第一章 命题逻辑

P21

1. 下列哪些是命题？
   1) 2 是整数吗？ 不是
   2) 研究逻辑。 不是
   3) $x^2+x+1=0$。 不是
   4) 一月份将会下雪。 是
   5) 如果股市下跌，我将会赔钱。 是

2. 给出下列命题的否命题
   1) 大连的每条街道都临海。
      否命题：并非大连的每条街道都临海。
   2) 2 是一个偶数和 8 是一个基数。
      否命题：2 不是一个偶数或 8 不是一个基数
   3) 2 是偶数或-3 是负数。
      否命题：2 不是偶数并且-3 不是负数。

3. 给出命题 $P \to Q$，我们把 $Q \to P$、$\neg P \to \neg Q$、$\neg Q \to \neg P$ 分别称为命题 $P \to Q$ 的逆命题、反命题、逆反命题。
   1) 如果天不下雨，我将去公园。
   解：逆命题：如果我去公园，则天不下雨；
   反命题：如果天下雨，则我不去公园；
   逆反命题：如果我不去公园，则天下雨了。
   2) 仅当你去我才逗留。
   解：P：我逗留，Q：你去
   （此题注意：p 仅当 q 翻译成 $p \to q$）
   逆命题：如果你去，那么我逗留。
   反命题：如果我不逗留，那么你没去。
   逆反命题：如果你没去，那么我不逗留。
   3) 如果 n 是大于 2 的正整数，那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解。
   解：逆命题：如果方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解，那么 n 是大于 2 的正整数。
   反命题：如果 n 不是大于 2 的正整数，那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 有整数解。
   逆反命题：如果方程 $x^n+y^n=z^n$ 有整数解，那么 n 不是大于 2 的正整数。
   4) 如果我不获得更多的帮助，那么我不能完成这项任务。
   解：逆命题：如果我不完成任务，那么我不获得更多的帮助。
   反命题：如果我获得了更多的帮助，那么我能完成任务。
   逆反命题：如果我能完成任务，那么我获得了更多的帮助。

4. 给 P 和 Q 指派真值 T，给 R 和 S 指派真值 F，求出下列命题的真值。

1） $(\neg(P \wedge Q \vee \neg R) \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow (R \vee \neg S)))$

$=(\neg(T \wedge T \vee \neg F) \vee ((T \leftrightarrow \neg T) \rightarrow (F \vee \neg F)))$

$=\neg T \vee (F \rightarrow T)$

$=F \vee T$

$=T$

2） $Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow P$

$=T \wedge (T \rightarrow T) \rightarrow T$

$=T \wedge T \rightarrow T$

$=T \rightarrow T$

$=T$

3） $(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \leftrightarrow (Q \vee \neg S)$

$=(T \vee (T \rightarrow (F \wedge \neg T))) \leftrightarrow (T \vee \neg F)$

$=(T \vee (T \rightarrow F)) \leftrightarrow T$

$=T \leftrightarrow T$

$=T$

4） $(P \rightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

$=(T \rightarrow F) \wedge (\neg T \rightarrow F)$

$=F \wedge (F \rightarrow F)$

$=F$

5. 构成下来公式的真值表：

1） $P \rightarrow (Q \vee R)$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \rightarrow (Q \vee R)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

2） $Q \wedge (P \to Q) \to P$

P	Q	$P \to Q$	$Q \wedge (P \to Q)$	$Q \wedge (P \to Q) \to P$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

3） $(P \vee Q \to Q \wedge P) \to P \wedge \neg R$

P	Q	R	$(P \vee Q \to Q \wedge P)$	$P \wedge \neg R$	$(P \vee Q \to Q \wedge P) \to P \wedge \neg R$
F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	F	F

4）$((\neg P \to P \wedge \neg Q \to R) \to R) \wedge Q \vee \neg R$

命题等价于$((\neg P \to (P \wedge \neg Q) \to R) \to R) \wedge Q \vee \neg R$

P	Q	R	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \to (P \wedge \neg Q)$	$(\neg P \to (P \wedge \neg Q) \to R)$	$((\neg P \to (P \wedge \neg Q) \to R) \to R)$	$((\neg P \to (P \wedge \neg Q) \to R) \to R) \wedge Q \vee \neg R$
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

6. 符号化以下命题

1） 他既聪明又用功

解：P：他聪明；Q：他用功

$P \wedge Q$

2） 除非天气好，我才骑自行车上班。

解：P：天气好；Q：我骑自行车上班

$Q \to P$

3） 老李或者小李是球迷。

解：P：老李是球迷；Q：小李是球迷

$P \vee Q$

4） 只有休息好，才能身体好

解：P：休息好；Q：身体好

$Q \to P$

7. 使用真值表证明：如果 $P \leftrightarrow Q$ 为 T，那么 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 都是 T，反之亦然。

证明：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$
F	F	T	T	T
F	T	F	T	F
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

由上表可知：当 $P \leftrightarrow Q$ 为 T 时，$P \to Q$ 和 $Q \to P$ 都是 T；$P \to Q$ 和 $Q \to P$ 为 T 时，

$P \leftrightarrow Q$ 为 T。故命题得证。

8. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价，那么运算符 $*$ 是可结合的。

（1）确定逻辑运算符 $\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$ 哪些是可结合的？

（2）用真值表证明你的判断。

解：（1）$\wedge, \vee, \leftrightarrow$ 是可结合的。

（2）真值表如下：

P	Q	R	$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$	$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$
F	F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F
T	T	F	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T

P	Q	R	$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
F	F	F	F	F
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

