反演计算与扰动分析模型

X

28/8/2025

我们在第一问已经完美解决的基础上，快乐开始第二问。问题 1 的成果假设是：我们已知相机的内外参数，模拟了一个 1D 标定物（例如，三个点 A、B、C，其中 A 固定）围绕固定点 A 的 6 个不同运动状态（即 6 个不同姿态），并计算出了每个姿态下点 B 和点 C 的理想像点坐标 b_i, c_i (i=1,2,...,6)。固定点 A 的像点 a 也是已知的。

1 问题重述及分析

第二问实际上是两个问题：

反演参数计算 ：忘记我们已知的内外参数。仅使用：1. 物点之间的几何关系（A 是固定点，|AB| = L, C 由 ${}_A\ {}_B$ 计算得出）。2. 问题 1 中计算得到的理想像点坐标 a, b_i, c_i。3. 按照张正友论文（第 3 节）中描述的方法，重新估算出相机的内参矩阵 A 和外参（对于每个姿态的旋转和平移，但因为我们世界系设在 A 点，所以外参是每个姿态下物体相对于相机的姿态）。

扰动分析 ：在理想像点坐标上引入微小的扰动，然后观察这些扰动导致的内外参数估算值的波动有多大。

2 一维标定法反演计算过程

2.1 已知条件

- 固定点 A 的像点坐标：$a = [u_a, v_a]^T$
- 第 i 次观测 $(i = 1, 2, \ldots, N)$ 中自由端点 B 和中间点 C 的像点坐标：$bi = [ub_i, v_{b_i}]^T$, $ci = [uc_i, v_{c_i}]^T$
- 标定物本身的几何参数：长度 $L = |B - A|$，以及点 C 相对于 A 和 B 的线性组合系数 λ_A 和 λ_B，满足：

$$C = \lambda_A A + \lambda_B B \tag{1}$$

- 目标：估计相机内参矩阵 A：

2.2 计算过程

2.2.1 构建增广坐标与中间变量 h_i

首先，计算所有像点的增广坐标（齐次坐标）：对于每一次观测 i，计算向量 h_i：

$$h_i = \tilde{a} + k_i \tilde{b}_i \tag{2}$$

其中标量 k_i 由下式给出：

$$k_i = -\frac{\lambda_A (\tilde{a} \times \tilde{c}_i) \cdot (\tilde{b}_i \times \tilde{c}_i)}{\lambda_B (\tilde{b}_i \times \tilde{c}_i) \cdot (\tilde{b}_i \times \tilde{c}_i)} \tag{3}$$

2.2.2 构建线性方程组 $Vx = L^2 1$

定义与绝对二次曲线图像相关的对称矩阵 B 及其对应的 6 维向量 b：定义未知量 x，它与固定点深度 z_A 和向量 b 相关：

$$x = z_A^2 b \tag{4}$$

对于每一次观测 i, 由 $h_i = [h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, h_3^{(i)}]^T$ 构建向量 v_i: 将所有 N 次观测 $(N \geq 6)$ 的 v_i 堆叠，构成矩阵 V，并构建方程：

$$Vx = L^2 1 \tag{5}$$

其中 V 是 $N\times 6$ 矩阵（N 行 v_i^T），1 是 $N\times 1$ 的全 1 向量（即这个向量里的每一个元素都是数字 1）。

2.2.3 求解线性系统

方程 (4) 是一个线性最小二乘问题，其解为：

$$x = L^2(V^TV)^{-1}V^T1 \tag{6}$$

求解得到 6 维向量 $x=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]^T$。

2.2.4 从 x 中分解出内参和 z_A

根据 $x=z_A^2b$ 的关系，可以从 x 的分量中直接计算出内参和 z_A：

$$\begin{aligned}
v_0 &= (x_2x_4 - x_1x_5)/(x_1x_3 - x_2^2) \\
z_A &= \sqrt{x_6 - [x_4^2 + v_0(x_2x_4 - x_1x_5)]/x_1} \\
\alpha &= \sqrt{z_A/x_1} \\
\beta &= \sqrt{z_Ax_1/(x_1x_3 - x_2^2)} \\
\gamma &= -x_2\alpha^2\beta/z_A \\
u_0 &= \gamma v_0/\alpha - x_4\alpha^2/z_A
\end{aligned}$$

