离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室： 综合楼405，Tel： 62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ： 1062258606

回顾

- 相容关系
  - 计算最大相容类方法
    - 关系图法
    - 关系据政法
- 次序关系
  - 偏序关系
  - 拟序关系
  - 全序关系

字母次序关系

定义：设R是实数集合且$P=R\times R$。假定R中的关系$\geqslant$是一般的"大于或等于"关系。对于P中的任何两个序偶$\langle x_1, y_1\rangle$和$\langle x_2, y_2\rangle$，可以定义一个关系S

$$\langle x_1, y_1\rangle S\langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow (x_1 > x_2)\vee(x_1 = x_2 \wedge y_1 \geq y_2)$$

如果$\langle x_1, y_1\rangle \not S\langle x_2, y_2\rangle$，则有$\langle x_2, y_2\rangle S\langle x_1, y_1\rangle$，因此$S$是$P$中的全序关系。并称它是<u>字母次序关系</u>或<u>字母序</u>。

例如，$\langle 2,2\rangle S\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle S\langle 1,5\rangle$

$\langle 2,2\rangle S\langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle S\langle 1,1\rangle$

字母次序关系

设R是X中的全序关系，并设

$$P = X \cup X^2 \cup \cdots \cup X^n = \bigcup_{i=1}^{n} X^i \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

这个方程式说明，P是由长度小于或等于n的元素串组成的。假定n取某个固定值，可把长度为P 的元素串看成是P重序元。这样就可以定义P中的全序关系S，并称它是字母次序关系。为此,设$<x_1,x_2,\cdots x_p>$和$<y_1,y_2,\cdots, y_q>$是集合中的任何两个元素，且有$p\le q$。为了满足P中的次序关系．首先对两个元素串进行比较。如果需要的话，把两个元素串加以交换，使得$q\le p$。

字母次序关系

如果要使$\langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle S \langle y_1, y_2, \cdots, y_q \rangle$，就必须满足下列条件之一：

(1) $\langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle = \langle y_1, y_2, \cdots, y_p \rangle$

(2) $x_1 \neq y_1$且X中有$x_1 R y_1$

(3) $x_i = y_i . i = 1, 2, \cdots, k (k < p)$且$x_{k+1} \neq y_{k+1}$和$X$中有$x_{k+1} R y_{k+1}$

如果上述条件中一个也没有得到满足，则应有

$$\langle y_1, y_2, \cdots, y_q \rangle S \langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle$$

字母次序关系

考察字母次序关系的一个特定情况。设 $X=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$，又设R是X中的全序关系，并用≤表示它，这里 $a \le b \le \cdots \le y \le z$且 $P = X \cup X^2 \cup X^3$。这就是说，字符串中有三个来自X中的字母，或少于三个字母而且是由所有这样的字符串组成集合P。

例如，**me S met** (由条件1)

bet S met (由条件2)

beg S bet (自条件3)

get S go (自最后的规则)

因为比较的是单词go和get，故条件1，2和3都未得到满足。

在英文字典中，单词的排列次序就是字母次序关系的一例。在计算机上对字符数据进行分类时，经常使用字母次序关系。

五、偏序集合与哈斯图

像表达相容关系时用简化关系图一样，通常使用较为简便的偏序集合图——哈斯(**Hass**)图来表达偏序关系。

定义：设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集，如果对任何$x,y\in P$，***x*≤*y***和***x*≠*y***，而且不存在任何其它元素$z\in P$能使***x*≤*z***和***z*≤*y***，即$(x\leq y\wedge x\neq y\wedge(x\leq z\leq y\Rightarrow x=z\vee z=y))$成立，则称元素***y***盖覆***x***。

