

基于LM算法的接触式轮廓扫描系统参数标定*

高彤¹ 陈鸿¹ 王晋祺² 李建鑫¹ 柴世豪¹

(1. 中北大学 电子测试技术国家重点实验室 仪器科学与动态测试教育部重点实验室 太原 030051;

2. 上海无线电设备研究所 上海 201109)

摘要: 为了解决接触式轮廓扫描仪由于部件安装不精确而对测量数据结果造成偏差的问题,分析了误差的主要来源,运用最小二乘法的思想,以残差平方和最小为优化目标建立系统的误差处理模型,提出并建立一套基于LM算法迭代求出系统参数的现场标定方法,并使用MATLAB软件编程验证了算法可行性且对算法进行了鲁棒性实验,仿真实验数据表明该算法可实现对系统参数的精确标定与坐标的修正,收敛速度快,精确度高可以将测量误差控制在0.05 mm以下,角度误差控制在0.1°以下,大大降低了扫描仪的制造和安装精度要求。

关键词: 参数标定;非线性最小二乘法;迭代;LM算法;鲁棒性

中图分类号: TN919.5 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.40

Parameter calibration of contact contour scan system based on LM algorithm

Gao Tong¹ Chen Hong¹ Wang Jinqi² Li Jianxin¹ Chai Shihao¹

(1. State Key Laboratory of Electronic Test Technology, Key Laboratory of Instrument Science and Dynamic Measurement of Ministry of Education, North University of China, Taiyuan 030051, China; 2. Shanghai Radio Equipment Research Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: In order to solve the contact profile scanner due to defective components are installed and the problem that the deviation caused by the result of the measurement data, this paper analyzes the main source of error, based on the idea of least square method, the minimum residual sum of squares as the optimization target processing error of the system model is established, and establish a set of based on LM algorithm iteration the field calibration method of system parameter, and using MATLAB software programming algorithm is verified the feasibility and robustness of algorithm in experiments, simulation experiments data shows that the algorithm can realize accurate calibration of system parameters and coordinates of correction, fast convergence rate, High accuracy can control the measurement error below 0.05 mm, Angle error control below 0.1°, greatly reducing the scanner's manufacturing and installation accuracy requirements.

Keywords: parameter calibration; nonlinear least square method; iteration; LM algorithm; robustness

0 引言

随着生活水平的提高,人们对眼镜的舒适度、美观性的要求越来越高,眼镜的加工朝着高精度、自动化方向发展,扫描仪是实现全自动镜片磨边功能的第一步^[1],按测量方式可分为接触式和非接触式测量扫描仪,本文所研究的接触式轮廓扫描仪利用检测钩或被测物体旋转一周编码器返回的长度序列和步进角得到被测物体的轮廓^[2]。由于安装扫描部件时有偏差导致检测钩起始点与旋转中心不重合,直接测量得不到正确的轮廓数据,为了使加工数据真实可

靠,提高测量精度和可靠性,有必要对扫描系统参数进行标定,进而对轮廓坐标进行修正。

针对以上问题,目前主流的解决方法有两种,1)借助尺寸已知的标定板,通过测量标定板获取到特殊测量点的数据再经过数学计算得到系统参数,这种方法的优点是计算简便更易实现在线标定,缺点是离散测量条件下特殊点的获取具有偶然性,鲁棒性差;2)分析了系统的主要误差来源后,以最小二乘法为基本理论,建立带有待测系统参数的数据处理模型,通过对该模型的求解获取到系统参数^[3-6],这类方法优点是具有较强的鲁棒性和稳定性,缺点是若模型

