

第一题建模

Z

2025 年 8 月 15 日

摘要

为确定工件 1 轮廓线的各项参数值,我们先利用 matlab 画出附件一中 sheet1 的散点图,初步确立附件一轮廓线中的部分转折点,考虑到附件一的轮廓线仅由直线与圆周组成,于是我们在确立转折点的前提下分区间基于最小二乘法进行曲线拟合,建立工件 1 轮廓线的数学表达式,进而由解析几何方法求得各项参数值。

1 初步转折点选取

将附件一经过 matlab 的处理后其散点图以及部分转折点如下:

选取的转折点具体坐标如下,我们依次序从左到右对转折点进行编号(横坐标 $a_i, i \in [1, 17] \cap \mathbf{Z}$):

在确立了转折点的坐标后,我们分区间对轮廓线进行曲线拟合。

2 曲线拟合

这里将不同区间内拟合的曲线(不考虑水平直线)类型分为三类:

第一类: 直线段, 有 $[a_7, a_8], [a_8, a_9]$

第二类: 圆周, 有 $[a_{10}, a_{11}], [a_{12}, a_{13}], [a_{14}, a_{15}], [a_{16}, a_{17}]$

第三类: 直线段与圆周, 有 $[a_1, a_2], [a_3, a_4], [a_5, a_6]$

这里就三类情况分别进行处理:

2.1 第一类

以区间 $[a_7, a_8]$ 为例。 a_7, a_8 的坐标分别为: (71.6264,-1.7679),(76.8240,-0.7815).
于是区间具体数值为:[71.6264,76.8240]

采用最小二乘法拟合直线: 设直线方程为 $ax + b$.

目标函数为 $\min f(a, b) = \sum_j (c_j - ab_j - b)^2$

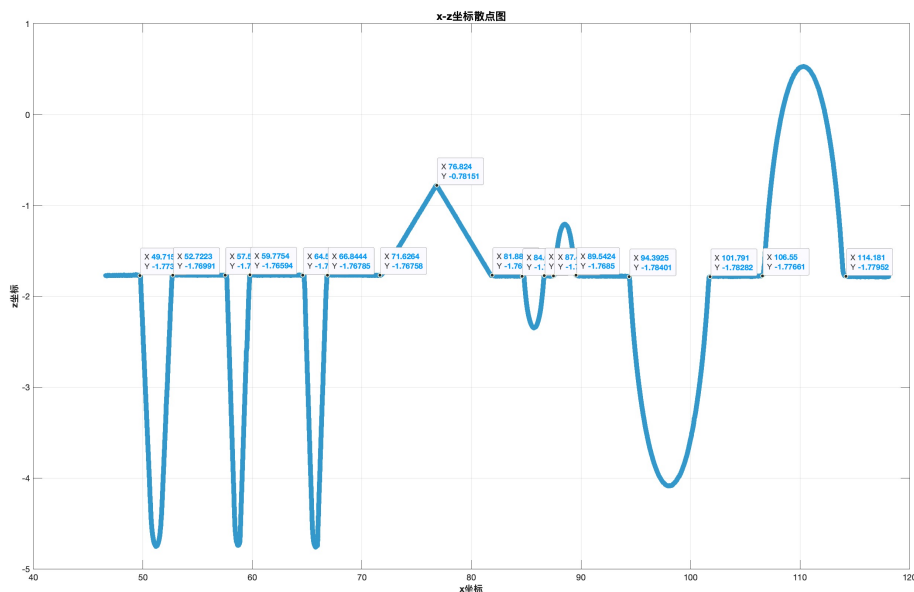


图 1: Enter Caption

其中 c_j 为区间 $[a_7, a_8]$ 中附件一 sheet1 内点对应的纵坐标, b_j 为其对应的横坐标。

2.2 第二类

以区间 $[a_{10}, a_{11}]$ 为例, 采用 LM 算法. 其对应的区间为 $[84.6165, 86.6494]$
 设其满足圆方程:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

其中 (a,b) 是圆心, r 是半径.

定义残差:

$$f_j(a, b, r) = \sqrt{(b_j - a)^2 + (c_j - b)^2} - r$$

目标函数为:

$$\min E(a, b, r) = \min \sum_j f_j^2$$

2.3 第三类

以区间 $[a_1, a_2]$ 为例, 其具体数值为 $[49.7154, 52.7223]$.

将其分为三部分: 第一部分为左侧直线段, 第二部分为中间圆弧, 第三部分为右侧直线段。

考虑到圆弧与直线的交点未定, 采用自动化分段算法, 利用曲率分析法定位过渡点
 先对左侧直线段进行线性拟合, 设其方程为 $ax+b$

step1: 在区间 $[a_1, \frac{a_1+a_2}{2}]$ 随机选取十个点作为样本点。

step2: 利用最小二乘法求解参数 a,b



...	 Target	 Position
1	<i>1x1 Scatter</i>	[114.1814,-1.7795]
2	<i>1x1 Scatter</i>	[106.5504,-1.7766]
3	<i>1x1 Scatter</i>	[101.7909,-1.7828]
4	<i>1x1 Scatter</i>	[94.3925,-1.7840]
5	<i>1x1 Scatter</i>	[89.5424,-1.7685]
6	<i>1x1 Scatter</i>	[87.4959,-1.7757]
7	<i>1x1 Scatter</i>	[86.6494,-1.7737]
8	<i>1x1 Scatter</i>	[84.6165,-1.7795]
9	<i>1x1 Scatter</i>	[81.8819,-1.7691]
10	<i>1x1 Scatter</i>	[76.8240,-0.7815]
11	<i>1x1 Scatter</i>	[71.6264,-1.7676]
12	<i>1x1 Scatter</i>	[66.8444,-1.7679]
13	<i>1x1 Scatter</i>	[64.5999,-1.7690]
14	<i>1x1 Scatter</i>	[59.7754,-1.7659]
15	<i>1x1 Scatter</i>	[57.5009,-1.7676]
16	<i>1x1 Scatter</i>	[52.7223,-1.7699]
17	<i>1x1 Scatter</i>	[49.7154,-1.7739]

图 2: Enter Caption

step3: 遍历区间内的点计算残差和

step4: 选取满足最小残差和的 a, b 作为最优参数

在拟合出左侧直线段后, 采用同样的方法拟合出右侧直线段 $a'x + b'$ 。

设中间圆弧的方程为: $(x - a'')^2 + (y - b'')^2 = r^2$

在确定的过渡点范围内利用 LM 算法拟合圆弧方程。

3 正式转折点的选取

由于初步的转折点依赖于人工干预, 无法精确的表示实际情况, 于是在分段拟合出曲线方程的基础上, 我们将相邻的曲线交点 (包括水平直线) 视为真实的转折点, 从而得到对附件一轮廓线一般的数学模型

4 参数值的确定

对于水平线段 x_i 直接利用正式的断点之差确定。

对于角度 $\angle 1$, 设第一条斜线的方程为: $z = ax + b$, 则

$$\angle 1 = \pi - \arctan a$$

对于半径 R_1 则直接由圆的方程得出

高度 z_1 由正式的断点的高度之差确立

圆心距离 c_1 由对应圆的方程确立

5 模型优化

上述模型的确立前提在于断点的选取, 但是人工选取的断点可能与实际的轮廓线不符, 于是先对附件一 sheet1 数据进行预处理, 去除孤立离群点, 利用曲率分析法自动定位断点, 在分段模型的拟合时强制要求直线与圆弧在过渡点连续, 在直线段的拟合过程中用 ransec 方法代替最小二乘法