离散数学

大连理工大学软件学院

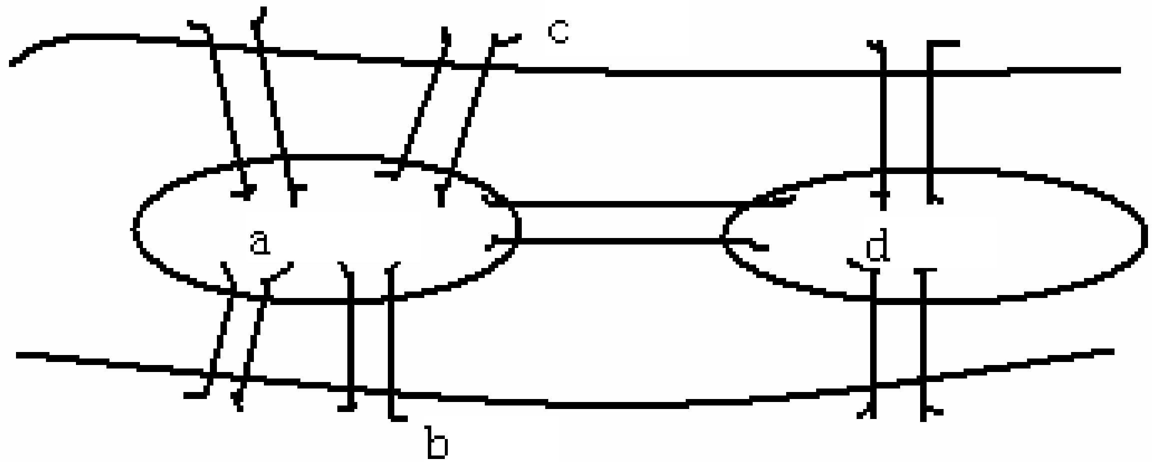
第十章 特殊图

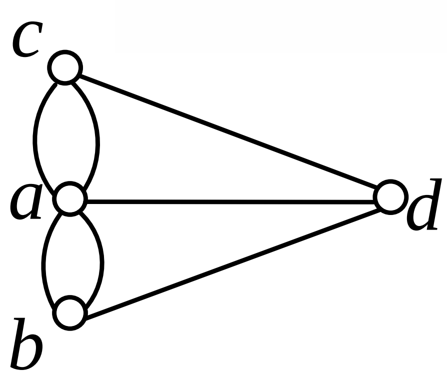
回顾

- 路径，简单路径，基本路径
- 连通，强连通，单向连通，弱连通
- 分支
- 回路，有向回路
- 图的矩阵表示方法
  - 邻接矩阵
  - 可达矩阵

10.1欧拉图

哥尼斯堡七桥问题：从四块陆地的任何一块出发，怎样通过且仅通过每座桥一次，最终回到出发地点？

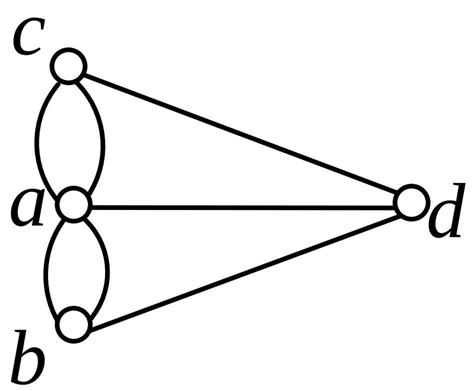




结点表示陆地区域，边表示桥。于是，哥尼斯堡七桥问题就是要找到左图中包含图的所有边的简单闭路径。

欧拉图

- 对这个问题进行推广，也就是判断在一个多重图里是否存在包含每一条边的简单回路？

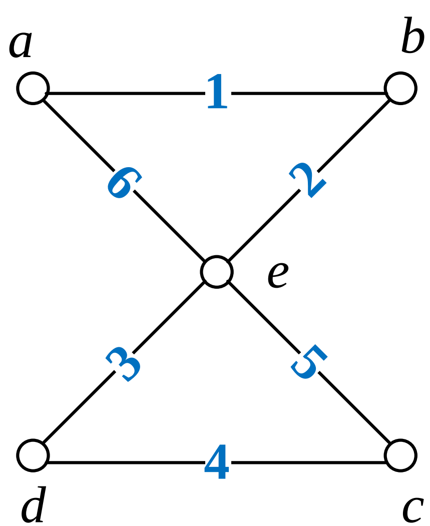


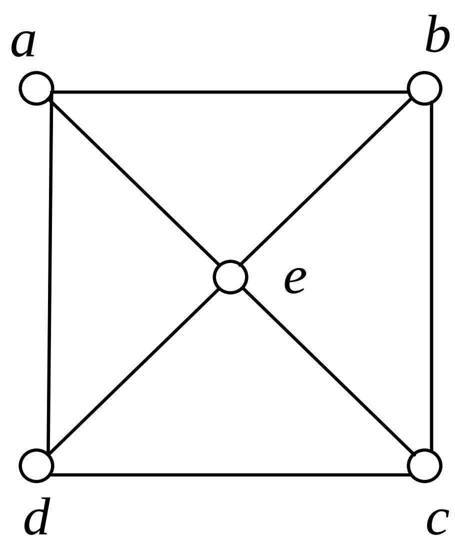
- 1736年欧拉发表论文，在论文中提出了一条解决此问题的简单准则，确定七桥问题是不能解的。