9. 令 P 表示命题“苹果是甜的”，Q 表示命题“苹果是红的”，R 表示命题“我买苹果”。

试将下列命题符号化：

（1）如果苹果甜而红，那么我买苹果。

（2）苹果是酸的。

（3）我没买苹果，因为苹果不红也不甜。

解：（1）$P \wedge Q \to R$

（2）$\neg P$

（3）$\neg P \wedge \neg Q \to \neg R$

10. 指出下面命题公式哪些是重言式、永假式或可满足式。

解：

（1）重言式

$P \vee \neg P = T$

（2）永假式

$P \wedge \neg P = F$

（3）重言式

$P \to \neg(\neg P) = T$

（4）重言式

$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) = (\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) = T$

（5）重言式

$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) = (\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) = T$

（6）重言式

$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

$= (\neg P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P) = T$

（7）重言式

$$((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

$$= (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) = T$$

（8）重言式

$$P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q \vee P \wedge R)$$

$$= ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \to (P \wedge Q \vee P \wedge R)$$

$$= (P \wedge Q \vee P \wedge R) \to (P \wedge Q \vee P \wedge R)$$

$$= T$$

（9）重言式

$$P \wedge \neg P \to Q$$

$$= F \to Q = T$$

（10）可满足式

$$((P \to Q) \vee (R \to S)) \to ((P \vee R) \to (Q \vee S))$$

$$= (\neg P \vee Q) \vee (\neg R \vee S) \to (\neg (P \vee R) \vee (Q \vee S))$$
$$= (\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S) \to (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \vee S)$$
$$= (\neg P \vee \neg R) \vee (Q \vee S) \to (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \vee S)$$

11. 写出与下面给出的公式等价并且仅含有联接词$\wedge$与$\neg$的最简公式。

（1）$\neg (P \leftrightarrow (Q \to (R \vee P)))$

$$\Leftrightarrow \neg ((P \to (Q \to (R \vee P))) \wedge ((Q \to (R \vee P)) \to P))$$
$$\Leftrightarrow \neg ((\neg P \vee \neg Q \vee R \vee P) \wedge ((\neg Q \vee R \vee P) \to P))$$
$$\Leftrightarrow \neg (T \wedge (Q \wedge \neg R \wedge \neg P \vee P))$$
$$\Leftrightarrow \neg (Q \wedge \neg R \wedge \neg P \vee P)$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee R))$$
$$\Leftrightarrow F \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee R))$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg Q \vee R)$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg (Q \wedge \neg R)$$

（2）$((P \vee Q) \to R) \to (P \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee R) \rightarrow (P \vee R)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee (P \vee R)$
$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee R$
$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P) \vee R$
$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg R \vee P)) \vee R$
$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P \vee R)$
$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

（3）$P \vee Q \vee \neg R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

（4）$P \vee (\neg Q \wedge R \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow P \vee (\neg(\neg Q \wedge R) \vee P)$
$\Leftrightarrow P \vee (Q \vee \neg R \vee P)$
$\Leftrightarrow P \vee Q \vee \neg R$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

（5）$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow P \rightarrow (\neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q \wedge \neg R)$

12. 写出与下面的公式等价并且仅含联结词$\vee$和$\neg$的最简公式。

（1）$(P \wedge Q) \wedge \neg P$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg P$
$\Leftrightarrow F$

（2）$(P \rightarrow (Q \vee \neg Q)) \wedge \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow (P \rightarrow T) \wedge \neg P \wedge Q$
$\Leftrightarrow T \wedge \neg P \wedge Q$
$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$
$\Leftrightarrow \neg(P \vee \neg Q)$

（3）$\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee F$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$

$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q \vee \neg R)$

13. 使用常用恒等式证明下列各式，并给出下列各式的对偶式。

（1）$\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P$

证明：

$\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge T$

$\Leftrightarrow P$

对偶式：$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

（2）$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$

证明：

$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee (\neg Q \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$

对偶式：$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q)$

（3）$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge Q) \Leftrightarrow T$

证明：

$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow Q \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge \neg Q) \vee \neg Q$

$\Leftrightarrow T$

对偶式：$Q \wedge \neg((\neg P \wedge Q) \vee Q) \Leftrightarrow F$

14. 试证明下列合式公式是永真式。

1） $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P \wedge (\neg P \vee Q)) \to Q$
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$
$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg P \vee Q) \vee Q$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)$
$\Leftrightarrow T$

2) $\neg P \to (P \to Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \to (\neg P \vee Q)$
$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee Q)$
$\Leftrightarrow T$

3) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \to (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (R \vee (Q \wedge \neg R))$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (R \vee Q)$
$\Leftrightarrow T$

4) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \to ((\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee R))$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \to ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R))$
$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow T$

15. 不构造真值表证明下列蕴含式。

（1）$P \wedge Q \Rightarrow P \to Q$

证明：

$(P \wedge Q) \to (P \to Q)$
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$
$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q$
$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee Q$
$\Leftrightarrow T$

（2）$P \to (Q \to R) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

证明：

$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \to (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \to ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \to (\neg P \vee \neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow T$

（3）$P \to Q \Rightarrow P \to P \wedge Q$

证明：
$(P \to Q) \to (P \to P \wedge Q)$
$\Leftrightarrow (P \to Q) \to (\neg P \vee (P \wedge Q))$
$\Leftrightarrow (P \to Q) \to ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q))$
$\Leftrightarrow (P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$
$\Leftrightarrow (P \to Q) \to (P \to Q)$
$\Leftrightarrow T$

（4）$(P \to Q) \to Q \Rightarrow P \vee Q$

证明：
$((P \to Q) \to Q) \to (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee Q) \to (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee Q) \to (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \to (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \to (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow T$

（5）$(P \vee \neg P \to Q) \to (P \vee \neg P \to R) \Rightarrow Q \to R$

证明：
$((P \vee \neg P \to Q) \to (P \vee \neg P \to R)) \to (Q \to R)$
$\Leftrightarrow ((T \to Q) \to (T \to R)) \to (Q \to R)$
$\Leftrightarrow ((F \vee Q) \to (F \vee R)) \to (Q \to R)$
$\Leftrightarrow (Q \to R) \to (Q \to R)$
$\Leftrightarrow T$

