第二章 习题

1. 甲，乙两人投篮，投中的概率分别为**0.6**、**0.7**，今各投三次，求：**(1)** 两人投中次数相等的概率。**(2)** 甲比乙投中次数多的概率。

解：**(1)** 设甲投中次数为X，乙投中次数为 Y，则 $X \sim B(3,0.6), Y \sim B(3,0.7)$

$$p_1 = \sum_{i=0}^{3} P(X=i)P(Y=i) = \sum_{i=0}^{3} C_i^3 0.6^i 0.4^{3-i} C_i^3 0.7^i 0.3^{3-i}$$

$$(2)\quad p_2 = P(X=1,Y=0) + P(X=2,Y=0) + P(X=2,Y=1)$$

$$+ P(X=3,Y=0) + P(X=3,Y=1) + P(X=3,Y=2)$$

$$= \sum_{i>j=0}^{3} C_i^3 0.6^i 0.4^{3-i} C_j^3 0.7^j 0.3^{3-j}$$

- **2.** 设有**80**台相同的机器，每台机器的工作是相互独立的，发生故障的概率都是**0.01**。当机器故障时，一名工人只能维修一台故障机器。下面有两种配备工人的方法，第一种方法，由**4**个人维护**80**台机器，每人**20**台；第二种方法，由**3**人同时看护**80**台机器，问哪种方法更好？
- 解：设第一种方法中，**1**人看护**20**台机器的故障次数为 X，$X \sim B(20, 0.01)$
- 设第二种方法中，**3**人看护**80**台机器的故障次数为 Y，$Y \sim B(80, 0.01)$
- 第一种方法机器能及时维修：
- 第二种方法机器能及时维修：

$$\{P(X \le 1)\}^4$$

$$= \{C_{20}^0 0.99^{20} + C_{20}^1 0.01^1 0.99^{19}\}^4 = 0.934$$

$$P(Y \le 3) = \sum_{i=0}^{3} C_{80}^i 0.01^i 0.99^{80-i} = 0.991$$

- **3.** 进行某种实验，成功的概率为3/4，失败的概率为1/4.以 X 表示试验首次成功所需要的试验次数，求 X 的分布列，并写出 X 取偶数的概率。
- 解：$$P(X=k)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}，k=1,2,\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{1-(1/4)}=1=P(X\text{取奇数})+P(X\text{取偶数})$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{1-(-1/4)}=\frac{3}{5}=P(X\text{取奇数})-P(X\text{取偶数})$$

$$P(X\text{取偶数})=\frac{1}{5}$$

- **4.** 甲、乙两人独立地轮流投篮，直至有人投中为止。甲先投，已知甲乙的命中率分别为 **0.4,0.5.** 以 X , Y 表示甲乙的投篮次数，求 X , Y 的分布列。
- **解：** $P(X=k)=0.6^{k-1}0.5^{k-1}\,0.4+0.6^{k}0.5^{k-1}\,0.5=0.3^{k-1}0.7$

$$k=1,2,\cdots$$

$$P(Y=k)=0.6^{k}0.5^{k}\,0.4+0.6^{k}0.5^{k-1}\,0.5=0.3^{k}1.4,\quad k=1,2,\cdots$$

$$P(Y=0)=0.4$$

- **5.** 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，问：当 σ 取何值时，X 落入区间 (e,e^2) 的概率最大？
- 解：$P(e<X\le e^2)=\Phi\left(\frac{e^2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{e-\mu}{\sigma}\right)=\int_{\frac{e-\mu}{\sigma}}^{\frac{e^2-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$P(e<X\le e^2)'=-\frac{e^2-\mu}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(e^2-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\frac{e-\mu}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(e-\mu)^2}{2\sigma^2}}=0$$

- $\sigma^2=\dfrac{(e^2-\mu)^2-(e-\mu)^2}{2\ln\left(\dfrac{e^2-\mu}{e-\mu}\right)}$ 当 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(e^2-\mu)^2-(e-\mu)^2}{2\ln\left(\dfrac{e^2-\mu}{e-\mu}\right)}}$ 时，X 落入 $(e，e^2)$ 概率最大。
-

- **6.** 设随机变量 ***X*** 服从参数为 **ln3** 的指数分布，求 $Y=[X]+1$ 的分布列，其中 $[X]$ 为向下取整数。
- 解：$X \sim e(\ln 3)$，$f(x)=(\ln 3)e^{-x\ln 3}=\ln 3\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$，$x>0$

$$P(Y=k)=P([X]+1=k)=P([X]=k-1)=\int_{k-1}^{k}\ln 3\left(\frac{1}{3}\right)^{x}dx$$

$$=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\Big|_{k-1}^{k}=3^{1-k}-3^{-k}\quad k=1,2,\cdots$$

- **7.** 如果随机变量 ***X*** 与 **-*X*** 有相同的分布函数，称随机变量 ***X*** 是对称的。如果 ***X*** 是对称的，证明 ***X*** 的分布函数满足 $F(x)+F(-x)=1$ ，且如果 ***X*** 又是连续性随机变量，那么密度函数必为偶函数。
- 证明：$F(x)=P(X\le x)=P(-X\le x)$

$$=P(X\ge -x)=1-P(X\le -x)=1-F(-x)$$

- 则 $F(x)+F(-x)=1$
- 设 连续型随机变量***X*** 的密度函数为 ***f*** **(*x*)**，由上式求导得，
- ***f*** **(*x*) = *f*** **(-*x*)** , 密度函数 ***f*** **(*x*)**为偶函数。

- **8.** 在一段时间内，进入某商店的顾客人数 $X \sim P(\lambda)$ ，每个顾客购买某种商品的概率为 $\boldsymbol{p}$，并且顾客是否购买这种商品是相互独立的，求进入商店的顾客购买这种商品的人数 $\boldsymbol{Y}$ 的分布列。

- 解：在 $X = m$ 条件下，$Y \sim B(m, p)$，$P(Y = n | X = m) = C_m^n p^n q^{m-n}$.

$n = 0,1 \cdots m$

- 由全概公式，$P(Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} P(X = m) P(Y = n | X = m)$

$$= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} C_m^n p^n q^{m-n} = \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n q^{m-n}$$

$$= \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^{m-n}}{(m-n)!} = \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} = \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-p\lambda}, \quad Y \sim P(p\lambda)$$