



# 离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405, Tel: 62274392  
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921  
Email: zkchen@dlut.edu.cn  
zkchen00@hotmail.com  
QQ: 1062258606

# 回顾

- 集合的定义
- 集合的描述
- 内涵与外延
- 集合的基数
- 集合间的关系
  - 相等
  - 包含、真包含
- 全集
- 补集
- 子集、幂集
- 集合的交并运算
- 集合的差分运算
- 集合对称差分运算

# 回顾

- 集合运算的**40**条规律
- 包含排斥原理

# 回顾—数学符号的书写与阅读

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

## 1 逻辑(Logic)

$\exists$  there exists

$\forall$  for all

$p \Rightarrow q$  p implies q / if p, then q

$p \Leftrightarrow q$  p if and only if q

p is equivalent to q

p and q are equivalent

# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 2 集合(Sets)

$x \in A$   $x$  belongs to  $A$  /  $x$  is an element (or a member) of  $A$

$x \notin A$   $x$  does not belong to  $A$  /  $x$  is not an element (or a member) of  $A$

$A \subset B$   $A$  is contained in  $B$  /  $A$  is a subset of  $B$

$A \supset B$   $A$  contains  $B$  /  $B$  is a subset of  $A$

$A \cap B$   $A$  cap  $B$  /  $A$  meet  $B$  /  $A$  intersection  $B$

$A \cup B$   $A$  cup  $B$  /  $A$  join  $B$  /  $A$  union  $B$

$B/A$   $A$  minus  $B$  / the difference between  $A$  and  $B$

$A \times B$   $A$  cross  $B$  / the Cartesian product of  $A$  and  $B$  (A与B的笛卡尔积)

# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 3 实数(Real numbers)

$x+1$                       **x plus one**

$x-1$                       **x minus one**

$x\pm 1$                     **x plus or minus one**

$xy$                         **xy / x multiplied by y**

$(x-y)(x+y)$             **x minus y, x plus y**

$\frac{x}{y}$                         **x over y**

$=$                         **the equals sign**

$x=5$                     **x equals 5 / x is equal to 5**

$x\neq 5$                    **x (is) not equal to 5**

$x\equiv y$                 **x is equivalent to (or identical with) y**

# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 3 实数(Real numbers)

$x > y$                        $x$  is greater than  $y$

$x \geq y$                        $x$  is greater than or equal to  $y$

$x < y$                        $x$  is less than  $y$

$x \leq y$                        $x$  is less than or equal to  $y$

$0 < x < 1$                       zero is less than  $x$  is less than 1

$0 \leq x \leq 1$                       zero is less than or equal to  $x$  is less than or equal to 1

$|x|$                               mod  $x$  / modulus  $x$

$x^2$                                $x$  squared /  $x$  (raised) to the power 2

$x^3$                                $x$  cubed

$x^4$                                $x$  to the fourth /  $x$  to the power four

$x^n$                                $x$  to the  $n$ th /  $x$  to the power  $n$

$x^{-n}$                                $x$  to the (power) minus  $n$

# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 3 实数(Real numbers)

$n!$       **n factorial**

$(x+y)^2$     **x plus y all squared**

$x_i$          **$x_i$  / x subscript i / x suffix i / x sub i**

$\sum_{i=1}^n a_i$     **the sum from i equals one to n  $a_i$  / the sum as i runs from 1 to n of the  $a_i$**

$\left(\frac{x}{y}\right)^2$     **x over y all squared**

$\hat{x}$         **x hat**

$\overline{x}$       **x bar**

$\tilde{x}$         **x tilde**



# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 4 线性代数(Linear algebra)

$\|A\|$  the norm (or modulus) of  $x$

$\overrightarrow{OA}$  OA / vector OA

$\overline{OA}$  OA / the length of the segment OA

$A^T$  A transpose / the transpose of A

$A^{-1}$  A inverse / the inverse of A

# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 5 函数(Functions)

$f(x)$                        $fx$  /  $f$  of  $x$  / the function  $f$  of  $x$