（6）$(Q \to P \wedge \neg P) \to (R \to P \wedge \neg P) \Rightarrow R \to Q$

证明：

$$
\begin{aligned}
&((Q \to P \wedge \neg P) \to (R \to P \wedge \neg P)) \to (R \to Q) \\
&\Leftrightarrow ((Q \to F) \to (R \to F)) \to (R \to Q) \\
&\Leftrightarrow ((\neg Q \vee F) \to (\neg R \vee F)) \to (R \to Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q) \\
&\Leftrightarrow (R \to Q) \to (R \to Q) \\
&\Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

16. 求出下列各式的代入实例。

（1）$(((P \to Q) \to P) \to P)$；用 $P \to Q$ 代 P，用 $((P \to Q) \to P)$ 代 Q。

解：$((((P \to Q) \to ((P \to Q) \to R)) \to (P \to Q)) \to (P \to Q))$

（2）$((P \to Q) \to (Q \to P))$；用 Q 代 P，用 $\neg P$ 代 Q

解：$((Q \to \neg P) \to (\neg P \to Q))$

17. 求下列各式的主合取范式和合取范式。

1） $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \wedge \neg Q)$

解：
$$
\begin{aligned}
&(\neg P \vee \neg Q) \to (P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee P) \wedge ((P \wedge Q) \vee \neg Q) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \\
&\Leftrightarrow \prod(0,1)
\end{aligned}
$$

2） $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

解：
$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow Q \wedge (P \vee \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow Q \vee P \\
&\Leftrightarrow \Pi(0)
\end{aligned}
$$

3） $(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

主合取范式：

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \\
&\Leftrightarrow \prod(1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

合取范式：

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$

4) $(P \wedge \neg Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

析取范式：

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$
$\Leftrightarrow \sum(6,7,9,11)$

合取范式：$\prod(0,1,2,3,4,5,8,10,12,13,14,15)$

18. 试采用将公式化为主范式的方法，证明下列各式等价。

1) $(\neg P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$

证明：由于
$(\neg P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow \Pi(4,5,6)$
并且
$P \rightarrow (Q \wedge R)$
$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow \Pi(4,5,6)$

$\therefore (\neg P \vee R) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$ 成立。

2) $(P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

证明：由于
$(P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)$
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
$\Leftrightarrow \prod(0,1,2,3)$
并且
$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
$\Leftrightarrow \prod(0,1,2,3)$

$\therefore (P\vee Q)\wedge(P\to\neg Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\wedge(P\vee Q)$ 成立。

3） $(P\to Q)\to(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\to Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

证明：由于

$(P\to Q)\to(P\wedge Q)$
$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$
$\Leftrightarrow\Sigma(2,3)$

并且

$(\neg P\to Q)\wedge(P\vee\neg Q)$
$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$
$\Leftrightarrow P$
$\Leftrightarrow P\wedge(Q\vee\neg Q)$
$\Leftrightarrow\Sigma(2,3)$

$\therefore (P\to Q)\to(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\to Q)\wedge(P\vee\neg Q)$ 成立。

4） $P\vee(P\to(P\vee Q))\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$

证明：由于

$P\vee(P\to(P\vee Q))$
$\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee P\vee Q)$
$\Leftrightarrow T$

并且

$\neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$
$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee Q)$
$\Leftrightarrow T$

$\therefore$ $P\vee(P\to(P\vee Q))\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$ 成立。

19. 试用真值表法证明：$A\wedge E$ 不是 $A\leftrightarrow B$，$B\leftrightarrow(C\wedge D)$，$C\leftrightarrow(A\vee E)$ 和 $A\vee E$ 的有效结论。

解：构造真值表如下：

A B C D E	$A\leftrightarrow B$	$B\leftrightarrow(C\wedge D)$	$C\leftrightarrow(A\vee E)$	$A\vee E$	$A\wedge E$
0 0 0 0 0	1	1	1	0	0
0 0 0 0 1	1	1	0	1	0
0 0 0 1 0	1	1	1	0	0
0 0 0 1 1	1	1	0	1	0
0 0 1 0 0	1	1	0	0	0
0 0 1 0 1	1	1	1	1	0

0 0 1 1 0	1	0	0	0	0
0 0 1 1 1	1	0	1	1	0
0 1 0 0 0	0	0	1	0	0
0 1 0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 0 1 1	0	0	0	1	0
0 1 1 0 0	0	0	0	0	0
0 1 1 0 1	0	0	1	1	0
0 1 1 1 0	0	1	0	0	0
0 1 1 1 1	0	1	1	1	0
1 0 0 0 0	0	1	0	1	0
1 0 0 0 1	0	1	0	1	1
1 0 0 1 0	0	1	0	1	0
1 0 0 1 1	0	1	0	1	1
1 0 1 0 0	0	1	1	1	0
1 0 1 0 1	0	1	1	1	1
1 0 1 1 0	0	0	1	1	0
1 0 1 1 1	0	0	1	1	1
1 1 0 0 0	1	0	0	1	0
1 1 0 0 1	1	0	0	1	1
1 1 0 1 0	1	0	0	1	0
1 1 0 1 1	1	0	0	1	1
1 1 1 0 0	1	0	1	1	0
1 1 1 0 1	1	0	1	1	1
1 1 1 1 0	1	1	1	1	0
1 1 1 1 1	1	1	1	1	1

$A \wedge E$ 与 $A \leftrightarrow B$，$B \leftrightarrow (C \wedge D)$，$C \leftrightarrow (A \vee E)$ 和 $A \vee E$ 在每一个真值指派下的真值不完全相同，所以命题得证。

