离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎

第9章
图的基本概念及其矩阵表示论

回顾

- 图的基本概念
  - 度
- 子图和图的运算

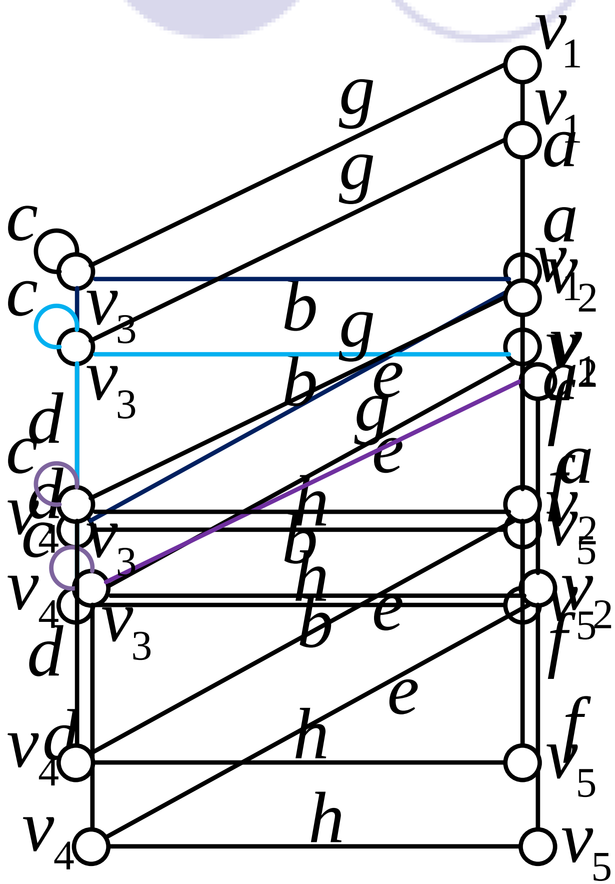
9.3路径、回路和连通性

- 定义：设$G=\langle V,E\rangle$是图，从图中结点v_0到v_n的一条路径或通路是图的一个点、边的交错序列$(v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_n)$，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$(或者$e_i=\langle v_{i-1},v_i\rangle$)（$i=1,2,\cdots n$）
- v_0，v_n分别称为通路的起点和终点
- 路径中包含的边数n称为路径的长度
- 当起点和终点重合时，称其为闭合路径

- 定义：如果$G=\langle V,E\rangle$中出现的边$e_1,e_2,\cdots,e_n$互不相同，则称该路径为简单路径。
- 闭的简单路径称为回路。
- 如果出现的点$v_1,v_2\cdots,v_n$互不相同，则称该路径是基本路径。
- 基本路径中除了起点和终点相同外，别无相同的点，则称为圈。

