2025年数学建模竞赛暑期培训讲座

微分/差分方程建模方法及案例分析

郑洲顺
zszheng@csu.edu.cn

2025年8月11日 中南大学

微分方法建模方法与建模案例

1. 微分方程建模的基本思想

建立函数 $y = f(x, y)$ 的改变量 Δx、Δy 之间的关系

$$F(\Delta x, \Delta y) = 0$$

取极限得微分方程

$$F(dx, dy) = 0$$

根据微分方程 $F(dx, dy) = 0$ ，求出未知函数

$$y = f(x)$$

模型1 已感染人数 (病人) $i(t)$

2. 传染病模型

假设

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 ⇒ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数*N*不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ，且使接触的健康人致病

λ ~ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

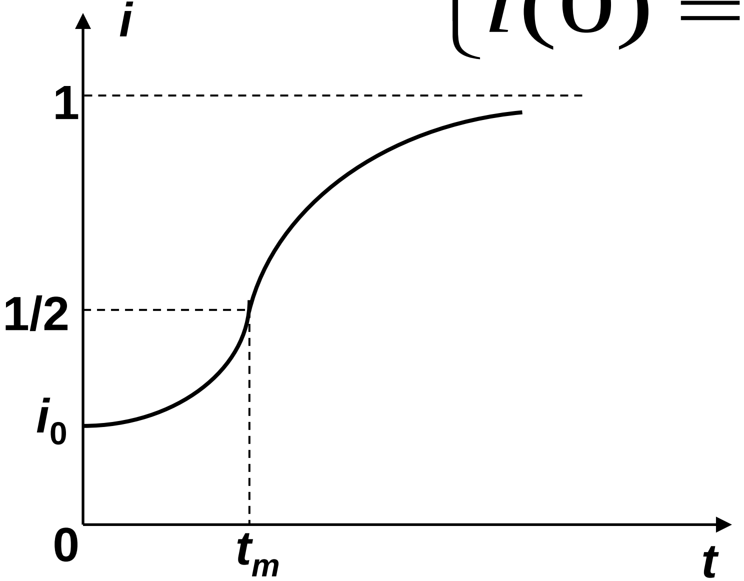
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$?

病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染 **SIS 模型**

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ μ ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ ~ 日接触率

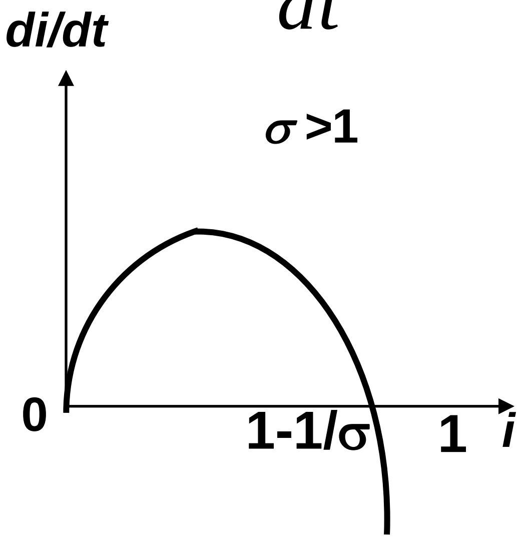
1/μ ~感染期

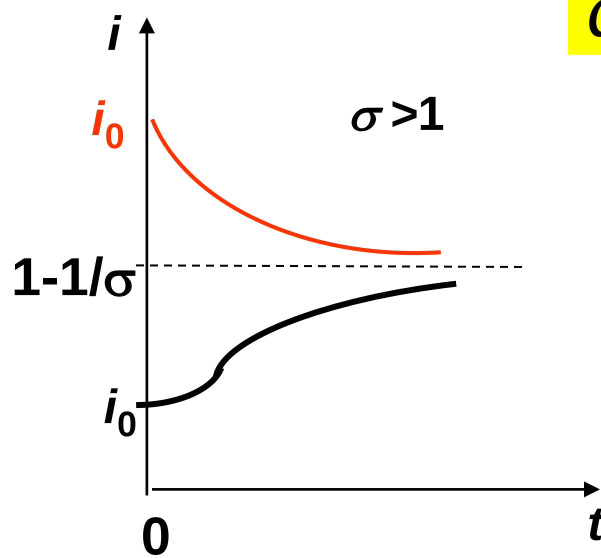
$\sigma=\lambda/\mu$

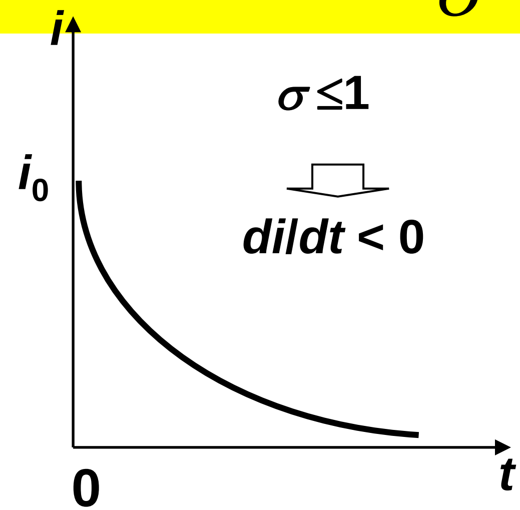
σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数。

模型3 $\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \quad \sigma = \lambda / \mu$

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$







$$i(\infty) = \begin{cases} 1-\frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \le 1 \end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma \le 1 \Rightarrow i(t) \downarrow$

$\sigma > 1$ i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4　传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,

接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t)+i(t)+r(t)=1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4 **SIR模型**

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

在相平面 $s\sim i$ 上研究解的性质

$i_0+s_0\approx 1$（通常 $r(0)=r_0$ 很小）

模型4

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda s i - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda s i \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

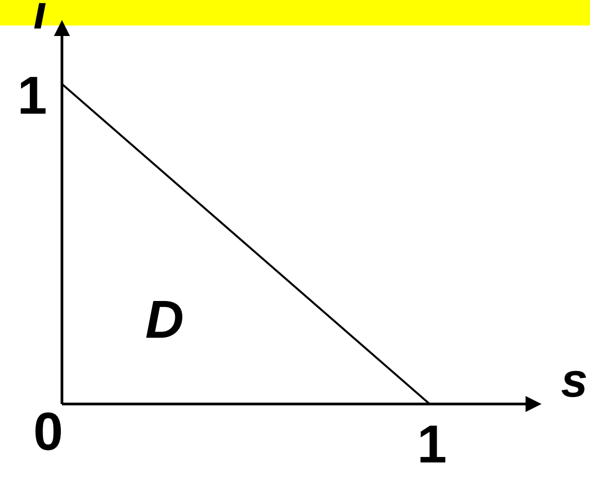
相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D \triangleq \{(s, i) \mid s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$

在D内作相轨线 $i(s)$ 的图形，进行分析

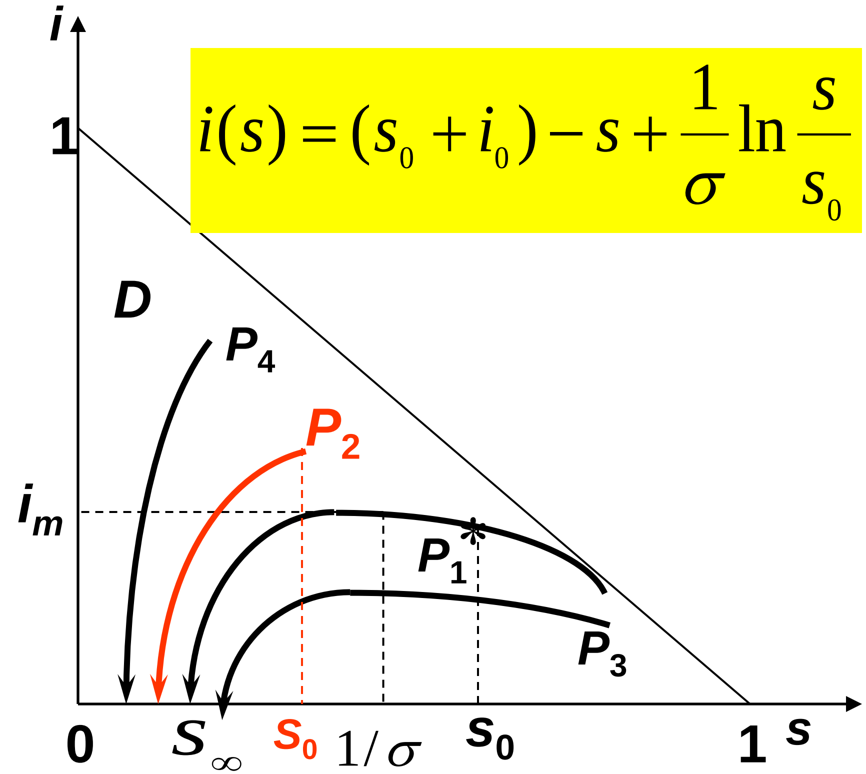


模型4　相轨线 $i(s)$ 及其分析　SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



s(*t*)单调减→相轨线的方向

$s = 1/\sigma,\ i = i_m \quad t \to \infty,\ i \to 0$

s_∞满足 $s_0 + i_0 - s_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0} = 0$

P_1: s_0>1/　→ *i*(*t*)先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: s_0<1/　→ *i*(*t*)单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

1/ ~阈值

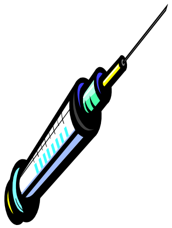
模型4 **预防传染病蔓延的手段** **SIR模型**

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

  λ (日接触率)$\downarrow$ $\Rightarrow$ 卫生水平$\uparrow$

  μ(日治愈率)$\uparrow$ $\Rightarrow$ 医疗水平$\uparrow$



- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略i_0

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

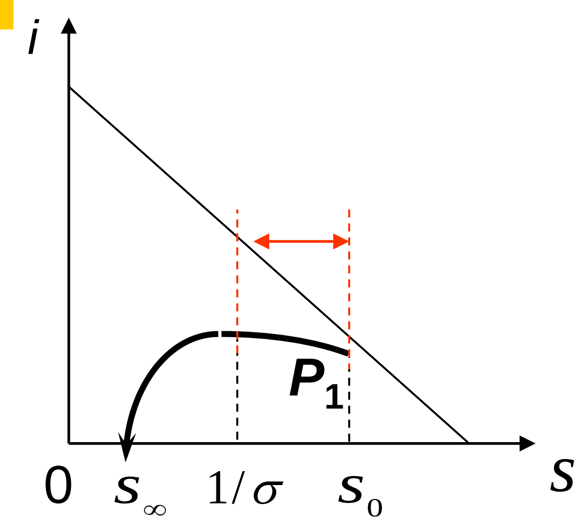
模型4　　**被传染人数的估计**　　**SIR模型**

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln(1 - \frac{x}{s_0}) \cong 0$$



$x << s_0$

$$x(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}) \cong 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma(s_0 - \frac{1}{\sigma})$$