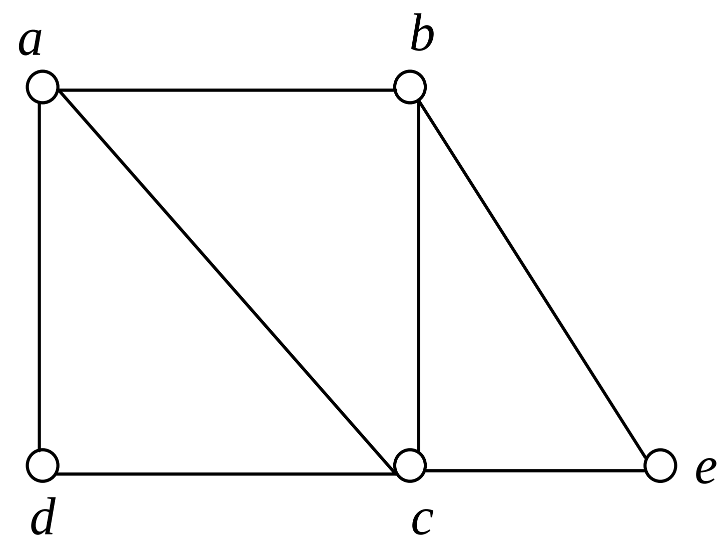
欧拉路径与欧拉闭路

定义：图G中包含其所有边的简单开路径称为图G的欧拉路径，图G中包含其所有边的简单闭路径称为G的欧拉闭路。

例：判断下列三个图中是否有欧拉路径或欧拉闭路。

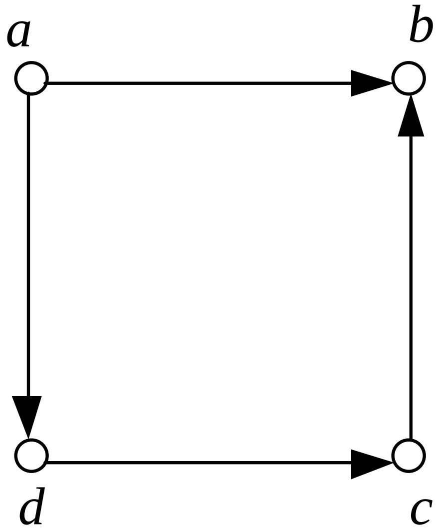


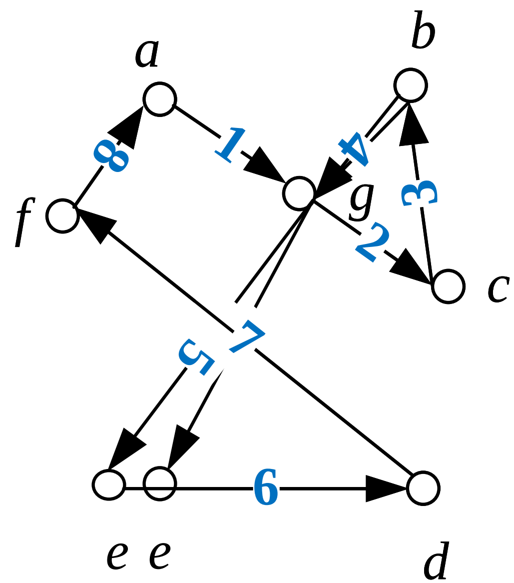


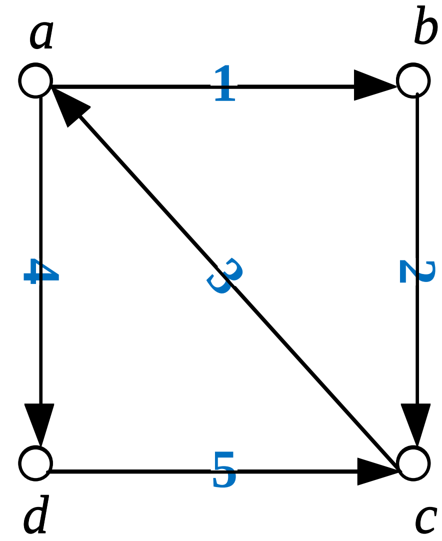


欧拉路径与欧拉闭路

例：判断下列三个图中是否有欧拉路径或欧拉闭路。







欧拉图

定义：每个结点都是偶结点的连通无向图称为欧拉图。每个结点的出度和入度相等的连通有向图称为欧拉有向图。（规定平凡图是欧拉图）

欧拉给出了一个连通无向图是欧拉图的充分必要条件，这就是下面的欧拉定理。

定理：设G是连通无向图，则G是欧拉图，当且仅当G有欧拉闭路。

欧拉定理

定理：设G是连通无向图，则G是欧拉图，当且仅当G有欧拉闭路。

证：首先证明充分性。

- 若连通无向图G有欧拉闭路，则从该闭路径中任选一个节点a，按照闭路径的顺序依次遍历节点。
- 在路径上每访问一个节点就给该节点增加了两度。因此，每个节点的度都是偶数，该图是欧拉图。

再证必要性。对G的边数采用归纳法。

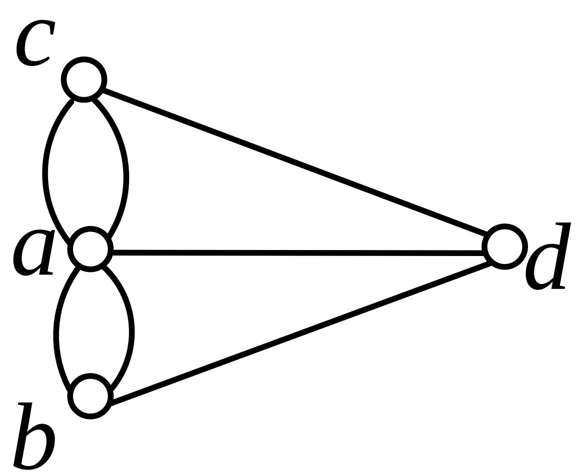
若G没有边，即图G是平凡图，必要性显然成立（这里把0当作偶数）。

欧拉定理

- 令$n \in I_+$，设任意边数少于n的连通欧拉图有欧拉闭路。
- 若G有n条边，由G是连通欧拉图知，它的任意结点的度大于1，可得G有回路，
- 设G有长度为m的回路C，知在G中存在闭路径$v_0e_1v_1\ldots v_{m\text{-}1}e_mv_0$，其中$v_0,v_1,\ldots, v_{m\text{-}1}$互不相同，并且$\{v_0,v_1,\ldots,v_{m\text{-}1}\}$和$\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$分别是$C$的结点集合和边的集合。
- 令$G'=G\text{-}\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，设$G'$有$k$个分支$G_1,G_2,\ldots,G_k$。
- 由于G是连通的，G'的每个分支与C都有公共结点。设$G_i(0 \le i \le k)$与C的一个公共结点为v_{n_i}，我们还可以假定$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < m-1$。
- 显然，G_i为边数少于n的连通欧拉图。根据归纳假设，G_i有一条从v_{n_i}至v_{n_i}的闭路经P_i。
- 因此，以下的闭路经 $v_0e_1v_1 \cdots e_{n_1}P_1e_{n_1+1}v_{n_1+1} \cdots e_{n_k}P_ke_{n_k+1} \cdots v_{m-1}e_mv_0$就是$G$的一条欧拉闭路。

欧拉定理

哥尼斯堡七桥问题，由于哥尼斯堡七桥问题不是欧拉图，不存在欧拉闭路，所以哥尼斯堡七桥问题无解。



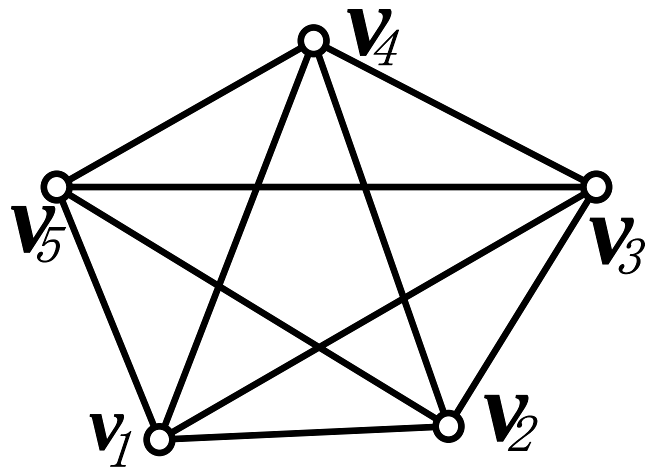
构造欧拉回路

构造欧拉回路的方法：

1. 在图G中任选一个结点，找到一个基本循环a_1，从G中删去a_1的各边之后得到生成子图G_1，G_1中的每个结点仍然是偶结点；
2. 如果G_1是零图，则a_1即为G中的欧拉回路，退出；否则，转3；
3. 若G_1不是零图，由G的连通性可知，G_1中必有与a_1有公共顶点的基本循环a_2。这两个基本循环可以通过这个公共顶点合并成一个简单循环；
4. 从G_1中去掉a_2的各边，得到一个生成子图，依次执行2和3，直到G_1变为零图，就得到了一条包含各边的欧拉回路。