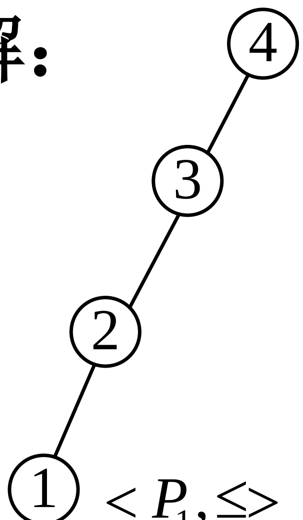
偏序集合与哈斯图

在哈斯图中，用小圈表示每个元素。如果有$x, y \in P$，且$x \le y$和$x \ne y$，则把表示x的小圈画在表示y的小圈之下。如果y盖覆x，则在x和y之间画上一条直线。如果$x \le y$和$x \ne y$，但是y不盖覆x，则不能把x和y直接用直线连结起来，而是要经过P的一个或多个元素把它们连结起来。这样，所有的边的方向都是自下朝上，故可略去边上的全部箭头表示。

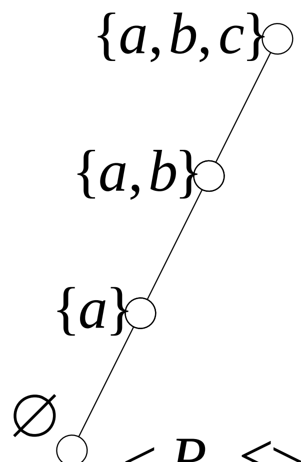
偏序集合与哈斯图

例如： 设$P_1=\{1,2,3,4\}$，$\leq$是“小于或等于”关系，则$\langle P_1,\leq\rangle$是个全序集合。设$P_2=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，$\leq$是$P_2$中的包含关系 $\subseteq$，则$\langle P_2,\leq\rangle$是全序集合．试画出$\langle P_1,\leq\rangle$和$\langle P_2,\leq\rangle$的哈斯图.