20. H_1，H_2 和 H_3 是前提。在下列情况下，试确定结论 C 是否有效（可以使用真值表法证明。）

（1）$H_1: P \to Q$

$C: P \to (P \wedge Q)$

证明：真值表如下：

P Q	$P \to Q$	$P \to (P \wedge Q)$
0 0	1	1
0 1	1	1
1 0	0	0

1 1	1	1

结论 C 是有效的。

（2）$H_1: \neg P \vee Q$

$H_2: \neg(Q \wedge \neg R)$

$H_3: \neg R$

$C: \neg P$

证明：

{1}	（1）	$\neg(Q \wedge \neg R)$	P 规则
{1}	（2）	$\neg Q \vee R$	T 规则，（1），E_{11}
{3}	（3）	$\neg R$	P 规则
{1，3}	（4）	$\neg Q$	T 规则，（2），（3），I_9
{5}	（5）	$\neg P \vee Q$	P 规则
{1，3，5}	（6）	$\neg P$	T 规则，（4），（5），E_{11}

结论 C 是有效结论。

（3）$H_1: P \to (Q \to R)$

$H_2: P \wedge Q$

$C: R$

证明：

{1}	（1）	$P \to (Q \to R)$	P 规则
{1}	（2）	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	T 规则，（1），E_{27}
{1}	（3）	$\neg(P \wedge Q) \vee R$	T 规则，（1），E_{11}
{4}	（4）	$P \wedge Q$	P 规则
{1，4}	（5）	R	T 规则，（3），（4）

（4）$H_1: P \to Q$

$H_2: Q \to R$

$C: P \to R$

证明：

{1}	（1）	P	P 规则（附加前提）
{2}	（2）	$P \to Q$	P 规则
{1，2}	（3）	Q	T 规则，（1），（2），I_{10}
{4}	（4）	$Q \to R$	P 规则
{1，2，4}	（5）	R	T 规则，（3），（4），I_{10}
{1，2，4}	（6）	$P \to R$	CP 规则，（1），（5）

21. 不构成真值表证明下列命题公式不能同时全为真。

（1）$P \leftrightarrow Q$，$Q \to R$，$\neg R \vee S$，$\neg P \to S$，$\neg S$

证明：

{1}	（1）	$\neg S$	P 规则
{2}	（2）	$\neg P \to S$	P 规则
{1，2}	（3）	P	T 规则，（1），（2），I_{11}
{4}	（4）	$P \leftrightarrow Q$	P 规则
{1，2，4}	（5）	Q	T 规则，（3），（4），I_{10}
{6}	（6）	$Q \to R$	P 规则
{1，2，4，6}	（7）	R	T 规则，（5），（6），I_{10}
{8}	（8）	$\neg R \vee S$	P 规则
(1，2，4，6，8)	（9）	S	T 规则，（7），（8），I_9

推出结论与前提矛盾，因此命题公式不能同时为真。

（2）$R \vee M$，$\neg R \vee S$，$\neg M$，$\neg S$

证明：

{1}	（1）	$\neg M$	P 规则
{2}	（2）	$R \vee M$	P 规则
{1，2}	（3）	R	T 规则，（1），（2），I_9
{4}	（4）	$\neg R \vee S$	P 规则
{1，2，4}	（5）	S	T 规则，（3），（4），I_9

推出的结论与前提中的命题公式$\neg S$矛盾，因此命题公式不能同时为真

22. 足坛四支劲旅举行友谊比赛。已知情况如下，请问结论是否成立？

1) 若中国队获得冠军，则巴西队或德国队获得亚军。
2) 若德国队获得亚军，则中国队不能获得冠军。

3）　若英格兰队获得亚军，则巴西队不能获得亚军。
4）　最后中国队获得冠军。
结论：英格兰队未能获得的亚军。
解：设
P：中国队获得冠军
Q：巴西队获得亚军
R：德国队获得亚军
S：英格兰队获得亚军
则问题可以表示为：

$H_1: P \to (Q \vee R)$

$H_2: R \to \neg P$

$H_3: S \to \neg Q$

$H_4: P$

$C: \neg S$

{1}	（1）	P	P 规则
{2}	（2）	$P \to (Q \vee R)$	P 规则
{1，2}	（3）	$(Q \vee R)$	T 规则，（1），（2），I_{10}
{4}	（4）	$R \to \neg P$	P 规则
{1，4}	（5）	$\neg R$	T 规则，（1），（4），I_{11}
{1，2，4}	（6）	Q	T 规则，（3），（5），I_9
{7}	（7）	$S \to \neg Q$	P 规则
{1，2，4，7}	（8）	$\neg S$	T 规则，（6），（7），I_{11}

结论成立。

23. 证明下列论证的有效性（如果需要，就使用规则 CP）。

（1）$\neg(P \wedge \neg Q)$，$\neg Q \vee R$，$\neg R \Rightarrow \neg P$

证明：{1}	（1）	$\neg R$	P 规则
{2}	（2）	$\neg Q \vee R$	P 规则
{1，2}	（3）	$\neg Q$	T 规则，（1），（2），I_9
{4}	（4）	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P 规则

{4}	（5）	$\neg P \vee Q$	T 规则，（4）， E_{11}
{1，2，4}	（6）	$\neg P$	T 规则，（3），（5）， I_9

（2）$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

证明：

{1}	（1）	$\neg S$	P 规则
{2}	（2）	$\neg R \vee S$	P 规则
{1，2}	（3）	$\neg R$	T 规则，（1）（2）， I_9
{4}	（4）	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	P 规则
{1，2，4}	（5）	$\neg(P \wedge Q)$	T 规则，（3）（4）， I_{11}
{1，2，4}	（6）	$\neg P \vee \neg Q$	T 规则，（5）， E_{11}

