期中自测

- 一.填空题

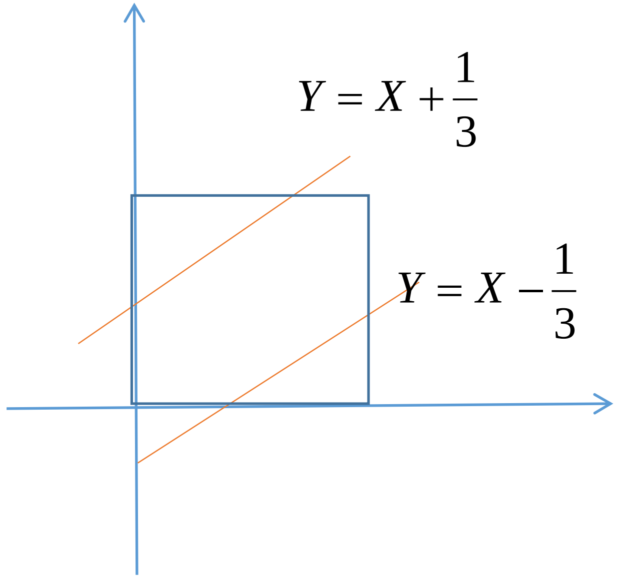
- **1.**已知 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.4,\ AB=\phi,\ P(A-B)=$ __0.5__.

  $$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)=0.5.$$

- **2.**在区间 $[0,1]$ 内任取两点，则两点距离小于**1/3**的概率为**5/9**

- $|X-Y|<\frac{1}{3},\quad X-\frac{1}{3}<Y<X+\frac{1}{3},$

  $$S=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}{1}=\frac{5}{9}$$



- **3.**已知随机变量 $X \sim e(1/4)$，现对**X**进行独立的三次观测，则至少有一次观测值小于**4**的概率为：$1-C_3^0(1-e^{-1})^0(e^{-1})^3=1-e^{-3}$

$$P(X<4)=\int_0^4 \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-1}$$

- **4.**设随机变量 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 独立同分布，且均为 **$B(1,0.6)$**，令
- $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$则**Y**的分布列为$Y \sim B(1,0.6^n)$。
- **5.**某射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为**65/81**，该射手的命中率为 $p=1/3$

$$1-C_4^0 p^0 q^4=65/81，\quad q^4=1-65/81=16/81，\quad q=2/3$$

- **6.设随机变量*X*,*Y*独立同分布，服从*U*(-2,0)，则*Z*=min(*X*,*Y*)的分布函数为：**

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & x\le -2\\ 1-\dfrac{z^2}{4} & -2<x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$$

$$\left\{F_X(x)=\frac{x+2}{2},(-2<x<0)\right\}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min(X,Y)\le z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-\{1-F_X(z)\}\{1-F_Y(z)\}$$

$$=1-\left\{1-\frac{x+2}{2}\right\}^2=1-\left\{\frac{x}{2}\right\}^2$$

- 二. 将4个球随机放入5个盒子中，求恰有一个盒子含有2个球的概率。
- 解：设A=(恰有一个盒子中有2个球)

$$P(A)=\frac{C_4^2 5\times 4\times 3}{5^4}=\frac{72}{125}$$

- 三. 设袋中有2个白球，5个红球共7个球，第一次从袋中任取2个球，然后放入2个白球，第二次从袋中任取3个球，求这3个球均为红球的概率。
- 解：设 $A=\left(\text{第一次所取}2\text{个球中有}i\text{个白球}\right),\quad i=0,1,2$

设 $B=\left(\text{第二次所取}3\text{个球均为红球}\right)$

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P\left(A_i\right)P(B|A_i) \qquad P\left(A_i\right)=\frac{C_2^i C_5^{2-i}}{C_7^2},\ P(B|A_i)=\frac{C_{5-i}^3}{C_7^2}$$

$$P(B)=\frac{C_2^0C_5^2}{C_7^2}\frac{C_3^3}{C_7^2}+\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2}\frac{C_4^3}{C_7^2}+\frac{C_2^2C_5^0}{C_7^2}\frac{C_5^3}{C_7^2}$$

- 四. 设 $P(A)=0.4$, $P(A|B)=a(0<a<1)$, 又**A**发生而**B**不发生的概率与**B**发生而**A**不发生的概率相等，求 1） $P(B|A\cup\overline{B})$, **2)** ***a***取何值***A***与***B***独立？
- 解：1） $P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{P(B\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{0.4a}{0.6+0.4a}=\dfrac{2a}{3+2a}$

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)\Rightarrow P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}B)\Rightarrow P(B)=P(A)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.4a\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.4a$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.4+0.6-(0.4-0.4a)=0.6+0.4a$$

2）A与B独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\overline{B})$, $\Rightarrow a=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.4-0.4a}{0.6}$,

$$a=0.4$$

- 五. 设随机变量 X 的密度函数为，$Y=\dfrac{X}{3}$
- 求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$。

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4 & -1\le x<1\\ 1/2 & 1\le x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

- 解：由 $-1\le x<2$ 及$Y=\dfrac{X}{3}$知，$-\dfrac{1}{3}\le y<\dfrac{2}{3}$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{X}{3}\le y\right)=P(X\le 3y)=F_X(3y)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(3y)=f_X'(3y)3=\begin{cases}3/4 & -1/3\le y<1/3\\ 3/2 & 1/3\le x<2/3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