路径和回路

例：分析下列无向图



在该无向图中，$v_2 b v_3 d v_4 e v_2 b v_3$是路径，但不是简单路径；

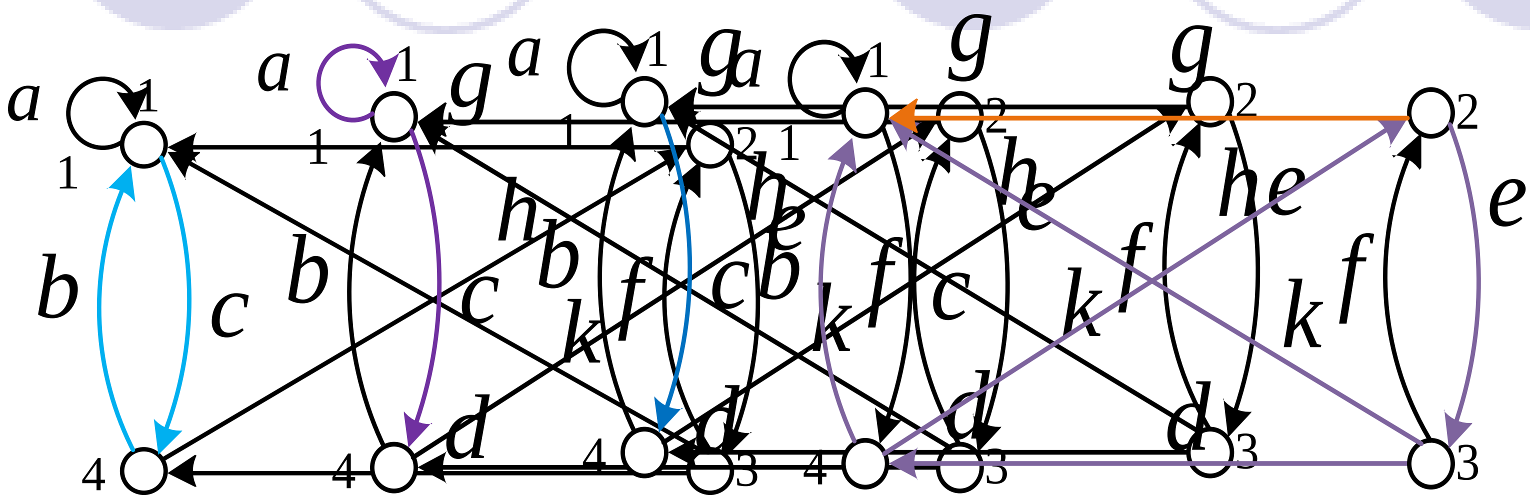
$v_2 b v_3 c v_3 d v_4$是简单路径，但不是基本路径；

$v_3 c v_3 c v_3$是闭路径，但不是简单闭路径。

另外，如果从路径$v_1 g v_3 c v_3$中去掉闭路径$v_3 c v_3$就得到基本路径$v_1 g v_3$。

路径和回路

例：分析下列有向图



在该有向图中，1*c*4*b*1*c*4是路径，但不是简单路径；1*a*1*c*4是简单路径，但不是基本路径。

从1*a*1*c*4中去掉闭路径1*a*1就得到基本路径1*c*4

可以看出，从2至1存在多条路径，如果4到2的箭头反向，从1至2就没有路径。

路径和回路

注意：

•单独一个结点v也是路径，它是长度为0的基本路径。因此，任何结点到其自身总存在路径。

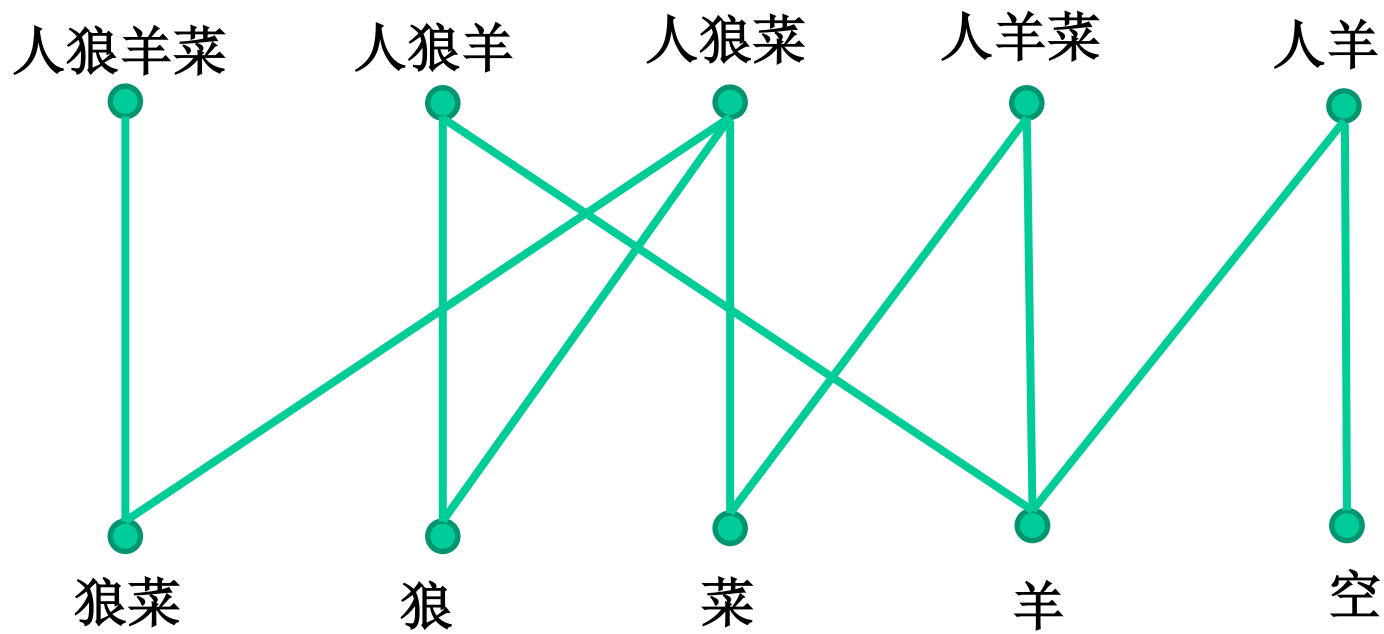
•在无向图中，若从结点v至结点v'存在路径，则从v'至v必存在路径。

•而在有向图中，从结点v至v'结点存在路径，而从v'至v却不一定存在路径。

设路径$P_1 = v_0 e_1 v_1 \cdots v_{n-1} e_n v_n$和$P_2 = v_n e'_1 v'_1 \cdots v'_{m-1} e'_m v'_m$，用$P_1 P_2$记路径$v_0 e_1 v_1 \cdots v_{n-1} e_n v_n e'_1 v'_1 \cdots v'_{m-1} e'_m v'_m$

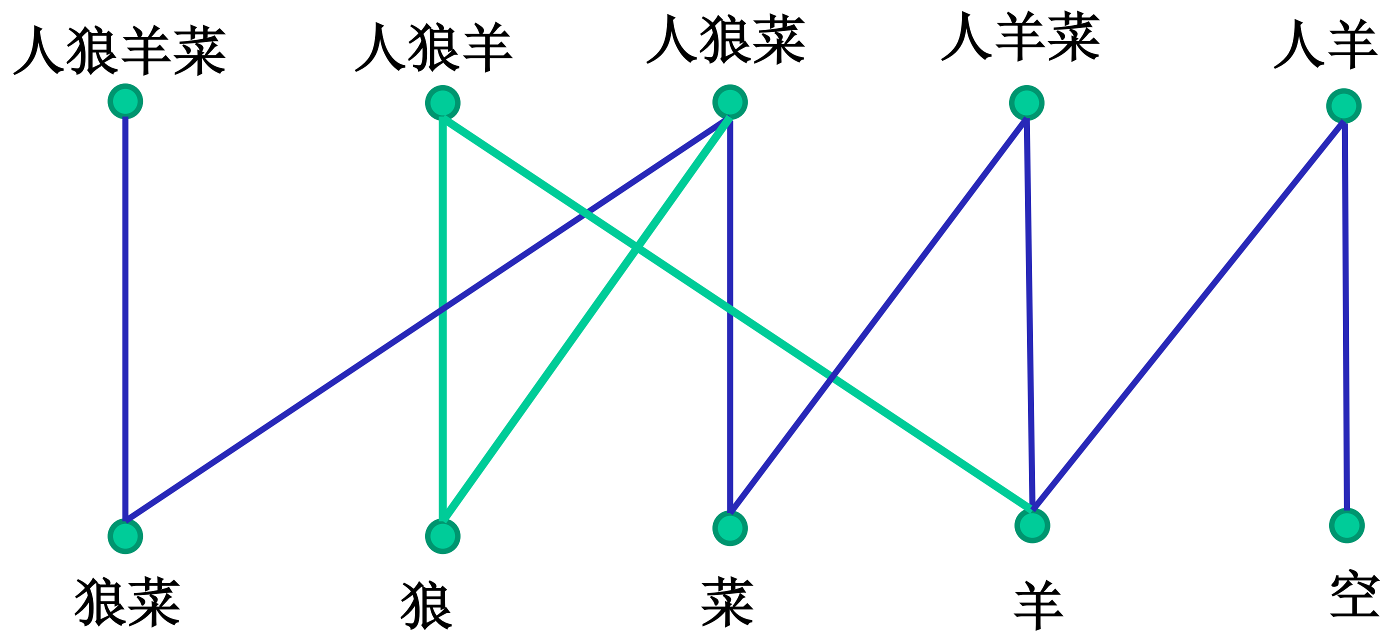
路径和回路

例：“摆渡问题”：一个人带有一条狼、一头羊和一捆白菜，要从河的左岸渡到右岸去，河上仅有一条小船，而且只有人能划船，船上每次只能由人带一件东西过河。另外，不能让狼和羊、羊和菜单独留下。问怎样安排摆渡过程？



