离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎　博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405，Tel：62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ：1062258606

离散数学

第二章 谓词逻辑

回顾

- 谓词公式的翻译
- 推理规则
  - 约束变元改名
  - 自由变元代入
  - 命题变元代换规则
  - 取代规则
  - 量词的增删规则
    - 全称特指（**Universal Specialization**）
    - 存在特指（**Existential specialization**）
    - 存在推广（**existential generalization**）
    - 全称推广（**universal generalization**）
  - 谓词逻辑的命题推理规则推广
    - **P**规则
    - **T**规则
    - **CP**规则
    - **F**规则

谓词逻辑的推理

在谓词逻辑中，推理的形式结构仍为

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \to C$ 是永真式，

则称由前提 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 逻辑的推出结论C，

在此 $H_1, H_2, \ldots, H_n$，C均为谓词公式。

谓词逻辑中的推理

例1： 试证明$(\exists x)M(x)$是前提$(\forall x)(H(x) \to M(x))$和$(\exists x)H(x)$的逻辑结果。

证明：

(1)	$(\exists x)H(x)$	P
(2)	$H(y)$	$ES,(1)$
(3)	$(\forall x)(H(x) \to M(x))$	P
(4)	$H(y) \to M(y)$	$US,(3)$
(5)	$M(y)$	$T,(2),(4)$
(6)	$(\exists x)M(x)$	$EG,(5)$

谓词逻辑中的推理

例2：试证明

$$(\forall x)(P(x)\to Q(x)),\ (\forall x)(Q(x)\to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\to R(x))$$

证明：

(1)	$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	P
(2)	$P(x)\to Q(x)$	$US,(1)$
(3)	$(\forall x)(Q(x)\to R(x))$	P
(4)	$Q(x)\to R(x)$	$US,(3)$
(5)	$P(x)\to R(x)$	$T,(2),(4)$
(6)	$(\forall x)(P(x)\to R(x))$	$UG,(5)$

谓词逻辑中的推理

例3： 已知前提$(\exists x)(R(x)\wedge(\forall y)(D(y)\rightarrow L(x,y)))$,

$(\forall x)(R(x)\rightarrow(\forall y)(S(y)\rightarrow\neg L(x,y)))$

试推出结论:$(\forall x)(D(x)\rightarrow\neg S(x))$

证明：

(1)	$(\exists x)(R(x)\wedge(\forall y)(D(y)\rightarrow L(x,y)))$	P
(2)	$(R(a)\wedge(\forall y)(D(y)\rightarrow L(a,y)))$	$ES,(1)$
(3)	$R(a)$	$T,(2)$
(4)	$(\forall y)(D(y)\rightarrow L(a,y))$	$T,(2)$
(5)	$D(u)\rightarrow L(a,u)$	$US,(4)$
(6)	$(\forall x)(R(x)\rightarrow(\forall y)(S(y)\rightarrow\neg L(x,y)))$	P
(7)	$R(a)\rightarrow(\forall y)(S(y)\rightarrow\neg L(a,y))$	$US,(6)$
(8)	$(\forall y)(S(y)\rightarrow\neg L(a,y))$	$T,(3),(7)$

谓词逻辑中的推理

已知前提$(\exists x)(R(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$,

$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\forall y)(S(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

试推出结论:$(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg S(x))$

接上页

(9)	$S(u) \rightarrow \neg L(a,u)$	$US,(8)$
(10)	$L(a,u) \rightarrow \neg S(u)$	$T,(9)$
(11)	$D(u) \rightarrow \neg S(u)$	$T,(5),(10)$
(12)	$(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg S(x))$	$UG,(11)$

例4　指出下面推理的错误.

设$D(x,y)$表示“x可被y 整除”,个体域 为 $\{5,7,10,11\}$.

因为$D(5,5)$和$D(10,5)$为真，所以$\exists xD(x,5)$为真.

因为$D(7,5)$和$D(11,5)$为假，所以$\forall xD(x,5)$为假.