$f : S \rightarrow T$               a function  $f$  from  $S$  to  $T$

$x \mapsto y$                    $x$  maps to  $y$  /  $x$  is sent (or mapped) to  $y$

$f'(x)$                        $f$  prime  $x$  /  $f$  dash  $x$  / the (rst) derivative of  $f$  with respect to  $x$

$f''(x)$                        $f$  double-prime  $x$  /  $f$  double-dash  $x$  / the second derivative of  $f$  with respect to  $x$

$f'''(x)$                        $f$  triple-prime  $x$  /  $f$  triple-dash  $x$  / the third derivative of  $f$  with respect to  $x$

$F^{(4)}(x)$                   four  $x$  / the fourth derivative of  $f$  with respect to  $x$

$\ln y$                          $\log y$  to the base  $e$  /  $\log$  to the base  $e$  of  $y$  / natural  $\log$  (of)  $y$

# 回顾

## 数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

### 5 函数(Functions)

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$  the partial (derivative) of f with respect to  $x_1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$  the second partial (derivative) of f with respect to  $x_1$

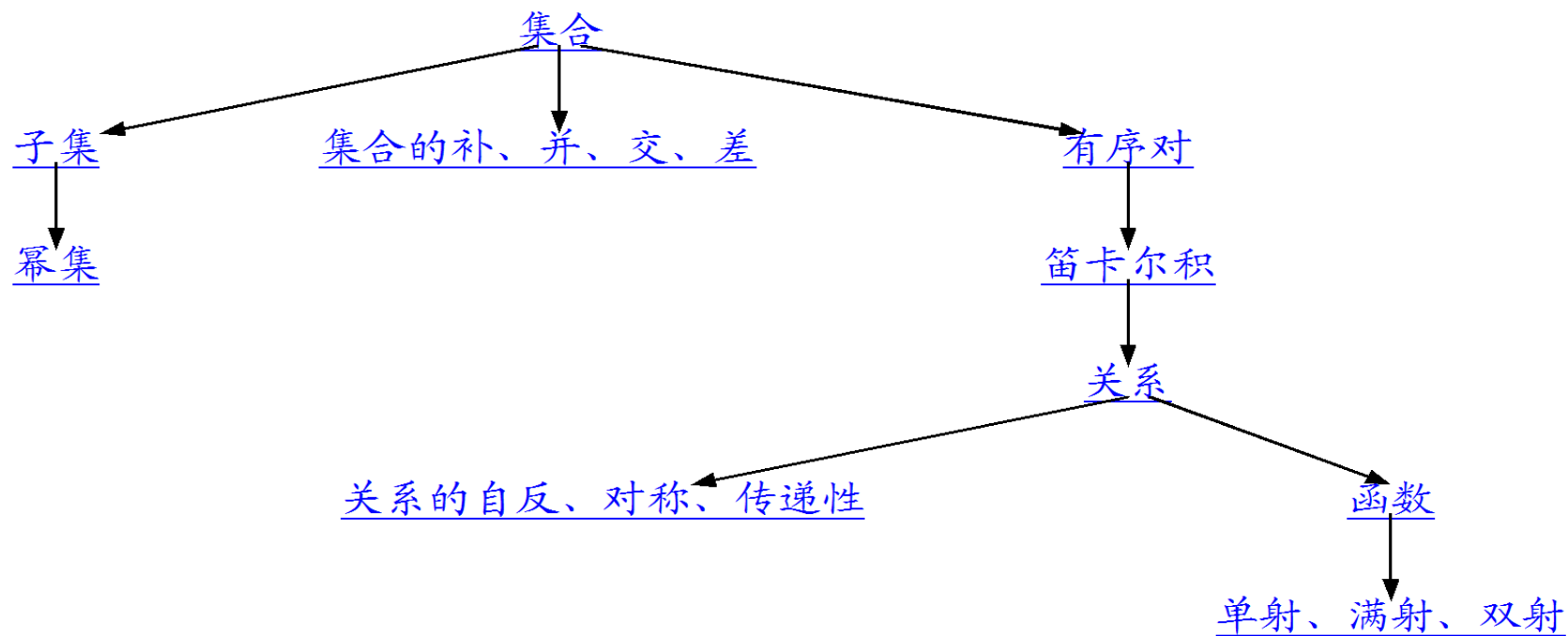
$\int_0^\infty$  the integral from zero to infinity