收稿日期:2020-11-09

* 基金项目:山西省重点研发计划(201903D121060,201903D121118)项目资助

过于复杂则计算量较大,难以实现在机标定。对于复杂机械系统来说,该优化目标问题一般为非线性最小二乘法拟合,即拟合函数的参数是非线性的,此时最小二乘问题需要一个迭代求解算法^[7]。这类算法的思路是通过对模型参数的精心选择并更新来逐步减少模型函数和数据点之间的误差平方和直至优化目标满足系统精度要求。目前国内外常用算法有最速下降法、Newton 法、Gauss-Newton (GN) 法、Levenberg-Marquardt (LM) 算法等。最速下降法中搜索方向为当前点的梯度负方向,是一种非常稳定的算法,但收敛速度不尽如人意。Newton 法保留了目标函数 Taylor 级数展开式中的一阶和二阶项,具有二次收敛速度,但每一步迭代都需要计算 Hessian 矩阵,计算繁琐。在 GN 法中,通过假设最小二乘函数在参数上是局部二次函数,将目标函数的 Jacobian 矩阵的转置与其相乘近似 H' 矩阵,提高了算法效率。但上述两种算法都有可能出现 Hessian 矩阵或其近似矩阵 H' 非正定或不满秩而无法继续迭代^[8-10]。LM 算法结合了两种最优化算法:梯度下降法和高斯-牛顿法,LM 法是在高斯-牛顿的基础上加入了一个变量因子解决近似的 H 矩阵可能非正定或不满秩的问题。

本文分析了系统主要误差来源后,建立测量数据处理模型,并通过数据间的关系化简模型,利用 LM 算法结合 Armijo 和 Wolfe 准则^[11]对该模型进行求解,利用 MATLAB 软件编程仿真了实验数据验证了算法可行性,并将仿真的数据加入不同的随机噪声对算法的鲁棒性进行了实验分析,实验结果表明,利用优化 LM 算法求解本文所建立的系统数据处理模型可实现测量系统快速、高精度定标。

1 接触式轮廓测量原理及误差分析

本文所研究的接触式轮廓扫描仪主要用于测量镜片及镜框的轮廓,其扫描原理是将被测物体固定在卡槽内,由步进电机带动检测部件绕被测物体边缘旋转一周,通过增量式旋转编码器返回的脉冲信号计数和处理得到边缘点的长度信息 ρ ,与此对应的旋转角度 θ 可通过步进角及序列得到。有了长度和角度信息就可以确定边缘点坐标记为 $P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$,对被测物体轮廓一周若干个位置采样即可还原轮廓信息。

本文主要研究检测钩起始点和旋转中心不重合造成的误差,当二者重合时,由编码器返回的长度序列 ρ 和滑轨逆时针旋转的角度 θ 可得点 P 坐标 $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ 。当旋转中心 O 与检测钩起始点 Q 不重合,即 O 到滑轨存在垂直距离 d 时,如图 1 所示。

当旋转中心 O 与检测钩起始点 Q 不重合,即 O 到滑轨存在垂直距离 d 时,实际测量的是坐标 $P(\rho' \cos \theta', \rho' \sin \theta')$ 处的值,其中:

$$\begin{cases} \rho' = \sqrt{d^2 + (\rho - \Delta L)^2} \\ \theta' = \theta - \arcsin \frac{d}{\rho'} \end{cases} \quad (1)$$

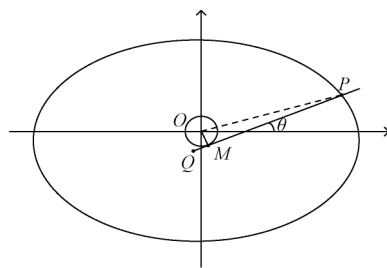


图 1 测量误差模型

测量误差可认为是:

$$\Delta = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - f(\rho' \cos \theta', \rho' \sin \theta') \quad (2)$$

2 接触式轮廓测量数据处理模型

2.1 测量数据模型

首先要建立测量数据的数学模型。如图 2 所示,实际使用四周是圆角的正方形标定板,设旋转中心为坐标原点,坐标轴方向和标定板的两组对边方向平行。设滑轨在初始位置时与 x 轴正半轴的夹角为 α_0 ,设采样 400 个点即系统的步进角为 0.9° ,则滑轨在任意位置时与 x 轴正半轴的夹角 $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n/400 (n = 0, 1, \dots)$, n 为测量点的序号。

