

# “接触式轮廓仪的自动标注”的问题解析

薛 毅

(北京工业大学 理学部, 北京 100124)

**摘 要:**就 2020 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 D 题“接触式轮廓仪的自动标注”给出了一种求解方法, 并针对学生在参赛论文中出现的问题作了简要的说明与点评. 为保证求解的连贯性, 论文的前一部分是问题的求解, 后一部分是参赛论文的点评.

**关键词:**接触式轮廓仪; 自动标注; 数据处理; 最小二乘法

中图分类号: TH741; TG84; O241.2

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2021)01-0092-09

DOI: 10.19943/j.2095-3070.jmmia.2021.01.11

## 1 题目简述

轮廓仪是一种两坐标测量仪器, 它由工作平台、夹具、被测工件、探针、传感器和伺服驱动等部件组成(图 1).

接触式轮廓仪的工作原理是: 探针接触到被测工件表面并匀速滑行, 传感器感受到被测表面的几何变化, 在  $X$  和  $Z$  方向分别采样, 并转换成电信号. 该电信号经放大等处理, 转换成数字信号储存在数据文件中(图 2).

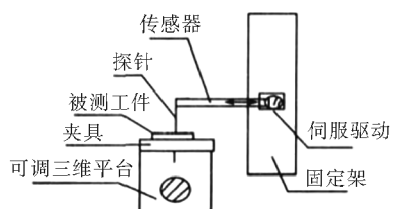


图 1 接触式轮廓仪的示意图

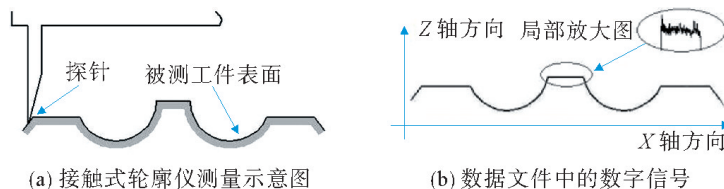


图 2 接触式轮廓仪的工作原理

在理想状况下, 轮廓曲线应该是光滑的, 但由于接触式轮廓仪存在探针沾污、探针缺陷、扫描位置不准等问题, 检测到的轮廓曲线呈现出粗糙不平的情况(图 2(b)中的局部放大图), 这给工件形状的准确标注带来影响.

为了简化问题, 假设被测工件的轮廓线是由直线和圆弧构成的平面曲线(图 3). 请建立数学模型, 并根据附件 1 (工件 1 的水平 and 倾斜测量数据)、附件 2 ~ 附件 4 (工件 2 的多次测量数据) 所提供的轮廓仪测量数据, 研究下列问题:

**问题 1** 附件 1 中的 level 页是工件 1 在水平测量状态下的测量数据, 其轮廓线如图 3 所示, 请标

收稿日期: 2021-01-20

通讯作者: 薛毅, E-mail: xueyi@bjut.edu.cn

引用格式: 薛毅. “接触式轮廓仪的自动标注”的问题解析[J]. 数学建模及其应用, 2021, 10(1): 92-100.

XUE Y. Problem analysis for automatic marking of contact profilers (in Chinese)[J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2021, 10(1): 92-100.

注出轮廓线的各项参数: 槽口宽度(如  $x_1, x_3$  等)、圆弧半径(如  $R_1, R_2$  等)、圆心之间的距离(如  $c_1, c_2$  等)、圆弧的长度、水平线段的长度(如  $x_2, x_4$  等)、斜线线段的长度、斜线与水平线之间的夹角(如  $\angle 1, \angle 2$  等)和人字形线的高度( $z_1$ )。

**问题 2** 同一工件在不同次测量时, 由于工件放置的角度和位置不同, 轮廓线参数的计算值也会存在差异. 附件 1 中的 down 页给出了工件 1 在倾斜一个角度和有一些水平位移状态下轮廓线的测量数据. 请计算该工件测量时的倾斜角度, 并作水平校正. 在数据校正后, 完成问题 1 的任务, 并比较两种测量状态下工件 1 的各项参数计算值之间的差异.