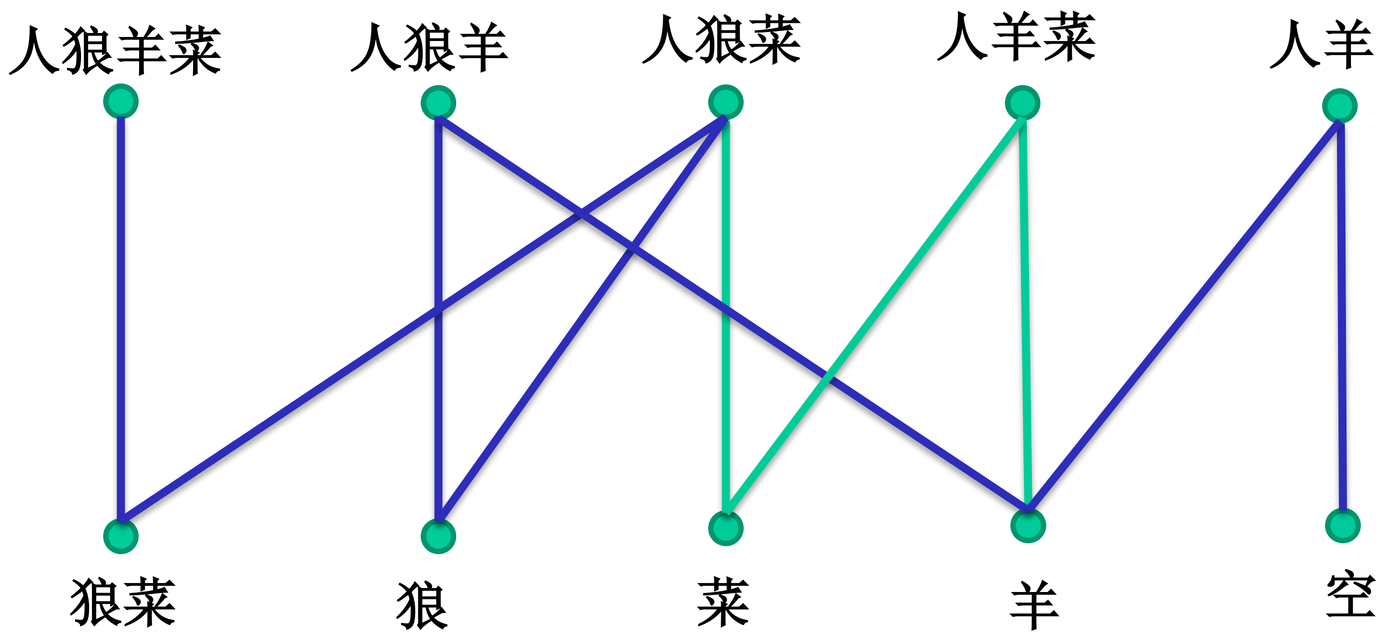
路径和回路

例：“摆渡问题”：一个人带有一条狼、一头羊和一捆白菜，要从河的左岸渡到右岸去，河上仅有一条小船，而且只有人能划船，船上每次只能由人带一件东西过河。另外，不能让狼和羊、羊和菜单独留下。问怎样安排摆渡过程？



路径和回路

例：“摆渡问题”：一个人带有一条狼、一头羊和一捆白菜，要从河的左岸渡到右岸去，河上仅有一条小船，而且只有人能划船，船上每次只能由人带一件东西过河。另外，不能让狼和羊、羊和菜单独留下。问怎样安排摆渡过程？



路径和回路

解： 河左岸允许出现的情况有以下10种情况：人狼羊菜、人狼羊、人狼菜、人羊菜、人羊、狼菜、狼、菜、羊及空（各物品已安全渡河），我们把这10种状态视为10个点，若一种状态通过一次摆渡后变为另一种状态，则在两种状态（点）之间画一直线，得到上图。

这样摆渡问题就转化成在图中找出以“人狼羊菜”为起点，以“空”为终点的简单路。容易看出，只有两条简单路符合要求，即：

（1）人狼羊菜、狼菜、人狼菜、菜、人羊菜、羊、人羊、空；

（2）人狼羊菜、狼菜、人狼菜、狼、人狼羊、羊、人羊、空。

对于简单路（1）的安排为：人带羊过河；人回来；带狼过河；放下狼再将羊带回；人再带菜过河；人回来；带羊过河。

对于简单路（2）的安排为：人带羊过河；人回来；带菜过河；放下菜再将羊带回；人再带狼过河；人回来；带羊过河。

上述的两种方案都是去4次、回3次，且不会再有比这更少次数的渡河办法了。

路径和回路

定理： 设v和v'是图G中的结点。如果存在从v至v'的路径，则存在从v至v'的基本路径。

证： 设当从v至v'存在长度小于l的路径时，从v至v'必存在基本路径。

如果存在路径$v_0 e_1 v_1 \cdots v_{l-1} e_l v_l$，其中$v_0 = v$，$v_l = v'$，

并且有i和j满足$0 \le i \le j \le l$且$v_i = v_j$，则

$v_0 e_1 v_1 \cdots v_i e_{j+1} v_{j+1} \cdots v_{l-1} e_l v_l$ 是从v至v'的长度为$l - j + i$的路径。

根据归纳假设，存在从v至v'的基本路径。

路径和回路

定理： n阶图中的基本路径的长度小于或等于n-1。

证： 在任何基本路径中，出现于序列中的各结点都是互不相同的。

在长度为l的任何基本路径中，不同的结点数目是l+1。

因为集合V仅有n个不同的结点，所以任何基本路径的长度不会大于n-1。

对于长度为l的基本循环来说，序列中有l个不同的结点。因为是n阶图，所以任何基本循环的长度，都不会超过n

综上所述，在n阶图中，基本路径的长度不会超过n-1。

路径和回路

路径可以表示很多图模型中的有用信息：

熟人关系图中的通路（最小世界原理）

合作图中的通路（数学家的埃德斯数）

好莱坞图中的通路（演员的培根数（著名演员凯文.培根））

路径和回路

定理： 设v是图G的任意结点，G是基本回路或有向基本回路，当且仅当G的阶与边数相等，并且在G中存在这样一条从v到v的闭路径，使得除了v在该闭路径中出现两次外，其余结点和每条边都在该闭路径上恰出现一次。

