

# 第二题建模

Z

2025 年 8 月 14 日

## 摘要

附件一的 sheet2 给出了工件一在倾斜一个角度和有一些水平位移状态下轮廓线的测量数据，下面我们将计算工件的倾斜角度和水平位移，并对其做水平校正，在校正完毕后计算其各参数值。

## 1 水平位移和偏转角度的确定

已知刚体的变换公式如下：

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

其中  $\theta$  为旋转角度， $(\Delta x, \Delta z)$  为位移量

所以接下来的目标即为确定最优的  $\theta, \Delta x, \Delta z$ ，即从轮廓线坐标数据反推出工件的刚体运动参数，即找到两组点云之间最优空间变换关系。

### 1.1 数据预处理

进行高斯滤波过滤

去除明显异常点 (z 坐标突变超过 0.1 的点)

对密集区域进行均匀采样 (若计算量过大则均匀随机抽取部分点)

### 1.2 特征点选取

采用曲率分析法，对于离散点数据，曲率的差分近似为：

$$k_i = \frac{|(z_{i+1} - z_i)(x_{i-1} - x_i) - (x_{i+1} - x_i)(z_{i-1} - z_i)|}{[(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

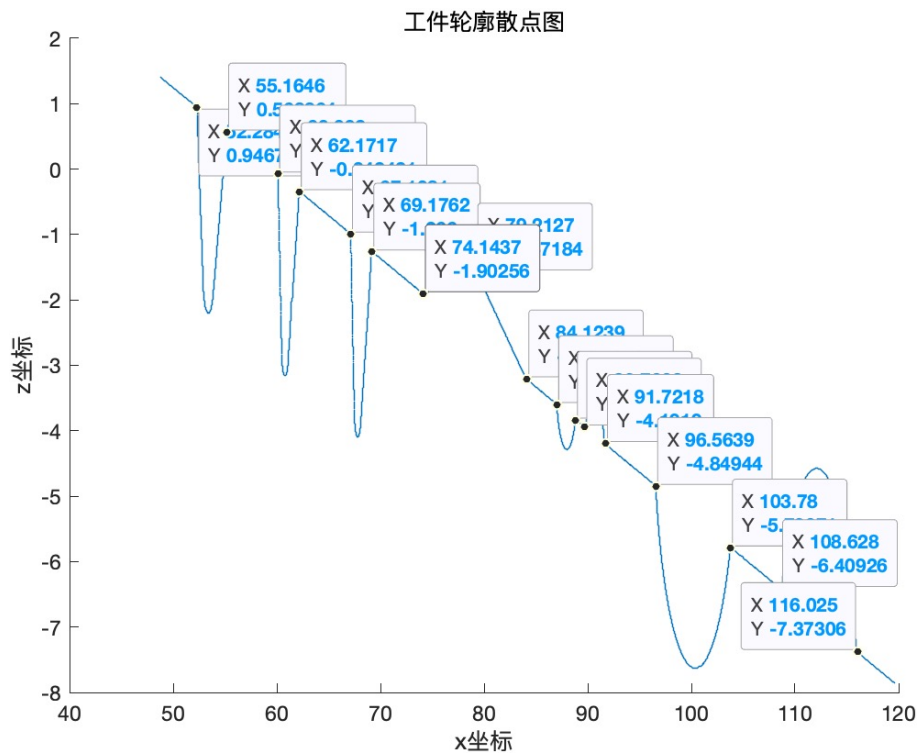


图 1: Enter Caption

特征点的判定标准如下:

局部极值条件:

$$k_i > k_{i-1} \quad \text{and} \quad k_i > k_{i+1}$$

阈值条件:

$$k_i > 1.5\bar{k}$$

在两组数据特征点数量过多或过少时, 我们采用人工干预, 利用 Matlab 画出附件一 sheet2 的散点图, 选择与第一问中附件一 sheet1 对应的断点作为与其对应的特征点

采用人工选择的特征点与曲率分析法筛选的特征点相结合的方式, 限制曲率分析法挑选的特征点在人工特征点小邻域内, 并以其为最终特征点

### 1.3 参数确定

在两组数据中选取特征点后 (20 个以下), 使用最小二乘法求解最优变换

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - z \sin \theta + \Delta x \\ z' = x \sin \theta + z \cos \theta + \Delta z \end{cases}$$

下面的问题在于两组数据特征点  $\{p_i\}$  与  $\{q_i\}$  的对应情况, 我们采用钢体的几何不变性构建特征



 Target	 Position
<i>1x1 Scatter</i>	[74.1437,-1.9026]
<i>1x1 Scatter</i>	[116.0250,-7.3731]
<i>1x1 Scatter</i>	[108.6285,-6.4093]
<i>1x1 Scatter</i>	[103.7796,-5.7907]
<i>1x1 Scatter</i>	[96.5639,-4.8494]
<i>1x1 Scatter</i>	[91.7218,-4.1919]
<i>1x1 Scatter</i>	[89.7228,-3.9415]
<i>1x1 Scatter</i>	[88.8237,-3.8364]
<i>1x1 Scatter</i>	[87.0161,-3.5982]
<i>1x1 Scatter</i>	[84.1239,-3.2049]
<i>1x1 Scatter</i>	[79.2127,-1.5718]
<i>1x1 Scatter</i>	[69.1762,-1.2660]
<i>1x1 Scatter</i>	[67.1081,-0.9914]
<i>1x1 Scatter</i>	[62.1717,-0.3424]
<i>1x1 Scatter</i>	[60.0920,-0.0733]
<i>1x1 Scatter</i>	[55.1646,0.5689]
<i>1x1 Scatter</i>	[52.2842,0.9468]

图 2: Enter Caption

1: 局部曲率  $k_i$

2: 距离比值  $\|p_i - \frac{p_i + p_0}{2}\| / \|p_i - p_0\|$  其中  $p_i$  为选取的第  $i$  个特征点,  $p_0$  为对应数据集最初始点

在选取特征以后进行双向匹配验证:

正向匹配:  $P \rightarrow Q$  的最临近 (两组特征最接近)

反向匹配:  $Q \rightarrow P$  的最临近

实际上在人工干预后只需对应的特征点欧氏距离最临近即可

在确立了 sheet1 的特征点集  $\{p_i\}$ , sheet2 的特征点集  $\{q_i\} i \in \{1 \dots n\}$  后, 进行参数的确定

利用最小二乘法, 目标函数为:

$$\min_{\theta, \Delta x} \sum_{i=1}^n [(x'_i - (x \cos \theta - z \sin \theta + \Delta x))^2 + (z'_i - (x \sin \theta + z \cos \theta + \Delta z))^2]$$

其中  $x_i, x'_i, z_i, z'_i$  为对应特征点的横纵坐标

利用 python 求得最优的变位参数

## 2 水平校正

在求得变位参数  $\theta, \Delta x$  后, 利用反演变换:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得附件一 sheet2 的水平校正数据集, 带入问题一的模型即求得其对应的参数