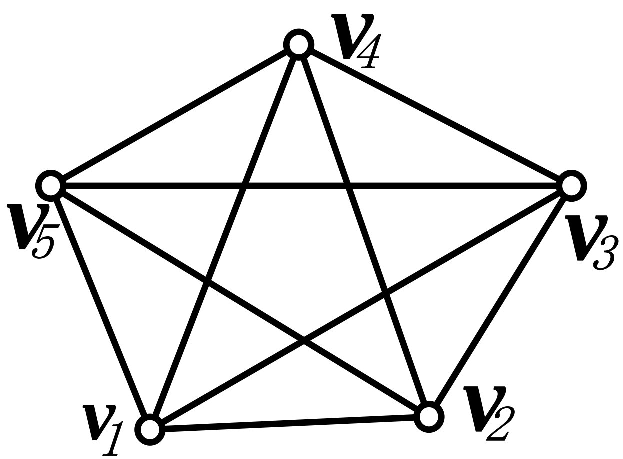
构造欧拉回路

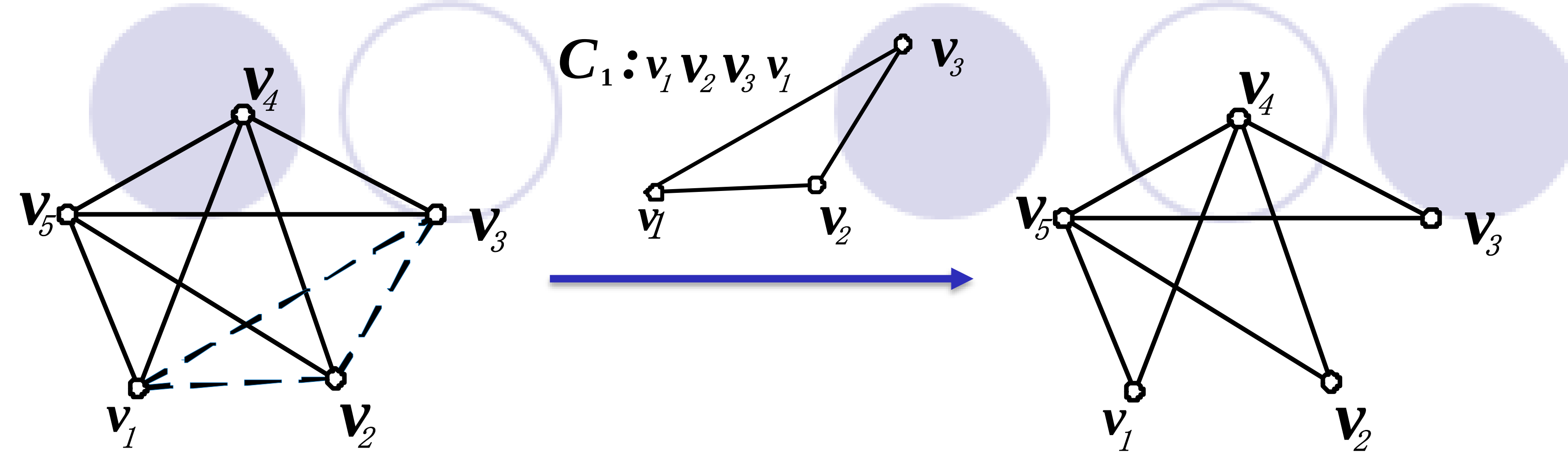
例：构造下图的欧拉回路。

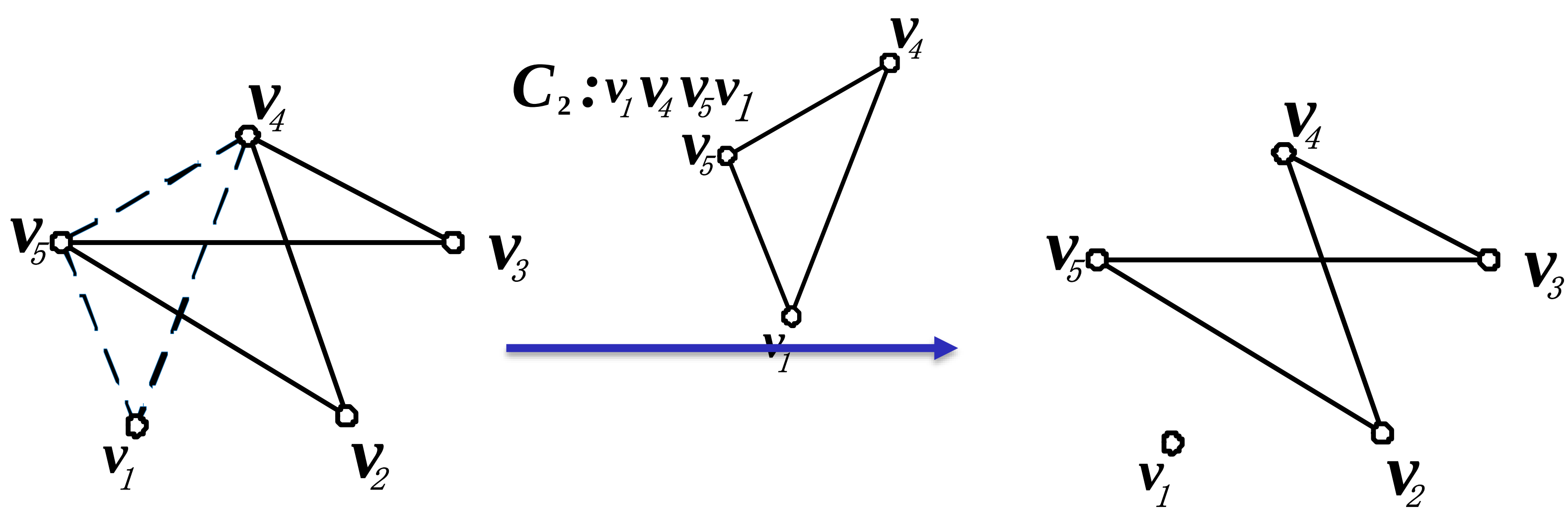


构造欧拉回路

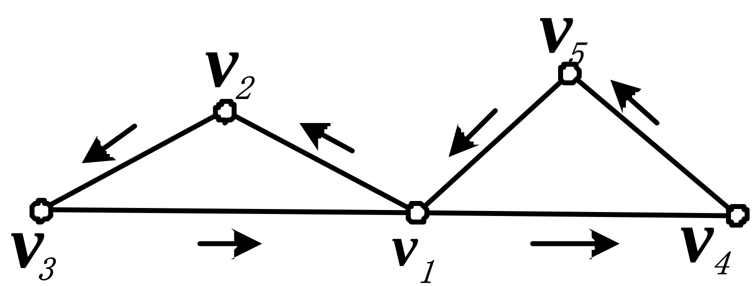
解：首先找出一个基本圈C_1，如$v_1v_2v_3\,v_1$，从G中删去C_1的各条边后得G_1，再找出一个基本圈C_2，如$v_1v_4v_5v_1$，把两个基本圈合并，得$v_1v_2v_3\,v_1v_4v_5v_1$。再从G_1中删去C_2的各条边得G_2；最后从G_2找出一个基本圈C_3，即$v_4v_3v_5v_2v_4$，继续合并，得$v_1v_2v_3$ $v_1v_4v_3v_5v_2v_4v_5v_1$。若从G_2删去C_3的各边后得到零图，于是合并后的简单循环即为所求的欧拉回路。