但有下面的推理过程：

	(1)	$\exists xD(x,5)$	前提
错！	(2)	$D(z,5)$	(1);ES
	(3)	$\forall xD(x,5)$	(2);UG

因此，$\exists xD(x,5) \Rightarrow \forall xD(x,5)$.

反证法举例

例5： 给定前提$(\forall x)(A(x) \vee B(x)), (\forall x)(B(x) \to \neg C(x)), (\forall x)C(x)$

试推出结论：$(\forall x)A(x)$

证明：

(1)	$\neg(\forall x)A(x)$	P(假设前提
(2)	$(\exists x)\neg A(x)$	$T,(1)$
(3)	$\neg A(a)$	$ES,(2)$
(4)	$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$	P
(5)	$A(a) \vee B(a)$	$US,(4)$
(6)	$B(a)$	$T,(3),(5)$
(7)	$(\forall x)(\mathrm{B}(x) \to \neg \mathrm{C}(x))$	P
(8)	$B(a) \to \neg C(a)$	$US,(7)$
(9)	$\neg C(a)$	$T,(6),(8)$
(10)	$(\forall x)\mathrm{C}(x)$	P

反证法举例

接上页

(11)	$C(a)$	$US,(10)$
(12)	$C(a)\wedge\neg C(a)$	$T,(9),(11)$
(13)	$(\forall x)A(x)$	F,(1),(12)

谓词逻辑中的推理

例6：使用*CP*规则证明

$$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))\Rightarrow(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y)$$

证明：由于$(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)(Qy)$

$$\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$$

因此原来的证明转化为证明下式：

$$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))\Rightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$$

谓词逻辑中的推理

证明$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$

(1)	$(\exists x)P(x)$	P(附加前提)
(2)	$P(a)$	$ES,(1)$
(3)	$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))$	P
(4)	$(\forall y)(\neg P(a)\vee Q(y))$	$US,(3)$
(5)	$\neg P(a)\vee Q(b)$	$US,(4)$
(6)	$Q(b)$	$T,(2),(5)$
(7)	$(\forall y)Q(y)$	$UG,(6)$
(8)	$(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)\mathrm{Q}(\mathrm{y})$	$CP,(1),(7)$

例7 对多个量词的使用情况，观察下列推理过程.

证明	（1） $\forall x \exists y P(x,y)$	前提
	（2） $\exists y P(z,y)$	（1）；US
错！	（3） $P(z,d)$	（2）；ES
错！	（4） $\forall x P(x,d)$	（3）；UG
	（5） $\exists y \forall x P(x,y)$	（4）；EG

推出错误结论：$\forall x$与 $\exists y$可交换.

注意：公式(2)中z有两种可能

1)若z是自由个体变元，则此时y的值是随z的变化而变化的，因此不能用ES规则将y改为个体常元d。

2)若z是个体常元，则公式(3)没错，但此时不能用UG规则得到(4) $\forall x P(x,d)$。

谓词逻辑求解实际问题

- 步骤：
  - 根据问题的需要定义一组谓词
  - 将实际问题符号化
  - 使用推理规则有效推理

- 注意：
  - 符号化的原则：全称量词对应逻辑联结词→，存在量词对应逻辑联结词∧
  - 推理时首先引入带存在量词的前提，以保证“*ES*”规则的有效性

谓词逻辑求解实际问题

例8：证明苏格拉底的三段论。

所有的人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底是要死的。

解：$M(x)$:x是人；$D(x)$:x是要死的；c:苏格拉底。

苏格拉底三段论可以表示成：

$$\forall x(M(x) \to D(x)), M(c) \Rightarrow D(c)$$

证明：

(1)	$M(c)$	P
(2)	$\forall x(M(x) \to D(x))$	P
(3)	$M(c) \to D(c)$	US, (2)
(4)	$D(c)$	T,{1},{3}

