
0.42  
0.43  
0.44  
0.45  
0.46  
0.47  
0.48  
0.49  
0.5  
0.51  
0.52  
0.53  
0.54  
0.55  
0.56  
0.57  
0.58  
0.59  
0.6  
0.61  
0.62  
0.63  
0.64  
0.65  
0.66  
0.67  
0.68  
0.69  
0.7  
0.71  
0.72  
0.73  
0.74

0.75  
0.76  
0.77  
0.78  
0.79  
0.8  
0.81  
0.82  
0.83  
0.84  
0.85  
0.86  
0.87  
0.88  
0.89  
0.9  
0.91  
0.92  
0.93  
0.94  
0.95  
0.96  
0.97  
0.98  
0.99  
1  
1.01  
1.02  
1.03  
1.04  
1.05  
1.06  
1.07  
1.08  
1.09  
1.1  
1.11  
1.12  
1.13  
1.14  
1.15  
1.16  
1.17  
1.18

```

1.19
1.2];
w=0.1:0.1:10;
v=pi*w/180;
a=0.4;
b=2.05;
n=1.2;
m=1.78;
for j=1:100
    q=tan(v(j));
    for i=1:(floor(b*tan(v(j)))*100)
        h=H(i);

v2(j,i)=89/45000*(-162*asin(5/3*h+2/3*q-1)-2*(-25*h^2-20*h*q+1
2*q+30*h-4*q^2)^(3/2)+54*(-25*h^2-20*h*q+12*q+30*h-4*q^2)^(1/2)
+270*asin(5/3*h+2/3*q-1)*h+108*asin(5/3*h+2/3*q-1)*q+54*pi*q+1
35*pi*h-81*pi)/q;
    end
    for i=(floor(b*tan(v(j)))+1):(floor((n-a*tan(v(j)))*100))
        h=H(i);

v2(j,i)=89/1440000*(-5184*asin(5/3*h+2/3*q-1)-64*(-25*h^2-20*h
*q+12*q+30*h-4*q^2)^(3/2)+1728*(-25*h^2-20*h*q+12*q+30*h-4*q^2)
^(1/2)+8640*asin(5/3*h+2/3*q-1)*h+3456*asin(5/3*h+2/3*q-1)*q+8
640*asin(-5/3*h+41/12*q+1)*h+10584*pi*q+(-400*h^2+1640*h*q-984
*q+480*h-1681*q^2)^(3/2)-432*(-400*h^2+1640*h*q-984*q+480*h-16
81*q^2)^(1/2)-5184*asin(-5/3*h+41/12*q+1)-17712*asin(-5/3*h+41
/12*q+1)*q)/q;
    end
    for i=(floor((n-a*tan(v(j)))*100)+1):120
        h=H(i);

vv2(i)=89/1440000*(2592*pi+432*(-400*h^2+1640*h*q-984*q+480*h-
1681*q^2)^(1/2)-4320*pi*h+8856*pi*q-(-400*h^2+1640*h*q-984*q+4
80*h-1681*q^2)^(3/2)-8640*asin(-5/3*h+41/12*q+1)*h+5184*asin(-
5/3*h+41/12*q+1)+17712*asin(-5/3*h+41/12*q+1)*q)/q;
        v2(j,i)=pi/4*m*n*(a+b)-vv2(i);
    end
end
V2=real(v2);
t=w;
u=H';
[t,u]=meshgrid(t,u);
mesh(V2)