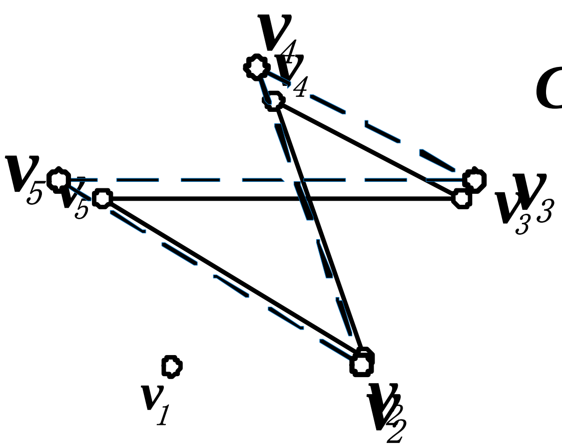



$C_1: v_1v_2v_3v_1$
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5

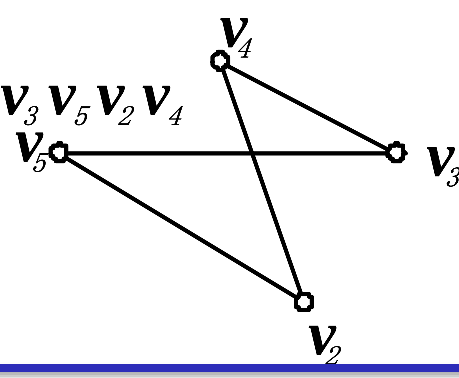

$C_2: v_1v_4v_5v_1$
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5

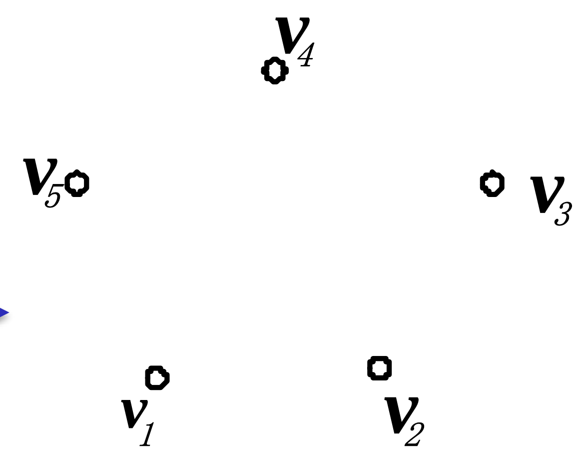
基本圈C_1与C_2合并


v_1
v_2
v_3
v_4
v_5

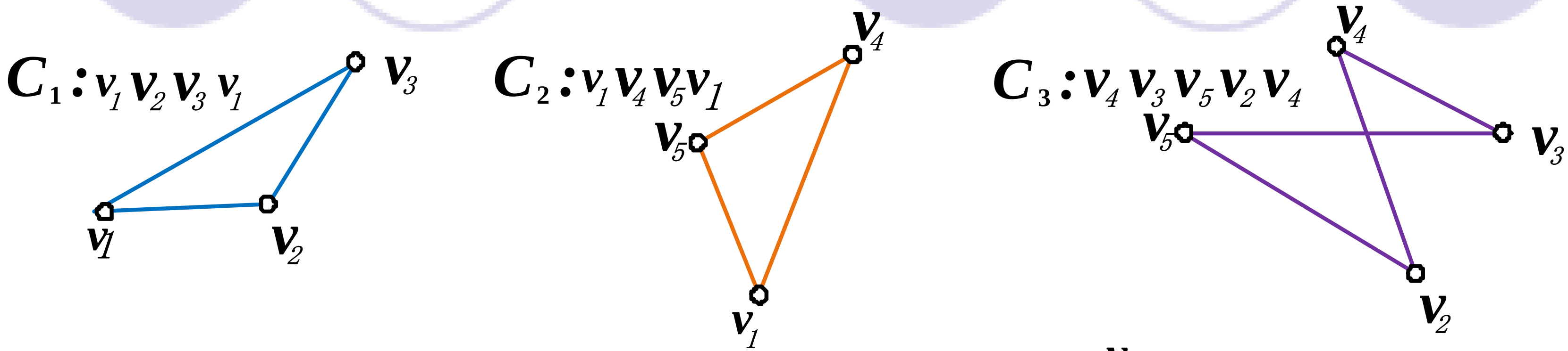


$C_3 : v_4 v_3 v_5 v_2 v_4$

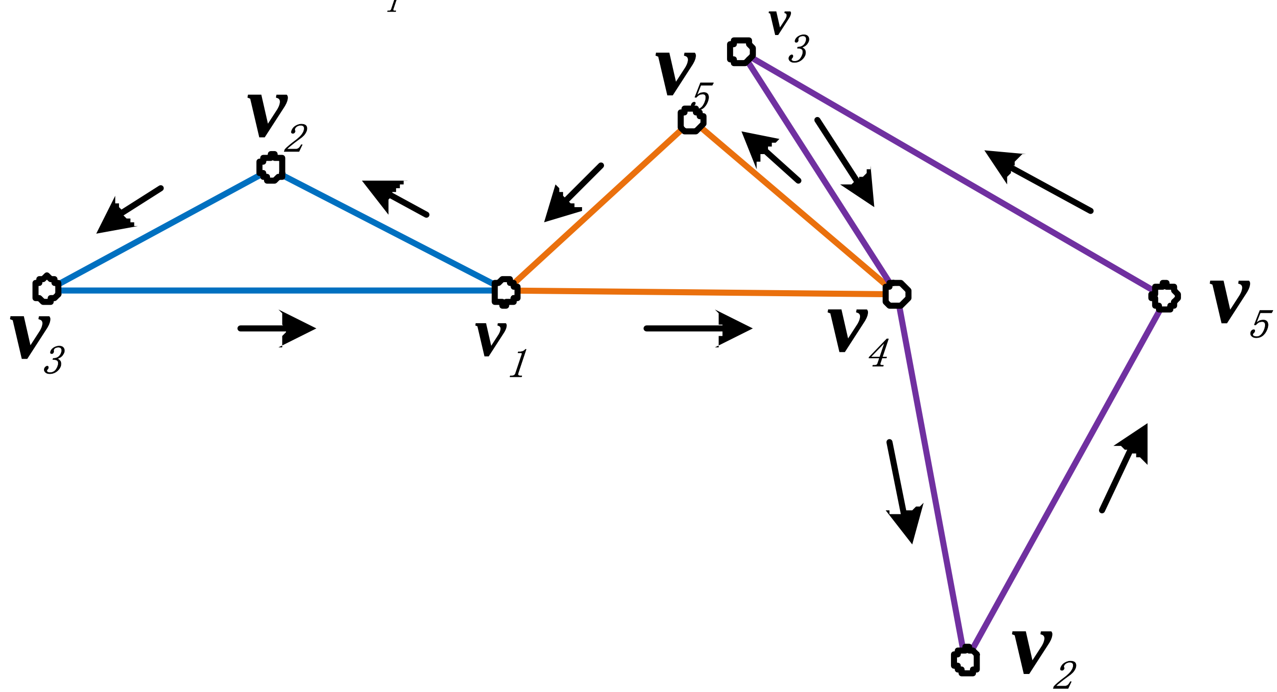




构造欧拉回路



基本圈C_1、C_2与 C_3合并，所得的简单循环即为所求的欧拉回路



欧拉图

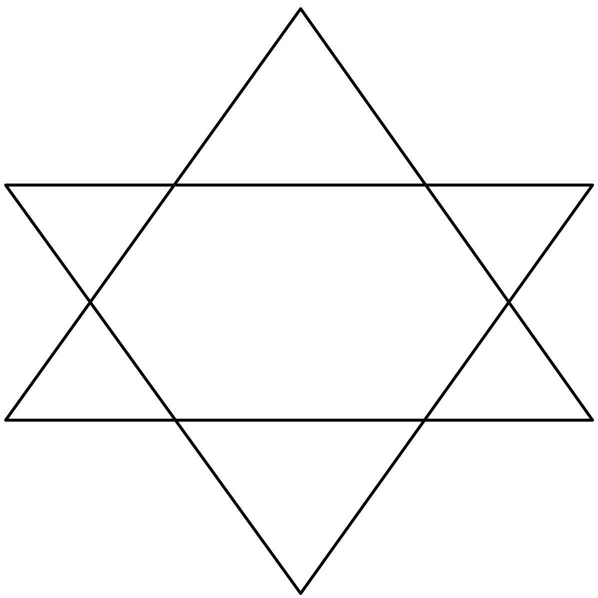
定理：设 $G=\langle V,E,\psi\rangle$ 为连通无向图，且 $v_1,v_2\in V$，则G有一条从v_1至v_2的欧拉路径当且仅当G恰有两个奇结点v_1和v_2。