**问题 3** 在对工件作多次检测时, 工件每次放置的角度、测量的起点和终点都会有偏差, 这导致了每次测量实际是对整个工件中的某一部分进行检测. 附件 2 提供了对工件 2 的 10 次测量数据, 请基于这些数据完成: 1) 每次测量时工件 2 的倾斜角度; 2) 标注出工件 2 轮廓线的各项参数(同问题 1); 3) 画出工件 2 的完整轮廓线.

**问题 4** 为了更准确地标注出工件 2 的各项参数, 附件 3 和附件 4 分别提供了工件 2 关于圆和角的 9 次局部测量数据, 请利用这些数据修正问题 3 的结论, 并对该工件的完整轮廓线作进一步修正.

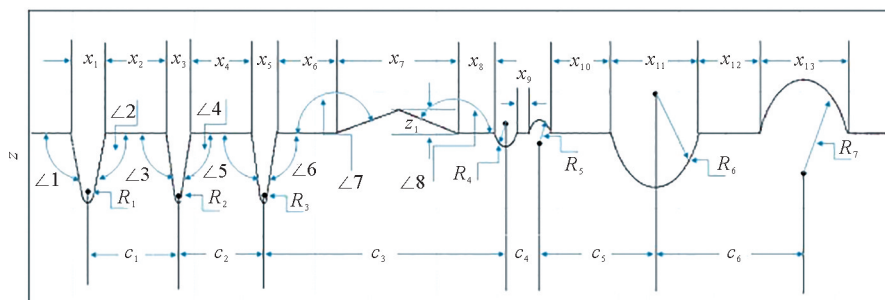


图 3 工件 1 在水平状态下测量的轮廓线

## 2 问题 1 求解

问题 1 是标注出, 在水平测量状态下, 工件 1 轮廓线(图 3)的各项参数, 如槽口宽度、水平线段的长度、斜线的斜率和长度等. 这些参数的计算全部依赖于一些关键点——水平线与斜线的交点、水平线与圆弧线的交点、斜线与圆弧线的切点——位置的确定.

### 2.1 关键点位置的确定

为了说明如何计算关键点, 参看图 3 的局部放大图(图 4), 图中有 4 个关键点, 分别是水平线与斜线、斜线与圆弧、圆弧与斜线以及斜线与水平线的交点或切点.

为了求出这 4 个关键点, 考虑曲线的变化率, 也就是曲线的导数值. 利用不同曲线导数的特点, 计算出这 4 个关键点. 但由于曲线不是光滑的(图 2(b)中的局部放大图), 数值微分后, 其数值微分曲线更加不光滑. 解决问题的方法是滤波, 这里采用数据平滑的方法, 使用 151 个点作中心移动平均.

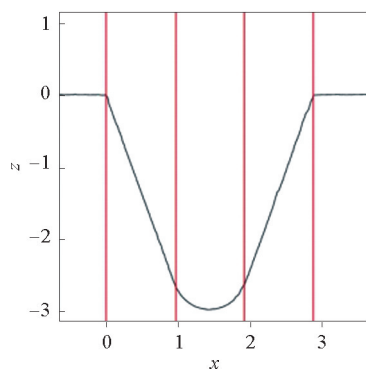


图 4 图 3 中的局部放大图

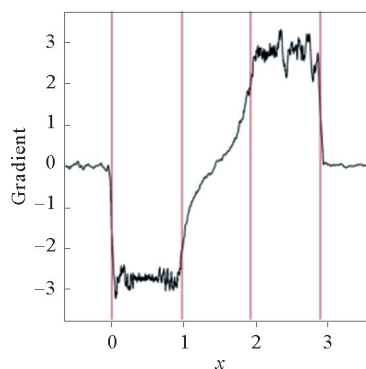


图 5 数值微分且滤波后的图形

本文使用 R 软件来完成全部计算, 其中数值微分使用的是 `gradient()` 函数, 它的使用方法见文献[1]. 数据平滑使用的是 `filter()` 函数, 它的使用方法见文献[2]. 图 5 给出的是数值微分且作平滑后的曲线图, 从图中可以看出, 4 个关键点基本上位于曲线中跳跃点的位置.

其他的关键点可以按照类似的方法确定, 图 6 给出图 3 中的部分曲线的放大图及数值微分且滤波后的图形.