基本回路：回路中除始点和终点出现2次外，其余节点只出现一次。

证： 见书上。

路径和回路

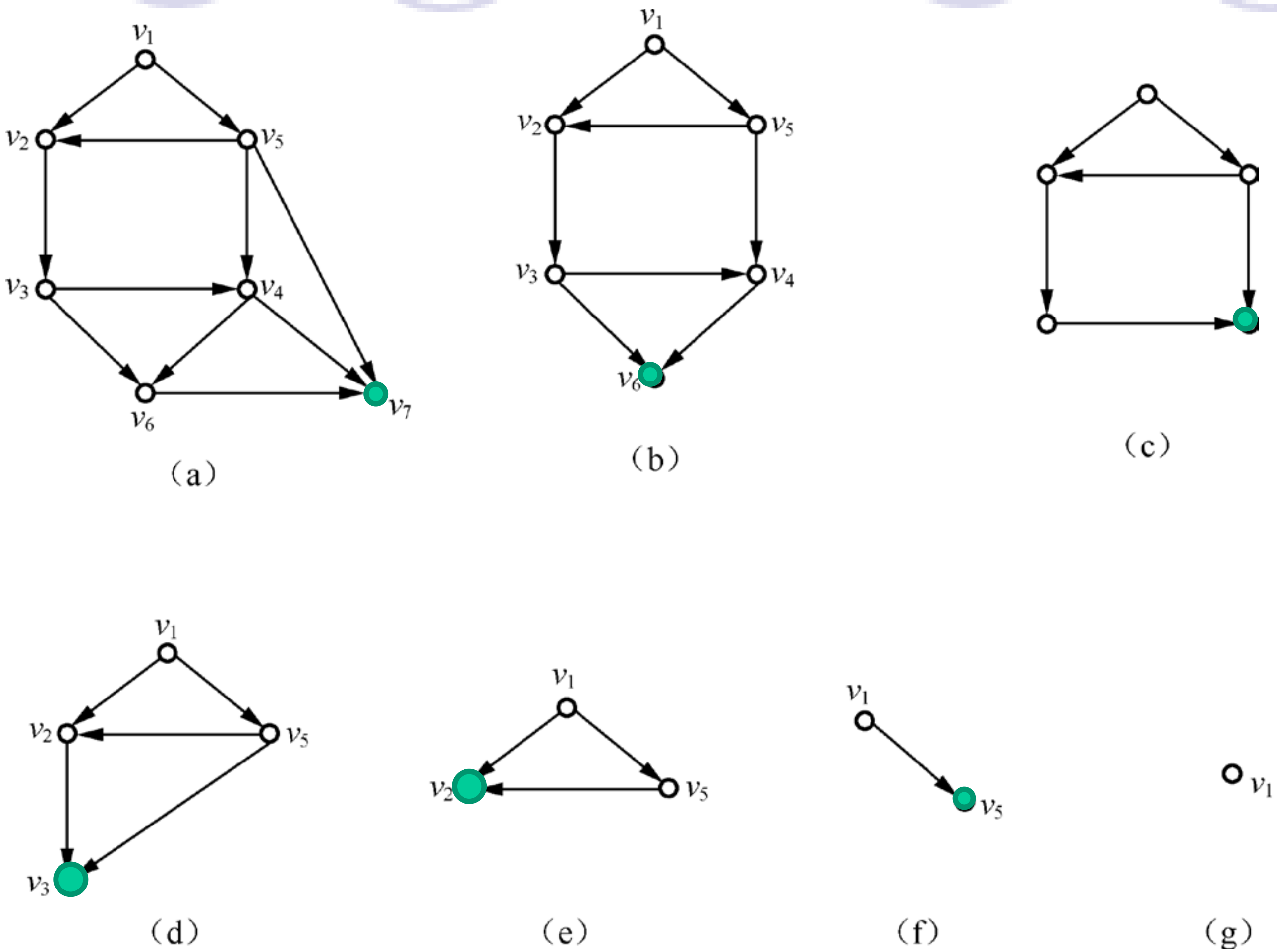
- 定义：如果回路(有向回路、无向回路)C是图G的子图，则称G有回路(有向回路、无向回路) C
- 定理：如果有向图G有子图G'满足：对于的任意结点v，$d_{G'}^{+} > 0$（或$d_{G'}^{-} > 0$），则G有有向回路
- 证明：设$G' = \langle V', E', \psi' \rangle$，$v_0 e_1 v_1 \cdots v_{n-1} e_n v_n$是$G'$中最长的基本路径。
- 由于$d_{G'}^{+} > 0$，必可找到$e_{n+1} \in E'$和$v_{n+1} \in V'$，使$v_0 e_1 v_1 \cdots v_{n-1} e_n v_n e_{n+1} v_{n+1}$是$G'$中的简单路径，且$v_{n+1} = v_i (0 \le i \le n)$。
- G的以$\{v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n\}$为节点集合，以$\{e_{i+1}, e_{i+2}, \cdots, e_{n+1}\}$为边集合的子图是有向回路

路径和回路

设v是有向图G的结点，$d_G^+(v) = 0$，从G中去掉v和与之相关联的边得到有向图$G - \{v\}$的过程，称为w过程。G有有向回路，当且仅当$G - \{v\}$有有向回路。若n阶有向图G没有有向回路，则经过n-1次w过程得到平凡图，否则至多经过n-1次w过程得到每个结点的出度均大于0的有向图。这样，我们就找出了判断一个有向图有没有有向回路的有效办法。当然，也可以把w过程定义为去掉入度为0的结点。

路径和回路

例：判断图 (a)有没有有向回路。



连通性

定义： 设v_1和v_2是图G的结点。如果在G中存在从v_1至v_2的路径，则称在G中从v_1<u>可达</u>v_2或v_1和v_2是<u>连通的</u>，否则称在G中从v_1<u>不可达</u>v_2。

对于图G的结点，用$R(v)$表示从v可达的全体结点的集合。

注意： 在无向图中，若从v_1可达v_2，则从v_2必可达v_1；

在有向图中，从v_1可达v_2不能保证从v_2必可达v_1。

无论无向图还是有向图，任何节点到自身都是可达的。

连通性

设v_1和v_2是图G的结点。如果从v_1至v_2是可达的，则在从v_1至v_2的路径中，长度最短的称为从v_1至v_2的测地线，并称该测地线的长度为从v_1至v_2的距离，记作$d\langle v_1, v_2\rangle$。

如果从v_1不可达v_2，则称从v_1至v_2的距离为∞。

定义：图$G = \langle V, E, \psi\rangle$的直径定义为

$$\max d\langle v, v'\rangle \ (v, v' \in V)$$

连通性

- 从结点v_i至v_j的距离$d\langle v_i, v_j \rangle$具有下列性质
  对任何结点$v_i, v_j, v_k \in V$来说，都应有
  1. $d\langle v_i, v_i \rangle = 0$
  2. $d\langle v_i, v_j \rangle \geq 0$
  3. $d\langle v_i, v_j \rangle + d\langle v_j, v_k \rangle \geq d\langle v_i, v_k \rangle$
- **注意**：不等式3，通常称为三角不等式，如果从结点v_i到v_j是可达的，并且从v_j到v_i也是可达的，但是$d\langle v_i, v_j \rangle$却不一定等于$d\langle v_j, v_i \rangle$