$\lim_{x \rightarrow +0}$  the limit as x approaches zero from above

# 第四章 二元关系

- 本章讨论的关系（主要是二元关系），它仍然是一种集合，但它是比前一章更为复杂的集合。
- **关系是笛卡尔乘积的子集**，它的元素是有序二元组的形式，这些有序二元组中的两个元素来自于两个不同或者相同的集合。因此，关系是建立在其它集合基础之上的集合。
- 关系中的有序二元组反映了不同集合中元素与元素之间的关系，或者同一集合中元素之间的关系。本章首先讨论关系的基本表达形式，然后给出关系的运算，最后讨论几种常用的关系。

# 回顾



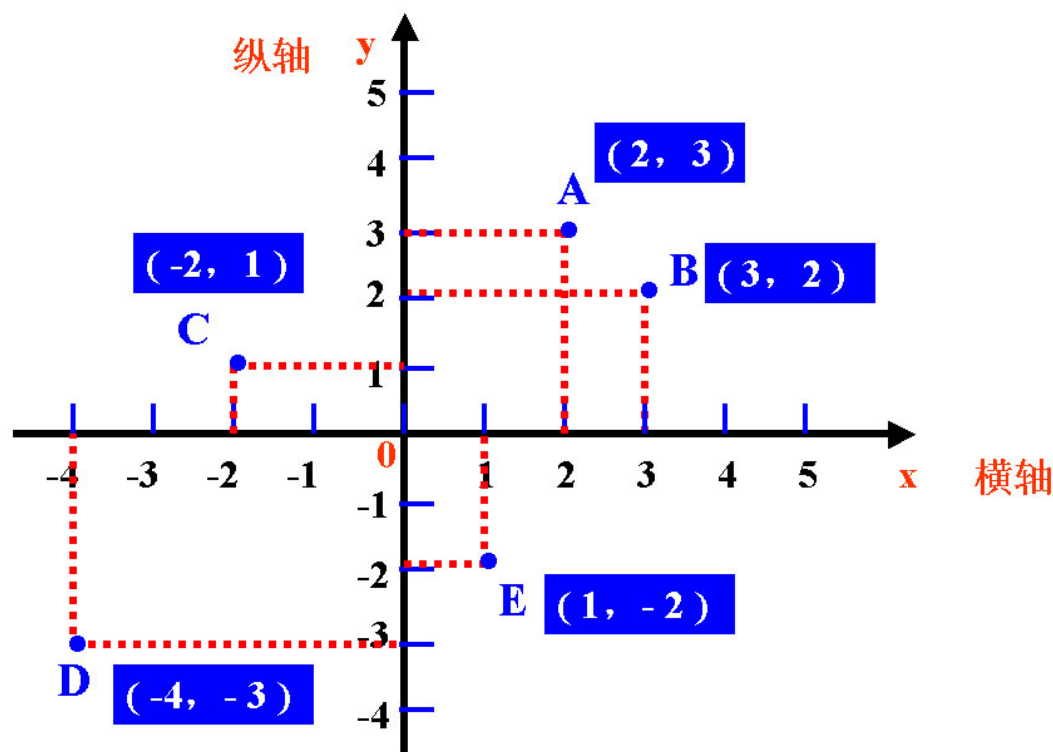
# 主要内容

- 序偶与迪卡尔乘积
- 关系的基本概念
- 关系的性质
- 关系的表示
- 关系的运算
- 合成关系的关系图、关系矩阵
- 特殊关系：等价关系和划分，相容关系和覆盖，偏序关系和哈斯图等。

# 4.1 多重序元与迪卡尔乘积

## 一、序偶

定义：由两个具有固定次序的客体组成的序列，称**序偶**，记作 $\langle x, y \rangle$ 。



$$\{2,3\}=\{3,2\}$$

$$\langle 2,3 \rangle \neq \langle 3,2 \rangle$$

# 一、序偶

序偶的相等：

$$\langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle \Leftrightarrow ((x = a) \wedge (y = b))$$