谓词逻辑求解实际问题

例9：所有的自然数都是整数，任何整数不是奇数就是偶数，并非每个自然数都是偶数。所以，某些自然数是奇数。

解：第一步，定义谓词：

$N(x)$：x是自然数；　　$I(x)$：x是整数；

$Q(x)$：x是奇数；　　$O(x)$：x是偶数。

第二步，问题符号化：

$$(\forall x)(N(x) \rightarrow I(x))$$

$$(\forall x)(I(x) \rightarrow (Q(x) \nabla O(x)))$$

$$\neg(\forall x)(N(x) \rightarrow O(x))$$

$$\Rightarrow (\exists x)(N(x) \wedge Q(x))$$

谓词逻辑求解实际问题

$$(\forall x)(N(x)\to I(x)),\quad (\forall x)(I(x)\to(Q(x)\nabla O(x)))$$

$$\neg(\forall x)(N(x)\to O(x))\quad\Rightarrow(\exists x)(N(x)\wedge Q(x))$$

第三步，证明:

(1)	$\neg(\forall x)(N(x)\to O(x))$	P
(2)	$(\exists x)\neg(\neg N(x)\vee O(x))$	$T,(1)$
(3)	$\mathrm{N(a)}\wedge\neg O(a)$	$ES,(2)$
(4)	$\mathrm{N(a)}$	$T,(3)$
(4)	$\neg O(a)$	$T,(3)$
(5)	$(\forall x)(N(x)\to I(x))$	P
(6)	$\mathrm{N(a)}\to\mathrm{I(a)}$	$US,(5)$
(7)	$\mathrm{I(a)}$	$T,(4),(6)$

谓词逻辑求解实际问题

接上页

(8)	$(\forall x)(I(x) \to (Q(x) \nabla O(x)))$	P
(9)	$I(a) \to (Q(a) \nabla O(a))$	$US,(8)$
(10)	$Q(a) \nabla O(a)$	$T,(7),(9)$
(11)	$Q(a)$	$T,(4),(10)$
(12)	$N(a) \wedge Q(a)$	$T,(4),(11)$
(13)	$(\exists x)(N(x) \wedge Q(x))$	$EG,(12)$

谓词逻辑求解实际问题

例10：每个报考研究生的大学毕业生要么参加研究生入学考试，要么推荐为免考生；每个报考研究生的大学毕业生当且仅当学习成绩优秀才被推荐为免试生；有些报考研究生的大学毕业生学习成绩优秀，但并非所有报考研究生的大学毕业生学习成绩都优秀。因此，有些报考研究生的大学毕业生要参加研究生入学考试。

解：定义谓词如下：

$YJS(x)$：x是要报考研究生的大学毕业生；

$MKS(x)$：x是免考生；

$CJYX(x)$：x是成绩优秀的；

$CJKS(x)$：x是参加考试的。

谓词逻辑求解实际问题

第二步，符号化问题

$$(\forall x)(YJS(x) \to (CJKS(x) \nabla MKS(x))$$

$$(\forall x)(YJS(x) \to (MKS(x) \leftrightarrow CJYX(x)))$$

$$\neg(\forall x)(YJS(x) \to CJYX(x))$$

$$(\exists x)(YJS(x) \wedge CJYX(x))$$

$$\Rightarrow (\exists x)(YJS(x) \wedge CJKS(x))$$

谓词逻辑求解实际问题

第三步，证明

(1)	$\neg(\forall x)(YJS(x) \to CJYX(x))$	P
(2)	$(\exists x)\neg(\neg YJS(x) \vee CJYX(x))$	$T,(1)$
(3)	$YJS(\mathrm{a}) \wedge \neg CJYX(a)$	$ES,(2)$
(4)	$YJS(\mathrm{a})$	$T,(3)$
(5)	$\neg CJYX(a)$	$T,(3)$
(6)	$(\forall x)(YJS(x) \to (CJKS(x) \nabla MKS(x))$	P
(7)	$YJS(\mathrm{a}) \to (CJKS(a) \nabla MKS(a))$	$US,(6)$
(8)	$CJKS(\mathrm{a}) \nabla MKS(a)$	$T,(4),(7)$
(9)	$(\forall x)((YJS(x) \to (MKS(x) \leftrightarrow CJYX(x))))$	P

