《高等数学》,《工科数学分析基础》和《微积分》A卷参考答案

一、1. $\frac{t}{2},\frac{1+t^2}{4t}$ ；2. $-e,\ y=1-ex$ ；3. $\sin 1-\cos 1,\ e^{2x}$ ；4. $x=0,\ y=x$ ；

5．$0, 2014\bullet 2015$。

二、1. B　　2. A　　3. B　　4. C　　5. A

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\tan x}{x}}$$ （2分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}(\frac{\tan x}{x}-1)}{2}}$$ （4分）

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}$$ （6分）

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}}$$ （8分）

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^2}=e^{\frac{2}{3}}$$ （10分）

四、（高等数学和微积分）

解：特征方程$r^2+2r+1=0$，特征根$r_1=r_2=-1$ （2分）

齐次方程通解$Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}$ （4分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$ （6分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$4ax+4a+4b=x$，

所以有$4a=1, 4a+4b=0$，解得$a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{4}$ （9分）

∴通解 $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})e^x$。 （10分）

（工科数学分析基础）

解：方程变形为$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$ （2分）

令$\frac{y}{x}=u,\ y=xu,\ y'=u+x\frac{du}{dx}$，代入上式并整理得$udu=\frac{dx}{x}$ （5分）

$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+c$，将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得通解：$y^2=2x^2(\ln|x|+c)$　　（9 分）

由条件 $y(1)=0$，得 $c=0$，故特解为：$y^2=2x^2\ln|x|$　　（10 分）

五、解：1、令 $x=\pi/2-t$，则 $dx=-dt$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$；（4 分）

2、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx \underline{\underline{x=\pi/2-t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx$$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi-1}{4}$。　　（10 分）

六、解：**1**、$S=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 y(x)\,dx \underline{\underline{x=\cos^3 t}} \frac{\pi}{4}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\bullet 3\cos^2 t\bullet(-\sin t)\,dt$

$$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\bullet\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}-3(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt)$$

$$=\frac{\pi}{4}-3(\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2})=\frac{5\pi}{32}。$$　（5 分）

2、$V=\frac{2\pi}{3}-\pi\int_0^1 y^2(x)\,dx \underline{\underline{x=\cos^3 t}} \frac{2\pi}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t\bullet 3\cos^2 t\bullet(-\sin t)\,dt$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\bullet\cos^2 t\,dt=\frac{2\pi}{3}-3\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 t\,dt)$$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi(\frac{6}{7}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\bullet\frac{6}{7}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{2}{3})=\frac{18\pi}{35}。$$　（10 分）

七、解：1、因 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由定积分中值定理得，存在点 $\eta\in(0,2)$，使 $\int_0^2 f(x)dx=2f(\eta)$，又有已知条件 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx$，即得 $f(\eta)=f(0)$。（4 分）

2、由已知条件：$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$ 及 1 中的结论：$\int_0^2 f(x)dx=2f(\eta)$，有 $f(0)=f(\eta)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$，因函数 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，由介值定理知：存在 $x_0\in[2,3]$，使 $f(x_0)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$，即 $f(0)=f(\eta)=f(x_0)$。函数 $f(x)$ 分别在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,x_0]$ 上满足罗尔定理条件，则由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,\eta)$ 和 $\xi_2\in(\eta,x_0)$，使

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ ，又 $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]\subset(0,3)$ 上也满足罗尔定理条件，故再由罗尔定理，存在点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$ ，使得 $f''(\xi)=0$ 。 （10 分）

《高等数学》,《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、1. $-e,\ y=1-ex$ ；2. $\frac{t}{2},\frac{1+t^2}{4t}$ ；3. $x=0,\ y=x$ ；4. $0, 2014\bullet 2015$ ；

5. $\sin 1-\cos 1,\ e^{2x}$ 。

二、1. A 2. B 3. C 4. A 5.B

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x\tan x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}\ln\frac{\tan x}{x}}$$ （2 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)}$$ （4 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}$$ （6 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}}$$ （8 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2}=e^{\frac{1}{3}}$$ （10 分）

四、（高等数学和微积分）

解：特征方程 $r^2+4r+4=0$ ，特征根 $r_1=r_2=-2$ （2 分）

齐次方程通解 $Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-2x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$9ax+6a+9b=x$ ，

所以有 $9a=1, 6a+9b=0$ ，解得 $a=\frac{1}{9}, b=-\frac{2}{27}$ （9 分）

∴通解 $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\left(\frac{1}{9}x-\frac{2}{27}\right)e^x$ 。 （10 分）

（工科数学分析基础）

解：方程变形为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\frac{y}{x}}$ （2 分）

令 $\frac{y}{x}=u,\ y=xu,\ y'=u+x\frac{du}{dx}$ ，代入上式并整理得 $udu=-\frac{dx}{x}$ （5 分）

$\frac{1}{2}u^2=c-\ln|x|$ ，将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得通解： $y^2=2x^2(c-\ln|x|)$ （9 分）

由条件 $y(1)=0$ ，得 $c=0$ ，故特解为： $y^2=-2x^2\ln|x|$ （10 分）

五、解：1、令 $x=\pi/2-t$ ，则 $dx=-dt$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx$$ ；（4 分）

2、$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx \underline{\underline{x=\pi/2-t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi-1}{4}$$ 。（10 分）

六、七、同 A 卷。