解：



$<P_1,\leq>$

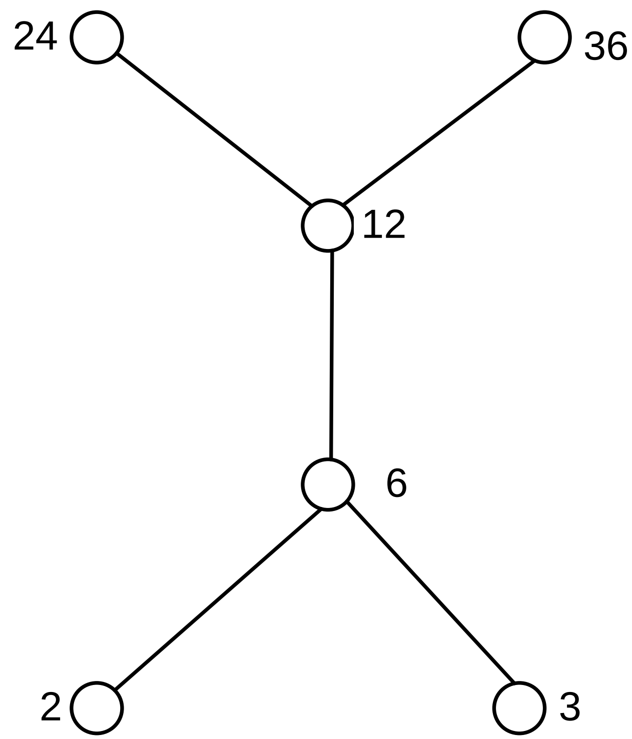


$<P_2,\leq>$

注意：虽然两个全序关系的定义不同，但它们可能具有同样结构的哈斯图

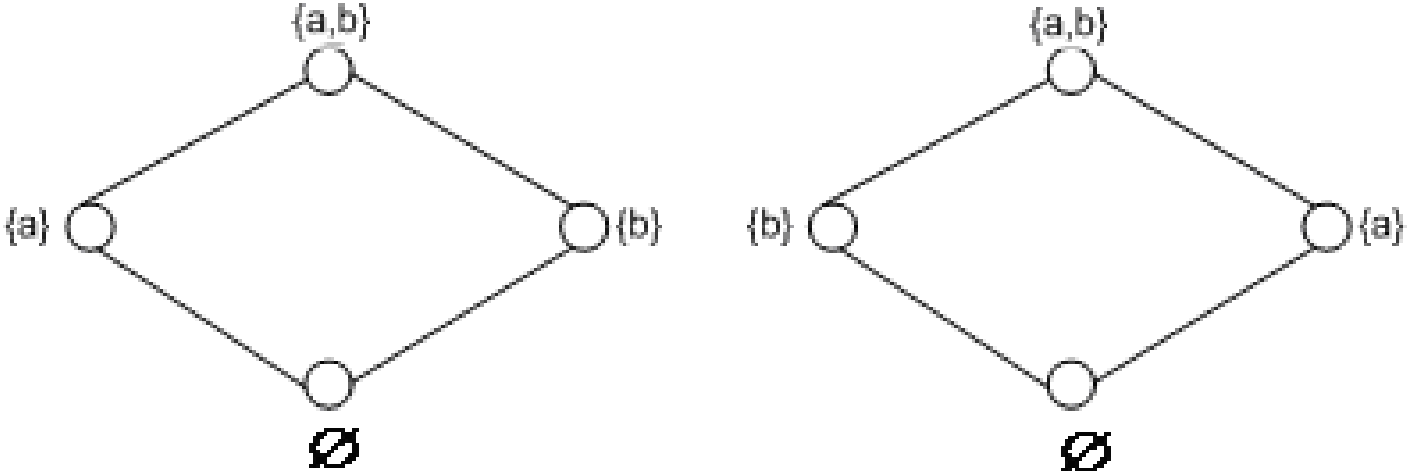
偏序集合与哈斯图

例： 设集合$X=\{2,3,6,12,24,36\}$，$\leq$是X中的偏序关系并定义成：如果x整除y，则$x \leq y$。试画$\langle X, \leq \rangle$的哈斯图。



偏序集合与哈斯图

例：设集合$X=\{a,b\}$，$\rho(X)$ 是它的幂集。$\rho(X)$的元素间的偏序关系≤是包含关系 ⊆。试画出 $\langle\rho(X),\leq\rangle$的哈斯图。



注意：对于给定偏序集合来说，其哈斯图不是唯一的。由$\langle P,\leq\rangle$ 的哈斯图，可以求得其对偶 $\langle P,\geq\rangle$的哈斯图．只需把它的哈斯图反转180°即可，使得原来是顶部的结点变成底部上各结点。

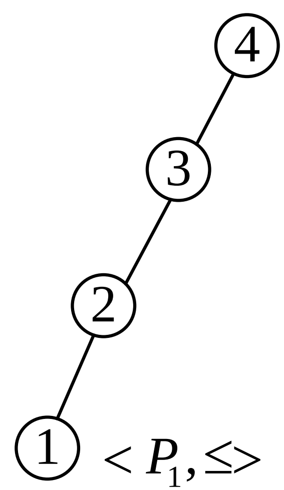
偏序集合与哈斯图

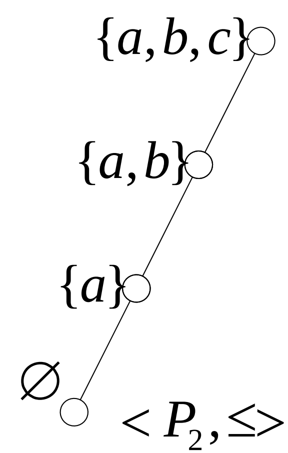
定义： 设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集合，并有$Q\subseteq P$。

(a)如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q\leq q'$，则元素$q\in Q$称为Q的**最小成员**，通常记作0。

(b)如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q'\leq q$，则元素$q\in Q$称为Q的**最大成员**，通常记作1。

如果能画出哈斯图，就可以看出是否存在最大成员和最小成员。





偏序集合与哈斯图

定理：设X是一个偏序集合，且有$Q \subseteq P$。如果x和y都是Q的最小(最大)成员,则x=y。

证： 假定x和y都是Q的最小成员。于是可有$x \le y$和$y \le x$。根据偏序关系的反对称性，可以得出x=y。当x和y都是Q的最大成员时，定理的证明类似于上述的证明。