至此，相机内参矩阵 A 中的所有参数 $\alpha,\beta,\gamma,u_0,v_0$ 均已求得。

3 基于蒙特卡洛方法的扰动分析模型

3.1 分析目的

我们需要评估像点坐标的误差如何传播到最终估算的内外参数上。为了分析像点坐标扰动对最终估算的相机内参（$\alpha,\beta,\gamma,u_0,v_0$）和外参（固定点 A 的世界坐标）标定结果的影响，我们计划采用蒙特卡洛模拟方法。在理想的像点数据上添加了均值为 0、标准差为 的高斯噪声，模拟了图像检测误差。然后进行大量重复实验，统计参数估计值的分布特性，从而有效衡量标定算法的稳健性和精度。

3.2 实验设计

1. **生成理想数据：**
   - 给定相机真实内参矩阵 $\mathbf{A}_{\text{true}}$ 和固定点真实坐标 $\mathbf{A}_{\text{true}}$.
   - 根据问题一，生成 N 个（例如 $N = 6$）一维标定物的姿态（即不同的 θ_i, ϕ_i）。
   - 计算每个姿态下点 A, B_i, C_i 对应的理想像点坐标 $a_{\text{true}}, b_{i,\text{true}}, c_{i,\text{true}}$。

2. **引入扰动：**模拟图像检测过程中引入的随机误差。对每一组理想的像点坐标 p_{true} (p 代表 a, b_i, c_i)，通过添加均值为零、标准差为 σ 的高斯白噪声来生成加噪后的像点坐标：

   $$p^{(\text{noisy})} = p_{\text{true}} + \Delta p, \quad \text{其中} \quad \Delta p \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_{2\times 2})$$

   这里 $\mathbf{I}_{2\times 2}$ 是 2×2 的单位矩阵，意味着我们在 u 和 v 两个坐标方向上独立地添加相同水平 σ（像素）的噪声。

3. **参数反演计算：**将加噪后的像点坐标 $\{a^{(\text{noisy})}, b_i^{(\text{noisy})}, c_i^{(\text{noisy})} \mid i = 1, \ldots, N\}$ 作为输入，完整执行张正友一维标定法的反演计算流程（即：闭式解计算 $\mathbf{B}$ 矩阵，分解得到初始内参，非线性优化 refinement），得到一组受噪声影响的内外参估计值 $\mathbf{A}_{\text{est}}^{(j)}, \mathbf{A}_{\text{est}}^{(j)}$。

4. **重复实验：**将步骤 2 和步骤 3 独立重复 M 次（例如 $M = 1000$），得到内参估计值的集合 $\{\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}, u_0^{(j)}, v_0^{(j)}\}_{j=1}^{M}$ 以及外参（固定点 A）的集合 $\{\mathbf{A}^{(j)}\}_{j=1}^{M}$。

5. **统计分析与敏感性度量：**计算各参数估计值的统计量，用以衡量标定算法

对像点扰动的敏感程度：

$$\text{均值（Mean）}: \quad \bar{\theta} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\theta^{(j)}$$

$$\text{偏差（Bias）}: \quad \mathrm{Bias}(\theta) = \bar{\theta} - \theta_{\mathrm{true}}$$

$$\text{标准差（Std）}: \quad \mathrm{Std}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}(\theta^{(j)} - \bar{\theta})^2}$$

$$\text{均方根误差（RMSE）}: \quad \mathrm{RMSE}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(\theta^{(j)} - \theta_{\mathrm{true}})^2} = \sqrt{\mathrm{Bias}(\theta)^2 + \mathrm{Std}(\theta)^2}$$

其中 θ 代表任一待估参数（$\alpha, \beta, \gamma, u_0, v_0, A_x, A_y, A_z$）。

- **标准差（Std）**：直接量化了参数估计值的离散程度，即对噪声的**敏感性**。Std 值越大，表明该参数对像点扰动越敏感。
- **偏差（Bias）**：衡量估计值的平均偏离程度，反映算法是否存在系统误差。
- **均方根误差（RMSE）**：综合了偏差和方差，是衡量总体估计精度的最佳指标。

6. **改变噪声水平：** 为了更全面地分析敏感性，可以改变噪声水平 σ（例如从 0.1 像素到 1.0 像素），并重复上述步骤 1-5。观察各参数的 $\mathrm{Std}(\theta)$ 和 $\mathrm{RMSE}(\theta)$ 如何随 σ 变化。这可以揭示噪声大小与标定误差之间的定量关系（通常是线性或近似线性的）。