（3）$\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, R \rightarrow S \Rightarrow P \rightarrow S$

证明：

{1}	（1）	P	P 规则（假设前提）
{2}	（2）	$\neg P \vee Q$	P 规则
{1，2}	（3）	Q	T 规则，（1）（2）， I_9
{4}	（4）	$\neg Q \vee R$	P 规则
{1，2，4}	（5）	R	T 规则（3）（4）， I_9
{6}	（6）	$R \rightarrow S$	P 规则
{1，2，4，6}	（7）	S	T 规则（5）（6）， I_{10}
{1，2，4，6}	（8）	$P \rightarrow S$	CP 规则（1）（7）

（4）$P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow (P \wedge Q)$

证明：

{1}	（1）	P	P 规则（假设前提）
{2}	（2）	$P \rightarrow Q$	P 规则
{1，2}	（3）	Q	T 规则，（1）（2）， I_{10}
{1，2}	（4）	$P \wedge Q$	T 规则（1）（3）， I_{16}
{1，2}	（5）	$P \rightarrow (P \wedge Q)$	CP 规则（1）（4）

24. 证明下列各式的有效性（如果需要，就使用间接证明法）。

（1）$(R \to \neg Q), R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

证明：

{1}	（1）	$\neg\neg P$	P 规则（假设前提）
{1}	（2）	P	T 规则（1,）E_{10}
{3}	（3）	$P \to Q$	P 规则
{1，3}	（4）	Q	T 规则，（2）（3），I_{10}
{5}	（5）	$S \to \neg Q$	P 规则
{1,3,5}	（6）	$\neg S$	T 规则，（4）（5），I_{11}
{7}	（7）	$R \vee S$	P 规则
{1,3,5,7}	（8）	R	T 规则，（6）（7），I_9
{9}	（9）	$R \to \neg Q$	P 规则
{1,3,5,7,9}	（10）	$\neg Q$	T 规则，（8）（9,）I_{10}
{1,3,5,7,9}	（11）	$Q \wedge \neg Q$	T 规则（4）（10），I_{16}
{1,3,5,7,9}	（12）	$\neg P$	F 规则（1）（11）

（2）$S \to \neg Q, R \vee S, \neg R, P \leftrightarrow Q \Rightarrow \neg P$

证明：

{1}	（1）	$\neg\neg P$	P 规则（假设前提）
{1}	（2）	P	T 规则（1），E_{10}
{3}	（3）	$P \leftrightarrow Q$	P 规则
{1，3}	（4）	Q	T 规则（2）（3）
{5}	（5）	$S \to \neg Q$	P 规则
{1,3,5}	（6）	$\neg S$	T 规则（4）（5），I_{11}
{7}	（7）	$R \vee S$	P 规则
{1,3,5,7}	（8）	R	T 规则（6）（7），I_9
{9}	（9）	$\neg R$	P 规则
{1,3,5,7,9}	（10）	$R \wedge \neg R$	T 规则（8）（9），I_{16}
{1,3,5,7,9}	（11）	$\neg P$	F 规则（1）（10）

（3） $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S), ((Q \to P) \vee \neg R), R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$ 5

证明：

{1}	（1）	R	P 规则
{2}	（2）	$(Q \to P) \vee \neg R$	P 规则
{1, 2}	（3）	$Q \to P$	T 规则（1）（2），I_9
{1}	（4）	$R \vee S$	T 规则（1），I_4
{5}	（5）	$\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$	P 规则
{1, 5}	（6）	$\neg\neg(P \to Q)$	T 规则（4）（5），I_{11}
{1, 5}	（7）	$P \to Q$	T 规则（6），E_{10}
{1, 2, 5}	（8）	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	T 规则（3）（7），I_{16}
{1, 2, 5}	（9）	$P \leftrightarrow Q$	T 规则（8），E_{26}

补充题

证明下列公式等价

$((Q \wedge A) \to C) \wedge (A \to (P \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge (P \to Q)) \to C$

证明：由于

$(Q \wedge A) \to C) \wedge (A \to (P \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee P \vee C)$

并且

$(A \wedge (P \to Q)) \to C$

$\Leftrightarrow (A \wedge (\neg P \vee Q)) \to C$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (P \wedge \neg Q) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee C \vee P) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg Q)$

所以 $((Q \wedge A) \to C) \wedge (A \to (P \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge (P \to Q)) \to C$ 成立

第二章 谓词逻辑

1. 将下列命题符号化

1) 小王聪明而且好学。

解：P:小王聪明；Q：小王好学。

命题符号化为：$P \wedge Q$

或者　P(x)：x 聪明，Q(x)：x 好学

a：小王

命题符号化为：$P(a) \wedge Q(a)$

2) 没有最大素数

解：P(x)：x 是素数；Q(x,y):x 大于 y

命题符号化为：$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge Q(y,x)))$

3) 并非所有大学生都能成为科学家。

解：P(x)：x 是大学生；Q(x):x 是科学家

命题符号化为：$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 或者 $\neg \forall x(P(x) \to Q(x))$

4) 每个自然数不是奇数就是偶数

解：P(x)：x 是自然数；Q(x):x 是奇数；R(x)：x 是偶数

命题符号化为：$\forall x(P(x) \to (Q(x) \vee R(x)))$

2. 对下列公式找出所有约束变元和自由变元，并指明量词的辖域。

1) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x R(x,y)$

解：$\forall x$ 的辖域是 $P(x) \to Q(x)$，其中 x 是约束变元。$\exists x$ 的辖域是 $R(x,y)$，其中 x 是约束变元，y 是自由变元。

2) $(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) \to \exists z(R(x) \wedge S(z))$

