第三章 习题

习题 3.1

1. (1) $F_X(x)=\sin x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}$ ； $F_Y(y)=\sin y, 0\le y\le \frac{\pi}{2}$

   (2) $P\left(0<X\le \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}<Y\le \frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $F(x,y)$不是联合分布函数。

习题 3.2

1.

$Y\|X$	1	2	3
1	0	2/12	1/12
2	2/12	2/12	2/12
3	1/2	2/12	0

$P(X=Y)=\frac{1}{6}$

2.

$X\|Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	0	0	1/35	1/35
1	0	6/35	6/35	12/35
2	3/35	12/35	3/35	18/35
3	2/35	2/35	0	4/35
$p_{\bullet j}$	1/7	4/7	2/7	1

3.

$X\|Y$	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	1/4	1

4. (1) $\alpha = 0.3$； $\beta = 0.1$

(2) $P(X+Y<1)=0.4$； (3) $P(X^2Y^2=1)=0.3$

5. (1) 放回抽取

$X\|Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\frac{1}{6}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

X 与 Y 独立

（2）不放回抽取

$X\|Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{5}{6}\times\frac{9}{11}$	$\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{1}{6}\times\frac{10}{11}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

X 与 Y 不独立

6. $a=0.4$，$b=0.1$

7.

$X\|Y$	3	4	5	$p_{i\bullet}$
1	1/10	2/10	3/10	3/5
2	0	1/10	2/10	3/10
3	0	0	1/10	1/10
$p_{\bullet j}$	1/10	3/10	3/5	1

$$P(X=1,\ Y=3)=\frac{1}{10}\neq P(X=1)P(Y=3)$$

X与Y不独立

8. $(1)\ P(Y=m|X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

$(2)\ P(X=n,\ Y=m)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

习题 3.3

1. $(1)\ k=2;\ (2)\ P(Y\le X)=1/3;$

$(3)\ P(Y+X\le 1)=1-2e^{-1}+e^{-2}$

(4) $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}), & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(5) $P(Y=X)=0$

2. $f_X(x)=\begin{cases}2.4(2-x)x^2, & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

3. (1) $c=\dfrac{3}{\pi R^3}$ ； (2) $P(Y^2+X^2\le r^2)=\dfrac{r^2}{R^2}\left(3-2\dfrac{r}{R}\right)$

4. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) $P(Y+X\le 1)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}$；(3) X与Y不独立。

5. $P(\max(X,Y)<1)=\dfrac{1}{9}$

6. $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{y}{5}}, 0<x<0.2, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$P(X\ge Y)=29e^{-\frac{1}{25}}-24$

7. $f(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2y}, 0<y\le 1\le\dfrac{1}{y}<x<+\infty\\ \dfrac{y}{x^2}, \quad 1<y<x<+\infty\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

$$f(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\ln x}, 1<x<\infty, \dfrac{1}{x}<y<x\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

习题 3.4

1. (1) $X+2Y\sim\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6\\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$

(2) $X^2Y\sim\begin{pmatrix}-4 & -1 & 1 & 2 & 4 & 8\\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$

(3) $\min(X,Y)\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$

2.（1）X与 Y独立

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

(2) $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right), & 0\le z\le 2\\ \frac{1}{2}e^{2-z}-\frac{1}{2}e^{-z}, & z>2\end{cases}$

(3) $P(Z>3)=\frac{1}{2e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

3. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1\end{cases}$

4. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le z\le 1\\ \frac{1}{2z^2}, & z\ge 1\end{cases}$

5. 至少一只寿命小于 180 的概率为： $1-(1-\Phi(1))^4$

6. $P(X=k|X+Y=n)=\frac{C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k}{\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n}$

习题 3.5

4. $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} n(n-1)[F(x+z)-F(x)]^{n-2} f(x)f(x+z)dx$

5. $(1)\ P(Z=k)=\frac{(q\lambda)^k}{k!}e^{-q\lambda}, k=0,1,2\cdots$

6. $(1)\ P(X>2Y)=\frac{1}{2}$ ， $(2)\ f_Z(z)=\begin{cases}-\ln z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

7. $f_Z(z)=0.3f(z+1)+0.7f(z+4)$

8. $F_Z(z)=0.7+1.5z$