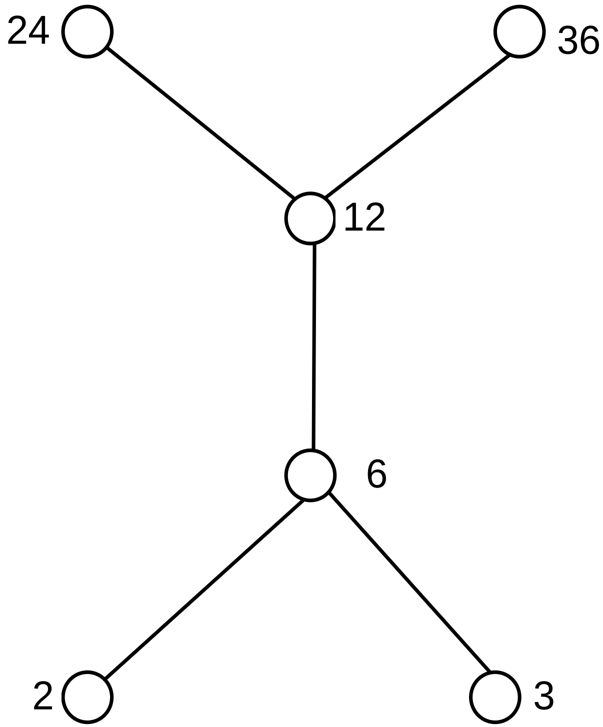
偏序集合与哈斯图

定义： 设$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，并有$Q \subseteq P$。

(a)如果$q \in Q$， 且不存在元素$q' \in Q$能使$q' \neq q$和$q' \leq q$，则称q是Q的**极小成员**。

(b)如果$q \in Q$， 且不存在元素$q' \in Q$能使$q' \neq q$和$q \leq q'$，则称q是Q的**极大成员**。

极大成员和极小成员都不是唯一的。不同的极大成员(或不同的极小成员)是不可比的。



偏序集合与哈斯图

定义： 设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集合，并有$Q\subseteq P$。

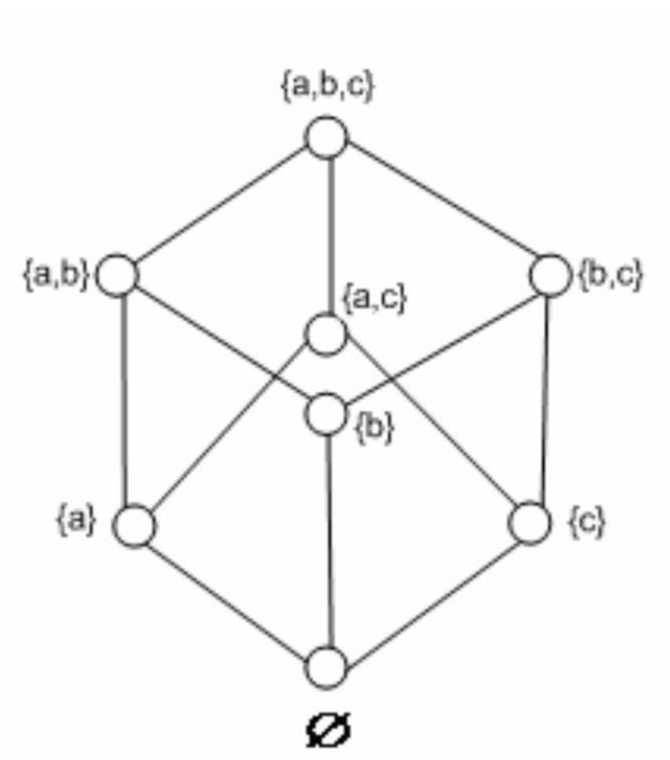
(a)如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q'\leq q$，则元素$q\in P$称为Q的上界。

(b)如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q\leq q'$，则元素$q\in P$称为Q的下界。

偏序集合与哈斯图

例：设集合***X*={*a*,*b*,*c*}**, $\rho(X)$是它的幂集。$\rho(X)$中的偏序关系≤是包含关系 ⊆。试画出$\langle\rho(X),\leq\rangle$的哈斯图，并指出$\rho(X)$的子集的上界和下界。

解：先画出哈斯图



首先选取$\rho(X)$的子集***A*={{*b*,*c*},{*b*},{*c*}}**。于是***X***和**{*b*,*c*}**是***A***的上界，***Φ***是它的下界。对于 $\rho(X)$