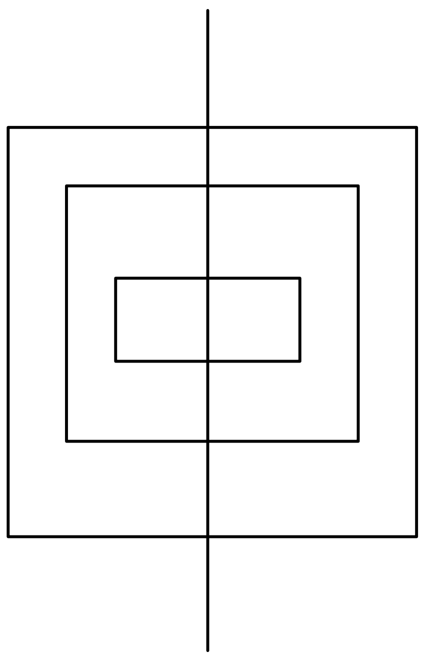
- 证：任取$e\notin E$，并令$\varphi'=\{e,\{v_1,v_2\}\}$，$G'=G+\{e\}_{\psi'}$
- 则G有一条从v_1至v_2的欧拉路径，当且仅当$G'=G+\{e\}_{\psi'}$有一条欧拉闭路。
- 因此，G恰有两个奇结点v_1和v_2，当且仅当G'的结点都是偶结点。
- 根据前面定理，知本定理成立。

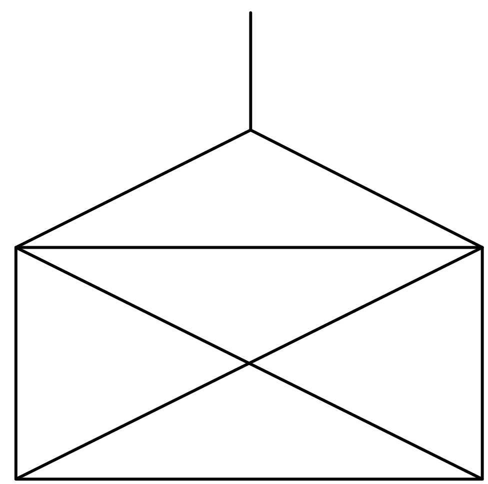
一笔画问题

一笔划问题：用铅笔连续移动，不离开纸面并且不重复的画出图形。

一张图能由一笔画出来的充要条件是：每个交点处的线条数都是偶数或恰有两个交点处的线条数是奇数。

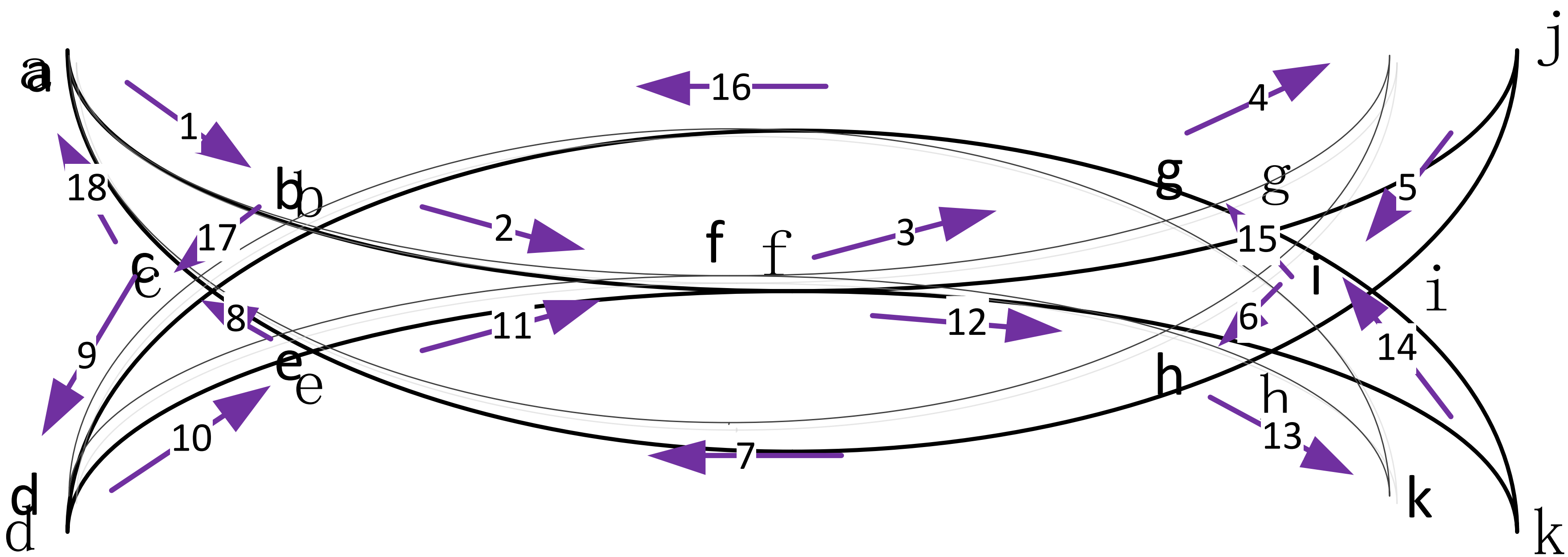






一笔画问题

例：构造欧拉回路，看能否一笔画。（穆罕默德短剪刀）



欧拉图

定理：设G为弱连通的有向图。G是欧拉有向图，当且仅当G有欧拉闭路。

每个结点的出度和入度相等的连通有向图称为欧拉有向图。

定理：设G为弱连通有向图。v_1和v_2为G的两个不同结点。G有一条从v_1至v_2的欧拉路径，当且仅当$d_G^+(v_1) = d_G^-(v_1) + 1$，$d_G^+(v_2) = d_G^-(v_2) - 1$，且对$G$的其它结点$v$有$d_G^+(v) = d_G^-(v)$。