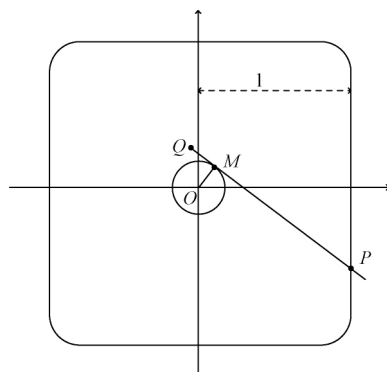


图 2 数据测量模型

在这里只利用测量直线时的数据,除了需要标定的系统参数外,还需要知道正方形标定板和坐标系的相对关系后才能建立系统的测量模型,设测量点 P 时与之相交的正方形边所在直线到坐标原点的垂直距离为 l ,则:

$$\rho = PM + MQ = \frac{l}{\cos \alpha} + d \tan \alpha + \Delta L \quad (3)$$

2.2 测量数据处理模型

运用最小二乘法的基本原理,建立系统的数据处理模型,将实际测得的数据和理论得到的数据之差的平方和作为系统的数据处理模型,即:

$$F(\alpha, d, \Delta L, l) = \sum_{i=1}^m (\rho_{\text{测}i} - \rho_i)^2 \quad (4)$$

求出使该式取得最小值时的参数即为系统要标定的参数。

为了简化数据处理模型,即缩减模型中的未知量个数,提高迭代效率,首先讨论 ΔL 对测量结果的影响,由式(3)可知每两个测量点的数据模型相减可以消去 ΔL ,故本文将相邻两个测量点数据相减作为新的数据模型,即:

$$\rho = \rho_i - \rho_{i+1} = \frac{l}{\cos\alpha_i} + d \tan\alpha_i + \Delta L - \left(\frac{l}{\cos\alpha_{i+1}} + d \tan\alpha_{i+1} + \Delta L \right) = \frac{l}{\cos\alpha_i} + d \tan\alpha_i - \frac{l}{\cos\alpha_{i+1}} - d \tan\alpha_{i+1} \quad (5)$$

接下来讨论是否可以消去坐标轴与标定板的相对位置对标定结果的影响,如图 3 所示,设滑轨在测量 P_1 位置时与 x 轴正向夹角为 α_1 ,与其相交的正方形标定板的边长方程设为 $x = l_1$, P_2 为滑轨在测量 P_1 点后逆时针旋转 180° 后的测量点,则有:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{l_1 + l_2}{\cos\alpha_1} + 2(d \cdot \tan\alpha_1 + \Delta L) \quad (6)$$

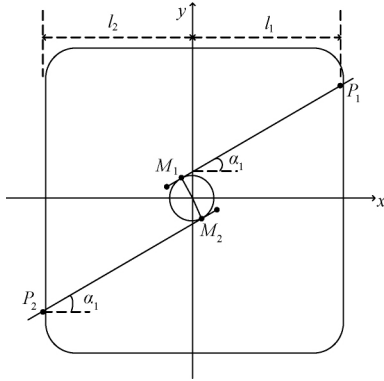


图 3 测量数据处理模型

将式(5)和(6)结合在一起建立新的数据模型:

$$\rho = \frac{l_1 + l_2}{\cos\alpha_i} + 2d \cdot \tan\alpha_i - \frac{l_1 + l_2}{\cos\alpha_{i+1}} - 2d \cdot \tan\alpha_{i+1} \quad (7)$$

已知标定板尺寸为 $l_1 + l_2 = 45$ mm,故利用相邻及对边的 4 个数据相加减去建立的残差模型和 ΔL 以及标定板的位置参数无关,这样做可巧妙减少了优化模型的维度,优化模型变为:

$$F(\alpha_0, d) = \sum_{i=1}^m \left(\rho_{\text{测}i} - \left(\frac{45}{\cos\alpha_i} + 2d \cdot \tan\alpha_i - \frac{45}{\cos\alpha_{i+1}} - 2d \cdot \tan\alpha_{i+1} \right) \right)^2 \quad (8)$$