$s_0 - 1/\sigma = \delta$

δ小, $s_0\sigma \cong 1$

$$x \cong 2\delta$$

提高阈值1/ →降低被传染人数比例 x

3. 香烟过滤嘴的作用

问题

- 过滤嘴的作用与它的材料和长度有什么关系
- 人体吸入的毒物量与哪些因素有关，其中哪些因素影响大，哪些因素影响小。

模型分析

- 分析吸烟时毒物进入人体的过程，建立吸烟过程的数学模型。
- 设想一个“机器人”在典型环境下吸烟，吸烟方式和外部环境认为是不变的。

模型假设

1） l_1~烟草长， l_2~过滤嘴长， $l = l_1 + l_2$，毒物量M均匀分布，密度$w_0=M/l_1$

2） 点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是$a':a$，$a'+a=1$

3） 未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的(单位时间)吸收率分别是b和β

4） 烟雾沿香烟穿行速度是常数v，香烟燃烧速度是常数u， $v >> u$

定性分析 Q ~ 吸一支烟毒物进入人体总量

$$\beta\uparrow, l_2\uparrow, M\downarrow, a\downarrow, v\downarrow \Rightarrow Q\downarrow \quad b\uparrow, l_1\uparrow \Rightarrow Q\downarrow ? \quad u\uparrow \Rightarrow Q\uparrow\downarrow ?$$

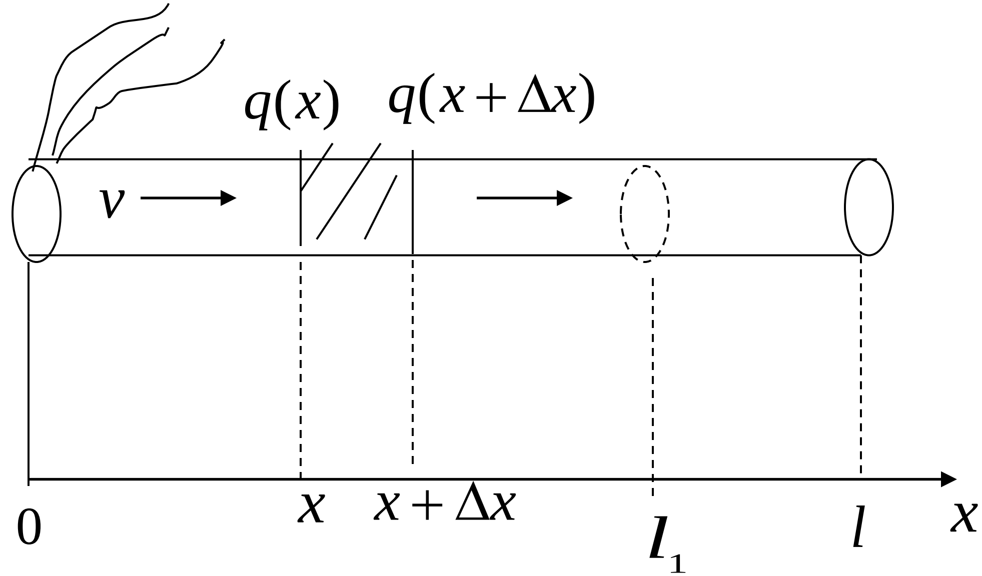
模型建立

t=0, x=0，点燃香烟

$q(x,t)$ ~ 毒物流量

$w(x,t)$ ~ 毒物密度

$w(x,0) = w_0$



$$Q = \int_0^T q(l,t)dt, \quad T = l_1 / u$$

1) 求$q(x,0)=q(x)$

$$q(x) - q(x+\Delta x) = \begin{cases} bq(x)\Delta\tau, 0 \le x \le l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau, l_1 \le x \le l, \end{cases} \quad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\frac{dq}{dx} = \begin{cases} -\frac{b}{v} q(x), 0 \le x \le l_1 \\ -\frac{\beta}{v} q(x), l_1 \le x \le l \end{cases}$$

$$q(0) = aH_0$$

$$H_0 = uw_0$$

1) 求*q*(*x*,0)=*q*(*x*)

$$q(x)=\begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0\le x\le l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

2) 求*q*(*l*,*t*)

t*时刻，香烟燃至 *x*=*ut

$$H(t)=uw(ut,t)$$

$$q(x,t)=\begin{cases} aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\le x\le l_1 \\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

3) 求$w(ut,t)$

$$w(x,t+\Delta t)-w(x,t)=b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{b}{v}auw(ut,t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}\\ w(x,0)=w_0\end{cases}$$

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right),\quad a'=1-a$$

4) 计算 Q

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right)$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{abut}{v}}\right)$$

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)dt=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),\quad r=\frac{a'bl_1}{v},\varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}$$

结果分析

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),\ r = \frac{a'bl_1}{v}, \varphi(r) = \frac{1-e^{-r}}{r}$$

1）Q与a,M成正比， aM是毒物集中在$x=l$ 处的吸入量

2) $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ ~过滤嘴因素，β, l_2~ 负指数作用

$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 是毒物集中在$x=l_1$ 处的吸入量

3）$\varphi(r)$~ 烟草的吸收作用　　　烟草为什么有作用?

$$r = \frac{a'bl_1}{v} << 1 \qquad \varphi(r) \doteq 1 - r/2$$

$$Q \doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1 - \frac{a'bl_1}{2v}\right)$$

b, l_1~ 线性作用

结果分析

4) 与另一支不带过滤嘴的香烟比较，w_0, b, a, v, l 均相同，吸至 $x=l_1$扔掉

带过滤嘴 $$Q_1 = \frac{a w_0 v}{a'b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

不带过滤嘴 $$Q_2 = \frac{a w_0 v}{a'b} e^{-\frac{bl_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{-\frac{(\beta - b) l_2}{v}}$$

$$\beta > b \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

提高 β-b 与加长l_2，效果相同

差分方法建模方法与建模案例

一、人口模型

1　Malthus模型

2　Logistic模型

3　人口发展方程

4　人口发展方程的离散模型

5　随机人口模型

γ

Malthus模型（指数增长模型）

1. 主要假设

在人口自然增长的过程中，经相对增长率（出生率和死亡率）是常数，即单位时间内人口增长量与人口成正比，比例系数为r。

2. 模型的建立

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t$$

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN\\ N(t_0)=N_0\end{cases} \Longrightarrow N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$$

Logistic模型（阻滞增长模型）

1. 主要假设

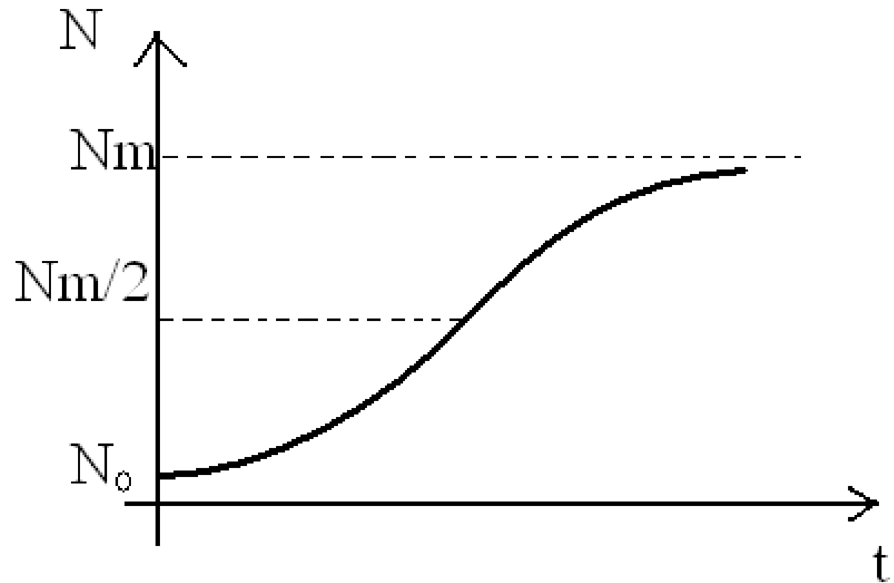
此模型修改了Malthus模型r为常数的假设，认为r应为N的函数。设自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量为N_m，并设定净增长率：

$$r(N) = r\left(1 - \frac{N(t)}{N_m}\right)$$

当N(t)→Nm时，r(N)？

2. 模型的建立

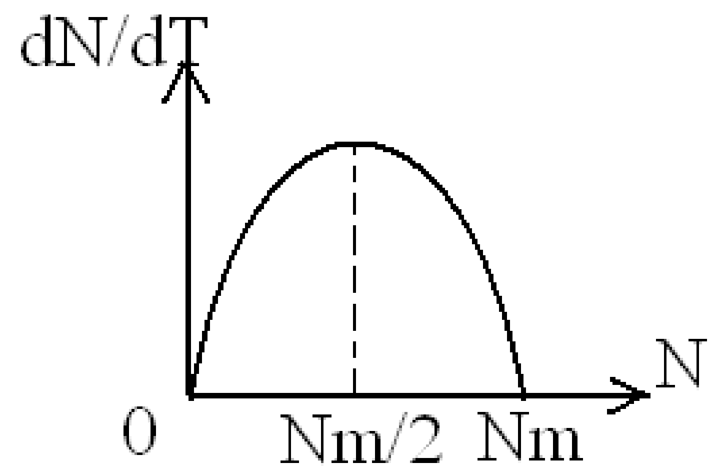
$$
\begin{cases}
\dfrac{dN}{dt} = r\left(1 - \dfrac{N}{N_m}\right)N \\
N(t_0) = N_0
\end{cases}
$$



3. 模型求解

$$
N(t) = \frac{N_m}{1 + \left(\dfrac{N_m}{N_0} - 1\right)e^{-r(t-t_0)}}
$$

的



本模型在1790-1930年间较为符合实际，但是在1940-1980年间，却与实际的偏差较大。为什么?