解：$\forall x$ 和 $\forall y$ 的辖域分别为 $(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$ 和 $P(x) \vee Q(y)$，其中 x 和 y 都是约束变元。$\exists z$ 的辖域是 $(R(x) \wedge S(z))$，其中 z 是约束变元，x 是自由变元。

3) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(y,z))$

解：$\forall x$ 和 $\exists y$ 的辖域分别为 $(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(y,z))$ 和 $P(x,y) \wedge Q(y,z)$，其中 x 和 y 都是约束变元，z 是自由变元。

3. 证明下列各式是逻辑有效的。

1) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

解：设 x 的个体域是 $S=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$，y 的个体域是 $T=\{b_1,b_2,\cdots b_n\}$

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow P(a_i,b_1)\wedge P(a_i,b_2)\wedge\cdots P(a_i,b_m)$$
$$\Leftrightarrow (\forall y)P(a_i,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

2) $(\forall x)P(x) \to ((\forall x)Q(x) \to (\forall y)P(y))$

解：该式等价于 $(\forall x)P(x) \to ((\forall z)Q(z) \to (\forall x)P(x))$

设 x 和 y 的个体域是 $S=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$，的个体域是 $T=\{b_1,b_2,\cdots b_n\}$

若 $(\forall x)P(x)$ 为真，则无论 $(\forall z)Q(z)$ 如何取值，$(\forall z)Q(z) \to (\forall x)P(x)$ 为真。

4. 证明下列各式。

1) $(\forall x)(\neg A(x) \to B(x))$，$(\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$

证明：

（1）	$(\forall x)(\neg A(x) \to B(x))$	P
（2）	$\neg A(x) \to B(x)$	US，（1）
（3）	$(\forall x)\neg B(x)$	P
（4）	$\neg B(x)$	US，（3）
（5）	$A(x)$	T，（2），（4），
（6）	$(\exists x)A(x)$	EG，（5）

2) $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \to B(x))$

证明：

（1）	$\neg(\forall x)(A(x) \to B(x))$	P（假设前提）
（2）	$(\exists x)(\neg(A(x) \to B(x)))$	T，（1），E_{34}
（3）	$(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$	T，（2），E_{27}
（4）	$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)\neg B(x)$	T，（3），I_{18}
（5）	$(\exists x)A(x)$	T，（4），I_1
（6）	$(\exists x)\neg B(x)$	T，（4），I_2

（7） $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x)$ P

（8） $(\forall x)B(x)$ T，（5）（7），I_{10}

（9） $\neg B(a)$ ES，（6）

（10） $B(a)$ US，（8）

（11） $\neg B(a) \wedge B(a)$ T，（9）（10），I_{16}

（12） $(\forall x)(A(x) \to B(x))$ F，（1）（11）

3） $(\forall x)(A(x) \to B(x))$，$(\forall x)(C(x) \to \neg B(x)) \Rightarrow (\forall x)(C(x) \to \neg A(x))$

证明： （1） $\neg(\forall x)(C(x) \to \neg A(x))$ P（假设前提）

（2） $(\exists x)\neg(\neg C(x) \vee \neg A(x))$ T，（1）

（3） $C(a) \wedge A(a)$ US，（2）

（4） $C(a)$ T，（3）

（5） $A(a)$ T，（3）

（6） $(\forall x)(A(x) \to B(x))$ P

（7） $A(a) \to B(a)$ US，（6）

（8） $B(a)$ T，（5），（7）

（9） $(\forall x)(C(x) \to \neg B(x))$ P

（10） $C(a) \to \neg B(a)$ US，（8）

（11） $\neg B(a)$ T，（4），（10）

（12） $B(a) \wedge \neg B(a)$ T，（8），（11）

（13） $(\forall x)(C(x) \to \neg A(x))$ F，（1），（12）

4） $(\forall x)(A(x) \vee B(x)), (\forall x)(B(x) \to \neg C(x)), (\forall x)C(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

证明： （1） $(\forall x)C(x)$ P

（2）　$C(a)$　　US，（1）

（3）　$(\forall x)(B(x) \to \neg C(x))$　　P

（4）　$B(a) \to \neg C(a)$　　US，（3）

（5）　$\neg B(a)$　　T，（2），（4）

（6）　$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$　　P

（7）　$A(a) \vee B(a)$　　US（6）

（8）　$A(a)$　　T，（5），（7）

（9）　$(\forall x)A(x)$　　UG，（8）

5.　用 CP 规则证明下列各式。

1）　$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$

证明：（1）　$(\forall x)P(x)$　　P（附加前提）

（2）　$P(a)$　　US，（1）

（3）　$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$　　P

（4）　$P(a) \to Q(a)$　　US，（3）

（5）　$Q(a)$　　T，（2），（4）

（6）　$(\forall x)Q(x)$　　UG，（5）

（7）　$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$　　CP，（1），（6）

2）　$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

证明：由于 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg Q(x)) \vee (\forall x)P(x)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg Q(x)) \to (\forall x)P(x)$$

因此，原题等价于证明 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(\neg Q(x)) \to (\forall x)P(x)$

（1）　$(\forall x)(\neg Q(x))$　　P（附加前提）

（2）　$\neg Q(a)$　　US，（1）

（3）　$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$　　P

（4）　$P(a) \vee Q(a)$　　US，（3）

（5）　$P(a)$　　T，（2），（4）

（6）　$(\forall x)P(x)$　　UG，（5）

（7）　$(\forall x)(\neg Q(x)) \to (\forall x)P(x)$　　CP，（1），（6）

6. 将下列命题符号化并推证其结论。

1) 任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车，每一个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车，有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

解：首先定义如下谓词：

$P(x): x$是人

$F(x): x$喜欢步行

$C(x): x$喜欢乘汽车

$B(x):$x 喜欢骑自行车

于是问题符号化为：

$$(\forall x)(P(x) \wedge F(x) \to \neg C(x)), (\forall x)(P(x) \to C(x) \vee B(x)),$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge \neg B(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg F(x))$$