连通性

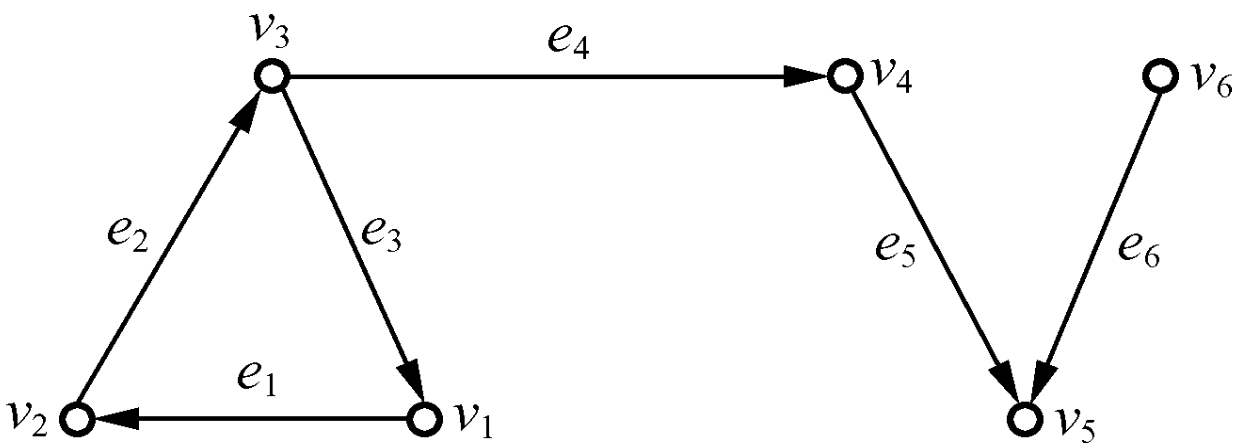
例：下图中

$R(v_1) = R(v_2) = R(v_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，

$R(v_4)=\{v_4, v_5\}$，$R(v_5) = \{v_5\}$，$R(v_6) = \{v_5, v_6\}$，

$d(v_1, v_2) = 1$，$d(v_2, v_1) = 2$，$d(v_5, v_6) = \infty$。

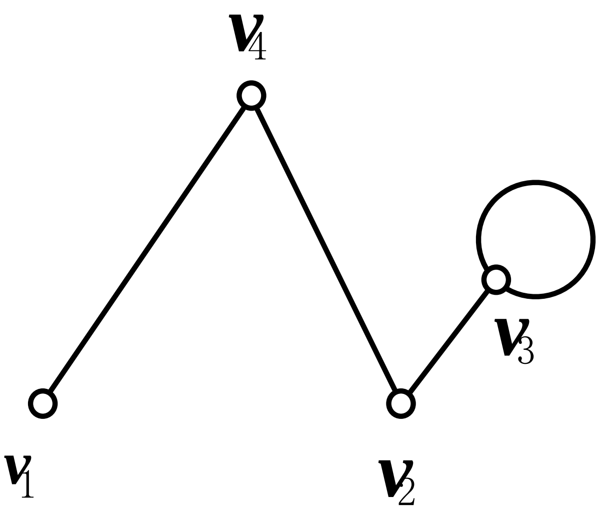
该图的直径为 ∞



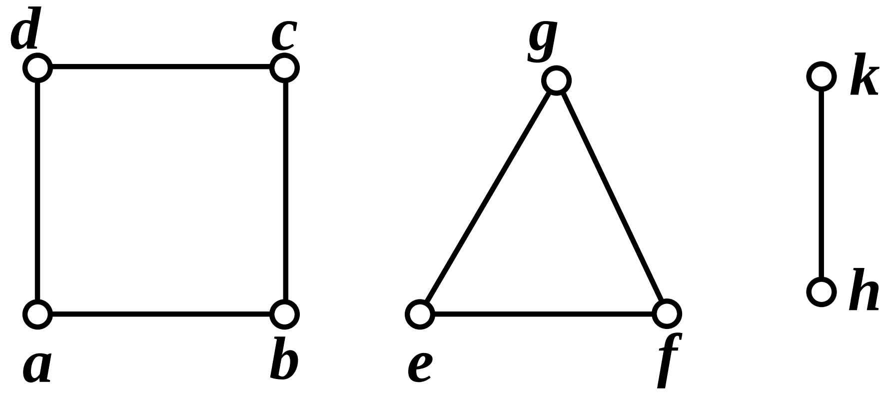
连通图

- 定义：如果无向图的任意两个结点都互相可达，则称G是连通的；否则称G是非连通的。
- 规定平凡图是连通的。
- 已知，无向图G中，结点之间的连通关系是等价关系
- 设G为无向图，R是$V(G)$中结点之间的连通关系，由R可将$V(G)$划分成$k(k \geq 1)$个等价类，记作$V_1, V_2, \cdots, V_k$，由它们导出的导出子图$G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_k]$称为$G$的连通分支，其个数应为$\omega(G)$

连通图



(a)



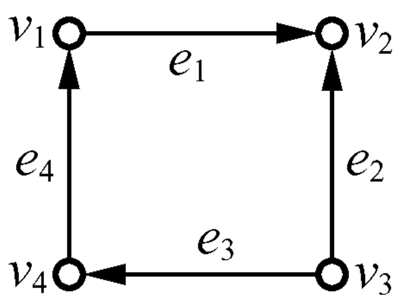
(b)

无向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$是连通的，当且仅当对于任意$v\in V$，$R(v)=V$。

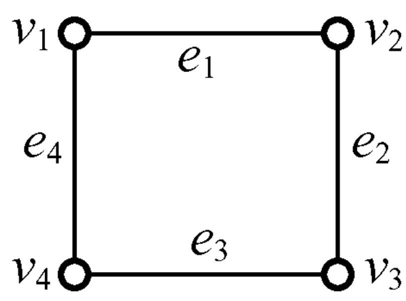
连通图

由于可达性的非对称性，有向图的连通概念要复杂得多，这里需要用到基础图的概念。

定义：设有向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，若略去$G$中各有向边的方向后得到无向图$D$，则称$D$为有向图$G$的基础图。