谓词逻辑求解实际问题

接上页

(10)	$YJS(a) \to (MKS(a)) \leftrightarrow CJYX(a))$	$US,(9)$
(11)	$MKS(a) \leftrightarrow CJYX(a)$	$T,(4),(10)$
(12)	$\neg MKS(a)$	$T,(5),(11)$
(13)	$CJKS(a)$	$T,(8),(12)$
(14)	$YJS(a) \wedge CJKS(a)$	$T,(4),(13)$
(15)	$(\exists x)(YJS(x) \wedge CJKS(x))$	$EG,(14)$

谓词逻辑求解实际问题

例11：所有的蜂鸟都五彩斑斓；没有大鸟以蜜为生；不以蜜为生的鸟都色彩单调；因此，蜂鸟都是小鸟。

解：定义谓词如下：

$P(x)$：**x**是只蜂鸟；

$Q(x)$：**x**是大鸟；

$R(x)$：**x**是以蜜为生的鸟；

$S(x)$：**x**五彩斑斓。

$$\forall x(P(x)\to S(x)),\quad \neg\exists x(Q(x)\wedge R(x)),$$

$$\forall x(\neg R(x)\to\neg S(x))\Rightarrow\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$$

谓词逻辑求解实际问题

$\forall x(P(x)\to S(x)),\neg\exists x(Q(x)\wedge R(x)),$

$\forall x(\neg R(x)\to\neg S(x))\Rightarrow\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$

证明：

(1)	$\forall x(P(x)\to S(x))$	P
(2)	$P(x)\to S(x)$	$US,(1)$
(3)	$\forall x(\neg R(x)\to\neg S(x))$	P
(4)	$\neg R(x)\to\neg S(x)$	$US,(3)$
(5)	$S(x)\to R(x)$	$T,(4)$
(6)	$\neg\exists x(Q(x)\wedge R(x))$	P
(7)	$\forall x(\neg Q(x)\vee\neg R(x))$	$T,(6)$
(8)	$\neg Q(x)\vee\neg R(x)$	$US,(7)$
(9)	$R(x)\to\neg Q(x)$	$T,(8)$
(10)	$P(x)\to R(x)$	$T,(2)(5)$
(11)	$P(x)\to\neg Q(x)$	$T,(10)(9)$
(12)	$\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$	$UG,(11)$

随堂练习

练习：符号化下列命题，并利用推理规则论证结论。

所有牛都有角，有些动物是牛，所以有些动物有角

2.5谓词公式的范式

- 命题逻辑中的两种范式都可以直接推广到谓词逻辑中来，只要把原子命题公式换成原子谓词公式即可，
- 根据量词在公式中出现的情况不同，又可分为前束范式和斯柯林范式。

前束范式

- 定义：对任一谓词公式***F***，如果其中所有量词均非否定的出现在公式的最前面，且它们的辖域为整个公式，则称公式***F***为前束范式。

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,y) \vee Q(x,y) \wedge R(x,y,z))$$

前束范式

- 任意一个公式都可以转化成与之等价的前束范式，方法如下：
  - 消去公式中的联结词↔和→，例如

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

  - 将公式内的否定符号深入到谓词变元前并化简到谓词变元前只有一个否定号；
  - 利用改名、代入规则使所有的约束变元均不同名，且使自由变元与约束变元亦不同名；
  - 扩充量词的辖域至整个公式。

前束范式

例：将下列公式转化成前束范式。

$$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(y))\rightarrow(\forall x)F(x)$$

解：

$$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(y))\rightarrow(\forall x)F(x)$$

$$\Leftrightarrow\neg((\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(y))\vee(\forall x)F(x)$$

$$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg R(y)\vee(\forall x)F(x)$$

$$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg R(y)\vee(\forall z)F(z)$$

$$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\neg P(x)\wedge\neg R(y)\vee F(z))$$