(1)人口数已经超出了所设的Nm。

(2) 大幅度的移民和战争等相关因素。

(3)Nm不易确定，随着生产力的发展，Nm的值不断增大。

前面的两种模型，都将总数看作是处于同等地位的成员组成。这简化了问题，但是严格来讲是不科学的，应该根据成员的年龄分组，并且将性别分别考虑。

人口发展方程

1. 主要假设

只考虑自然的出生死亡，不考虑迁移等社会因素的影响，考虑年龄结构。

2. 模型的建立

在时刻t，年龄小于r的人口数记作F(r,t)，t和r均为连续变量。设F是连续可微函数，称为为**人口分布函数**。时刻t的人口总数为N(t)。最高年龄记作r_m 。于是对

p(r,t)非负且$p(r_m,t)=0$

记p(r,t)dr为时刻t年龄在区间[r,r+dr)内的人数。

定义 … $t), 0 \le r \le r_m$，理论上$r_m \to \infty$

将p(r,t)定义为**年龄密度函数**。

记μ(r,t)为时刻t年龄r的人的死亡率。其含义是：μ(r,t)p(r,t)dr表示时刻t年龄在[r,r+dr)内单位时间死亡的人数。

为了得到p(r,t)满足的方程，考察时刻t年龄在[r,r+dr)内的人到时刻t+dt的情况。他们中活着的那一部分人的年龄变为[r+dr_1,r+dr+ dr_1)。这里dr_1=dt. 而在dt这段时间内死亡的人数为μ(r,t)p(r,t)drdt,于是

$$p(r,t)dr - p(r+dr,t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$$

也可写作

$$[p(r+dr_1,t+dt)-p(r,t+dt)]+[p(r,t+dt)-p(r,t)]dr$$

$$=-\mu(r,t)p(r,t)drdt$$

$$[p(r+dr_1,t+dt)-p(r,t+dt)]+[p(r,t+dt)-p(r,t)]dr$$

$$=-\mu(r,t)p(r,t)drdt$$

上式中，带入$dr_1=dt$就可以得到：

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t)$$ → **得到人口发展模型**

这里$p_0(r)$可由人口调查资料得到，是已知函数；$f(t)$则对预测和控制人口起着重要作用。

两个定解条件：

1）初始密度函数记作$p(r,0)=p_0(r)$；

2）单位时间内出生的婴儿数记作$p(0,t)=f(t)$,称为婴儿出生率。

于是得出连续型人口发展模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)\,p(r,t),\quad t\geq 0, 0\leq r\leq r_m \\ p(r,0)=p_0(r) \\ p(0,t)=f(t) \\ p(r_m,t)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

此方程描述了人口的演变过程，从这个方程确定出密度函数p(r,t)以后，立即可以得到各个年龄的人口数，即人口分布函数

$$F(r,t)=\int_0^r p(s,t)ds$$

3. 模型求解

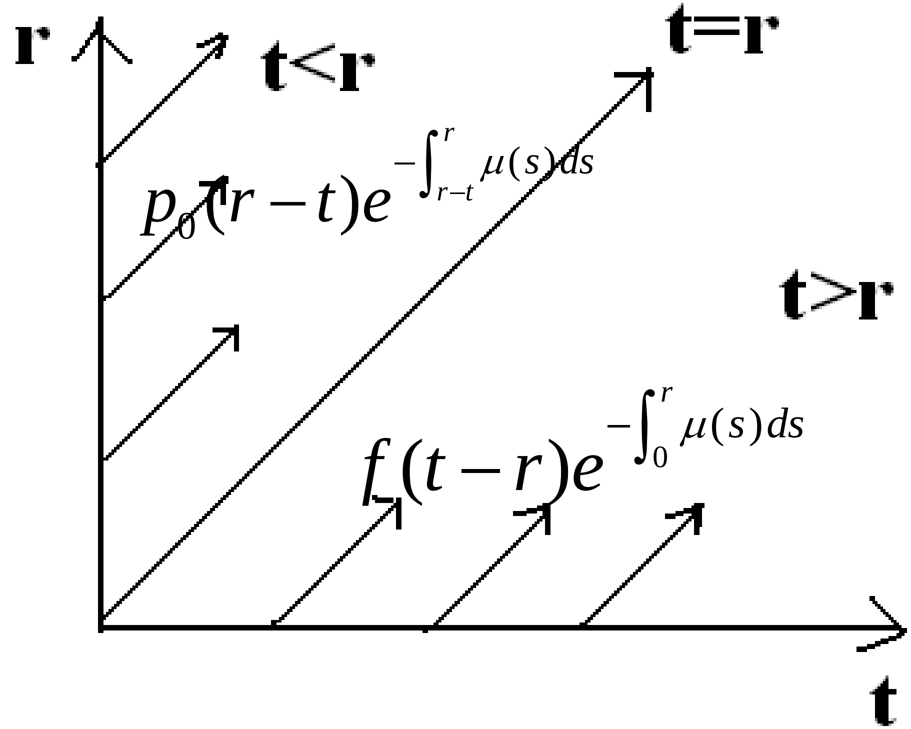
该方程的求解过程比较复杂，这里给出一种特殊情况下的结果。在社会安定的局面下和不太长的时间内，死亡率大致与时间无关，于是可以近似的假设μ(r,t)=μ(r)，这时的解为：

$$p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, 0 \le t \le r \\ f(t-r)e^{-\int_{0}^{r}\mu(s)ds}, t > r \end{cases} \quad (*)$$

如何验证?

这个解在t~r平面上有一个浅显的解释：

右图中，对角线r=t（t，r>0）分为两个部分。



在t<r的区域，p(r,t)完全由年龄为r-t的人口初始密度p_0(r-t)和这些人的死亡率μ(s)(r-t≤s<r)决定；而在t>r区域，p(r,t)则由未来的生育状况f(t-r)及死亡率μ(s)(0≤s<r)决定。

4. 讨论

生育率和生育模式

在发展方程及解中$p_0(r)$和$\mu(r)$可以从人口统计数据得到。 $\mu(r,t)$也可以由$\mu(r,0)$粗略估计，这样，为了预测和控制人口的发展状况，人们主要关注的可以用作控制手段的就是婴儿出生率$f(t)$。

对$f(t)$进一步分解：

记女性性别比函数为$k(r,t)$，即时刻t年龄在$[r,r+dr]$的女性人数为$k(r,t)p(r,t)dr$,将这些女性在单位时间内的平均每人的生育数记作$b(r,t)$，设育龄区间为$[r_1,r_2]$,则：

$$f(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

再将$b(r,t)$定义为$b(r,t)=\beta(t)h(r,t)$

其中$h(r,t)$满足$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr=1$

于是 $\beta(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr$

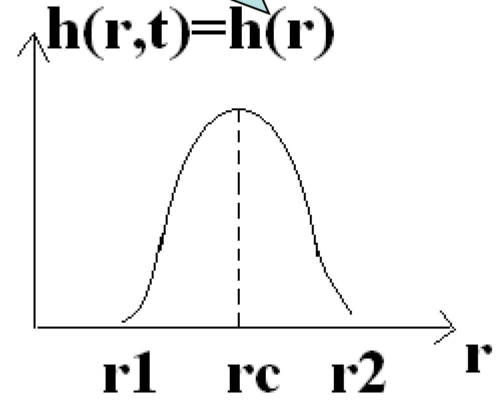
其中β(t)的直接含义是时刻t单位时间内平均每个育龄女性的生育数。

则$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$

如果所有育龄女性在她育龄期所有的时刻都保持这个生育数，那么β(t)也表示平均每个女性一生的总和生育数。所以β(t)称为总和生育率（简称生育率或生育胎次）。

h(r,t)是年龄为r的女性的生育加权因子，称为生育模式。在稳定环境下可以近似的认为它与t无关即h(r,t)=h(r)。h(r)表示了在那些年龄生育率高，那些年龄生育率低。

在$r=r_c$附近生育率最高



由人口统计资料可以知道当前实际的h(r,t)。作理论分析时，人们常采用的h(r)的一种形式是借用概率论中的Γ分布：

$$h(r)=\frac{(r-r_1)^{\alpha-1}e^{-\frac{r-r_1}{\theta}}}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

可以看出，提高r_1意味着晚婚，而增加n意味着晚育。

取θ=2，α=n/2，这时有$r_c=r_1+n-2$

这样，人口发展方程①和单位时间内出生的婴儿数$f(t)$的表达式②构成了连续型人口模型。

模型中死亡率函数$W(r,t)$，性别比函数$k(r,t)$和初始密度函数$P0(t)$可由人口统计资料直接得到，或在资料的基础上估计，而生育率$\beta(t)$和生育模式$h(r,t)$，则是可以用于控制人口发展过程的两种手段，$\beta(t)$可以控制生育的多少，$h(r,t)$可以控制生育的早晚和疏密，我国的计划生育政策正是通过这两种手段实施的。

从控制论观点看，在方程①描述的人口系统中$P(r,t)$可视为状态变量，$P(0,t)=f(t)$视为控制变量，是分布参数系统的边界控制函数，②式表明控制输入中含有状态变量，形成状态反馈，$\beta(t)$视为反馈增益，并且这是一种正反馈，即人口密度函数$P(r,t)$的增加，通过婴儿出生率$f(t)$又使$P(r,t)$进一步增长。

方程的解*式中因子f(t-r)表明这种反馈还有相当大的滞后作用，所以一旦人口政策失误，使P(r,t)在一段时间内增长得过多过快，再想通过控制手段β(t)和P(r,t)把人口增长的势头降下来，非常困难并且需要相当长（几代人）的时间。

人口指数

在上面的模型中密度函数P(r,t)或分布函数f(r,t)固然是人口发展过程最完整的描述，但是使用起来并不方便，在人口统计学中常用一些所谓的人口指数来简明扼要地表达一个国家或地区的人口特征。

1°人口总数N(t)

$$N(t) = \int_0^{r_m} P(r,t)dr$$

2° 平均年龄R(t)

$$R(t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^{r_m} rP(r,t)dr$$

3° 平均寿命S(t)

它表示时刻t出生的人不论活到什么时候，死亡率都是按时刻t的W(r,t)计算，这些人的平均存活时间

$$S(t)=\int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t} W(r,t)\,dr}\, d\tau$$

S(t)实际上是预估寿命，通常说目前平均寿命已达到多少岁了，是指今年出生婴儿的预估寿命，即S(0)，根据统计资料得到当前的死亡率W(r,0)后，就可以算出S(0)。

4°老龄化指数W(t)

$$W(t)=\frac{R(t)}{S(t)}$$

若R(t)递增，则W(t)也是递增的

5° 依赖性指数ρ(t)

$$\rho(t)=\frac{N(t)-L(t)}{L(t)}$$

$$L(t)=\int_{l_1}^{l_2}[1-R(r,t)]P(r,t)dr+\int_{l_1'}^{l_2'}R(r,t)P(r,t)dr$$

其中［L1,L2］和［L1’,L2’］分别是男性和女性有劳动能力的年龄区间，L(t)是全体人口中有劳动能力的年龄区间，L(t)是全体人口中有劳动能力的人数，所以依赖性指数ρ(t)表示平均每个劳动者要供养的人数。

4. 人口发展方程的离散模型

因在连续模型中，得了一些理论的分析结果，但是在实际应用中不方便，需要建立相应的离散模型，因为:

第一，作为已知条件（输入）的统计数据都是离散的，如果某年各个年龄的女性生育率，死亡率，性别比例。

第二，作为结果（输出）人们希望得到的数据也是离散如2000年，2020年，2050年.....的人口总数，各个人口指数人口的年龄分布等:

第三，连续模型解的表达式中包含了未知函数，用解析方程迭代求解是非常困难的，与其用数值方法解连续模型，不如直接建立离散模型。

一般时间以年为单位，年龄按周计算，设最大年龄为m岁，现Xi(t)为第t年i岁（满i周岁而不到i+1）的人数。t=0,1,2…,i=0,1,2…m.