（a）



（b）

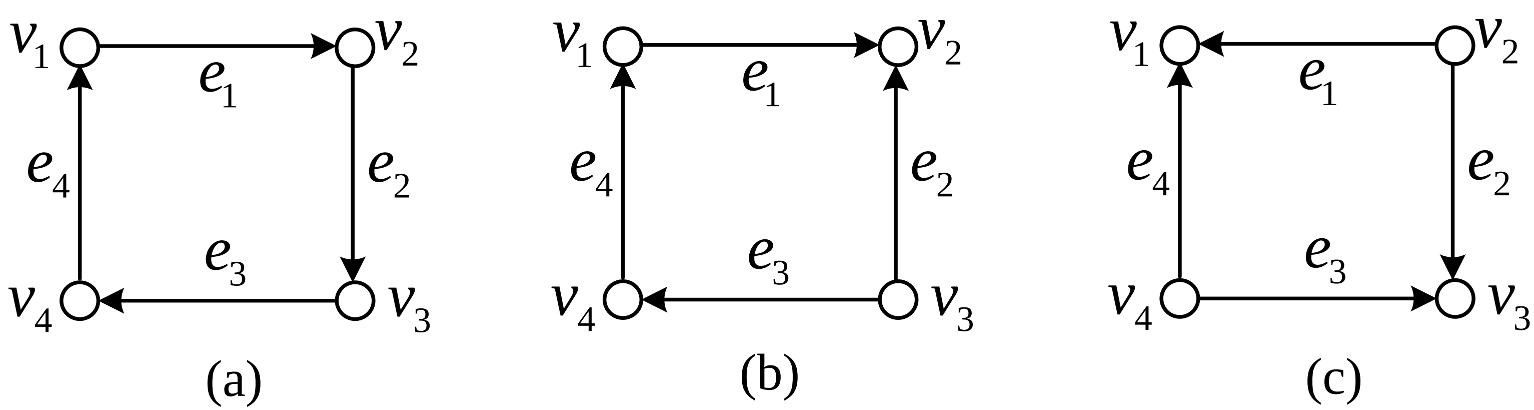
连通图

定义： 设G是有向图。

(1)如果G中任意两个结点都互相可达，则称G是<u>强连通的</u>。

(2)如果对于G的任意两结点，必有一个结点可达另一个结点，则称G是<u>单向连通的</u>。

(3)如果G的基础图是连通的，则称G是<u>弱连通的</u>。



子图和分支

定义：设G'是G的具有某种性质的子图，并且对于G的具有该性质的任意子图G''，只要$G' \subseteq G''$，就有$G'=G''$，则称G'相对于该性质是G的极大子图。

定义： 无向图G的极大连通子图称为G的分支 。

定义：设G是有向图：

（1）G的极大强连通子图称为G的强分支。

（2）G的极大单向连通子图称为G的单向分支。

（3）G的极大弱连通子图称为G的弱分支。

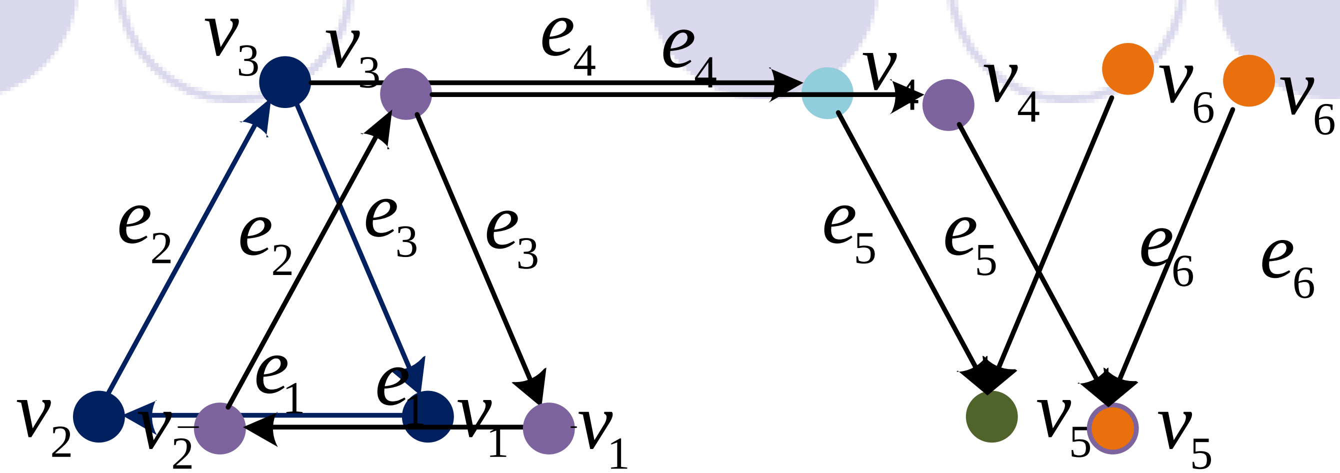
子图和分支

定理：连通无向图恰有一个分支。非连通无向图有一个以上分支。

定理：强连通（单向连通，弱连通）有向图恰有一个强分支（单向分支，弱分支）；非强连通（非单向连通，非弱连通）有向图有一个以上强分支（单向分支，弱分支）。

子图和分支

例：



有4个强分支，即$\langle\{v_1,v_2,v_3\},\{e_1,e_2,e_3\},\{\langle e_1,\langle v_1,v_2\rangle\rangle,$ $\langle e_2,\langle v_2,v_3\rangle\rangle,\langle e_3,\langle v_3,v_1\rangle\rangle\}\rangle,\langle\{v_4\},\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\{v_5\},\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\{v_6\},\varnothing,\varnothing\rangle$