推理如下：

（1）　$(\exists x)(P(x) \wedge \neg B(x))$　　P

（2）　$P(a) \wedge \neg B(a)$　　ES，（1）

（3）　$P(a)$　　T，（2）

（4）　$\neg B(a)$　　T，（2）

（5）　$(\forall x)(P(x) \to C(x) \vee B(x))$　　P

（6）　$P(a) \to C(a) \vee B(a)$　　US，（5）

（7）　$C(a) \vee B(a)$　　T，（3），（6）

(8) $C(a)$ T,(4),(7)

(9) $(\forall x)(P(x) \wedge F(x) \to \neg C(x))$ P

(10) $P(a) \wedge F(a) \to \neg C(a)$ US,(9)

(11) $\neg(P(a) \wedge F(a))$ T,(8),(10)

(12) $\neg P(a) \vee \neg F(a)$ T,(11)

(13) $\neg F(a)$ T,(3),(12)

(14) $P(a) \wedge \neg F(a)$ T,(3),(13)

(15) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg F(x))$ EG,(14)

2) 每个科学工作者都是刻苦钻研的，每个刻苦钻研而且聪明的科学工作者在他的事业中都将获得成功。华为是科学工作者并且他是聪明的，所以，华为在他的事业中将获得成功。

解：首先定义如下谓词：

$P(x): x$ 是科学工作者

$Q(x): x$ 是刻苦钻研的

$R(x): x$ 是聪明的

$S(x): x$ 在他的事业中将获得成功

定义个体 a：华为

于是命题符号化为：

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \to S(x)),$$
$$P(a) \wedge R(a) \Rightarrow S(a)$$

推理如下：

(1) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ P

(2) $P(a) \to Q(a)$ US,(1)

(3) $P(a) \wedge R(a)$ P

(4) $P(a)$ T,(3)

(5) $Q(a)$ T,(2),(4)

（6） $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \to S(x))$ P

（7） $P(a) \wedge Q(a) \wedge R(a) \to S(a)$ US，（7）

（8） $P(a) \wedge Q(a) \wedge R(a)$ T，（3），（6）

（9） $S(a)$ T，（8），（9）

3) 每位资深名士或是中科院院士或是国务院参事，所有的资深名士都是政协委员。张伟是资深名士，但他不是中科院院士。因此，有的政协委员是国务院参事。

解：首先定义如下谓词：

$P(x): x$ 是资深名士

$Q(x): x$ 是中科院院士

$R(x): x$ 是国务院参事

$S(x): x$ 是政协委员

定义个体 a：张伟

于是命题符号化为：

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x) \vee R(x)), (\forall x)(P(x) \to S(x)),$$
$$P(a) \wedge \neg Q(a) \Rightarrow (\exists x)(S(x) \wedge R(x))$$

推理如下：

（1） $P(a) \wedge \neg Q(a)$ P

（2） $P(a)$ T，（1）

（3） $\neg Q(a)$ T，（1）

（4） $(\forall x)(P(x) \to S(x))$ P

（5） $P(a) \to S(a)$ US，（4）

（6） $S(a)$ T，（2），（5）

（7） $(\forall x)(P(x) \to Q(x) \vee R(x))$ P

（8） $P(a) \to Q(a) \vee R(a)$ US，（7）

（9） $Q(a) \vee R(a)$ T，（2），（8）

（10） $R(a)$ T，（3），（9）

（11） $S(a)\wedge R(a)$ T，（6），（10）

（12） $(\exists x)(S(x)\wedge R(x))$ EG，（11）

4) 如果一个人怕困难，那么他就不会获得成功。每个人或者获得成功或者失败过。有些人未曾失败过，所以，有些人不怕困难。

解：首先定义如下谓词：

$P(x):x$ 是人

$Q(x):x$ 怕困难

$R(x):x$ 曾获得成功

$S(x):x$ 曾获得失败

于是命题符号化为：

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)\to\neg R(x)),(\forall x)(P(x)\to(R(x)\vee S(x))),$$
$$(\exists x)(P(x)\wedge\neg S(x))\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge\neg Q(x))$$

推理如下：

（1） $(\exists x)(P(x)\wedge\neg S(x))$ P

（2） $P(a)\wedge\neg S(a)$ ES，（1）

（3） $P(a)$ T，（2）

（4） $\neg S(a)$ T，（2）

（5） $(\forall x)(P(x)\to(R(x)\vee S(x)))$ P

（6） $P(a)\to(R(a)\vee S(a))$ US，（5）

（7） $R(a)\vee S(a)$ T，（3），（6）

（8） $R(a)$ T，（4），（7）

（9） $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)\to\neg R(x))$ P

（10） $P(a)\wedge Q(a)\to\neg R(a)$ US，（9）

（11） $\neg(P(a)\wedge Q(a))$ T，（8），（10）

（12）　$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$　　T，（11）

（13）　$\neg Q(a)$　　T，（3），（12）

（14）　$P(a) \wedge \neg Q(a)$　　T，（3），（13）

（15）　$(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$　　EG，（14）

7.　下列推导步骤中哪个是错误的？

（1）　1）　$(\forall x)P(x) \to Q(x)$　　P

　　2）　$P(x) \to Q(x)$　　US，1）

解：错误。

（2）　1）　$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$　　P

　　2）　$P(a) \vee Q(b)$　　EG，1）

解：错误。$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \not\Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(b)$