$$\text{其中, } \alpha_i = \alpha_0 + \frac{2\pi(i-1)}{400}$$

3 数据处理模型求解

3.1 非线性最小二乘优化

建立数据处理模型后,优化目标为求使得式(6)取得最小的参数^[12-14],此为非线性最小二乘拟合问题,即拟合函数的参数是非线性的,需要一个迭代求解算法。

将第 i 次观测点的预测偏差记为:

$$r_i = \rho_{\text{测}i} - \rho_i(\alpha_i) \quad (9)$$

现有 m 个观测点, $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_m]^T$, 则优化目标函数记为:

$$S = \sum_{i=1}^m r_i^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \quad (10)$$

记 $\boldsymbol{\beta} = [\alpha_0 \ d]^T$, $\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 2 \sum_{i=1}^m r_i \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j}$, 则目标函数的梯度:

$$\nabla S(\boldsymbol{\beta}) = \left[\frac{\partial S}{\partial \beta_1} \ \frac{\partial S}{\partial \beta_2} \right]^T = \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha_0} \ \frac{\partial S}{\partial d} \right]^T \quad (11)$$

\mathbf{r} 对于 $\boldsymbol{\beta}$ 的雅可比矩阵:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\beta})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial r_1}{\partial d} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial r_m}{\partial d} \end{bmatrix} \quad (12)$$

梯度可以用雅可比矩阵表示为 $\nabla S = 2\mathbf{J}^T \mathbf{r}$, 则目标函数的黑塞矩阵 \mathbf{H} 的元素:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta_k \partial \beta_j} = 2 \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(\sum_{i=1}^m r_i \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} \right) \quad (13)$$

对式(13)应用链式法则可得到:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta_k \partial \beta_j} = 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial r_i}{\partial \beta_k} \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} + r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial \beta_k \partial \beta_j} \right) \quad (14)$$

将 \mathbf{O} 矩阵元素定义为 $O_{kj} = \sum_{i=1}^m r_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial \beta_k \partial \beta_j}$, 那么黑塞矩阵可表示为 $\mathbf{H} = 2(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{O})$

3.2 Levenberg-Marquardt 算法

LM 算法结合了两种最优化算法:梯度下降法和高斯-牛顿法。由一维牛顿迭代法,当目标函数 f 为一元目标函数 $f(x)$, 它的迭代方程形式为:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f'(x_{k-1})}{f''(x_{k-1})} \quad (15)$$

将一维推广到多维,即为多元目标函数 $f(\mathbf{x})$, 标量 x 变为一维向量 $\{\mathbf{x}\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, 一阶导数对于多元目标函数来说是个梯度向量 $\nabla f(\mathbf{x})$, 二阶导数变为一个 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 。它的迭代方程形式为:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k-1})^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (16)$$

将本文测量系统的数据处理模型应用牛顿法:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_{(k)} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_{(k)})^{-1} \nabla S(\boldsymbol{\beta}_{(k)}) = \boldsymbol{\beta}_{(k)} - \\ & (2(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{O}))^{-1} 2\mathbf{J}^T \mathbf{r} = \boldsymbol{\beta}_{(k)} - (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{O})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (17)$$

当选取的模型较好时, r_i 趋近于 0, 则可以忽略 \mathbf{O} 矩阵, 迭代方程变换为:

$$\boldsymbol{\beta}_{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(k)} - (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{r} \quad (18)$$

这就是高斯牛顿法的迭代方程,这样做大大减小了计算量,但用 $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ 近似代替黑塞矩阵 \mathbf{H} 仍存在近似矩阵可能是非正定的问题,在当前点不能保证收敛,所以需要在高斯牛顿法的基础上进行改进。