```

```
figure
contour(V2,8)
```

#### 附录4 求解变位参数的 Matlab 程序

```
clear;
H=[2.63223 2.6243 2.62067 2.61029 2.60661 2.59959 2.5876 2.58205 2.57957
2.57544 2.56946 2.56412 2.55983 2.54847 2.53963 2.52801 2.52163 2.51023
2.50817 2.50007 2.49006 2.48573 2.4744 2.46477 2.45451 2.44677 2.43685
2.43155 2.42732 2.4222 2.41435 2.40405 2.39915 2.39312 2.3825 2.37435
2.36244 2.3584 2.34813 2.33937 2.33488 2.32813 2.32214 2.31414 2.30414
2.30109 2.29087 2.28046 2.27492 2.26861 2.26089 2.25188 2.24246 2.23288
2.22699 2.2207 2.20913 2.2014 2.19091 2.18614 2.17792 2.17004 2.1584
2.15554 2.14854 2.14132 2.13842 2.12737 2.11653 2.11014 2.10032 2.09684
2.08864 2.08403 2.07758 2.06714 2.06317 2.05814 2.0513 2.04592 2.03594
2.02406 2.02047 2.01611 2.00708 2.00133 1.98959 1.97787 1.96943 1.95883
1.95281 1.94449 1.93264 1.92505 1.91371 1.90451 1.89767 1.88927 1.8784
1.87441 1.86846 1.85654 1.85051 1.84192 1.83091 1.81896 1.81042 1.80734
1.80498 1.7968 1.78913 1.77751 1.76805 1.75942 1.75219 1.74759 1.73597
1.72857 1.72626 1.7173 1.7101 1.70751 1.69661 1.69131 1.68701 1.68387
1.67877 1.67448 1.66596 1.6633 1.65855 1.65373 1.64293 1.63648 1.62692
1.61889 1.60906 1.60592 1.59413 1.58365 1.58114 1.57448 1.56922 1.56092
1.55662 1.54882 1.54079 1.53279 1.5263 1.52395 1.51681 1.51073 1.50765
1.50106 1.49455 1.48703 1.47698 1.46797 1.45725 1.45473 1.45053 1.44393
1.43235 1.42245 1.41593 1.4106 1.40801 1.3986 1.39153 1.38753 1.38126
1.37757 1.36805 1.36237 1.35095 1.34878 1.33849 1.33022 1.32284 1.31433
1.30506 1.30212 1.29134 1.2892 1.28426 1.28046 1.26919 1.26651 1.2587
1.25033 1.24182 1.23117 1.22861 1.21844 1.21115 1.20221 1.19809 1.19065
1.18163 1.17006 1.16362 1.16077 1.15819 1.1499 1.13994 1.13102 1.12557
1.1141 1.1069];
m1=size(H);
V=[0.14909 0.06845 0.19927 0.07005 0.13636 0.23274 0.10797 0.04924 0.08065
0.12029 0.10824 0.08346 0.22993 0.1817 0.23852 0.13179 0.23833 0.04292
0.17134 0.21234 0.09238 0.24385 0.20669 0.2245 0.16926 0.22009 0.11754
0.09344 0.11446 0.17469 0.23277 0.11086 0.13859 0.24221 0.18643 0.27538
0.09265 0.23928 0.20668 0.10463 0.1588 0.14243 0.18917 0.23895 0.07358
0.24527 0.25178 0.13459 0.15302 0.18826 0.22097 0.22997 0.23773 0.14404
0.15825 0.28787 0.19277 0.26267 0.12196 0.20847 0.19858 0.29729 0.07241
0.1784 0.18406 0.07438 0.28523 0.27915 0.16623 0.25441 0.08964 0.21475
0.12077 0.16881 0.27292 0.10392 0.13194 0.18174 0.14211 0.26462 0.31384
0.09666 0.11616 0.23912 0.1545 0.31456 0.31603 0.22629 0.2859 0.16375
0.22469 0.32169 0.20569 0.30966 0.24973 0.18643 0.23142 0.29779 0.10919
0.16287 0.32852 0.16613 0.23766 0.30397 0.33011 0.23569 0.08615 0.06688
0.22569 0.21349 0.32339 0.26359 0.24084 0.20131 0.1288 0.32438 0.20656
0.06447 0.25113 0.20155 0.07235 0.30518 0.14815 0.12083 0.08898 0.14233
0.12105 0.2404 0.07505 0.13308 0.13422 0.30381 0.18164 0.26823 0.22645
0.27649 0.08744 0.33177 0.2938 0.07205 0.18788 0.14835 0.23346 0.12098
0.22076 0.22472 0.22446 0.18346 0.06553 0.20046 0.17084 0.08676 0.18761
0.18173 0.21027 0.28254 0.25304 0.30069 0.07011 0.11847 0.18556 0.32397
0.27701 0.18151 0.14946 0.0722 0.26295 0.1979 0.11101 0.17485 0.10394
0.26382 0.15763 0.31784 0.05923 0.28614 0.22992 0.20409 0.23519 0.25578
0.0807 0.29781 0.05855 0.13484 0.10509 0.30959 0.07459 0.21387 0.22859]
```

```

0.23285 0.29152 0.06958 0.27483 0.19923 0.2405 0.11457 0.19932 0.24363
0.31212 0.17218 0.07728 0.06822 0.22245 0.2676 0.23823 0.14368 0.3036
0.19138];
Ang=[2 4 6];
m0=m1(1,2);
Ang_a=0.1:0.1:5;
for k=1:50
for j=1:3
for i=1:m0 % the numble of height
a=tan(Ang_a(k)*pi/180); % tan
CosJ=cos(Ang(j)*pi/180);
h=(H(i)-1.5)*CosJ+1.5; % hight
b1=2*a+h-1.5; %
b2=
h-1.5-2.*a-0.5*a/(4+4*a^2)*(-12*a+8*a*h-27-16*a^2-(48*a^2+264*a-176*a*h+25+
192*h-64*h^2)^(1/2));
b=(b1+b2)/2;

x1(i)=-5/48*b*(9-4*b^2)^(1/2)-1205/1536*asin(2/3*b)+169/128*b*atan(4/5*(9-4*b^
2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(-18+13*b)/(9-4*b^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(1
8+13*b)/(9-4*b^2)^(1/2))-1/6*b^3*atan(4/5*(9-4*b^2)^(1/2))+31/96*pi;
d1=-6*a+h-1.5;
d2=
h-1.5-2.*a-0.5*a/(4+4*a^2)*(-12*a+8*a*h+27-16*a^2+(-1680*a^2-1032*a+688*a*h
+25+192*h-64*h^2)^(1/2));
d=(d1+d2)/2;

x2(i)=-5/48*d*(9-4*d^2)^(1/2)-1205/1536*asin(2/3*d)+169/128*d*atan(4/5*(9-4*d^
2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(-18+13*d)/(9-4*d^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(1
8+13*d)/(9-4*d^2)^(1/2))-1/6*d^3*atan(4/5*(9-4*d^2)^(1/2))+31/96*pi;

x3(i)=1/48*(216*pi*a-81*asin(-2/3*h+1+4*a)-54*(-36*a^2+12*a*h-18*a-h^2+3*h)^
(1/2)-324*asin(-2/3*h+1+4*a)*a+8*(-36*a^2+12*a*h-18*a-h^2+3*h)^(3/2)+54*asin
(-2/3*h+1+4*a)*h-81*asin(4/3*a+2/3*h-1)+54*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)^(1/2)+
108*asin(4/3*a+2/3*h-1)*a-8*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)^(3/2)+54*asin(4/3*a+2/
3*h-1)*h)/a;
end
x=2*(x1+x2+x3);
y=x(1:m0-1)-x(2:m0);
cancha(j,k)=norm(y-V);

%T(k)=min(canचा(k,:));
end
end
%T;
plot(Ang_a,canचा(1,:),Ang_a,canचा(2,:),Ang_a,canचा(3,:))
xlabel('纵向倾斜角');
ylabel('残差');