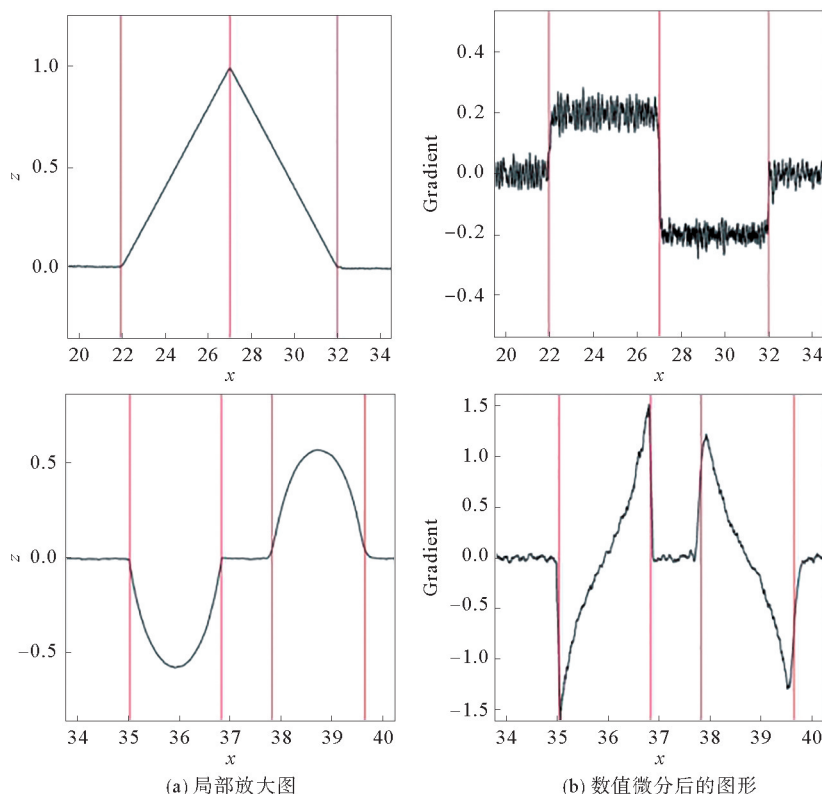


图 6 确定关键点的图形解释

## 2.2 斜线的计算

由于曲线是非光滑的, 不能直接用数据得到的曲线作为斜线的近似. 需要作斜线的最小二乘估计

$$\min_{a,b} f(a,b) = \sum_{i=1}^n (z_i - a - bx_i)^2, \quad (1)$$

其中,  $(x_i, z_i)$  是斜线上两个关键点之间的数据.

这里不用推导问题 1 的求解过程, 使用 R 中 `lm()` 函数即可解决此问题<sup>[3-4]</sup>.

## 2.3 圆弧的计算

圆弧的方程为  $(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ , 其中,  $(x_0, z_0)$  为圆心,  $R$  为半径. 关于圆弧的拟合本质上是一个非线性最小二乘问题

$$\min_{x_0, z_0, R} F(x_0, z_0, R) = \sum_{i=1}^n ((x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2 - R^2)^2, \quad (2)$$

其中,  $(x_i, z_i)$  为圆弧上两个关键点之间的数据.

关于优化问题(2)的求解, 可使用 R 中 `nlm()` 函数, 可以参见文献[3]或者[4].

## 2.4 计算结果

已知关键点处的位置(坐标值), 很容易计算出槽口宽度和水平线段的长度. 得到圆弧半径和圆心的位置后, 可计算出圆弧的长度. 在得到斜线的起、终点坐标, 很容易计算出斜线的长度. 计算结果如表 1 所示.

表 1 问题 1 的计算结果

槽宽/mm	平线长/mm	圆弧长/mm	半径/mm	圆心距/mm	斜线长/mm	斜率	夹角/(°)
2.88	5.01	1.21	0.50	---	2.84	-2.746	110.0
2.05	5.02	0.76	0.29	7.48	2.83	2.773	109.8
2.03	4.98	0.87	0.34	7.09	2.89	-3.721	105.0
10.06	3.00	2.27	1.00	19.91	2.92	3.334	106.7
7.24	0.99	2.25	1.02	2.81	2.88	-3.762	104.9
7.25	5.00	9.09	4.00	9.53	2.96	3.516	105.9
	5.01	9.05	4.00	12.25	5.16	0.199	168.8
人字形线高度: 1.00 (平均值)					5.10	-0.200	168.7

### 3 问题 2 求解

问题 2 是依据工件 1 在倾斜角度测量数据下,标注出工件 1 各项参数的计算值.最简单的方法是先确定出工件测量的倾斜角度,作旋转变换,将倾斜角度的数据转换成水平测量的数据,应用问题 1 的算法(或程序),给出各项参数的计算值.