欧拉图

定理： 如果G_1和G_2是可运算的欧拉图，则$G_1 \oplus G_2$是欧拉图。

- 设$G_1 = \langle V_1, E_1, \psi_1 \rangle$和$G_2 = \langle V_2, E_2, \psi_2 \rangle$为可运算的,称以$V_1 \cup V_2$为结点集合，以$E_1 \oplus E_2$为边集合的$G_1 \cup G_2$的子图为$G_1$和$G_2$的环和，记为$G_1 \oplus G_2$
- **证：** 设v是$G_1 \oplus G_2$的任意结点，于是可能出现三种情况：
  - v是G_1的结点而不是G_2的结点，
  - v是G_2的结点而不是G_1的结点，
  - v是G_1和G_2的公共结点。
- 显然，若属于前两种情况，v是$G_1 \oplus G_2$的偶结点。
- 设v是G_1和G_2的公共结点，G_1和G_2有k条公共边和l个公共自圈与v关联，则$d_{G_1 \oplus G_2}(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v) - 2(k+l)$,显然$v$是$G_1 \oplus G_2$的偶结点。
- 因此，$G_1 \oplus G_2$是欧拉图。

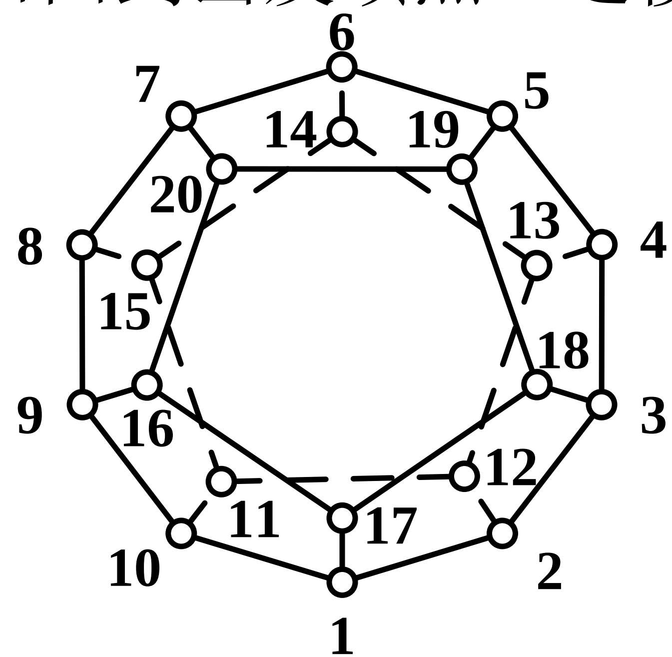
欧拉图的应用

除了一笔画，利用欧拉路径和欧拉回路可以解决很多实际问题。例如：很多应用要求一条路径或者回路，它要恰好一次的经过一个街区的每条道路、一个高压输电线的每个连接或者一个通信网络里的每个链接。求出适当的图模型里的欧拉路径或者欧拉回路可以解决这个问题。

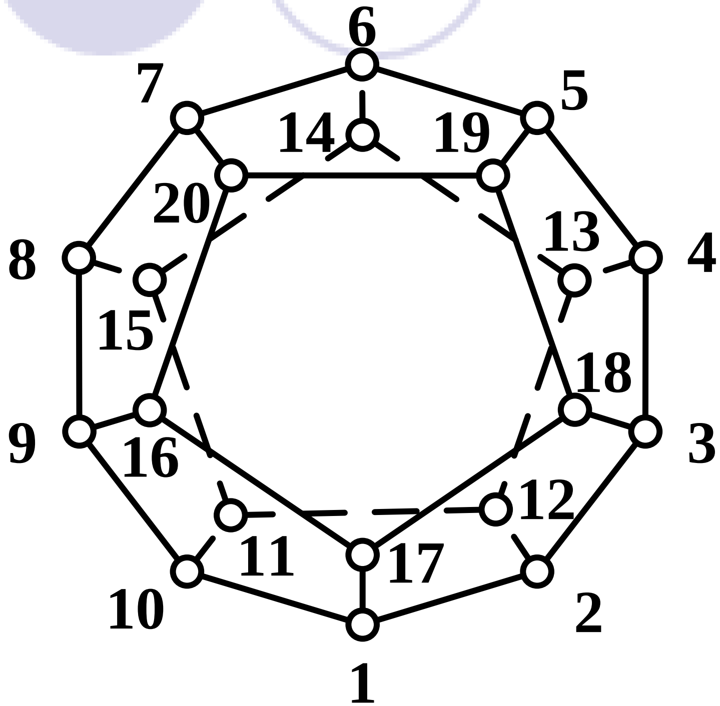
中国邮路问题（中国邮递员问题）：投递员在邮局领取邮件，准备投递。他必须走过他投递范围内的每一条街道之后返回邮局，并且选择一条最短的线路。（中国科学家管梅谷1962年提出）

10.2 哈密尔顿图

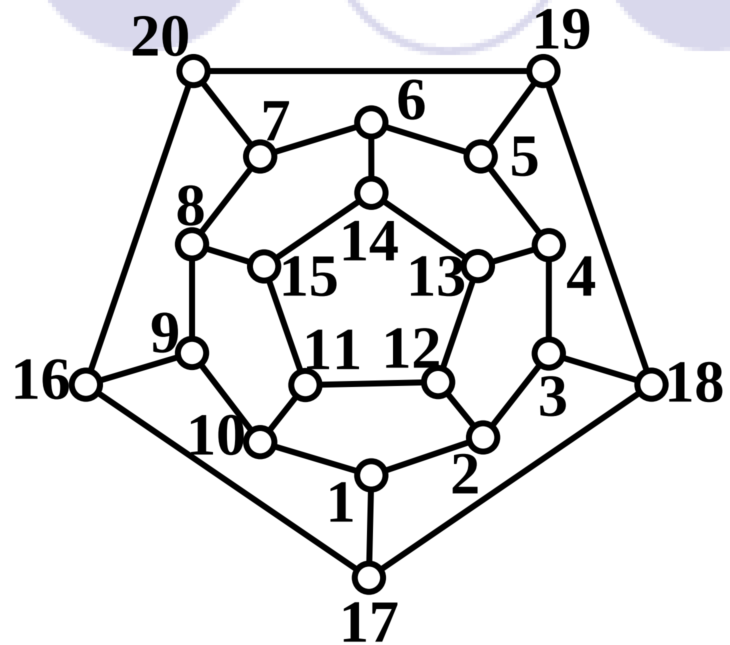
问题的产生：1859年，爱尔兰数学家哈密尔顿(W.R.Hamilton)在给他朋友的一封信中，首先提出“环球周游”问题：他用一个正十二面体的20个顶点代表世界上20个大城市，连接两个顶点的边看成是交通线，要求旅游者能否找到沿着正十二面体的棱，从某个顶点(即城市)出发，经过每个顶点(即每座城市)恰好一次，然后回到出发顶点？这便是著名的哈密尔顿问题。