斯柯林范式

- 定义：如果前束范式中所有的存在量词均在全称量词之前，则称这种形式为<u>斯柯林范式</u>。

$$(\exists x)(\exists z)(\forall y)(P(x,y)\vee Q(y,z)\vee R(y))$$

斯柯林范式

- 任何一个公式都可以化为与之等价的斯柯林范式，方法如下：
  - 先将给定公式化为前束范式；
  - 将前束范式中的所有自由变元用全称量词（***UG***）约束；
  - 若经上述改造后的公式***A***中，第一个量词不是存在量词，则可以将等价变换成如下形式

$$(\exists u)(A \wedge (G(u) \vee \neg G(u)))$$

  - 如果前束范式是由**n**个存在量词开始，然后是**m**个全称量词，后面还跟有存在量词，则可以利用下述等价式将这些全称量词逐一移到存在量词之后去：

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y)P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\exists y)((P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \wedge \neg H(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$$

$$\vee (\forall z)H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z))$$

斯柯林范式

例：将公式 $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(y))\wedge R(z)$ 化成斯柯林范式。

解：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(y))\wedge R(z)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee(\exists y)Q(y))\wedge R(z)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\neg P(x)\vee Q(y))\wedge R(z)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\neg P(x)\vee Q(y))\wedge(\forall z)R(z)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg P(x)\vee Q(y))\wedge R(z))$$

$$\Leftrightarrow(\exists u)((\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg P(x)\vee Q(y))\wedge R(z))\wedge (G(u)\vee\neg G(u)))$$

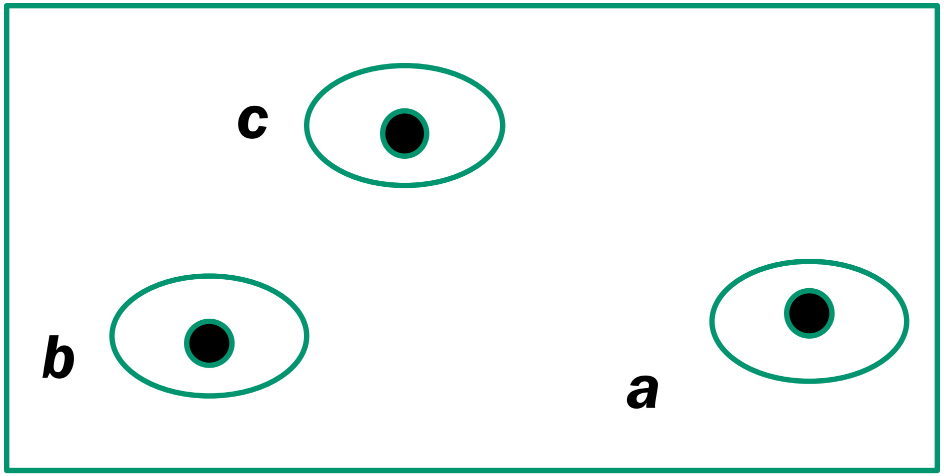
$$\Leftrightarrow(\exists u)(\exists x)((\exists y)(\forall z)((((\neg P(x)\vee Q(y))\wedge R(z))\wedge (G(u)\vee\neg G(u)))\wedge\neg H(u,x))\vee(\forall s)H(u,s))$$

$$\Leftrightarrow(\exists u)(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\forall s)(((((\neg P(x)\vee Q(y))\wedge R(z))\wedge (G(u)\vee\neg G(u)))\wedge\neg H(u,x))\vee H(u,s))$$

2.6谓词逻辑的应用—人工智能

- 人工智能（**Artificial Intelligence**）是一种使用计算机模拟人类智能的技术。在人工智能的实现过程中，知识有着至关重要的作用，如何运用知识进行推理并解决问题是研究人工智能的重要课题。而要想获取并应用知识，首先需要能够对知识进行正确有效的表示。因此，知识表示是实现人工智能的首要问题和基本技术。
- 谓词逻辑是应用于人工智能中最重要的一种知识表示方法。常被用来表述描述性语句，并可以有效地存储到计算机中进行处理。在人工智能的知识表示中，谓词逻辑不但可以用来形式化地描述自然语言和数学知识等，还可以对智能行为过程进行描述。