序偶 $\langle a, b \rangle$ 中， $a$ 称为第一元素， $b$ 称为第二元素。两个元素不一定来自同一个集合，他们可以代表不同类型的事务。



## 二、多重序元

定义： $n$ 重序元是一个序偶，它的第一元素是 $(n-1)$ 重序元。

3重序元： $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ ，简单记作 $\langle x, y, z \rangle$

$n$ 重序元： $\langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$

$n$ 重序元的相等：

$$\begin{aligned} \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle &\Leftrightarrow \\ ((x_1 = a_1) \wedge (x_2 = a_2) \wedge \dots \wedge (x_n = a_n)) & \end{aligned}$$

### 三、迪卡尔乘积

定义：设 $A$ 和 $B$ 是任意两个集合。若序偶的第一个元素是 $A$ 的一个元素，第二个元素是 $B$ 的一个元素，则所有这样的序偶集合，称为 $A$ 和 $B$ 的笛卡尔乘积，记作 $A \times B$ ，即

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

若 $A$ 中有 $m$ 个元素， $B$ 中有 $n$ 个元素， $A$ 和 $B$ 的笛卡尔乘积中元素个数为？



例： 设 $A = \{\alpha, \beta\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 求 $A \times B, B \times A, A \times A, (A \times B) \cap (B \times A)$ .

$$\text{解： } A \times B = \{\langle \alpha, 1 \rangle, \langle \alpha, 2 \rangle, \langle \beta, 1 \rangle, \langle \beta, 2 \rangle\}$$

$$B \times A = \{\langle 1, \alpha \rangle, \langle 2, \alpha \rangle, \langle 1, \beta \rangle, \langle 2, \beta \rangle\}$$

$$A \times A = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle\}$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$$

### 三、迪卡尔乘积

例： 设 $A = \{\alpha, \beta\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ 和 $C = \{c\}$ ,  
试求 $(A \times B) \times C$ 和 $A \times (B \times C)$

$$\begin{aligned}\text{解: } (A \times B) \times C &= \{\langle \alpha, 1 \rangle, \langle \alpha, 2 \rangle, \langle \beta, 1 \rangle, \langle \beta, 2 \rangle\} \times \{c\} \\ &= \{\langle \langle \alpha, 1 \rangle, c \rangle, \langle \langle \alpha, 2 \rangle, c \rangle, \langle \langle \beta, 1 \rangle, c \rangle, \langle \langle \beta, 2 \rangle, c \rangle\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \times (B \times C) &= \{\alpha, \beta\} \times \{\langle 1, c \rangle, \langle 2, c \rangle\} \\ &= \{\langle \alpha, \langle 1, c \rangle \rangle, \langle \alpha, \langle 2, c \rangle \rangle, \langle \beta, \langle 1, c \rangle \rangle, \langle \beta, \langle 2, c \rangle \rangle\}\end{aligned}$$

可见

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

### 三、迪卡尔乘积

定理：设有 $A, B, C$ 三个集合，则

$$(a) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(b) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(c) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(d) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

证：设 $\langle x, y \rangle$ 是 $A \times (B \cup C)$ 的任意元素，根据 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律，有：

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C) \quad \text{得证。}$$

# $n$ 个集合的笛卡尔乘积

定义：集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡尔乘积可以表示成

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I_n} A_i &= A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ &= ((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \dots \times A_n \\ &= \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \} \end{aligned}$$