#### 3.1 基准线

所谓基准线就是工件在夹具上的滑动线,当工件夹具处于水平状态,工件测量的基准线就是水平的(如问题 1 的情况),否则基准线会有一个倾斜角.

一种作法是确定关键点,其方法与问题 1 中确定关键点的方法基本类似,选择斜率相差不大的数据作线性回归,其回归方程就是基准线的方程.

更简单的方法是先作稳健回归,再通过回归方程选择数据,然后利用这些数据作普通的最小二乘回归.在 R 中,完成稳健回归的函数有 `rlm()` 函数(稳健线性模型)、`lqs()` 函数(抗干扰回归)等<sup>[4]</sup>.

工件 1 的倾斜测量数据及它的基准线如图 7 所示.经计算,基准线与水平线之间的夹角是  $-7.442^\circ$ ,作逆时针旋转,得到类似于问题 1 的水平测量数据.

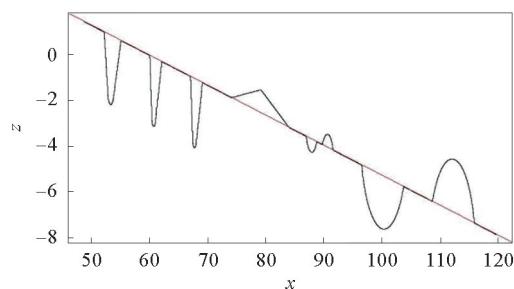


图 7 工件 1 的倾斜测量数据和它的基准线

#### 3.2 计算结果

在作完水平校正后,得到的数据就相当于水平测量的结果,调用问题 1 的程序,得到相应的计算结果,如表 2 所示.

表 2 问题 2 的计算结果

槽宽/mm	平线长/mm	圆弧长/mm	半径/mm	圆心距/mm	斜线长/mm	斜率	夹角/(°)
2.88	5.02	1.22	0.50	---	2.83	2.743	110.0
2.07	5.00	0.80	0.30	7.49	2.80	2.742	110.0
2.06	4.94	0.79	0.30	7.07	2.86	3.728	105.0
10.06	3.01	2.26	1.00	19.94	2.76	3.645	105.3
7.24	1.00	2.26	1.01	2.81	2.89	3.770	104.9
7.25	5.00	9.08	4.01	9.53	2.87	3.797	104.8
	5.01	9.06	4.00	12.25	5.16	0.200	168.7
人字形线高度: 1.00 (平均值)					5.10	-0.200	168.7

将两组数据重叠在一起,画出曲线图(局部),其中虚线是水平测量的数据,实线是倾斜测量校正后的数据(图 8).从图 8 可以看出:在增加倾斜测量数据后,部分结果有所改进.

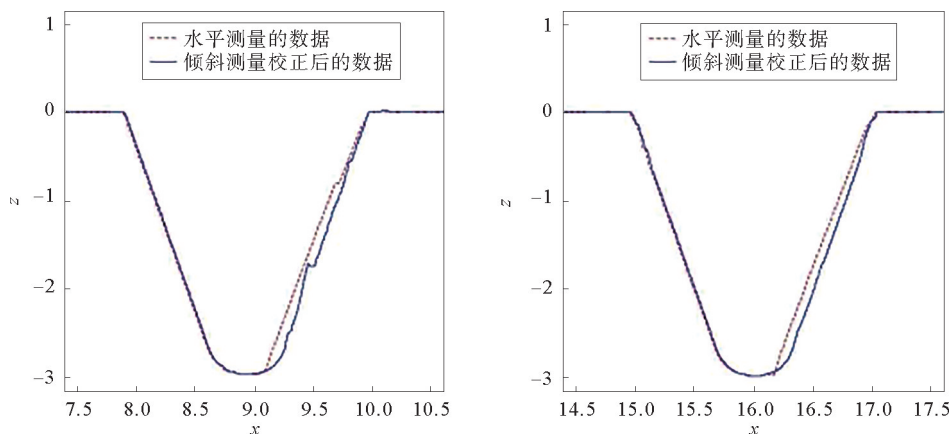


图 8 水平测量和倾斜测量校正后的局部对比图

#### 4 问题 3 求解

问题 3 是依据对工件 2 多次(10 次)测量的数据,完成:

- 1) 每次测量时工件 2 的倾斜角度;
- 2) 标注出工件 2 轮廓线的各项参数;
- 3) 画出工件 2 的完整轮廓线.

为了便于分析,画出 10 次测量数据的轮廓曲线图,在绘图时将起点作了平移,如图 9 所示.从图 9 可以看出,每条曲线关于工件的起点和终点不同,测量倾斜角度也不同.为了完成任务 1),需要考虑什么是工件测量时的基准线.

##### 4.1 基准线

确定基准线的方法是先确定出关键点,如图 10 所示.从图 10 可以看出,两条竖线之间的数据可以作为基准线计算的数据,而竖线与曲线的交点可以看成是关键点.

那么关键点如何确定呢?与问题 1 的方法一样,还是考虑曲线的导数值(图 11).从图 11 可以看出,水平线的高度值是基准线的斜率,而竖线与曲线的交点就是要求的关键点.由于在这两个点的前后,曲线有很大的跳跃,所以计算时较为方便.

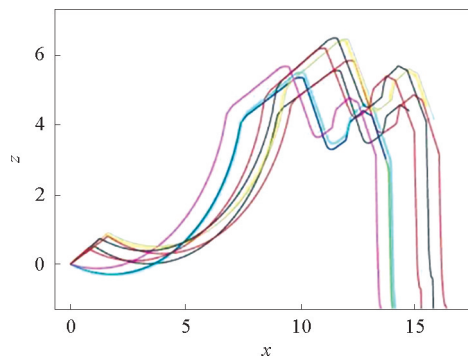


图 9 工件 2 的 10 次测量数据的轮廓曲线

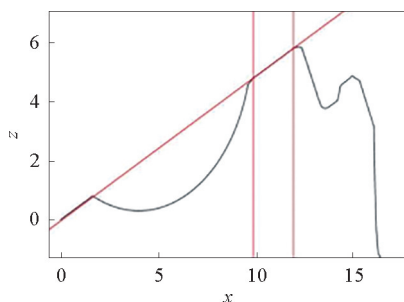


图 10 25-2 测量数据轮廓图

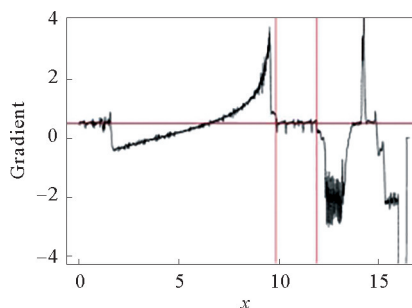


图 11 数值微分且滤波后的图形

利用图 10 中两条竖线中间的数据作线性回归, 得到的斜线就是工件 2 测量时的基准线. 由于知道的斜线的截距与斜率, 很容易计算它的倾斜角度.

#### 4.2 工件 2 的圆弧参数

在得到基准线的斜率后, 作旋转变换, 相当于得到水平测量的数据. 这项工作是不可或缺的, 否则无法完成各条曲线的拼接.

关于圆弧参数的计算, 其方法与问题 1 相同, 计算结果如表 3 所示.