- 猴子吃香蕉问题：设房内**a**处有一只猴子，一串香蕉挂在**c**处天花板上，猴子够不着，**b**处有一个箱子，猴子从**a**处出发把箱子从**b**处搬到**c**处，爬上箱子，摘下香蕉，回到**a**处。请用谓词表示法来描述该问题以及猴子的行动过程。



（1）定义描述环境状态的谓词

AT(*x* , *w*): *x*在*w*处，个体域*x*∈{monkey}，*w*∈{*a*, *b*, *c*};

HOLD(*x* , *t*): *x*手中拿着*t*，个体域*t*∈{box, banana};

EMPTY(*x*): *x*手中是空的;

ON(*t* , *y*): *t*在*y*处，个体域*y*∈{*b*, *c*, centre};

CLEAR(*y*): *y*上是空的;

BOX(*u*): *u*是箱子，个体域*u*∈{box};

BANANA(*v*): *v*是香蕉，个体域*v*∈{banana};

（2）使用谓词、联接词和量词来表示环境状态

问题的初始状态可表示为：

S_0: AT(monkey, *a*) ∧ EMPTY(monkey) ∧ ON(box, *b*) ∧ ON(banana, center) ∧ CLEAR(*c*) ∧ BOX(box) ∧ BANANA(banana)

要达到的目标状态为：

S_g: AT(monkey, *a*) ∧ HOLD(monkey, banana) ∧ ON(box, *c*) ∧CLEAR(center) ∧ CLEAR(*b*) ∧ BOX(box) ∧ BANANA(banana)

（**3**）从初始状态到目标状态的转化，猴子需要完成一系列操作，定义操作类谓词表示它的动作

WALK(***m*****,** ***n*****):** 猴子从***m***走到***n***处，个体域***m*****,*****n***∈**{*****a*****,*****b*****,*****c*****};**

CARRY(***s*****,** ***r*****):** 猴子在***r***处拿到***s***，个体域***r***∈**{*****b*****, centre},*****s***∈**{box, banana};**

CLIMB(***u*****,** ***c*****):** 猴子在***c***处爬上***u*****;**

这三个操作也分别用条件和动作表示。条件是为完成相应操作而必须具备的前提，当具备时激活操作动作，通过从动作前删除或增加谓词公式来描述动作后的状态。以第一个动作为例：

WALK(***m*****,** ***n*****):** 猴子从***m***走到***n***处，个体域***m*****,*****n***∈**{*****a*****,*****b*****,*****c*****}**

条件：**AT(monkey,** ***m*****);**

动作：删除：**AT(monkey,** ***m*****);** 增加：**AT(monkey,** ***n*****);**

（4）按照行动计划，一步步执行操作，进行状态替换，直至目标状态。本部分替换过程省略，读者可以自行代换。

通过上面的例子，我们可以归纳出用谓词逻辑表示具体知识的步骤：（1）将给定命题中的量词、个体词和谓词分析出来，并将谓词用特定的符号表示；（2）运用逻辑连接符来表示原命题中所含子命题之间的复合关系；（3）构造出该命题所对应的形式化的表达公式。

对于描述智能行为过程的知识，则需要分别定义描述环境状态的谓词和表示动作的操作谓词。通过使用谓词、联接词和量词来表示各个环节的环境的状态。并按照活动的计划，使用操作类谓词，一步步转化状态，直到完成从初始状态到目标状态的转化。

运用谓词逻辑的方法，就可以将自然语言、数学知识乃至行为知识进行形式化进而输入到计算机中，建立计算机系统的知识库，方便进行问题求解和机器定理证明。人工智能和知识表示也是谓词逻辑方法重要的应用领域。

作业

- **P49**
  - **8**
  - **9(1)**
  - **10（1、2）**
  - **11（2）**