- **1.** $(P_{141}-2)$ 设 $X_1, X_2, \cdots X_n, X_{n+1}, \cdots X_{n+m}$，为总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$
- 的样本，求常数***a*,*b***使 $a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b\left(\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i\right)^2$服从 χ^2分布，并求自由度。

解：

$$X_i \sim N(0,\sigma^2) \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n),$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i \sim N(0, m\sigma^2), \quad \frac{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i}{\sigma\sqrt{m}} \sim N(0,1), \quad \left(\frac{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i}{\sigma\sqrt{m}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b\left(\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i\right)^2 \sim \chi^2(n+1) \qquad a = \frac{1}{\sigma^2}, b = \frac{1}{m\sigma^2}$$

- **2.** $\left(P_{141}-3\right)$设总体 $X \sim N\left(0,4^2\right)$，$X_1, X_2, \cdots X_{10}$是来自总体的一个
- 简单随机样本，S^2是样本方差，已知 $P\left(S^2 > a\right)=0.1$求 ***a***。
- 解：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{9S^2}{4^2}\sim\chi^2(9)$$

$$P\left(\frac{9S^2}{16}>\chi^2_{0.1}(9)\right)=0.1$$

$$a=\frac{16}{9}\chi^2_{0.1}(9)=\frac{16}{9}14.684=26.105$$

• **3.** $(P_{141}-6)$ 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots X_{2n}$ $(n\ge 2)$是总体的

• 一个样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，令 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{i+n}-2\overline{X}\right)^2$，求$EY$.

解：令$Z=X_i+X_{i+n}$，$\overline{Z}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{i+n}\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$

$$S_z^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\overline{Z}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{i+n}-2\overline{X}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{i+n}-2\overline{X}\right)^2=(n-1)S_Z^2,\qquad DZ=2\sigma^2$$

$$\frac{(n-1)S_Z^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\qquad E\left\{\frac{(n-1)S_Z^2}{2\sigma^2}\right\}=n-1$$

- $$EY = E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right)^2\right\} = E\{(n-1)S_Z^2\} = (n-1)2\sigma^2$$

- 解法**2.** $$EY = E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{D\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right) + \left[E\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right)\right]^2\right\}$$

$$E\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right) = 0$$

$$D\left(X_i + X_{i+n} - 2\overline{X}\right)$$

$$= D(X_i) + D(X_{i+n}) + 4D(\overline{X}) - 4Cov\left(X_i + X_{i+n}, \overline{X}\right)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + 4\frac{\sigma^2}{2n} - 4\left(\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma^2}{2n}\right) = \frac{(n-1)2\sigma^2}{n}, \quad EY = (n-1)2\sigma^2$$

- **4.** $\left(P_{158}-6\right)$设总体 X 的密度函数为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

- 其中 ϑ 是未知参数（**0<θ<1**），$X_1, X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随
- 机样本，记 N 为样本值中小 于**1**的个数。（**1**）求的矩估计；
- （**2**）求的极大似然估计。 $\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$
- 解：**(1)** $E(X)=\int_0^1 x\theta dx+\int_1^2 x(1-\theta)dx=\dfrac{3}{2}-\theta$, 令 $\overline{X}=EX$
- **(2)** $L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$, $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{N}{\hat{\theta}}-\dfrac{n-N}{1-\hat{\theta}}=0$

$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln L(1-\theta)$ $\hat{\theta}=N/n$