只考虑由于生育和死亡引起的人口演变，而不计迁移等社会因素的影响，记$d_i(t)$为第t年i岁人口的死亡率，即

$$d_i(t)=\frac{x_i(t)-x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)}$$

于是 $x_{i+1}(t+1)=（1-d_i(t)）x_i(t)$ ①

i=0，1，2……m-1， t=0,1,2……

但bi(t)为第t年i岁女性生育率，即每位女性平均生育婴儿数，［i_1,i_2］为育龄区间，R_i(t)为第t年i岁人口的女性比，则第t年的出生人数为

$$f(t)=\sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t)R_i(t)x_i(t) \quad ②$$

记d00(t)为第t年婴儿死亡率，即第t年出生但未活到人口统计时刻的婴儿比例：

$$d_{00}(t) = \frac{f(t) - x_0(t)}{f(t)}$$

于是 $x_{00}(t) = (1 - d_{00}(t)) f(t)$ ③

对于i=0将②，③带入①得

$$x_1(t+1) = (1 - d_{00}(t))(1 - d_0(t)) \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t) k_i(t) x_i(t) \quad ④$$

将$b_i(t)$分解为$b_i(t)=\beta(t)h_i(t)$ ⑤

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} h_i(t)=1 \quad ⑥$$

利用⑥式对⑤式求和得到

$$\beta(t)=\sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t) \quad ⑦$$

可知β(t)表示第t年每个育龄妇女平均生育的婴儿数，若设在t年后的一个育龄时期内各个年龄的女性生育率bi(t)都不变，那么β(t)又可表为

$$\beta(t)=b_{i_1}(t)+b_{i_{1+1}}(t+1)+\cdots b_{i_2}(t+i_2-i_1)? \qquad ⑧$$

则β(t)是第t年i1岁的每位妇女一生平均生育的婴儿数，称总和生育率，或生育胎次，是控制人口数量的主要参数。

将⑤式带入④式，并记

$$b_i^{'}(t) = (1-d_{00}(t))(1-d_0(t))h_i(t)k_i(t) \qquad ⑨$$

则④式写作

$$x_i(t+1) = \beta(t)\sum_{i=i_1}^{i_2} b_i^{'}(t)x_i(t) \qquad ⑩$$

引入变量，矩阵记号

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)\cdots x_m(t)]^{'} \qquad (11)$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-d_1(t) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1-d_{m-1}(t) & 0 \\ & & \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\beta(t)=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0\cdots b_{i_1}{}'(t)\cdots b_{i_2}{}'(t)\cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

那么⑩和①式（i=1,2…m-1）可以换作

$$x(t+1) = A(t)x(t) + \beta(t)B(t)x(t) \tag{14}$$

这个向量形成的一阶差分方程就是人口发展方程，当初始人口分布x(0)已知，又由统计资料确定了A(t),B(t),并且给定了总和生育β(t)以后，用这个方程不难预测人口的发展过程。

在控制理论中X(t)称状态变量，可将β(t)作为控制变量，因为对于β(t)和X(t)分别是线性的，所以是双线性方程，有控制可得出其性质和解法，在此不加以讨论。在稳定的社会环境下可以认为死亡率，生育模式和女性比不随时间变换，于是A(t),B(t)为常数矩阵，⒁化为

$$x(t+1) = Ax(t) + \beta(t)Bx(t)? \tag{15}$$

人口指数

1° 人口指数N(t)

$$N(t) = \sum_{i=0}^{m} x_i(t)$$

2° 平均年龄 R(t)

$$R(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=0}^{m} i x_i(t)$$

3° 平均寿命 S(t)

$$S(t)=\sum_{j=0}^{m} e^{[-\sum_{i=0}^{j} d_j(t)]}$$

4° 老龄化指数W(t)

$$W(t)=\frac{R(t)}{S(t)}$$

W(t)<0.5时属于青壮年型社会。

5° 依赖性指数ρ(t)

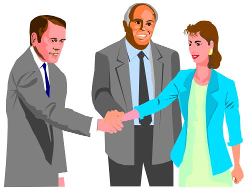
$$\rho(t)=\frac{N(t)-L(t)}{L(t)}$$

其中 $L(t)=\sum_{i=l_1}^{l_2}[1-k_i(t)]x_i(t)+\sum_{i=l_1}^{l_2}k_i(t)x_i(t)$

L1,L2]和[L1′,L2′]是男性和女性劳动力的年龄区间，L(t)是有劳动能力的人口数，于是ρ(t)表示每个劳动力需供养的人口数。

我国e=0.985（1978）.世界平均ρ=0.695

5　随机人口模型



背景

• 一个人的出生和死亡是随机事件

一个国家或地区

平均生育率
平均死亡率

确定性模型

一个家族或村落

出生概率
死亡概率

随机性模型

对象

$X(t)$ ~ 时刻 t 的人口, 随机变量.

$P_n(t)$ ~概率$P(X(t)=n)$, n=0,1,2,…

研究$P_n(t)$的变化规律；得到$X(t)$的期望和方差

模型假设

若$X(t)=n$, 对t到$t+\Delta t$的出生和死亡概率作以下假设

1)出生一人的概率与Δt成正比，记$b_n\Delta t$；
出生二人及二人以上的概率为$o(\Delta t)$.

2)死亡一人的概率与Δt成正比，记$d_n\Delta t$；
死亡二人及二人以上的概率为$o(\Delta t)$.

3)出生和死亡是相互独立的随机事件。

进一步假设

b_n与n成正比，记$b_n=\lambda n$, λ~出生概率；

d_n与n成正比，记$d_n=\mu n$， μ~死亡概率。

建模 为得到$P_n(t)$ $P(X(t)=n)$,的变化规律，考察$P_n(t+\Delta t)=P(X(t+\Delta t)=n)$.

事件$X(t+\Delta t)=n$的分解	概率$P_n(t+\Delta t)$
$X(t)=n-1$, Δt内出生一人	$P_{n-1}(t)$, $b_{n-1}\Delta t$
$X(t)=n+1$, Δt内死亡一人	$P_{n+1}(t)$, $d_{n+1}\Delta t$
$X(t)=n$, Δt内没有出生和死亡	$P_n(t)$, $1-b_n\Delta t-d_n\Delta t$
其它(出生或死亡二人，出生且死亡一人，… …)	$o(\Delta t)$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t+P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t$$
$$+P_n(t)(1-b_n\Delta t-d_n\Delta t)+o(\Delta t)$$

建模

微分方程

$$\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) - (b_n + d_n)P_n(t)$$

$b_n=\lambda n$，$d_n=\mu n$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

(t=0时已知人口为n_0)

~一组递推微分方程——求解的困难和不必要

转而考察$X(t)$的期望和方差

基本方程 $\dfrac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$

求解 **X(t)的期望** $E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dE}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} n\dfrac{dP_n}{dt}$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)P_{n-1}(t) \xrightarrow{n-1=k} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P_k(t)$$

$$+\mu\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P_{n+1}(t) \xrightarrow{n+1=k} = \mu\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)P_k(t)$$

$$-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t)$$

$$\frac{dE}{dt} = (\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = (\lambda-\mu)E(t)$$

求解 $\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)E(t)$ ⇨ $E(t) = n_0 e^{rt}, \; r = \lambda - \mu$

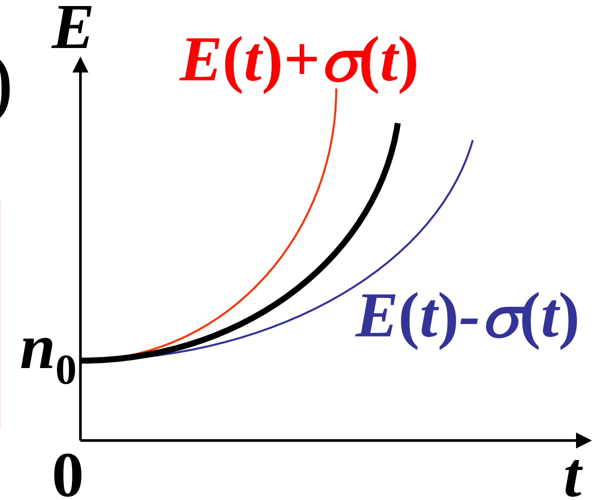
$E(0) = n_0$

r ~ 增长概率

比较：确定性指数增长模型 $x(t) = x_0 e^{rt}$ **r ~ 平均增长率**

$X(t)$的方差 $D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - E^2(t)$

⇨ $D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$



$X(t)$大致在 $E(t) \pm 2\sigma(t)$ 范围内（$\sigma(t)$ ~均方差）

$\lambda - \mu = r \uparrow \rightarrow D(t) \uparrow$　　　**$\lambda, \mu \uparrow \rightarrow D(t) \uparrow$**

二、抵押贷款买房问题

相关背景

谁都希望有一套属于自己的住房，但又没有足够的资金一次买下，这就产生了贷款买房的问题。

下面是1991年1月1日某大城市晚报上登的一则广告.

名流花园 用薪金,买高品质住房

对于大多数工薪阶层的人士来说,想买房,简直是天方夜谭.现在有这样一栋:自备款只需七万人民币,其余由银行贷款，分五年还清.相当于每月只需付1200人民币。那么,这对于您还有什么问题呢?

任何人看了这则广告都会产生许多疑问，且不谈广告上没有谈住房面积、设施等，人们关心的是：

如果一次付款买这套房要多少钱呢?

银行贷款的利息是多少呢?

为什么每个月要付1200元呢? 是怎么算出来的?

因为我们都知道，若知道了一次付款买房的价格，如果自己只能支付一部分款，那就要把其余的款项通过借贷方式来解决，只要知道利息，就可以算出5年还清，每月要付多少钱才能按时还清贷款，从而也就可以对是否要去买该广告中所说的房子做出决策了。

分析与建模

需要借多少钱，用 A_0 记;

每月还多少钱用x记；

月利率用记R（贷款通常按复利计）；

借期记为N个月。

若用 A_k 记第k个月时尚欠的款数，则一个月后（加上利息）欠款，不过又还了x元所以总的款数为

$$A_{k+1} = (1+R)A_k - x, k = 0,1,2,3\ldots$$

而一开始的借款为A_0，所以该问题可用数学表达式表示如下

$$\begin{cases} A_{k+1} = (1+R)A_k - x, k = 0,1,2,3\ldots \\ A_0\text{，已知（不妨假设}A_0\text{为已知）} \end{cases} \quad (1.1)$$

由 $$A_1=(1+R)A_0-x,$$

$$\begin{aligned}A_2&=(1+R)A_1-x\\&=(1+R)[(1+R)A_0-x]-x\\&=(1+R)^2A_0-x[(1+R)+1],\end{aligned}$$

利用数学归纳法，知

$$\begin{aligned}A_k&=(1+R)^kA_0-x[(1+R)^{k-1}+(1+R)^{k-2}+\ldots+(1+R)+1]\\&=(1+R)^kA_0-\frac{x}{R}[(1+R)^k-1],\end{aligned}$$

故

$$A_k=(A_0-\frac{x}{R})(1+R)^k+\frac{x}{R}.$$

这就是A_k, A_0, x, R 之间的显式关系，是迭代关系（1.1）的解。

针对广告中的情形，N=5年=60个月，每月还款x=1200元，已知。

但 A_0 即一次性付款购买价减去70000元后剩下的要另外去借的款，并没有告诉你.

此外银行贷款利率R也没有告诉你，这造成我们决策的困难.