的子集***B*={{*a*,*c*},{*c*}}**，上界是***X***和**{*a*,*c*}**；而下界是**{*c*}**和***Φ***。

子集的上界和下界不是唯一的。

偏序集合与哈斯图

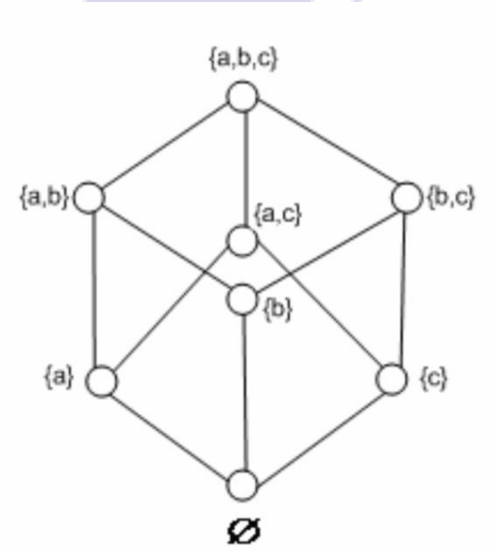
定义： 设$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，并有$Q \subseteq P$。

(1) 如果 $q \in Q$是**Q**的一个上界，且对于**Q**的每一个上界q'都有$q \leq q'$，则称q是**Q**的<u>最小上界</u>，通常记作**LUB**。

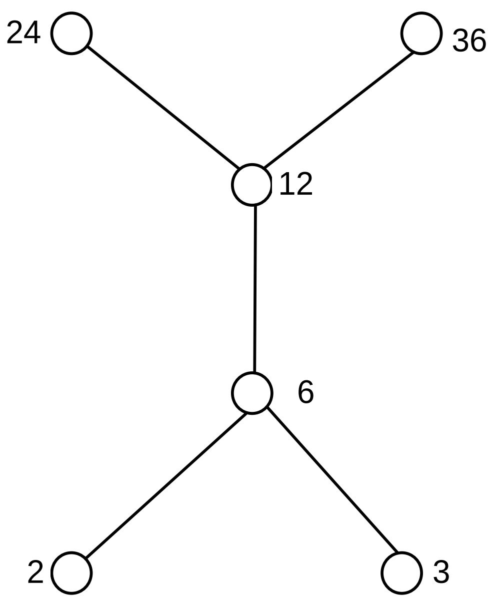
(2) 如果$q \in Q$是**Q**的一个下界，且对于**Q**的每一个下界q'都有$q' \leq q$，则称q是**Q**的<u>最大下界</u>，通常记作**GLB**。

如果存在最小上界的话，它是唯一的；如果存在最大下界的话，它也是唯一的。

偏序集合与哈斯图



它的每一个子集都有一个最小上界和一个最大下界。



子集*A*={2,3,6}有上确界**LUBA=6**，但这里没有下确界**GLBA**。 与此类似，对于子集*B*={2,3}来说，最小上界还是6，但是仍没有下界。对于子集*C*={12,6}来说，最小上界是12，最大下界是6。

偏序集合与哈斯图

对于偏序集合$\langle P,\leq\rangle$来说，它的对偶$\langle P,\geq\rangle$也是一个偏序集合。相对于偏序关系≤的***P***中的最小成员，就是相对于偏序关系⩾的***P***中的最大成员；反之亦然。与此类似，可以交换极小成员和极大成员。对于任何子集$Q\subseteq P$来说，$\langle P,\leq\rangle$中的**GLBA**和$\langle P,\geq\rangle$中的**LUBA**是一样的。

良序关系

定义：给定集合X，R是X中的二元关系。如果R是个全序关系，且X的每一个非空子集都有一个最小成员，则称R是个良序关系。与此对应，序偶$<X,R>$称为良序集合。

每一个良序集合必定是全序集合,因为对于任何子集来说，其本身必定有一个元素是它的最小成员。但是每一个全序集合不一定都是良序的，有限全序集合必定是良序的。

作业

- **106: 44-50** （奇数）