集合 $A$ 的笛卡尔乘积 $A \times A$  记作 $A^2$ , 类推

$$A \times A \times A = A^3$$

如果所有的集合 $A_i$ 都是有限集合，则他们笛卡尔乘积的基数为：

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

## 4.2 关系的基本概念

### 一、关系的定义

定义：设  $n \in I_+$  且  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $n$  个任意集合，

$$R \subseteq \prod_{i=1}^n A_i$$

- (a) 称  $R$  为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  间的  **$n$ 元关系**；
- (b) 若  $n=2$ ，则称  $R$  为  $A_1$  到  $A_2$  的 **二元关系**；
- (c) 若  $R = \emptyset$ ，则称  $R$  为空关系；若  $R = \prod_{i=1}^n A_i$ ，则称  $R$  为 **全关系**；
- (d) 若  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ ，则称  $R$  为  $A$  上的  **$n$ 元关系**。

# 一、关系的定义

例：令  $R_1 = \{\langle 2n \rangle \mid n \in N\}$

$$R_2 = \{\langle n, 2n \rangle \mid n \in N\}$$

$$R_3 = \{\langle n, m, k \rangle \mid n, m, k \in N \wedge n^2 + m^2 = k^2\}$$

则称 $R_1$ 是 $N$ 上的一元关系， $R_2$ 是 $N$ 上的二元关系， $R_3$ 是 $N$ 上的三元关系。

如无特殊指定，“关系”概指二元关系。

若序偶 $\langle x, y \rangle$ 属于 $R$ ，则记作 $\langle x, y \rangle \in R$  或  $xRy$ ，  
否则，记作 $\langle x, y \rangle \notin R$  或  $x \not R y$ 。



# 一、关系的定义

例：设集合  $A=\{a,b\}, B=\{2,5,8\}$

则  $A \times B = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 5 \rangle, \langle a, 8 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 5 \rangle, \langle b, 8 \rangle\}$

令  $\rho_1 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 8 \rangle\}$      $\rho_2 = \{\langle a, 5 \rangle\}$

则  $\rho_1, \rho_2$  均是由  $A$  到  $B$  的关系。

同理， $\rho_3 = \{\langle 2, a \rangle, \langle 5, b \rangle\} \subseteq B \times A$

则  $\rho_3$  是由  $B$  到  $A$  的关系。

同理， $\rho_4 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 5, 8 \rangle\} \subseteq B \times B$

则  $\rho_4$  是由  $B$  到  $B$  的关系。

# 一、关系的定义

例：设集合 $A=\{2,3,5,9\}$ ，试给出集合 $A$ 上的小于或等于关系，大于或等于关系。

解：令集合 $A$ 上的小于或等于关系为 $R_1$ ，大于或等于关系为 $R_2$ ，根据定义有：

$$R_1 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 9 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 5, 9 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 9, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 9, 3 \rangle, \langle 9, 5 \rangle\}$$

## 二、关系的相等

定义：设 $R_1$ 为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的 $n$ 元关系， $R_2$ 为 $B_1, B_2, \dots, B_m$ 间的 $m$ 元关系，如果：