• 六. 设X与 Y是相互独立的随机变量，其概率密度为 $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$

$f_Y(y)=\alpha e^{-\alpha y}, y>0$； 令$Z=\begin{cases}1 & X\le Y\\ 0 & X>Y\end{cases}$, $W=\begin{cases}1 & X\le 2Y\\ 0 & X>2Y\end{cases}$,

求Z,W的联合分布。

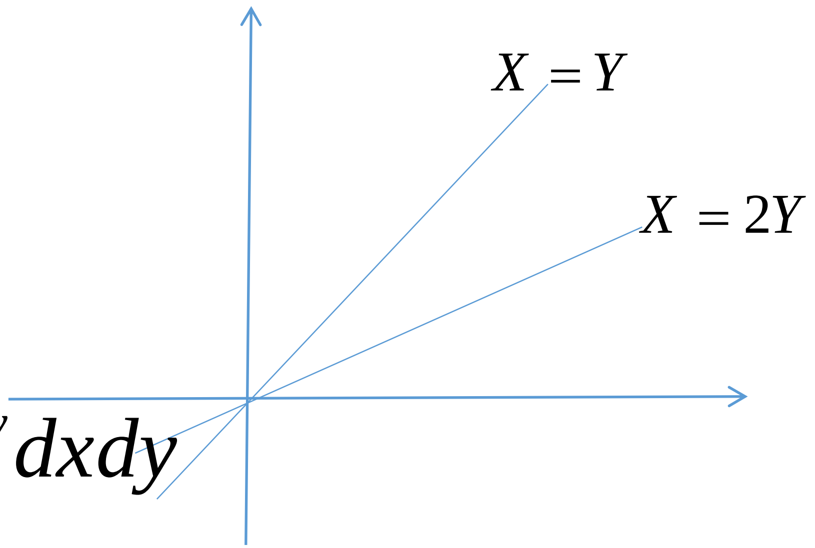
$W \mid Z$	0	1
0	$P(X>2Y)$	0
1	$P(Y<X\le 2Y)$	$P(X\le Y)$

解： $P(Z=0, \ W=0)=P(X>2Y)$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{x/2}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\alpha e^{-\alpha y}dxdy=\frac{2}{\alpha+2\lambda}$$

$$P(Z=0, \ W=1)=P(Y<X\le 2Y)$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{x/2}^{x}\lambda e^{-\lambda x}\alpha e^{-\alpha y}dxdy$$



$$P(Z=1, \ W=1)=P(X\le Y)=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\alpha e^{-\alpha y}dxdy$$

- 七. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=e^{-x},(0<y<x)$ 。求:

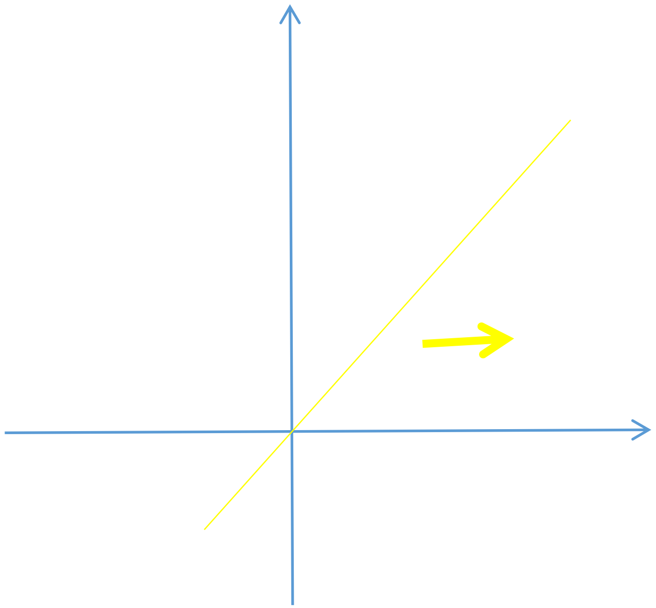
  $(1)\ f_X(x),\ f_Y(y)$,并判断X与Y是否独立。$(2)\ P(Y>3|X=5)$

- 解: $(1)\ f_X(x)=\int_0^x e^{-x}dy = xe^{-x},(x>0)$

$$f_Y(y)=\int_y^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-y},(y>0)$$

$$(2)\ P(Y>3|X=5)=\frac{P(X=5,\ Y>3)}{P(X=5)}$$

$$=\int_3^5 \frac{f(5,3)}{f_X(5)}dy = \int_3^5 \frac{e^{-5}}{5e^{-5}}dy = \frac{2}{5}$$



- 八. 设X与 Y是相互独立的随机变量，且都服从参数为1的指数分布，求

  $Z=2X+2Y$的密度函数。

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z+1}{2}e^{-\frac{z}{2}}-\dfrac{z^2}{4}e^{-\frac{z}{2}} & z>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

- 解：Z 的取值范围 $z>0$，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X+2Y\le z)=P\left(Y\le\frac{z}{2}-X\right)$$

$$=\int_0^{\frac{z}{2}}\int_0^{\frac{z}{2}-x}e^{-x}e^{-y}dydx$$

$$=\int_0^{\frac{z}{2}}\left(1-e^{x-\frac{z}{2}}\right)e^{-x}dx=\int_0^{\frac{z}{2}}e^{-x}-e^{-\frac{z}{2}}dx$$

$$=1-e^{-\frac{z}{2}}+\frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}}$$