表 3 圆弧及水平线参数的计算结果

序号	倾斜角/(°)	圆心到开口距离/mm	半径/mm	弧长/mm	圆弧的开口长度/mm	水平线长度/mm
25-1	26.1	3.76	5.80	9.96	8.79	2.28
25-2	26.1	3.76	5.79	9.96	8.80	2.28
26-1	26.8	3.76	5.79	9.79	8.79	2.28
26-2	26.8	3.75	5.79	9.80	8.79	2.28
27-1	27.9	3.75	5.79	9.88	8.81	2.27
27-2	27.9	3.75	5.79	9.51	8.81	2.27
28-1	28.8	3.75	5.79	9.96	8.81	2.28
28-2	28.8	3.75	5.79	9.96	8.81	2.28
29-1	30.0	3.75	5.79	9.96	8.82	2.28
29-2	30.0	3.75	5.79	9.96	8.82	2.27
平均		3.75	5.79	9.87	8.81	2.28

工件 2 尾端的数据量不足, 计算精度较差, 关于它们的计算, 将放在问题 4 中讨论. 最后将 10 条曲线拼接成一条完整的曲线, 拼接方法是先将基准线作水平校正, 然后再作平移, 将第 1 个关键点对齐, 拼接后的完整轮廓曲线如图 12 所示.

#### 5 问题 4 求解

问题 4 是工件 2 关于圆和角的 9 次局部测量数据, 利用这些数据来修正问题 3 的结论. 问题 4 采用的计算方法与问题 3 相同, 具体过程略. 这里仅列出相应的计算结果.

工件 2 轮廓线(局部)的参数如图 13 所示.

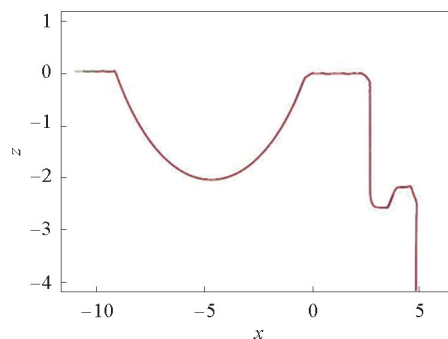


图 12 工件 2 完整的轮廓曲线

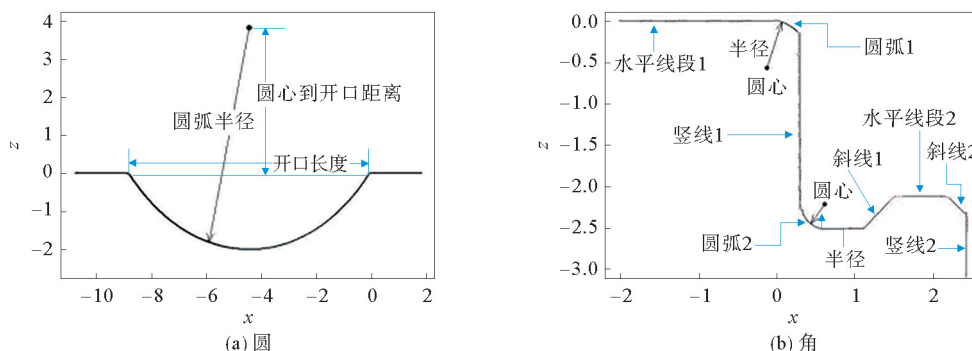


图 13 工件 2 局部轮廓线的各项参数

表 4~表 6 给出了工件 2 参数的修正结果.



表 4 圆弧参数的修正结果

序号	倾斜角/(°)	圆心到开口距离/mm	半径/mm	弧长/mm	圆弧的开口长度/mm
1-2-1	9.1	3.81	5.81	9.80	8.79
1-2-2	9.1	3.81	5.81	9.83	8.90
1-2-3	9.1	3.81	5.81	9.83	8.90
2-2-1	9.1	3.79	5.81	9.91	8.85
2-2-2	9.1	3.79	5.81	9.91	8.85
2-2-3	9.1	3.79	5.81	9.91	8.85
3-2-1	9.2	3.78	5.82	9.97	8.87
3-2-2	9.2	3.78	5.81	10.00	8.96
3-2-3	9.2	3.78	5.81	10.00	8.96
平均		3.79	5.81	9.91	8.88

表 5 角处参数的修正结果(圆) mm

序号	圆弧 1		圆弧 2		圆心间距
	半径	弧长	半径	弧长	
1-3-1	0.56	0.29	0.29	0.45	0.71
1-3-2	0.58	0.32	0.29	0.45	0.73
1-3-3	0.59	0.32	0.30	0.44	0.74
2-3-1	1.07	0.55	0.29	0.44	0.94
2-3-2	1.11	0.55	0.29	0.57	0.96
2-3-3	1.10	0.55	0.29	0.54	0.95
3-3-1	0.50	0.26	0.30	0.64	0.67
3-3-2	0.57	0.30	0.30	0.60	0.72
3-3-3	0.57	0.30	0.29	0.58	0.72
平均	0.74	0.38	0.29	0.52	0.79