哈密尔顿图


6
7
5
14
19
20
13
8
4
15
18
9
3
16
12
11
17
10
2
1

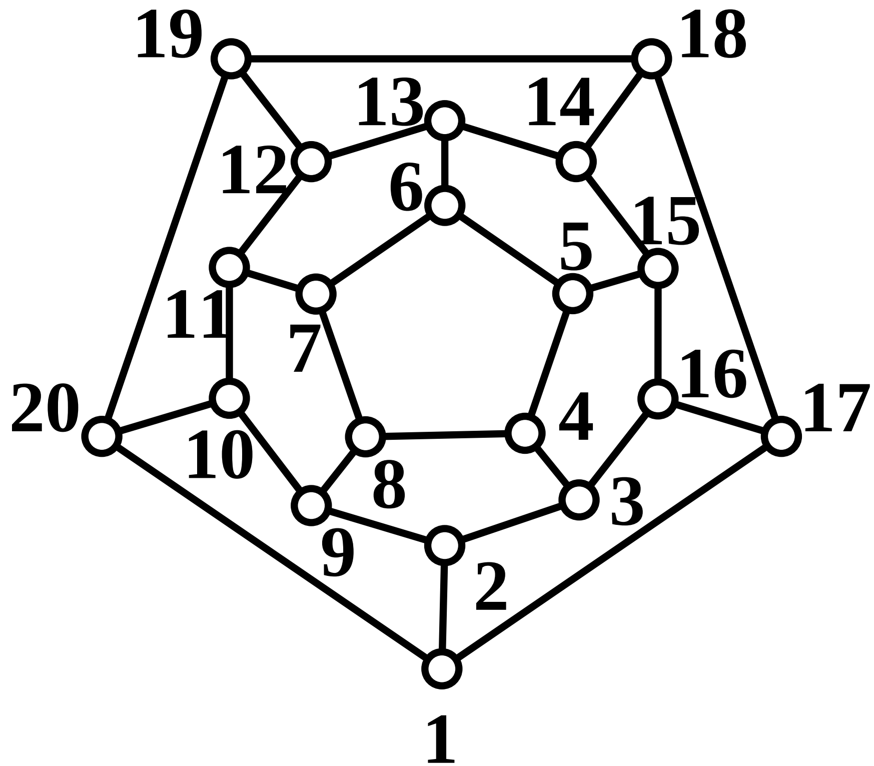
(a)


20
19
7
6
5
8
14
15
13
4
9
11
12
16
18
3
10
2
1
17

(b)

哈密尔顿图

按下图中所给的编号进行旅游，便是哈密尔顿问题的解。



如果推广到任何的连通图上，也有类似的问题：是否可以从图中任何一点出发，经过每个结点一次且仅一次？

哈密尔顿图

定义：图G中包含其所有顶点的简单开路径称为图G的哈密尔顿路径，图G中包含其所有顶点的简单闭路径称为G的哈密尔顿回路。具有哈密顿回路的图称为哈密尔顿图。

完全图必是哈密尔顿图。

哈密尔顿图尽管在形式上与欧拉图极其相似，但其结论上却有很大不同，至今还没有得到关于哈密尔顿图的简明的充要条件，这是图论尚未解决的主要问题之一。然而，还是有不少重要成果，下面给出几个必要和充分条件的定理。

哈密尔顿图

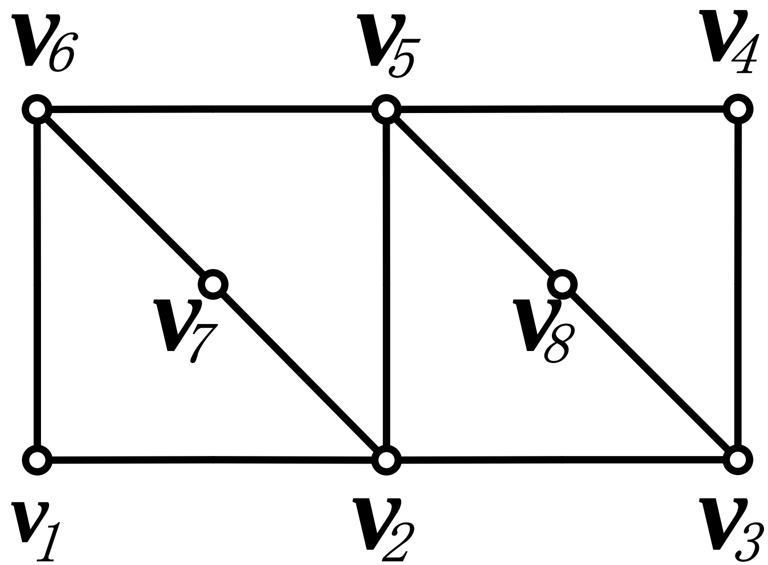
定理：若连通图$G = \langle V, E\rangle$是哈密尔顿图，S是V的任意真子集，则G-S的分支数$\omega(G\text{-}S) \leq |S|$。

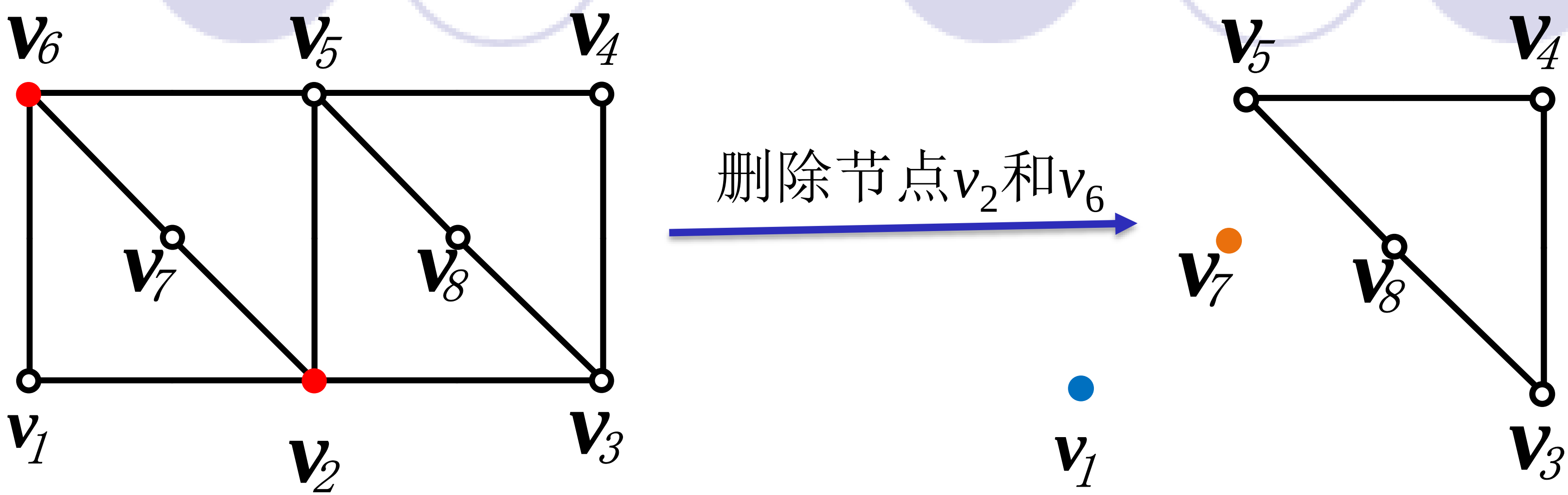
上述本定理给出是哈密尔顿图的一个必要条件，但这个条件又不便于使用，因为它要求对G的结点集合的所有真子集进行验证。