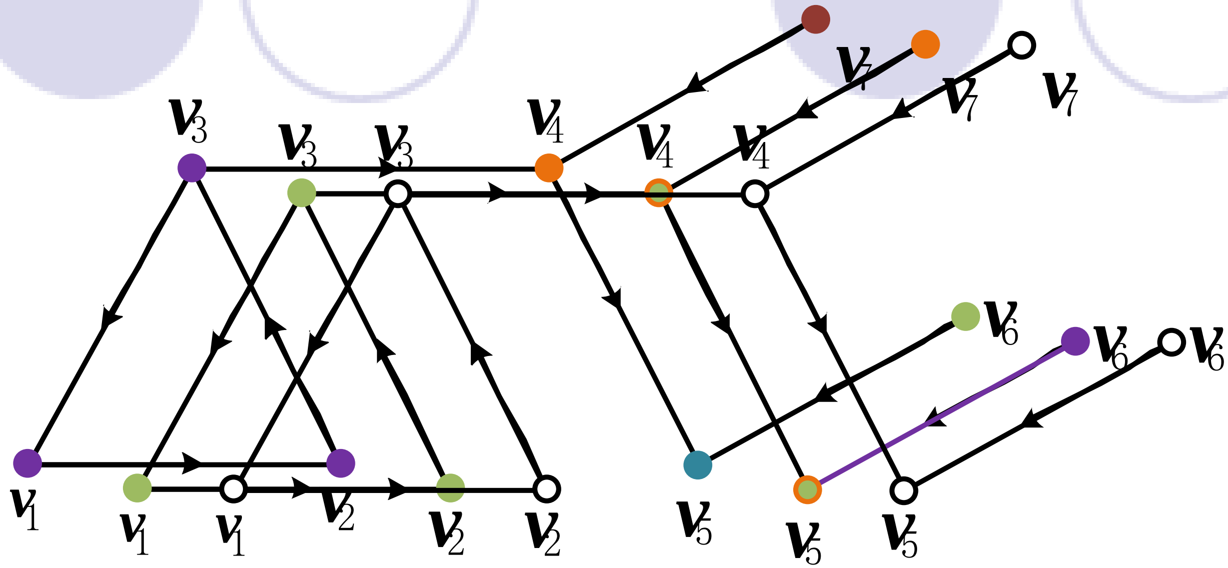
每个结点恰处于一个强分支中，而边e_4,e_5,e_6不在任何强分支中。

G有两个单向分支，即$G[\{v_5,v_6\}]$和$G-\{v_6\}$。显然，v_5处于两个单向分支中，G只有一个弱分支，即其本身。

子图和分支

- **注意：**
- 无向图的每个结点和每条边都恰在一个连通分支中；有向图中，并不是每个边都恰在一个强分支中。
- 在简单有向图中，每个结点每条边都恰在一个弱分支中。
- 在简单有向图中，每个结点每条边至少位于一个单向分支中。

子图和分支



由结点集合$\{v_1, v_2, v_3\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5\}$，$\{v_6\}$和$\{v_7\}$形成的诱导子图都是强分支;

由结点集合$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$\{v_7, v_4, v_5\}$和$\{v_6, v_5\}$所成的诱导子图都是单向分支;

由结点集合$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$形成的诱导子图是弱分支。

资源分配图

- 下面给出简单有向图的一个应用——资源分配图。
- 在多道程序的计算机系统中，可以同时执行多个程序。
- 实际上，程序共享计算机系统中的资源，如磁带机、磁盘设备、**CPU**、主存贮器和编译程序等。
- 操作系统对这些资源负责分配给各个程序。当一个程序要求使用某种资源，它要发出请求，操作系统必须保证这一请求得到满足。

死锁状态

- 对资源的请求可能发生冲突。
- 如程序***A***控制着资源r_1，请求资源r_2；
- 但程序***B***控制着资源r_2，请求资源r_1。
- 这种情况称为处于死锁状态。
- 然而冲突的请求必须解决，资源分配图有助发现和纠正死锁。

假设条件

- 假设某一程序对一些资源的请求，在该程序运行完之前必须都得到满足。在请求的时间里，被请求的资源是不能利用的，程序控制着可利用的资源，但对不可利用的资源则必须等待。

分析

- 令$P_t = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$表示计算机系统在时间$t$的程序集合，$Q_t \subseteq P_t$是运行的程序集合，或者说在时刻$t$至少分配一部分所请求的资源的程序集合。
- $R_t = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$是系统在时刻$t$的资源集合。
- 资源分配图$G_t = <R_t, E>$是有向图，它表示了时间t系统中资源分配状态。
- 把每个资源r_i看作图中一个结点，其中i=1，2，…，n。$<r_i, r_j>$表示有向边，$<r_i, r_j> \in E$当且仅当程序$p_k \in P_t$已分配到资源r_i且等待资源r_j。