表 6 角处参数的修正结果(斜线)

序号	斜线 1			斜线 2		
	长度/ mm	斜率	夹角/ (°)	长度/ mm	斜率	夹角/ (°)
1-3-1	0.44	0.989	135.3	0.26	-0.946	136.6
1-3-2	0.45	1.008	134.8	0.26	-0.924	137.3
1-3-3	0.45	1.010	134.7	0.26	-0.924	137.3
2-3-1	0.45	1.023	134.4	0.25	-0.904	137.9
2-3-2	0.45	1.024	134.3	0.25	-0.856	139.4
2-3-3	0.45	1.025	134.3	0.25	-0.877	138.8
3-3-1	0.44	0.958	136.2	0.26	-0.970	135.9
3-3-2	0.45	0.997	135.1	0.26	-0.936	136.9
3-3-3	0.45	0.996	135.1	0.26	-0.936	136.9
平均	0.45	1.003	134.9	0.26	-0.919	137.4

## 6 先有鸡还是先有蛋——关键点的计算

在前面的计算中,最重要的是关键点的计算.利用导数(数值微分)的方法是大专组学生可以想到的,但由于曲线的误差,数值微分后的误差会加大,这给关键点的计算带来了困难.

另一种计算方法是先选取一部分数据,计算回归方程,再利用回归方程求出关键点.

### 6.1 关键点的计算

在工件 1 的曲线中,关键点涉及到 3 种情况.

#### 6.1.1 两条直线相交

这种情况最简单,主要是斜线与水平线相交,斜线与斜线相交.设两条直线方程为

$$\begin{cases} z = \beta_{10} + \beta_{11}x, \\ z = \beta_{20} + \beta_{21}x. \end{cases} \quad (3)$$

求解方程(3)得到

$$x = \frac{\beta_{10} - \beta_{20}}{\beta_{21} - \beta_{11}}, \quad z = \frac{\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}}{\beta_{21} - \beta_{11}}. \quad (4)$$

#### 6.1.2 直线与圆弧相交

这种情况主要是水平线与圆弧相交.设圆弧与直线的方程为

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \\ z=\beta_0+\beta_1x. \end{cases} \quad (5)$$

仅考虑水平线( $\beta_1=0, z=\beta_0$ )与圆弧的交点, 则有

$$x_{12}=x_0\pm\sqrt{R^2-(\beta_0-z_0)^2}. \quad (6)$$

### 6.1.3 直线与圆弧相切

这种情况是最复杂的一种. 仍然用方程(5)表示圆弧和直线, 在相切情况下应该满足

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \\ z=\beta_0+\beta_1x, \\ (x-x_0)+(z-z_0)z'=0, \\ z'=\beta_1. \end{cases} \quad (7)$$

方程(7)相当于 3 个方程 2 个未知量. 在通常的情况下, 方程无解. 需要求它的最小二乘解, 即求解无约束问题

$$\min_{x,z} f(x,z)=((x-x_0)^2+(z-z_0)^2-R^2)^2+(z-\beta_0-\beta_1x)^2+((x-x_0)+(z-z_0)\beta_1)^2. \quad (8)$$

利用无约束问题(8)的解计算出关键点.

## 6.2 后计算关键点的计算结果

先计算回归方程, 后计算关键点的计算结果如表 7 所示.

表 7 问题 1 的计算结果

槽宽/mm	平线长/mm	圆弧长/mm	半径/mm	圆心距/mm	斜线长/mm	斜率	夹角/(°)
2.89	5.00	1.19	0.49	---	2.84	-2.739	110.1
2.04	5.02	0.73	0.28	7.48	2.84	2.782	109.8
2.05	5.01	0.77	0.30	7.08	2.87	-3.724	105.0
10.01	3.01	2.29	0.99	19.94	2.87	3.433	106.2
7.25	1.00	2.23	1.01	2.81	2.87	-3.712	105.1
7.25	4.99	9.12	4.00	9.53	2.86	3.519	105.8
	5.00	9.02	4.00	12.25	5.12	0.199	168.7
人字形线高度/mm: 1.00 (平均值)					5.09	-0.201	168.7

在得到关键点后, 还可以再计算方程, 进而再计算关键点. 可以是一个迭代过程, 其过程是: 方程→关键点→方程→关键点.