```

## 附录 5 罐容表标定程序



```

clear;
a=tan(2.13*pi/180);%纵向倾斜角的正切
H=0:0.1:2.9;          %油位标示高度
for i=1:30
h=(H(i)-1.5)*cos(4.19*pi/180)+1.5; %油位实际高度
b1=2*a+h-1.5;
b2=
h-1.5-2.*a-0.5*a/(4+4*a^2)*(-12*a+8*a*h-27-16*a^2-(48*a^2+264*a-176*a*h+25+
192*h-64*h^2)^(1/2));
b=(b1+b2)/2;
%左部分球冠的储油体积计算
x1(i)=-5/48*b*(9-4*b^2)^(1/2)-1205/1536*asin(2/3*b)+169/128*b*atan(4/5*(9-4*b^
2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(-18+13*b)/(9-4*b^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(1
8+13*b)/(9-4*b^2)^(1/2))-1/6*b^3*atan(4/5*(9-4*b^2)^(1/2))+31/96*pi ;
if (h/a)>6 %判断油位位置
d1=-6*a+h-1.5;
d2=
h-1.5-2.*a-0.5*a/(4+4*a^2)*(-12*a+8*a*h+27-16*a^2+(-1680*a^2-1032*a+688*a*h
+25+192*h-64*h^2)^(1/2));
d=(d1+d2)/2;
%右部分球冠的储油体积计算
x2(i)=-5/48*d*(9-4*d^2)^(1/2)-1205/1536*asin(2/3*d)+169/128*d*atan(4/5*(9-4*d^
2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(-18+13*d)/(9-4*d^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(1
8+13*d)/(9-4*d^2)^(1/2))-1/6*d^3*atan(4/5*(9-4*d^2)^(1/2))+31/96*pi;
x3(i)=1/48*(216*pi*a-81*asin(-2/3*h+1+4*a)-54*(-36*a^2+12*a*h-18*a-h^2+3*h)^(
1/2)-324*asin(-2/3*h+1+4*a)*a+8*(-36*a^2+12*a*h-18*a-h^2+3*h)^(3/2)+54*asin
(-2/3*h+1+4*a)*h-81*asin(4/3*a+2/3*h-1)+54*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)^(1/2)+
108*asin(4/3*a+2/3*h-1)*a-8*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)^(3/2)+54*asin(4/3*a+2/
3*h-1)*h)/a;
else
%油位过低
x2(i)=0;
x3(i)=1/96*(54*pi*h-81*pi+108*pi*a-162*asin(4/3*a+2/3*h-1)+108*(-4*a^2-4*a*h
+6*a-h^2+3*h)^(1/2)+216*asin(4/3*a+2/3*h-1)*a-16*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)
^(3/2)+108*asin(4/3*a+2/3*h-1)*h)/a;
end
end
x=2*(x1+x2+x3);
x'