然而，由（1.2）可知60个月后还清，即 $A_{60}=0$，从而得

$$0=A_0(1+R)^{60}-\frac{1200}{R}[(1+R)^{60}-1]$$

$$A_0=\frac{1200[(1+R)^{60}-1]}{R(1+R)^{60}}, \qquad (1.3)$$

（1.3）式表示N=60，x=1200给定时和R之间的关系式，如果我们已经知道银行的贷款利息R，就可以算出 A_0

例如，若R=0.01，则由（1.3）式子可算得=52946元。如果该房地产公司说一次性付款的房价小于70000+53946=123946元的话，你就应自己去银行贷款。

事实上，利用Maple等数学软件可把（1.3）式的图形画出来，从而可进行估算决策。

例1　某校一对年轻夫妇为买房要用银行贷款60000元，月利率0.01，贷款期25年=300月，这对年轻夫妇希望知道每月还多少钱，25年后就可以还清，假设这对夫妇每月可有节余700元，是否可以去买房呢？

解　现在的问题就是要求使得 A_{300}=0的x，由（1.2）式知

$$x=\frac{A_0R(1+R)^k}{(1+R)^k-1}$$

现在 A_0 =60000，R=0.01，k=300，利用Maple等数学软件，容易算得x=632元<700元，这说明该夫妇有买房能力。

例2. 此时这对夫妇看到某借贷公司的一则广告：若借款60000元，22年还清，只要

（i）每半个月还316元

（ii）由于文书工作多了需要你预付3个月的款，即316*6=1896 元。

这对夫妇想：提前3年还清当然是好事，每半个月还316元，那一个月不正好是632元，只不过多跑一趟去交款罢了；要预付1896元，当然使人不高兴，但提前3年还清省下来的钱可是22752元哟，是1896元的十几倍啊！这家公司是慈善机构呢还是仍然要赚我们的钱呢？这对夫妇请你给他们一个满意的回答。

解　先就（i）（ii）两条作一个粗略的分析，可先孤立分析（i）和（ii）看看能否缩短归还期。

分析（i），这时=60000不变，x=316，月利率变为半月利率可粗略地认为刚好

是原R的一半，即R=0.005（这样取R 是否合理？请思考实际情况是怎么样的）

于是由（1.2）式求出的归还期N，即由求N，利用Maple数学软件可解得

$$N=\frac{\ln\left(\dfrac{x}{x-A_0R}\right)}{\ln(1+R)} \qquad (1.4)$$

即N=598（半个月）=24.92年，即只能提前大约1个月还清。由此可见，该借贷公司如果只有第i个条件的话，那他只能是慈善机构了。

分析（ii），这时=60000−1896=58104，这时你只借了58104元，而不是60000元，可以按问题中银行贷款的条件算一算，即令x=632元（每月还款），R=0.01（月息），求使得=0的N，来看看能否提前还清。

利用Maple数学软件，计算得N=21.09年，即实际上提前近4年就可还清.

该公司只要去同样的银行贷款，即使半个月收来的316元不动，再过半个月合在一起去交给银行，它还可坐收第22年的款近7000元，更何况它可以利用收到的贷款去做短期（半个月内）的投资赚取额外的钱。

当你把这种初步分析告诉这对年轻夫妇后，他们一定会恍然大悟，从而作出正确的决策！

进一步分析：

（1）还款周期缩短，一定能缩短还款的总年数吗?

（2）首贷的变化如何影响还款总年数的变化?

$$A_k=(A_0-\frac{x}{R})(1+R)^k+\frac{x}{R}=0$$

三、最优存储问题

为了保存其存货在一个足够的水平上，经营鞋的零售商可以接受的最优订货策略是什么？

这里选择鞋作为零售商品是为了方便读者理解我们希望讨论的思想：当然这种分析之应用并不局限在鞋的零售上，在你关心存储策略在任何时候都可运用这类分析。

通常，货物从生产厂商运到批发商然后到零售商，最后才到消费者手上。鞋的零售商希望以最低的费用从批发商处得到他的存货，同时还希望保持适当的存储以供他销售。为了简单起见，我们将把分析限制在一种特定类型的鞋上。

1.需要考虑的费用

一般存储问题，都需要考虑下面3类费用：

1）每次订购时的组织费用，记作k；

2）购买费，记作c元/件（一双鞋）；

3）存储费，记作h元/件*单位时间，以支付货物在商店保存的花销。

2. 假设

为了保持数学模型的简单性，我们假设：

1）零售商以一个已知的常速率a连续地销售其货物；

2）当零售商从批发商处一次订购Q双鞋时，所有的鞋将会在希望的时间同时到达零售店；

3）假定零售商认为这种鞋在他的店里面是不容许缺货的（另一种情况是容许缺货，对容许缺货的情况作为习题，请读者讨论）

问题即为：零售商应该隔多长时间向批发商去订一次货，每次订货多少才能使他在单位时间内的花费最少？不妨设1个月（30天）作为时间单位；零售商从批发商处一次订购Q件，以每单位时间a双的速率销售这些商品。因为缺货是不容许的，所以连续两次订货的时间间隔为Q/a时间单位，即订购周期为T=Q/a，以月计。

为了得到单位时间的花费，作如下分析：如果**Q=0**（即不订购鞋），那么每周期的购买费用是**0**元，如果**Q>0**（订购**Q**双鞋），那么购买费用为**k+cQ**元，为了得到每周期的贮存费用，注意到一个周期内的平均存储水平为（**Q+0**）**/2=Q/2**双。因此相应的贮存费用为每单位时间**hQ/2**元，因周期长度为**Q/a**月，故每个周期的贮存费用为 $(hQ/2)(Q/a)=hQ^2/2a$ 元。于是，每个周期的总费用为$k+cQ+hQ^2/2a$元，而每天的平均费用为

$$T=T(Q)=\frac{k+cQ+hQ^2/2a}{Q/a}=ak/Q+ac+hQ/2$$

由 $\frac{dT}{dQ}=0$ 解得使得**T**最小的**Q**为 $Q^*=\sqrt{2ak/h}$，为了达到所希望的目的，连续两次订购的时间间隔为

$$t^*=Q^*/a=\sqrt{2k/ah}$$

因此，为了达到在单位时间内的花费最小，对于所考虑的特定类型的鞋，零售商店每隔 $\sqrt{2k/ah}$ 月向批发商订购 $\sqrt{2ak/h}$ 双，其中**k**为每次订购的组织费，**h**为每月每件商品的贮存费用，而**a**是零售商售出商品的不变速率。

3.一个数值例子

我们用一个特定的数值例子来说明前述内容，假定所考虑的特定类型的鞋是一种全年都销售的女鞋，并且预期将继续流行足够长的时间以保证如下分析中的考虑之合理性。零售商估计每次定货的组织费为**20**元；每双鞋零售商的进货价为 **4.70**元。将这种鞋的贮存费估计为每双每月**0.84**元，零售商以每月平均**90**双的速率销售这种鞋。

即有**k=20**元，**c=4.70**元，**h=0.84**元，而**a=90**双**/**月，所以使得每月总费用最小的这种鞋的订购量为

$$Q^* = \sqrt{2ak/h} = \sqrt{2 \cdot 90 \cdot 20 / 0.84} = \sqrt{4285.71} = 65.47\text{双}$$

这样便有两个问题：首先，订购**65.47**双鞋是荒唐的；其次，批发商向零售商出售鞋，按惯例总是以箱为单位，且每箱装有的双数按箱的规格不同而不同。为确定起见，假定从批发商处订购的特定类型的鞋是**18**双一箱的。

为了解决上面提到的问题，我们首先检查函数$T(Q)$ 的特性：在可行集 $\{Q:0<Q<+\infty\}$ 上，当 $Q\in(0,\sqrt{2ak/h})$ 时， $T(Q)$是减少的，而当 $Q\in(\sqrt{2ak/h},+\infty)$ 时，$T(Q)$ 是增加的，此处 $\sqrt{2ak/h}$ **=65.47**，因为**54**和**72**是**18**的倍数中最接近于**65.47**的两个数，一个小于它，一个大于它，容易算出：$T(54)=459.01$元/月，而$T(72)=478.24$元/月，故零售商应该订购 $Q^*=72$ 双这样的鞋，且应每隔 $t^*=Q^*/a=72/90=0.80$ 月，即**24**天订购**72**双鞋（即四箱）这样的鞋。

4. 评注

库存论是运筹学的重要组成部分，有许多存储模型我们这里没有提到。例如，在各种各样的贸易中，销售者将视购买商品的量而给予减价优惠也是常见的。此外，这里考虑的两种模型都是确定性的也就是一个周期内的需求量是已知的。如果一个周期内的需求量是一个已知的随机变量，则合适的模型将是随机的。关于此处未予考虑的模型可以从运筹学的数中找到。这里，我们将仿照上例解决下面的问题。

（1） 美国一个葡萄酒批发商从法国进口一种特定的葡萄酒。根据以往的经验，批发商知道她必须容许脱销。在国外生产这种葡萄酒的葡萄欠收的年份里就很难有法国葡萄酒运到她在美国的仓库里，还有其他原因可能导致仓库中这种葡萄酒的短缺。

批发商从葡萄园购买的葡萄酒只有12瓶一箱装的。可是她凭经验知道以瓶为单位卖给零售商生意才兴隆，因为零售商希望买到各种不同葡萄酒的混装箱。于是批发商的一件物品为一瓶葡萄酒，而单位时间是指一个月（30天）。假定3项费用k、c和h与第一节的一样；此外，短缺被认为是容许的；零售商对她所不能满足的每瓶葡萄酒的需要视为损失每单位时间p元；Q和a具有第一节中相同的意义。

设S为所考虑的葡萄酒在一个周期内开始时仓库里的库存量。现在的目的是决定S和Q应该取什么值才能使批发商在单位时间的费用最小。

提示:

(a)计算每个周期的购买费用斯多少?

(b)每个周期的贮存费用是多少（注意在长为S / a 的一段时间内存储量是正的，且这段时间内的平均存储量是（S+0） / 2＝S / 2瓶）?

(c)每个周期的短缺损失费是多少（注意注意短缺时长为（Q－S） / a，在这个时间段的平均损失为［0+（Q－S）］ / 2）＝（Q－S） / 2瓶） ?