当所研究的目标函数的黑塞矩阵的近似函数 $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ 有可能出现非正定的情况,需要对迭代方程进行 LM 修正:

$$\beta_{(k+1)} = \beta_{(k)} - (J^T J + \mu I)^{-1} J^T r \quad (19)$$

还可以对步长进行优化,使其在迭代中自适应调整并保证收敛,优化方法采取 Armijo 准则收缩过大的步长, Wolfe 准则防止步长过小,即:

$$\beta_{(k+1)} = \beta_{(k)} - \alpha_k (J^T J + \mu I)^{-1} J^T r \quad (20)$$

确定了优化路径后,给定一个初始点便可进行迭代求取最优解,当模型变化缓慢到区域 0,则可认为达到收敛条件终止迭代^[15]。

4 仿真实验及数据分析

4.1 仿真模拟

为了验证标定算法,在给定正方形标定板与坐标系的相对位置关系及起切距 ΔL 后,再给定一组要标定的系统参数 $[\alpha_0 \ d]$ 利用 MATLAB 软件编程模拟仿真出该参数的数据集,利用上述算法对数据处理模型进行迭代求解,比较解出的参数 $[\alpha'_0 \ d']$ 与设定值的区别验证算法的准确性。

初始迭代值的选取对于算法是否收敛以及迭代速度来说及其重要,考虑实际应用时已知系统的期望初始参数为: $\Delta L = 0, \alpha_0 = 0, d = 0$, 故本文将迭代初值设为 0,将模拟的实际参数值设为零附近的数值。数据处理结果如表 1 所示,以式(8)建立的误差处理模型对应图上标出了算法的迭代路径如图 4 所示。

表 1 无随机误差的数据模拟及处理结果

系统参数	设定值	迭代初值	迭代终值	相对误差/%
$\alpha_0/(^\circ)$	2.00	0	1.997 864	0.106 8
d/mm	5.00	0	5.000 115	0.011 5

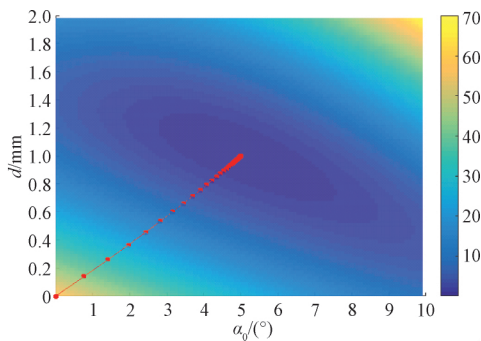


图 4 迭代路径

在这里为了说明本文所使用的算法具有高精度和良好的鲁棒性,利用引言中第 1 种方法即对离散测量标定板时获取到的特殊点据进行简单地数学计算求解得到系统参数的方法做仿真实验,实验结果如表 2 所示。

表 2 中只记录了两次实验结果,可以看出,每一次的标定结果都与设定值有较大偏差且计算结果不稳定,鲁棒性差。

4.2 鲁棒性实验

为了使模拟更接近实际情况,在仿真出的数据中加入

表 2 未拟合离散数据点求解参数结果

系统参数	设定值	计算结果 1	计算结果 2
$\alpha_0/(^\circ)$	10.00	9.268 9	12.477 70
d/cm	1.00	1.302 6	0.046 96
$\Delta L/\text{cm}$	2.00	2.016 6	1.977 26

不同随机噪声^[16]取其中一次的实验结果如表 3 所示。

表 3 带入不同随机噪声后的数据处理结果

系统参数	设定值	迭代初值	迭代终值		
			噪声 1 0.1 mm	噪声 2 0.01 mm	噪声 3 0.001 mm
$\alpha_0/(^\circ)$	2.00	0	1.932 455 0	2.017 319	1.994 019
d/mm	5.00	0	5.026 077 3	4.999 184	5.000 298