尽管如此，利用它还可以证明某些图不是哈密尔顿图。

哈密尔顿图

例：判断下图是否是哈密尔顿图。

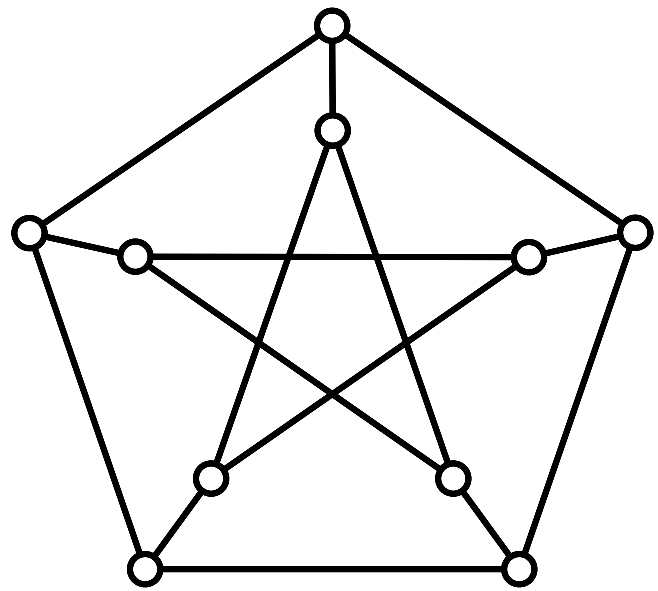




若$S=\{v_2，v_6\}$，则G-S是3个连通分图，因此$\omega(G$-$S)\not<|S|$，从而G不是哈密尔顿图。

哈密尔顿图

尽管这个定理可以用来判断一个图不是哈密尔顿图，但是，当满足$\omega(G\text{-}S)\leq|S|$时，该图不一定就是哈密尔顿图。



上图不是哈密尔顿图。但对于V的任意真子集S，总有$\omega(G\text{-}S)\leq|S|$。

哈密尔顿图

下面给出图G是哈密尔顿图的充分条件，这个结果是于1960年Ore研究得到的。

- 定理：设$G=\langle V,E\rangle$是$|V|=n\geq 3$阶简单图。

  若$\forall u,v\in V$有$d(u)+d(v)\geq n-1$，则G中存在一条哈密尔顿链。

  若$d(u)+d(v)\geq n$，则G是哈密尔顿图。

哈密尔顿图

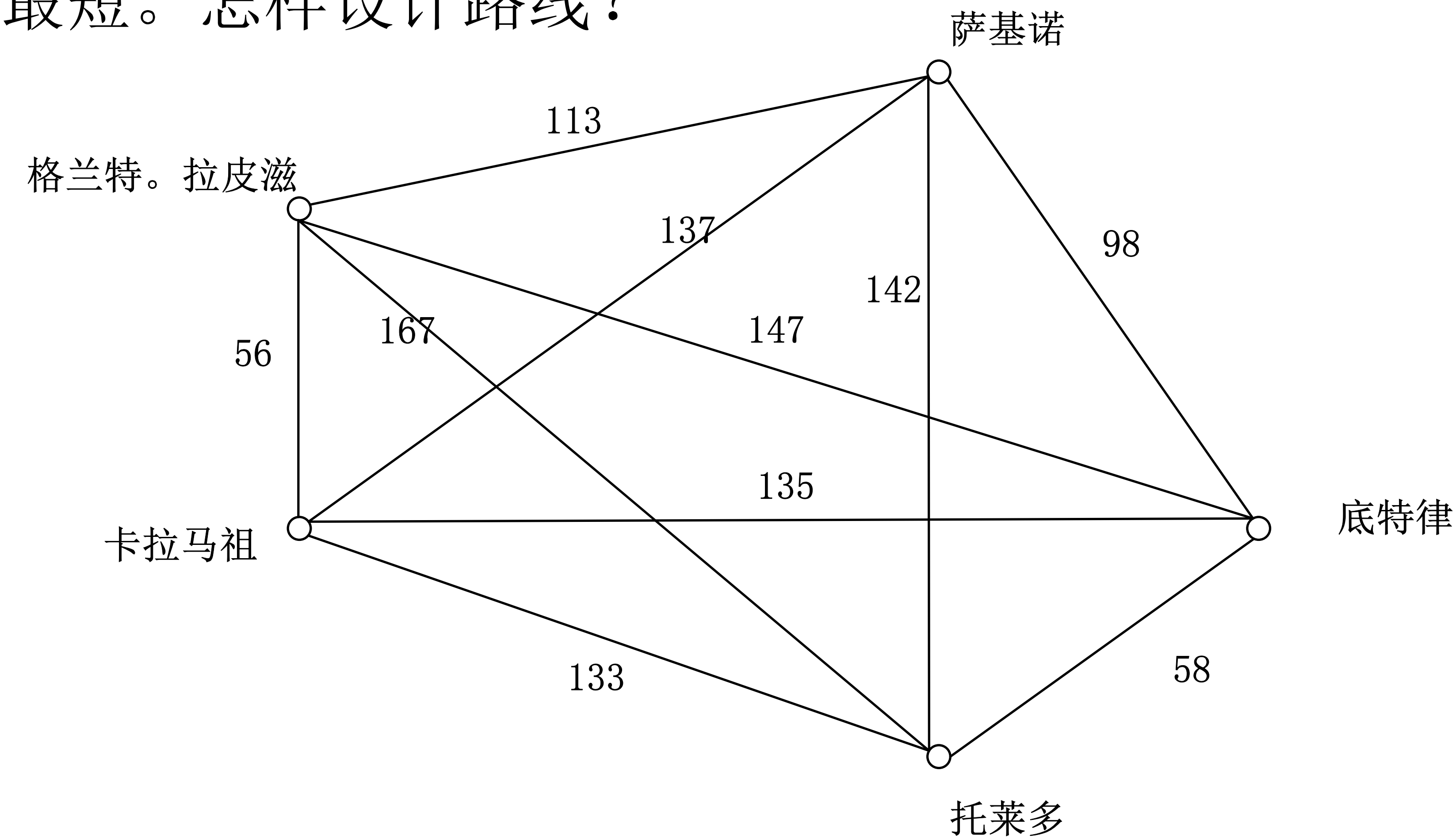
- 推论：给定简单图 $G = \langle V, E\rangle$，若 $|V| \geq 3$，每个结点的度$\delta \geq |V|/2$，则G是哈密尔顿图。
- 该结论（本推论）是由G.A.Dirac于1952年给出的，它也只是个充分条件。例如，十多边形显然是哈密尔顿图，但$\delta = 2 < 10/2 = 5$。

哈密尔顿图

- 已知的最好的求一个图里的哈密尔顿回路或者判定这样的回路不存在的算法具有指数的最坏情形时间复杂度（向对于图的顶点数来说）。
- 找到具有多项式最坏情形时间复杂性的解决算法是NP复杂的。

哈密尔顿图的应用

旅行商问题： 一位旅行商想要访问n个城市中每个城市恰好一次，最后返回到出发点，并且走的路程最短。怎样设计路线？



哈密尔顿图的应用

假定城市两两之间都直接连通，那么走法一共有$(n-1)!$种，但是考虑相反顺序构成的哈密尔顿回路是一样的，因此只需要检查$(n-1)!/2$条路径。

但是，假定有25个城市，则24！/2大约等于$3.1*10^{23}$，这个数目非常大，因此遍历的做法不科学。

由于旅行商问题在实践和理论中都有重大的意义，因此已经投入了巨大的努力来解决这个问题，但是，还没有找到多项式最坏情形时间复杂度的算法。在实际中，当n的数目很多时，采用的是近似算法，找到一个近似解。

作业

- $P256$： 1,2,3,5,7,9