(d)将（a）～（c）中的结果相加得到每个周期的总消费是。

(e)利用（d）的结果写出单位时间内的总消费（注意：Q / a 是一个单位时间）。

(f) 观察两个变量S和Q的函数T，确定T的（局部）最小值。作为第一步，

计算 $\frac{\partial T}{\partial S}$ 与 $\frac{\partial T}{\partial Q}$

(g)令（f）中计算出的为零，第S和Q解这个联立方程组。将得到的解分别记作和。

(h) 用检验二元函数极限的方法，证明和 是真正的最优。

(i) 计算最有周期（作为k、a、k和P的函数）

(j) 画出存储量对时间的曲线（注意存储量变化范围从0到S；因为短缺是容许的,订购的数量Q可以超过S，杂一个周期中存储量为正的时间长度是S / a）。

(2) 采用下列值：k＝40元，c＝6.8元，h＝0.27元，p＝0.15元，而a ＝426瓶 / 月。不要忘记批发商从法国买这种葡萄酒时是12瓶一箱装的，而她卖给零售商则是一瓶一瓶地卖。

四、森林收获问题

问题的背景与分析

自然资源可以分为两大类，一类叫做消耗性资源，比如煤、铁、石油等矿产，随着人类的开采，它不断被消耗，贮存量越来越少，一直到被消耗完为止；另一部分叫做可更新资源，比如森林、渔场和各种野生动物等资源，在人们利用其中一部分以后，能够通过资源群的自我更新而得到恢复，从而达到多次利用的目的。例如一片森林，在砍伐其中一部分以后，它就能够经过自我更新再长起来，当然恢复的时间随树种和林型的不同而不同。

以往由于人们对可更新资源缺乏科学的认识，错误地以为资源是取之不尽、用之不竭的，因而对资源利用过度，即利用利用的量超过了资源的更新和恢复的能力。从而使资源蕴藏量越来越少，严重的毁灭了资源。当然，如果归于可更新资源不加利用或者不充分利用，任其自生自灭，这也是不符合人类利益的，事实上，这也是一种资源的浪费。比如。

青海湖中的湟鱼的利用就是一个例子。解放前当地藏民受宗教影响，把湟鱼当作“神”来供奉，使得这种鱼类资源未能很好的开发利用。

因此，在人类利用可更新资源中，利用过度固然是一种损失和危险，相反，不利用或者未充分利用也是一种损失，亦未对生物资源不利用或者不充分利用，并不一定能使资源增加。那么到底应该怎样利用才算合理、科学呢？从人类的利益角度来讲，应该是既要使生物资源能源源不断地被利用，维持在一定持续产量水平上，有要使这种持续产量保持最大。如果结合经济成本和收获量来考虑，也就是要确定最佳持续产量，即在维持收获的前提下，获得最大的经济效益。

现在，来考虑一种可更新资源——森林。显然，森林中的数树木每年都要有一批被砍伐出售，为了使这片森利不被耗尽而且每年都有所收获，我们要求：每当砍伐掉一棵树木，就在原地补种上一棵幼苗，从而使得森林中树木的总数保持不变，我们希望能找到一种方案，使得在维持每年都有收获的前提下，去砍伐树木，使得被砍伐的树木获得最大的经济效益。

模型的建立及求解

1. 假设

（1）被出售的树木，其价值取决于树木的高度，因此，将树木按高度来分级$[h_{i-1},h_i)$不同高度级的树木对应着不同的经济价值，下表给出个确定的高度区域价格之间的对应关系：

树木价格与高度区间

级别	价格（元）	高度区域
1幼苗	0	$[0,h_1)$
2	p_2	$[h_1,h_2)$
3	p_3	$[h_2,h_3)$
⋮	⋮	⋮
N	p_n	$[h_{n-1},\infty)$

其中第一级是幼苗，它的高度区间是 $[0,h_1)$ 一般认为用幼苗作木材，没有任何经济价值，用 x_i 表示第i机的树木数，pi表示第i级树木的价值，用yi表示收获地i级的树木数，因此 $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)^T$ 表示森林群体（或称未采伐向量），$y=(y_1,y_2,\ldots y_n)^T$ 表示收获群体（或称采伐向量）。

（2）对森林进行收获时，要求是砍一棵，种一棵，因此森林中的树木的总数为一固定值，记为s，即 $x_1+x_2+\ldots+x_n=s.s$ 可以由占有土地的总面积和每棵树所需要的空间的大小而预定给定

（3）两次收获之间是森林的生长期，假设在一个生长期内，数目至多只能生木进入第i+1级的比例，称qi为生长参数。显然，1-qi为第一年内第i级的树仍停长一个高度级，即第i级中的树木可能进入第i+1级，也可能因某种原因而仍然停留在第i级，并且假设同级的树木的生长速度相同，因此记qi为1年内第i级树留在第i级的比例。

（4）除砍伐外，树木不会死掉，即认为每一棵幼苗都可以生长到被收获。

2. 建模过程

首先根据假设（3）可得出树木的生长情况。记$x_i^{(k+1)}$为k+1年第i级中的树木数，则有

$$x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}\cdot(1-q_1)$$

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}\cdot(1-q_i)+x_{i-1}^{(k)}q_{i-1}(i=1,2,\ldots n-1)$$

$$x_n^{(k+1)}=x_n^{(k)}+x_{n-1}^{(k)}q_{n-1}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 1-q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 1-q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-q_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

记，$x(k+1)=(x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},\cdots x_n^{(k+1)})^T$ 则上述关系就可以写成，其中

$$G=\begin{bmatrix} 1-q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 1-q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 1-q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-q_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

称为**生长矩阵**。

其次，我们来考虑一下收获情形，根据假设（2），砍伐的总数和补种的幼苗数相等。设 $y=(y_1,y_2,...y_n)^T$ 是收获群体，则在每次砍伐时， 移去树木的总数是 $y_1+y_2+...+y_n$, 这也是每次砍伐后加到第一级（栽下新的树苗）的树的总数。记nxn阶矩阵R为

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{则} \quad Ry=\begin{bmatrix} y_1+y_2+...+y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

是每次收获后新种幼苗的分布状况，称R为替换矩阵。

根据维持收获的原则，则

（生长期开始的状态）=（生长期末的状态）—（收获）+（新种树苗）

因此有收获模型

$$x(k+1)=G\bullet x(k)-y+Ry=G\bullet x(k)-(I-R)y,$$

其中I为n阶单位矩阵。

3. 模型分析与求解

根据收获模型 $x(k+1)=G\bullet x(k)-(I-R)y,$ 如果要保证对森林进行持续收获的话，就相当于要求y是常向量，即定常收获。这实际上就相当于要求森林中每生长期的树木分布状况都相同，换言之，即存在x，使得 x(k)=x。

这时，y才能实现持续收获，x称为收获模型的平衡解。如果存在平衡解x，则有

$x=G\bullet x-(I-R)y$ 即 $(G-I)x=(I-R)y$ （4.1）

而

$$I-R=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$G-I=\begin{bmatrix} -q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q_1 & -q_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & -q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

把方程（4.1）称为**能持续收获条件**。

仍以满足这个矩阵方程，具有非负元素的向量x，y，决定森林的一个持续收获方案。应该指出，这里将假设$y_1=0$，表明收获了没有经济价值的树苗，没有实际意义。

于是方程组（4.1）就可以化为

$$\begin{cases} y_2+y_3+\ldots+y_n=q_1x_1, \\ y_2=q_1x_1-q_2x_2, \\ y_3=q_2x_2-q_3x_3, \\ \cdots\cdots \\ y_{n-1}=q_{n-2}x_{n-2}-q_{n-1}x_{n-1}, \\ y_n=q_{n-1}x_{n-1}. \end{cases} \qquad (4.2)$$

这个方程组的第一个方程是后面n-1个方程之和。

由于必须有 $y_i \geq 0(i=2,3,\cdots n),$ 所以方程组（2）中要求

$$q_1 x_1 \geq q_2 x_2 \geq \cdots \geq q_{n-1} x_{n-1} \geq 0 \qquad （4.3）$$

反之，如果x满足条件（4.3），则由方程组（4.2）定义了一列向量y，且x，y满足持续收获条件（4.1）。因此，一个非负向量 x为收获模型平衡解得充要条件是它的元素满足条件（4.3）。

4. 最有持续产值

我们的问题就是在持续收获的前提下，使得收获的经济价值最大。设收获的总价值为Q，根据假设1），则有 $Q = p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots + p_n y_n$ （4.4）

将（4.2）式中的y_i代入，得

$$Q = p_2 q_1 x_1 + (p_3 - p_2) q_2 x_2 + \cdots + (p_n - p_{n-1}) q_{n-1} x_{n-1}. \qquad （4.5）$$

$$\max Q = p_2 q_1 x_1 + (p_3 - p_2) q_2 x_2 + \cdots + (p_n - p_{n-1}) q_{n-1} x_{n-1},$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s \\ q_1 x_1 \geq q_2 x_2 \geq \cdots \geq q_{n-1} x_{n-1} \geq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots n. \end{cases}$$

这是一个线性规划问题，利用线性规划可以解得：只要从某一种高度集中收获全部树木，而不用收获其他高度级中的树木，就可以得到最大持续收获。

我们现在不用线性规划的理论来证明这一结论。

设Q_k是采伐时所有的树木都属于第k级而不采伐其他级的树所得的产量。因此有

$$y_2 = y_3 = \ldots y_{k-1} = y_k = \cdots = y_n = 0 \qquad （4.6）$$

另外，既然第k级中所有的树木都已砍去，没有树剩下，也就没有树存在于高于第k级的高度级中，因此 $x_k = x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$

将（4.6）和（4.7）式代入持续收获条件（4.2）中，得

$$\begin{cases} y_k = q_1 x_1, \\ 0 = q_1 x_1 - q_2 x_2, \\ 0 = q_2 x_2 - q_3 x_3, \\ \cdots\cdots \\ 0 = q_{k-2} x_{k-2} - q_{k-1} x_{k-1}, \\ y_k = q_{k-1} x_{k-1}. \end{cases}$$

$$x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$$

$$\max Q = p_2 q_1 x_1 + (p_3 - p_2) q_2 x_2 + \cdots + (p_n - p_{n-1}) q_{n-1} x_{n-1}.$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s \\ q_1 x_1 \ge q_2 x_2 \ge \cdots \ge q_{n-1} x_{n-1} \ge 0 \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots n. \end{cases} \qquad （4.8）$$

由此方程组可得

$$y_k = q_1 x_1 = q_2 x_2 = \cdots = q_{k-1} x_{k-1} \tag{4.9}$$

即

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{q_1 x_1}{q_2}, \\ x_3 = \dfrac{q_1 x_1}{q_3}, \\ \cdots \\ x_{k-1} = \dfrac{q_1 x_1}{q_{k-1}}. \end{cases} \tag{4.10}$$

将（4.7）和（4.10）式代入$x_1+x_2+\ldots+x_n=s$，得

$$x_1 + \frac{q_1 x_1}{q_2} + \frac{q_1 x_1}{q_3} + \cdots + \frac{q_1 x_1}{q_{k-1}} = s$$

解得

$$x_1 = \frac{s}{1 + \frac{q_1}{q_2} + \frac{q_1}{q_3} + \cdots + \frac{q_1}{q_{k-1}}}, \qquad （4.11）$$

于是得

$$Q_k = p_k y_k = p_k q_1 x_1 = \frac{p_k s}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_{k-1}}} \qquad （4.12）$$

因此，只要生长参数是已知的，就可以求出的值，k=2,3, …,n，再比较k取不同值时 Q_k 的值，从中确定维持收获的最大经济收入。

实际应用

现在，我们已知某处森林具有6年的生长期，通过实地测量，得到其生长矩阵为：

$$G=\begin{bmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1 \end{bmatrix}.$$

假设5个高度级的树木价格分别为

$$p_2 = 100\text{元}, p_4 = 150\text{元}, p_5 = 200\text{元}, p_6 = 250\text{元},$$

为了得到最优持续产量，问哪一级的树应该全部采伐掉？其产量是多少？

解 在这里，我们假设森林中的树木总数为s，从生长矩阵G可知

$$q_2 = 0.28, q_3 = 0.31, q_4 = 0.25, q_5 = 0.23, q_6 = 0.37.$$

通过上述模型分析，可得到：

只收获第二高度级：$x_1 = \dfrac{s}{1} = s, Q_2 = p_2 y_2 = p_2 q_1 x_1 = 14s;$

只收获第三高度级 $x_1 = \dfrac{s}{1+\dfrac{q_1}{q_2}} = 0.525s, Q_3 = p_3 y_3 = p_3 q_1 x_1 = 14.7s;$