(1)  $n=m$

(2) 若 $1 \leq i \leq n$ ，则  $A_i = B_i$

(3) 把 $R_1$ 和 $R_2$ 作为集合看， $R_1=R_2$ 。

则称 $n$ 元关系 $R_1$ 和 $m$ 元关系 $R_2$ 相等，记作 $R_1=R_2$

## 二、关系的相等

例：设 $R_1$ 为从 $Z$ 到 $I_+$ 的二元关系， $R_2$ 和 $R_3$ 都是 $I$ 上的二元关系

$$R_1 = \{\langle n, m \rangle \mid n \in Z \wedge m \in I \wedge m = n + 1\}$$

$$R_2 = \{\langle n, n + 1 \rangle \mid n \in I \wedge n \geq 0\}$$

$$R_3 = \{\langle |n|, |n| + 1 \rangle \mid n \in I\}$$

从集合的观点来看， $R_1=R_2=R_3$ 。

但是就二元关系来说， $R_2=R_3$ ，不等于 $R_1$ 。

### 三、关系的定义域和值域

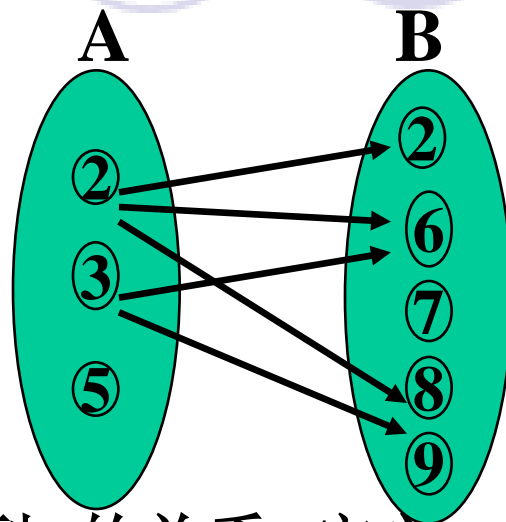
关系 $R$ (从 $A$ 到 $B$ 的关系)的定义域(简称为域)定义为:

$$D(R) = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

关系 $R$ 的值域定义为:

$$R(R) = \{y \mid (\exists x)(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

显然, 有  $D(R) \subseteq A, R(R) \subseteq B$



例: 设 $A=\{2,3,5\}, B=\{2,6,7,8,9\}$ , 由 $A$ 到 $B$ 的关系 $R$ 定义为: 当且仅当 $a$ 整除 $b$ 时, 有 $aRb$ 。

可得:  $R = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 9 \rangle\}$

$$D(R) = \{2, 3\}$$

$$R(R) = \{2, 6, 8, 9\}$$

## 四、关系的性质

定义：设 $R$ 为 $A$ 上的二元关系

(1)若对每个 $x \in A$ ，皆有 $\langle x, x \rangle \in R$ ，则称 $R$ 为自反的。  
用式子来表述即是：

$R$ 是自反的  $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$

(2)若对每个 $x \in A$ ，皆有 $\langle x, x \rangle \notin R$ ，则称 $R$ 为反自反的。  
用式子来表述即是：

$R$ 是反自反的  $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

## 四、关系的性质

(3) 对任意的  $x, y \in A$ ，若  $\langle x, y \rangle \in R$ ，则  $\langle y, x \rangle \in R$ ，就称  $R$  为**对称的**。用式子来表述即是：

$R$  是对称的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$

(4) 对任意的  $x, y \in A$ ，若  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, x \rangle \in R$ ，则  $x=y$ ，就称  $R$  为**反对称的**。用式子来表述即是：

$R$  是反对称的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$

## 四、关系的性质

(5) 对任意的  $x, y, z \in A$ ，若  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, z \rangle \in R$ ，则  $\langle x, z \rangle \in R$ ，就称  $R$  为可传递的。用式子来表述即是：

$R$  是可传递的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$

(6) 存在  $x, y, z \in A$ ，并且  $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$  而  $\langle x, z \rangle \notin R$ ，就称  $R$  为不可传递的。用式子来表述即是：

$R$  是不可传递的  $\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \notin R)$



## 四、关系的性质

例1: 考虑自然数集合上的普通相等关系“ $=$ ”，大于关系“ $>$ ”和大于等于关系“ $\geq$ ”具有的性质。

解： (1) “ $=$ ”关系是自反的、对称的、反对称的、可传递的；  
(2) “ $>$ ”关系是反自反的、反对称的、可传递的；  
(3) “ $\geq$ ”关系是自反的、反对称的、可传递的。

例2: 空集上的二元关系的性质。

自反的、对称的、反对称的、反自反的、可传递的

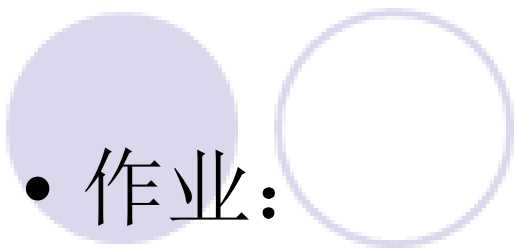
# 区分概念：空关系vs空集上的关系

空关系：对于任何集合A, 称空集为A上的空关系.

性质：若A非空，空关系是反自反的，对称的，反对称的，可传递的；

若A是空集，该空关系是自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

空集上的关系：自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的。在空集上可定义任意元关系。



- 作业:

- **P102: 1-10** (奇数)