```

## 附录 6 变位参数初步估计程序

```

clear;
clc;
format long;
H=[2.39915 2.39312 2.3825 2.37435 2.36244 2.3584 2.34813 2.33937 2.33488
2.32813 2.32214 2.31414 2.30414 2.30109 2.29087 2.28046];
J=tan((1:0.1:9)*pi/180); % tan(a)
Inum0=size(J);

```

```

Inum1=Inum0(1,2);
P=cos((0:0.1:20)*pi/180); % cos(b)
Knum0=size(P);
Knum1=Knum0(1,2);
for k=1:Knum1 % the numble of angle b
for i=1:Inum1 % the numble of angle a
for j=1:16 % the numble of height
%a=0.0175+0.2504*(i-1)/99;

a=J(i); % tan
h=(H(j)-1.5)*P(k)+1.5; % hight
b1=2*a+h-1.5; %
b2=
h-1.5-2.*a-0.5*a/(4+4*a^2)*(-12*a+8*a*h-27-16*a^2-(48*a^2+264*a-176*a*h+25+
192*h-64*h^2)^(1/2));
b=(b1+b2)/2;
x1(i,j,k)=-5/48*b*(9-4*b^2)^(1/2)-1205/1536*asin(2/3*b)+169/128*b*atan(4/5*(9-4
*b^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(-18+13*b)/(9-4*b^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5
*(18+13*b)/(9-4*b^2)^(1/2))-1/6*b^3*atan(4/5*(9-4*b^2)^(1/2))+31/96*pi ;
d1=-6*a+h-1.5;
d2=
h-1.5-2.*a-0.5*a/(4+4*a^2)*(-12*a+8*a*h+27-16*a^2+(-1680*a^2-1032*a+688*a*h
+25+192*h-64*h^2)^(1/2));
d=(d1+d2)/2;
x2(i,j,k)=-5/48*d*(9-4*d^2)^(1/2)-1205/1536*asin(2/3*d)+169/128*d*atan(4/5*(9-4
*d^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5*(-18+13*d)/(9-4*d^2)^(1/2))+2197/3072*atan(2/5
*(18+13*d)/(9-4*d^2)^(1/2))-1/6*d^3*atan(4/5*(9-4*d^2)^(1/2))+31/96*pi;
x3(i,j,k)=1/48*(216*pi*a-81*asin(-2/3*h+1+4*a)*a+8*(-36*a^2+12*a*h-18*a-h^2+3*
h)^(1/2)-324*asin(-2/3*h+1+4*a)*a+8*(-36*a^2+12*a*h-18*a-h^2+3*h)^(3/2)+54*a
sin(-2/3*h+1+4*a)*h-81*asin(4/3*a+2/3*h-1)+54*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)^(1/
2)+108*asin(4/3*a+2/3*h-1)*a-8*(-4*a^2-4*a*h+6*a-h^2+3*h)^(3/2)+54*asin(4/3*a
+2/3*h-1)*h)/a;

end
end
end
x=2*(x1+x2+x3);
M=ones(i,j-1,k);
M=x(:,1:15,:)-x(:,2:16,:);
N=[0.13859
0.24221
0.18643
0.27538
0.09265
0.23928
0.20668
0.10463
0.1588
0.14243

```

```

0.18917
0.23895
0.07358
0.24527
0.25178];
for i=1:Knum1;
    P0=M(:,i);
    for j=1:Inum1;
        s(i,j)=norm(P0(j,:)-N');
    end
end
[col line]=min(s)
[m row]=min(col)
t1(1,1)=atan(J(7))*180/pi;
t1(1,2)=acos(P(28))*180/pi;
t1(2,1)=atan(J(8))*180/pi;
t1(2,2)=acos(P(40))*180/pi;
t1(3,1)=atan(J(9))*180/pi;
t1(3,2)=acos(P(49))*180/pi;
t1;
t2(1,1)=J(7);
t2(1,2)=P(28);
t2(2,1)=J(8);
t2(2,2)=P(40);
t2(3,1)=J(9);
t2(3,2)=P(49);
t2;
t3(1,1)=atan(J(13))*180/pi;
t3(1,2)=acos(P(54))*180/pi;
t3

```