反过来也一样, 其过程是: 关键点→方程→关键点→方程. 这也是为什么这一节的题目是先有鸡还是先有蛋.

## 7 论文中出现的问题

学生竞赛论文中常常出现的一些问题.

### 1) 关键点的计算

关键点位置的精确定位是计算轮廓线各项参数的关键, 也是实现自动标注的手段. 但很多队缺少关键点位置的计算, 而是直接给出关键点的坐标.

事实上, 在给出关键点的坐标后, 轮廓线的各项参数的估计值相差不大, 因此, 关键点位置的确定也是论文得分的关键.

### 2) 基准线的计算

对于问题 2 而言, 基准线斜率的计算是问题的关键, 在得到基准线的斜率后, 作旋转(正交变换), 问题 2 就返回到问题 1 的情况.

大多数队都知道用回归方程来计算基准线, 但数据的选取对基准线影响较大. 如果选择全部数据



点作回归, 由于轮廓线中凹凸部分的影响, 其计算值与真实值有较大的偏差. 正确的做法是, 取基准线上的数据作回归方程的计算.

当然, 取全部数据作计算也不是不可以, 但要用稳健回归的方法, 这对于大专组的学生太难了.

有的队用基准线上的两点来计算斜率, 这种做法受取值点的影响较大, 不同的点会有不同的结果, 可能有较大的计算误差, 因为题目中强调过, 轮廓线不是光滑的.

3) 用抛物线替代圆弧

按说, 这种错误应该不会发生, 因为题目中已明确说明, 轮廓线由直线和圆弧构成. 遗憾的是, 在全国阅卷中仍出现这种错误, 或许是学生不会作非线性拟合的原因.

如果计算问题(2)有困难, 可将圆弧的方程改写为

$$x^2 + z^2 + 2Dx + 2Ez + F = 0, \quad (9)$$

则问题(2)的求解改为求如下最小二乘问题

$$\min_{D, E, F} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2 + 2Dx_i + 2Ez_i + F)^2. \quad (10)$$

在得到  $D$ 、 $E$  和  $F$  后, 有

$$x_0 = -D, z_0 = -E, R = \sqrt{D^2 + E^2 - F}. \quad (11)$$

问题(10)是一个二次函数求极值的问题, 求解还是比较容易的.

也有的队用 3 点确定圆弧. 过三个点构造圆, 这是在中学学过的知识, 但由于误差的原因, 这种计算方法也是不值得推荐的.

## 8 总结

关键点位置精确的计算是求解问题的关键, 不论是先计算关键点, 还是后计算关键点.

- 问题 1 和问题 2 是对工件 1 的不同测量, 在计算后, 应该作对比与分析, 给出工件 1 的最终计算结果.

- 问题 3 和问题 4 是对工件 2 的多次测量, 在计算后, 问题 4 的结果应该对问题 3 的结果作补充.

## 参考文献

- [1] 薛毅. 数学建模基于 R[M]. 北京: 机械工业出版社, 2017.
- [2] 薛毅, 陈立萍. 时间序列分析与 R 软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2020.
- [3] 薛毅, 陈立萍. R 语言在统计中的应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2017.
- [4] 薛毅, 陈立萍. R 语言实用教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.

## Problem Analysis for Automatic Marking of Contact Profilers

XUE Yi

(Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** In this paper, the method for solving Automatic Marking of Contact Profilers, the Problem D of 2020 CUMCM, is presented and the questions for students in the contest papers gave a brief description. In order to ensure the continuity of solving the problem. The first part of the paper is solving process of the problem. The latter part is review of the contest papers.

**Key words:** contact profilers; automatic marking; data analysis; least squares

## 作者简介

薛毅(1958—), 男, 博士, 北京工业大学教授, 主要研究方向是运筹学与控制论.