只收获第四高度级 $x_1 = \dfrac{s}{1+\dfrac{q_1}{q_2}+\dfrac{q_1}{q_3}} = 0.33s, Q_4 = p_4 y_4 = p_4 q_1 x_1 = 13.9s;$

只收获第五高度级

$$x_1 = \frac{s}{1+\frac{q_1}{q_2}+\frac{q_1}{q_3}+\frac{q_1}{q_4}} = 0.2357s, Q_5 = p_5 y_5 = p_5 q_1 x_1 = 13.2;$$

只收获第六高度级

$$x_1 = \frac{s}{1+\frac{q_1}{q_2}+\frac{q_1}{q_3}+\frac{q_1}{q_4}+\frac{q_1}{q_5}} = 0.2s, Q_6 = p_6 y_6 = p_6 q_1 x_1 = 14.0s;$$

比较五个值，可知 $Q_3 = 14.7s$

最大。因此，砍伐第三高度级的全部树木可使收益最大，最有持续产量是14.7s元。

由上述模型分析知，持续收获x从理论上确实是存在的，但由于实际问题将导致按持续收获进行砍伐树木时困难较大，甚至可能成本较高，这当然是不“合算”的。另外，在森林中，要真正区分树木的等级也比较困难。

假设中，我们认为树木是逐级按比例进入上一级高度的，其实现实中的树木生长存在着竞争问题，增长率会随时间而发生变化，并不是恒定的。另外在计算最大收益值时也没有考虑利率、税收、成本等问题。下面的问题值得大家进一步思考：

设 $V(t)$ 表示年龄为t的树木的价值，对于年龄很长的树种（100~200年），考虑树木的价值时必须同时考虑到现金的时间贴现，称r为贴现率，即时间t的单位现金只相当于当前的 e^{-rt}

1）若已知树木价值，试讨论单株树木最优砍伐的时间 $(T$，满足 $V'(T)/V(T)=r)$.

2）如果已知 $V(t_i)(i=1,2,\cdots,n$ 及 $r)$ 试给出最优砍伐时间的计算公式。

3）道格拉斯（Dauglas）冷杉的树木价值如下：

年龄i	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
价值 V_i	0	0	43	143	303	497	650	805	913	1000	1075

如果贴现率r=0.1，计算道格拉斯冷杉的最优砍伐时间。

五、人口按年龄结构的总体增长问题

本节介绍人口学家最常用的莱斯利（Leslie）人口增长模型，了解莱斯利矩阵的性质及其应用，了解人口按年龄结扣总体增长问题，并学会讨论极限状态。为下一节讨论动物群的收获问题作准备。

人口的增长是当前世界上引起普遍关注的问题，我们经常在报刊上看见关于人口增长的预测。

你可能注意不到不同的报刊对同一地区同一时间人口的预测数字常有较大的差别，这是因为用了不同的人口模型进行预测的结果，且影响人口的因素很多。

对于人口问题已有从不同的角度来进行研究而得到的模型和方法，这些方法请读者参阅其他相关的书籍。

本节介绍的是人口学家最常用的Leslie人口增长模型。

<一> 莱斯利模型

年龄组	年龄区间
1	[0,N/n]
2	(N/n,2N/n)
3	(2N/n,3N/n)
…	…
n-1	((n-2)N/n,(n-1)N/n)
N	((n-1)N/n,N)

假定在总体中任意一个女性的最大年龄是N岁，这里的总体仅指女性人口总体，并将其当做按不同年龄分组的个体的集合。

将总体分成n个期限相等的年龄组，于是每组的期限为N/n年，按下表来记下各个年龄组：

假设已知在时刻t=0时每一个组中的女性人数，令在第i组中有 $x_i^{(0)}$ 个女性，则记为

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

这个向量称为初始年龄分布向量。

现在来考虑这n个组中每组的女性人数随时间的推移而变化的情况。设任意两个连续的观察时间间隔和年龄区间的期限相等，即令

$$t_0=0,t_1=N/n,t_2=2N/n,\cdots,t_k=kN/n,\cdots.$$

这样，在时刻 t_{k+1} 时于第（i+1）组中的所有女性在时刻是均在第i组中。

在两次连续的观察时间之间的出生和死亡过程，用下述人口学参数来描述：

$a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 表示每一个女性在第i年龄组期间生育儿女的平均数。

$b(i=1,2,\cdots,n-1)$ 表示第i年龄组的女性可望活到第（i+1）年龄组的分数。

显然 $a_i \geq 0(i=1,2,\cdots,n), 0<b\leq 1(i=1,2,\cdots,n-1).$ 不允许任何bi等于0，否则就没有一个没有女性会活到超过第i年龄组。

同样，至少有一个 a_i 是正的，这样就保证有n个女儿出生了。与正的 a_i 对应的年龄组称为生育年龄组。

记 $x_i^{(i)}$ 是在时刻个 年龄组中的女性数目，则称

$$X^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{k} \end{bmatrix}$$

为在时刻 t_k 时年龄分布向量。在时刻 t_k ，第一个年龄组中的女性数恰好就是在 t_{k-1} 和 t_k 之间出生的女孩数，即

$$x_1^{(k)}=a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\ldots+a_nx_n^{(k-1)}. \qquad （5.1）$$

$$x_{i+1}^{(k)}=b_ix_i^{(k-1)},i=1,2,\ldots,n-1. \qquad （5.2）$$

将（5.1）式和（5.2）用矩阵表示即得

$$X^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

简记为

$$X^{(k)}=LX^{(k-1)} \qquad k=1,2,\ldots, \tag{5.4}$$

其中
$$L=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \vdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

称为莱斯利矩阵。由（5.4）式可得

$$\begin{cases} X^{(1)}=LX^{(0)}, \\ X^{(2)}=LX^{(1)}=L^2X^{(0)}, \\ X^{(3)}=LX^{(2)}=L^3X^{(0)}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ X^{(k)}=LX^{(k-1)}=L^kX^{(0)}, \end{cases} \tag{5.5}$$

因此，如果已知初始年林分布 $X^{(0)}$ 及Leslie矩阵L，就能求出在以后任何时间的女性年龄分布。

<二> 极限状态

（5.5）式给出了总日在任意时间的年龄分布，但是它并不能直接反映增长过程动态的情况。

为此我们需要考虑Leslie矩阵L的特征值和特征向量，L的特征根是它的特征多项式的根，这个特征多项式为

$$p(\lambda)=|\lambda E-L|=\lambda^{n}-a_1\lambda^{n-1}-a_2b_1\lambda^{n-2}-a_3b_1b_2\lambda^{n-3}-\ldots-a_nb_1b_2\ldots b_{n-1},$$

为了求这个多项式的根，引入函数

$$g(\lambda)=\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2b_1}{\lambda^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3}+\ldots+\frac{a_1b_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda^n}, \qquad （5.6）$$

利用这个函数，特征多项式 $p(\lambda)=0$ 可写为

$$g(\lambda)-1, 对\lambda\neq 0. \qquad （5.7）$$

由于所有的 a_i 和 b_i 为非负的，可以看作 $g(\lambda)$ 对于大于零是单调减少的。

另外，$g(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处有一条垂直渐近线，而当趋于无穷大时则趋于零。因此，存在唯一的一个 $\lambda=\lambda_i$，使得 $g(\lambda)=1$ 。即矩阵L有一个唯一的正特征值，λ_1 是单根，对于 λ_1 的一个特征向量是满足：$LX_1=\lambda_1 X_1$ 的非零向量。

解得

$$X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ b_1 b_2 \dots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (5.8)$$

由于 λ_1 是单根，它相应的特征空间是一维的，因而任意它所对应的特征向量 X_1 是某个倍数，则有定理

定理1 一个Leslie矩阵L有一个唯一的正特征值 λ_1，并且有一个所有元素均为正的特征向量。

总体年龄分布的长期行为是由正的特征值 λ_1 及它的特征向量 X_1 来决定的。实际应用中，由数学软件很容易求出矩阵的特征值与特征向量，请读者参阅第四章相关内容。

定理2 如果 λ_1 为Leslie矩阵L的唯一的正特征值，λ_i是L的特征值，它可以是任意实数或复数，则$|\lambda_i| \le \lambda_1$ 。

λ_1 称为L的主特征值。如果对L的所有其他特征值有 $|\lambda_i| \le \lambda_1$ ，那么λ_1 称为L的严格主特征值。并不是所有的莱斯利矩阵都满足这个条件，例如

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

请读者利用数学软件验证L的唯一正特征值不是严格主特征值，并且有 $L^3 = E$ （单位矩阵）。

于是对于任意选择初始年龄分布 X^0，都有

$$X^{(0)} = X^{(3)} = X^{(6)} = \ldots = X^{(3k)},$$

因此年龄分布向量以三个时间单位为周期而摆动，如果 λ_1 是严格主特征值，这种摆动（也称人口波）就可能不会发生。

下面价格叙述关于 λ_1 是严格主特征值的必要和充分条件。

定理3 如果Leslie矩阵的第一行有两个连续的元素 a_i和 a_{i+1}不等于零，则L的正特征值就是严格主特征值。

因此，如果女性总体有两个相继的生育年龄组，它的Leslie矩阵就是一个严格主特征值。只要年龄组的期限足够小，现实中的总体总是这中情况。

假设L是可对角化的，此时L有n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 与它们相对应的n个线性无关的特征向量为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 。将其中严格主特征值排在第一，建立一个矩阵P，其余个列就是L的特征向量。

$$P = (X_1, X_2, ..., X_n),$$

于是L的对角化就由下式给出

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1},$$

则

$$L^k = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1}, \qquad k=1,2,\ldots$$

因此，对于任意初始年龄分布向量 $X^{(0)}$ 就有

$$X^{(k)} = L^k X^{(0)} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1}X^{(0)}, k=1,2,\ldots$$

此等式两边除以 λ_1^k，就得出

$$\lambda_1^k \frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2/\lambda_1)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n/\lambda_1)^k \end{bmatrix} P^{-1} X^{(0)}. \qquad (5.9)$$

由于λ_1 是严格主特征值，所以 $|\lambda_i/\lambda_1| < 1 (i = 2,3,\cdots,n)$, 当 $k \to \infty$ 时 $(\lambda_i/\lambda_1)^k \to 0 (i = 2,3,\cdots,n)$, 这样就得到

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} X^{(0)}. \qquad (5.10)$$

如果将列向量$P^{-1}X^{(0)}$ 的第一个元素用常熟C来表示，则可以证明（5.10）式右端为CX_1，C是一个只与初始年龄分布向量 $X^{(0)}$有关的正常数，于是得到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}X^{(k)}=CX_1. \qquad (5.11)$$