当随机噪声取 0.1 mm 时迭代路径如图 5 所示。

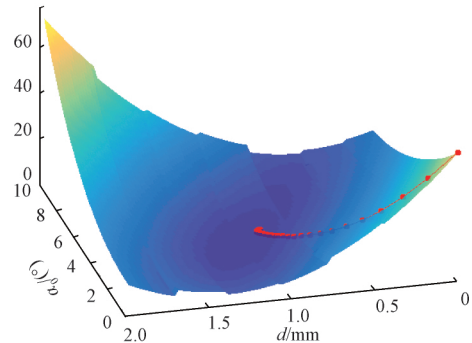


图 5 加入噪声后的迭代路径

实验结果表明加了随机噪声后,优化模型仍具有很好的收敛性,应用在工程实践中不易被噪声淹没^[16],具有良好的鲁棒性。

5 结 论

本文针对接触式镜片/镜框轮廓扫描仪在安装测量部件时有偏差的问题,分析了系统的主要误差来源即扫描仪旋转中心和检测起始点不重合,建立起数据测量模型后利用非线性最小二乘法的思想建立了系统的误差处理模型并利用数据间的关系巧妙地减少了优化模型的维度,使得模型求解更加简便,模型的求解利用 LM 算法结合步长优化,实现了在线标定。最后使用 MATLAB 进行了仿真实验,模拟了理想状态和带随机误差时的数据处理结果,实验表明本文建立的模型利用该算法可很好的收敛于目标优化值。本文对于测量系统的中的系统误差可以很好的消除,但偶然误差如每次放置被测物体时的倾角无法测量或校正,今后的工作可以致力于解决这类误差。

参考文献

- [1] 管栋. 基于结构光的眼镜镜框轮廓测量系统的研究[D].

- 杭州:浙江大学,2017.
- [2] 孙艳玲,常素萍. 接触式表面轮廓测量的非线性误差分析与补偿[J]. 计量学报,2016,37(6):563-566.
- [3] 郭智杰,王明泉,张俊生,等. 轮毂外形参数的在线测量技术研究[J]. 国外电子测量技术,2019,38(5):142-145.
- [4] 仇谷烽,余景池,黄启泰,等. 接触式三坐标测量自由曲面轮廓的数据处理模型[J]. 光学精密工程,2013,21(11):2813-2820.
- [5] 张和君,马俊杰,张军. 激光跟踪仪多参数误差模型与标定[J]. 仪器仪表学报,2020,41(9):20-30.
- [6] 朱嘉齐,章家岩,冯旭刚. 柔性臂测量机的圆光栅偏心参数标定算法[J]. 电子测量与仪器学报,2019,33(8):1-7.
- [7] BU X H, HOU Z S. Adaptive iterative learning control for linear systems with binary-valued observations[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(1):232-237.
- [8] CHRISTOS K F, GEORGE A G. Hybrid multilevel solution of sparse least-squares linear systems [J]. Engineering Computations, 2017, 34(8):2752-2766.
- [9] 祝强,李少康,徐臻. LM 算法求解大残差非线性最小二乘问题研究[J]. 中国测试,2016,42(3):12-16.
- [10] DELCHEV K. Iterative learning control for robotic manipulators: A bounded-error algorithm [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2014, 28(12):1454-1473.
- [11] 沈子钰,汪立新. 步长自适应的测量矩阵迭代优化方法[J]. 计算机工程与应用,2019,55(1):266-270.
- [12] 魏舜昊,章家岩,冯旭刚. 三坐标测量机高速测量过程动态误差分析与补偿[J]. 电子测量与仪器学报,2020,34(5):43-50.
- [13] 陈晓荣,刘亚茹,石高辉. 基于机器视觉的光纤几何参数检测算法设计[J]. 电子测量技术,2019,42(6):82-86.
- [14] 李青,刘红光,李凌梅,等. 三坐标测量机校准综合示值误差分析[J]. 国外电子测量技术,2018,37(6):35-38.
- [15] 管钰晴,唐冬梅,傅云霞,等. 穆勒椭圆标定方法中 LM 算法研究[J]. 红外与激光工程,2020,49(8):168-176.
- [16] 熊战磊. 改进的迭代学习控制算法及其鲁棒性分析[D]. 郑州:郑州大学,2019.

作者简介

高彤,硕士研究生,主要研究方向为光电检测技术。

E-mail:gaotong19960@163.com

陈鸿(通信作者),博士,教授,主要研究方向为电路设计、自动化测试与控制技术、光电检测技术等。

E-mail:chenhong@nuc.edu.cn