分析（续）

例如，令R_t={r_1，r_2，r_3，r_4}，Q_t={p_1，p_2，p_3，p_4}。资源分配状态是：

p_1占用资源r_4且请求资源r_1，

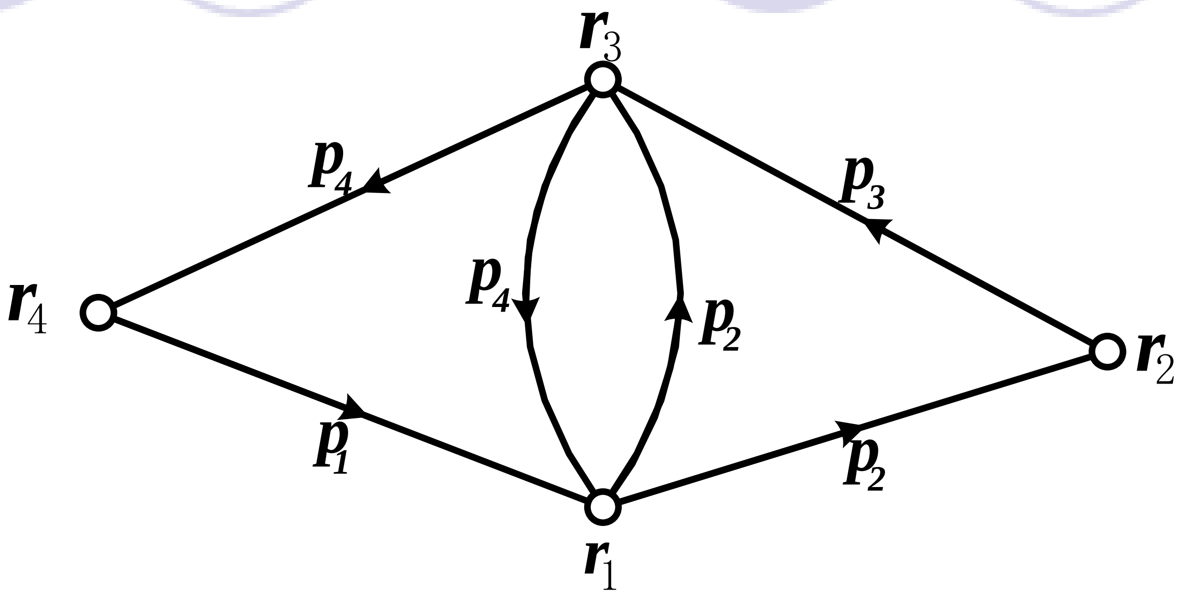
p_2占用资源r_1且请求资源r_2和r_3，

p_3占用资源r_2且请求资源r_3，

p_4占用资源r_3且请求资源r_1和r_4，

于是，可得到资源分配图G_t=<R_t，E>如下图所示。

前例资源分配图

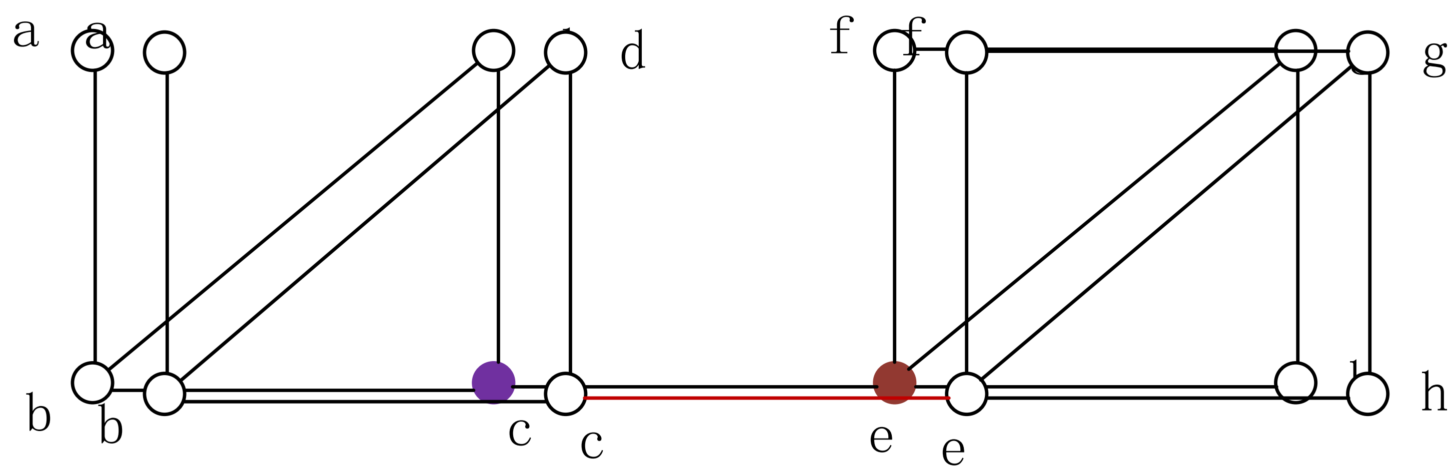


能够证明，在时刻t计算机系统处于死锁状态*iff*资源分配图G_t中包含强连通分支。

割集

有时删除一个结点和它所关联的边，就产生带有比原图更多的连通分支的子图。把这样的结点称为割点。

有时删除一条边，就产生带有比原图更多的连通分支的子图，把这样的边叫做割边或者桥。



总结——路径的基本定义

- 定义：设$G=\langle V,E\rangle$是图，从图中结点v_0到v_n的一条路径或通路是图的一个点、边的交错序列($v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_n$)，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$(或者$e_i=\langle v_{i-1},v_i\rangle$)（$i=1,2,\cdots n$）
- 边$e_1,e_2,\cdots,e_n$互不相同，则称该路径为简单路径。
- 点$v_1,v_2\cdots,v_n$互不相同，则称该路径是基本路径。

总结——关于路径的定理

- **定理：** 设***v***和***v'***是图***G***中的结点。如果存在从***v***至***v'***的路径，则存在从***v***至***v'***的基本路径。
- **定理：*****n***阶图中的基本路径的长度小于或等于***n*-1**。
- 定理：如果有向图G有子图G'满足：对于的任意结点v，$d_{G'}^{+}>0$（或$d_{G'}^{-}>0$），则G有有向回路

总结——可达和距离

- **定义：** 设v_1和v_2是图G的结点。如果在G中存在从v_1至v_2的路径，则称在G中从v_1可达v_2或v_1和v_2是连通的，否则称在G中从v_1不可达v_2。
- 设v_1和v_2是图G的结点。如果从v_1至v_2是可达的，则在从v_1至v_2的路径中，长度最短的称为从v_1至v_2的测地线，并称该测地线的长度为从v_1至v_2的距离，记作$d\langle v_1, v_2\rangle$。

总结——连通性

- 定义：如果无向图的任意两个结点都互相可达，则称G是连通的；否则称G是非连通的。
- 定义：设**G**是有向图
  - (1)如果**G**中任意两个结点都互相可达，则称**G**是强连通的。
  - (2)如果对于**G**的任意两结点，必有一个结点可达另一个结点，则称**G**是单向连通的。
  - (3)如果**G**的基础图是连通的，则称**G**是弱连通的。

总结——子图和分支

定义： 设G'是G的具有某种性质的子图，并且对于G的具有该性质的任意子图G''，只要$G' \subseteq G''$，就有$G'=G''$，则称G'相对于该性质是G的极大子图。

定义： 无向图G的极大连通子图称为G的分支。

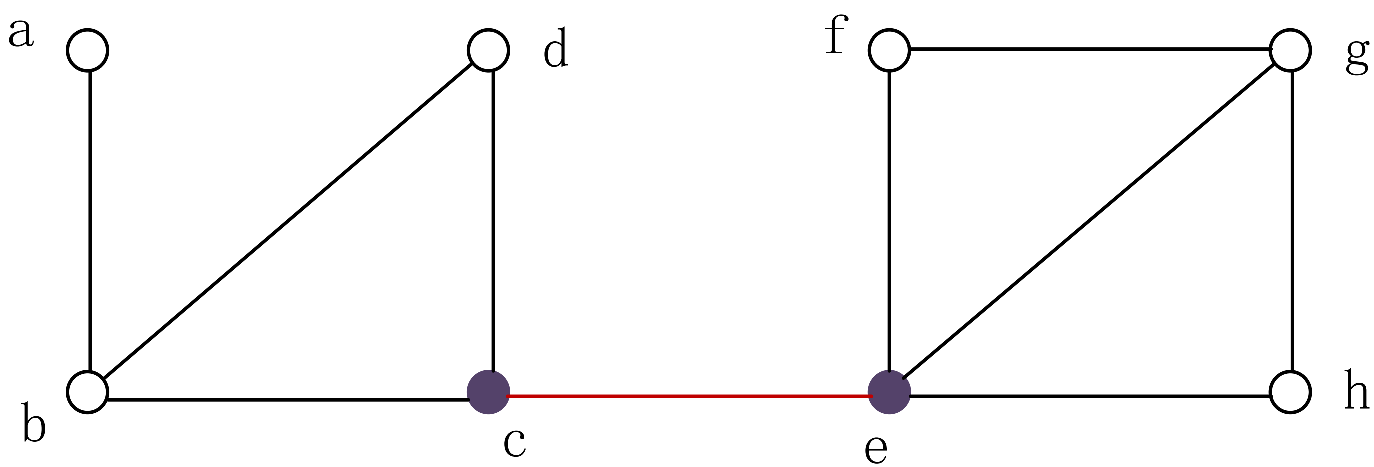
定义： 设G是有向图：

（1）G的极大强连通子图称为G的强分支。
（2）G的极大单向连通子图称为G的单向分支。
（3）G的极大弱连通子图称为G的弱分支。

总结——割集

有时删除一个结点和它所关联的边，就产生带有比原图更多的连通分支的子图。把这样的结点称为割点。

有时删除一条边，就产生带有比原图更多的连通分支的子图，把这样的边叫做割边或者桥。



习题

-
- **11，14，20，21，22，23**
-