对于足够大的k值，由（5.11）式给出近似式

$$X^{(k)}\doteq C\lambda_1^k X_1. \qquad (5.12)$$

由（5.12）式还可得出

$$X^{(k-1)}\doteq C\lambda_1^{k-1}X_1, \qquad (5.13)$$

比较（5.12）和（5.13）式可知对于足够大的k值，有

$$X^{(k)}\doteq \lambda_1 X^{(k-1)}, \qquad (5.14)$$

这说明对于足够大的时间值，每个年龄分布向量是前一个年龄分布向量的一个数量倍数，这个数量就是矩阵的正特征值。因此，在每一个年龄组中的女性比例据变为常量。

由给出常时期人口的年龄分布向量（5.12）式

$$X^{(k)} \doteq C\lambda_1^k X_1,$$

根据正特征值 λ_1 的数值，会有三种情况：

1）如果 $\lambda_1 > 1$ ，总体最终是增长的；

2）如果 $\lambda_1 < 1$ ，总体整体是减少的；

3）如果 $\lambda_1 = 1$，总体整体是不变的。

$\lambda_1 = 1$ 的情形有特殊意义，因为它决定了一个具有零增长的总体。对于任何初始年龄分布，总体趋于一个是特征向量的某个倍数

由（5.6）和（5.7）式可看出，当且仅当

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = 1 \qquad （5.15）$$

时才有 $\lambda_1 = 1$ 。

表达式

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \qquad （5.16）$$

称为**总体的净繁殖率**。因此，**总体的净繁殖率为1时，一个总体有零总体增长。**

<三> 一个实例

考虑一个没有多少移民迁入与外界隔绝的部落。假设该部落中没有年龄大于60的女性，将该部落中的女性分分成期限为20年的3个年龄组，并知其Leslie矩阵是

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix},$$

如果开始时在这3个年龄组中每组有1000名女性，于是由（5.3）式，得到

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix},$$

$$X^{(1)} = LX^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix},$$

$$X^{(2)} = LX^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{bmatrix},$$

$$X^{(3)} = LX^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{bmatrix}.$$

因此60年后，年龄从0到20岁的女性有14375名；20到40岁的女性有1375名；40到60岁之间的女性有875名。

由于L的特征多项式是严格主特征值是，故由（5.8）式，相应的特征向量是

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2/\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}/(\frac{3}{2})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/18 \end{bmatrix}.$$

对于足够大的k值（即多年后），由（5.14）式得

$$X^{(k)} \doteq (\frac{3}{2}) X^{(k-1)},$$

因而每隔20年，3个年龄组中的女性和女性总数都将增长50％。

由（5.12）式得 $$X^{(k)}=C(3/2)^k\begin{bmatrix}1\\1/3\\1/18\end{bmatrix},$$

这说明到最后，女性将按1：1／3：1／18的比例分配在3个年龄组中，这相当于72％的女性分布在第一年龄组，24％的女性分布阿第二年龄组，4％的女性分布在第三年龄组中。

这里仅分析了一个“特殊”的例子。事实上，要预测某地区未来人口的数量及人口年龄分布规律，同行需要考虑男性的情况，则需要对莱斯利模型做一些必要的修改还需要从人口普查资料中得到人口参数。分组的年限往往是一年，这样莱斯利矩阵L的阶就相当高，且假定出生率与死亡率是固定的，对于人口的长期预测来说，其合理性是有争议的。

当L的阶数较高时，可使用第四章I 介绍的数学软件来进行上述计算，并进一步思考下列问题：

1）评价并讨论上述推倒模型的假设。什么因素对出生率和死亡率有影响。

2）推导某地区男性和女性的年龄结构模型。方法之一是假设有关女性人口的模型成立，对于一个出生的女婴对应地有一个出生的男婴，男性人口的存活率为常熟。对于有移民的情况模型应该怎样建立？

六、动物群的收获问题

本节讨论动物群的收获效果，作为上一节莱斯利模型的应用，了解持续收获模型、只收获特定年龄组问题。

初步掌握是数学技术的综合应用。

在上一节的中，讨论了女性总体按年龄分组的莱斯例矩阵模型。这一节将利用这个模型来讨论动物群的收获效果，可以认为这一节是Leslie模型的应用。

<一> 收获模型

我们仅讨论持续收获。所谓持续收获是指：

如果一个周期性收获的动物总体，每次的收获量相同，并且在每次收获后，遗留的总体的年龄分布仍旧不变，就称为持续收获。

采用这种持续收获方案，可以使动物群不致耗竭，而只是开发利用增长的过剩部分。

“收获”并不一定是指屠宰率亦可指由于别的目的而将动物从整体中移走。与上一节一样，我们只讨论动物群中的雌雄。

从一个特定的年龄分布的动物开始，经历一个用莱斯利矩阵描述的生长周期后，在生长周期末，收获每个年龄组的某些部分。

由于收获期与生长周期相比是很短的，因而在收获期间总体的增长或变化都可以忽略不计。

结果遗留下来未收获的总体年龄分布就和原来的总体相同。每次收获后重复这种循环 ，所以收获是持续的。

设 x_i 是在i组中剩下未收获的雌性动物的个数，则向量

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

是在生长周期开始时动物总体的年龄分布向量

同样假设每一年龄组的期限和生长的周期相同的 长短相同，例如动物群一年收获一次，那么动物群就分成期限为一年的年龄组。

设L是描述总体增长的Leslie矩阵，那么向量LX是紧靠着收获之前，生长周期末的总体的年龄分布向量。

设是从第i年龄组中收获的雌性动物的百分数，由此得到I 个n阶对角阵

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n \end{bmatrix}.$$

称为收获矩阵。

显然$, 0 \le h \le 1 (i = 1, 2, \cdots, n),$ 即对于这n组中的每一组。可以不收获 $(h_i = 0)$ ，全部收获 $(h_i = 1)$ 或当收获到一部分$(0 < h_i < 1)$ 。

因为紧靠着收获之前的 第i年龄组中的雌性动物数是向量LX的第i个元素，记为，则向量

$$HLX = \begin{bmatrix} h_1 (LX)_1 \\ h_2 (LX)_2 \\ \vdots \\ h_n (LX)_n \end{bmatrix}$$

中的地i个元素就是第i个年龄组中收获的雌性动物数，根据持续收获的定义：在生长周期末的年龄分布－收获＝在生长周期开始的年龄分布，也就是

$$LX - HLX = X, \qquad (6.1)$$

即

$$(E - H)LX = X. \qquad (6.2)$$

可以看出X是对应于矩阵（E－H）L的特征向量。
假设总体的Leslie矩阵

$$L=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (6.3)$$

于是得

$$(E-H)L=\begin{bmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & \cdots & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_2)b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-h_n)b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

显然，（E－H）L是形式与Leslie矩阵相同的矩阵，在上一节曾得出莱斯利矩阵的特征值是1的充要条件是它的繁殖率也是1。

根据（5.15）可得出（E－H）L的净繁殖率为：

$$R=(1-h_i)[a_1+a_2b_1(1-h_2)+a_3b_1b_2(1-h_2)(1-h_3)+\cdots+a_nb_1b_2\cdots(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)]$$

令其等于1，得

$$(1-h_i)[a_1+a_2b_1(1-h_2)+a_3b_1b_2(1-h_2)(1-h_3)+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)]=1$$

（6.4）

（6.4）式对允许收获分数给予一个限制，即满足方程（6.4）且在［0，1］上的那些的值，才能持续收获。

如果满足（6.4）式，矩阵（E－H）L就有特征值，且这个特征值是单根。因为Leslie矩阵的正特征值总是单根，这就表明只有一个非零向量X满足（6.2）式。

可求得对应于特征值的特征向量为

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1(1-h_2) \\ b_1 b_2(1-h_2)(1-h_3) \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n) \end{bmatrix}. \qquad (6.5)$$

式（6.2）的其他解X是的倍数，因此向量就决定了持续收获中每收获一次，n个年龄组中的每一组雌性动物的比例，。

所以在中可以做出广泛的选择来形成持续收获，一旦把这些选定后，每次收获后总体的年龄分布比例就唯一的由（6.5）式所定义的来选定。

<二> 均匀收获

很多的动物群很难区分或者捕捉到特定年龄的动物。当动物是随机捕捉时，可假定每一年龄组的收获百分数是相等的，这就是均匀收获，令 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h,$ 则（6.2）式就化成

$$LX = \frac{1}{1-h} X.h_i X_1$$

因此，就是Leslie增长矩阵L的唯一的正特征值， $\lambda_1 = \frac{1}{1-h}$ ，从而解得

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

这时向量和特征值对应的特征向量相同，由（5.8）式知

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{b_1}{\lambda_1} \\ \dfrac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \dfrac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix}. \qquad (6.7)$$

由（6.6）式知，越大，可以收获而不致使总体耗竭的动物的百分数就越大。这里还要求大于1，以保证h在0，1之间。

这个条件是肯定被满足的，因为正是总体在增长的条件。

<三> 只收获最小年龄组

- 某些动物，只有最年轻的雌性才具有经济价值，因袭力求收回最轻年龄组的雌性。例如要制作烤乳猪这道菜，则需要刚出生不久的乳猪。

此时，可令 $h_1 = h, h_2 = h_3 = \cdots = h_n = 0,$ （6.4）式就简化为

$$(1-h)[a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} = 1$$

或

$$(1-h)R = 1,$$

式中R为繁殖率，解得

$$h = 1 - \frac{1}{R}. \qquad （6.8）$$

从此式 可看知，只有当R〉1时，才可能持续收获。这是符合事实的，因为只有R〉1时，总体才增长。

再由式（6.5）式得每次收获后的年龄组分布向量，它是与成比例的，

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

<四> 一个实例

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\ 0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.370 & 0 \end{bmatrix}$$

羊的平均年龄是12岁，因此将真个羊群分成间隔为1年的12个年龄组。利用数学软件 容易求得L的唯一的一个特征值：

1. 均匀收获

由（6.6）式，均匀收获百分比为

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{1.221} = 0.181 = 18.1\%,$$

因此，按均匀收获方法，每年从12个年龄组中各收获18.1％的羊。由（6.7）式可得，每次收获后羊群的年龄分布向量正比于 X_1。

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.629 \\ 0.552 \\ 0.436 \\ 0.339 \\ 0.257 \\ 0.189 \\ 0.131 \\ 0.084 \\ 0.022 \\ 0.007 \end{bmatrix}.$$

现在，我们来分析一下，按照这个持续收获方法，将要收获整个羊群的百分数是多少？

先求出在收获前的年龄分布向量 LX_1 。

$$LX_1 = (2.513, 0.845, 0.824, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T$$

LX_1 中所有元素的总和为8.518，所以第一个元素2..513是总和的29.5％。也就是说，在收获之前，总体的29.5％在最轻年龄组内。

现在要从最小年龄组中收获60.2％。

因此，每年收获整个羊群的29.5％*60.2％＝17.8％。

上面仅介绍了两种持续收获方法，它们的产量分别是18.1％，17.8％。

还有许多其他的持续收获方法，我们希望能找出一个产量最大的持续收获方法，即最优持续收获方案，其结果就是最优持续产量。

可以用线性规划的方法得到下面的结论：

最优持续收获的方案是收获一个或两个年龄组。如果收获两个年龄组，就把较老的年龄组全部收获掉。

对于前述的羊群，可以用线性规划证明当而其余均为0时，可得最优持续产量。也就是把0到1岁的羊群收获52..2％，8岁到9岁的羊全部收获，就得到最优持续产量是羊群总数的19.9％。

请大家做下述计算（最好在数学软件上实现）

1）如果只周期收获动物群的第i年龄组，求相应的收获百分数 。

2）如果收获一动物群的第j年龄组的某个百分数，计算要收获整个动物群的百分是多少？

谢谢大家参加数学建模竞赛培训！

学数学用数学，我们共同努力！