（3）　1）　$P(x) \to Q(x)$　　P

　　2）　$(\exists x)P(x) \to Q(x)$　　EG，1）

解：错误。

（4）　1）　$P(a) \to Q(b)$　　P

　　2）　$(\exists x)(P(x) \to Q(x))$　　EG，1）

解：错误。

8.　试找出下列推导过程中的错误，并问结论是否有效？如果有效，写出正确的推导过程。

解：错误，更改如下：

{1}　（1）　$(\exists x)P(x)$　　P

{1}　（2）　$P(a)$　　ES（1）

{3}　（3）　$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$　　P

{3}　（4）　$P(a) \to Q(a)$　　US（3）

{1, 3}　　（5）　$Q(a)$　　T，（2）（，4），I_{10}

{1, 3}　　（6）　$(\exists x)Q(x)$　　EG（5）

9. 用构成推导过程的方法证明下列蕴含式。

（1）$(\exists x)P(x) \to (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \to R(x)),$

$(\exists x)P(x), (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$

证明：

(1)	$(\exists x)P(x)$	P
(2)	$P(a)$	$ES,(1)$
(3)	$(\exists x)Q(x)$	P
(4)	$Q(b)$	$ES,(3)$
(5)	$(\exists x)P(x) \to (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$	P
(6)	$(\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$	$T,(1),(5)$
(7)	$(P(a) \vee Q(a)) \to R(a)$	$US,(6)$
(8)	$P(a) \vee Q(a)$	$T,(2)$
(9)	$R(a)$	$T,(7),(8)$
(10)	$(P(b) \vee Q(b)) \to R(b)$	$US,(6)$
(11)	$P(b) \vee Q(b)$	$T,(4)$
(12)	$R(b)$	$T,(10),(11)$
(13)	$R(a) \wedge R(b)$	$T,(9),(12)$
(14)	$(\exists y)(R(a) \wedge R(y))$	$EG,(13)$
(15)	$(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$	$EG,(14)$

（2）$(\exists x)P(x) \to (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to Q(x))$

证明：

（1）	$(\exists x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$	P
（2）	$\neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$	T（1）
（3）	$(\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)Q(x)$	T（2）
（4）	$(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$	T（3）
（5）	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	T（4）

10. 将下列公式化为前束范式。

（1）$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y))$

解： $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y))$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(y))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y))$$

（2）$(\forall x)(\exists y)((\exists z)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \to (\exists u)Q(x,y,u))$

解：

$$(\forall x)(\exists y)((\exists z)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \to (\exists u)Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg(\exists z)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)((\forall z)(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,y,u))$$

（3）$\neg(\forall x)(\exists y)A(x,y) \to (\exists x)(\forall y)(B(x,y) \wedge (\forall y)(A(y,x) \to B(x,y)))$

解：

$$\neg(\forall x)(\exists y)A(x,y) \to (\exists x)(\forall y)(B(x,y) \wedge (\forall y)(A(y,x) \to B(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y) \vee (\exists x)(\forall y)(B(x,y) \wedge (\forall y)(A(y,x) \to B(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y) \vee (\exists x)(\forall y)(B(x,y) \wedge (\forall y)(\neg A(y,x) \vee B(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y) \vee (\exists u)(\forall v)(B(u,v) \wedge (\forall z)(\neg A(z,u) \vee B(u,z)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall v)(\forall z)(A(x,y) \vee (B(u,v) \wedge (\neg A(z,u) \vee B(u,z))))$$

11. 求等价于下面公式的前束主析取范式与前束主合取范式。

（1）$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \to (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

解：前束主析取范式：

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \to (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \vee (\exists y)(P(y) \vee Q(y))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \vee Q(y))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(y) \wedge (\neg P(x) \vee P(x)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x \exists y((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(y) \wedge \neg P(x)) \vee (Q(y) \wedge P(x))$$

前束主合取范式：

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \to (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \vee (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \wedge (\forall x)\neg Q(x) \vee (\exists y)(P(y) \vee Q(y))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \vee Q(y))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(y)))$$

（2）$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)((\forall z)Q(x,z) \to \neg R(x,y)))$

解：前束主合取范式：

$$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)((\forall z)Q(x,z) \to \neg R(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\forall y)((\forall z)Q(x,z) \to \neg R(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\forall y)(\exists z \neg Q(x,z) \vee \neg R(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x) \vee \neg Q(x,z) \vee \neg R(x,y))$$

前束主析取范式：

$$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)((\forall z)Q(x,z) \to \neg R(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y))$$
$$\vee(\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y))$$
$$\vee(P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y))$$
$$\vee(P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y)) \vee (P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y))$$

（3）$(\forall x)P(x) \to (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

前束主析取范式：

$$(\forall x)P(x) \to (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists u)((\forall z)Q(u,z) \vee (\forall v)R(u,y,v))$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\forall z)(\forall v)(\neg P(x) \vee Q(u,z) \vee R(u,y,v))$$

前束主合取范式与前束主析取范式相同。

（4）$(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \to ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

解：前束析取范式：

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \to ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$$
$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$$
$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x,u)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(u,z))$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists z)((P(x) \wedge Q(x,u)) \vee (P(y) \wedge Q(u,z)))$$

前束合取范式：

$$(\forall x)(P(x)\to Q(x,y))\to((\exists y)P(y)\wedge(\exists z)Q(y,z))$$
$$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists z)((P(x)\wedge Q(x,u))\vee(P(y)\wedge Q(u,z)))$$
$$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists z)((P(x)\vee(P(y)\wedge Q(u,z)))\wedge(Q(x,u)\vee(P(y)\wedge Q(u,z))))$$
$$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists z)((P(x)\vee P(y))\wedge(P(x)\vee Q(u,z))\wedge(Q(x,u)\vee P(y))\wedge(Q(x,u)\vee Q(u,z)))$$

12. 将下列公式化为斯柯林范式。

（1）$(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee(\exists y)Q(x,y))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\neg P(x)\vee Q(x,y))$$
$$\Leftrightarrow(\exists u)(\forall x)(\exists y)((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge(G(u)\vee\neg G(u)))$$
$$\Leftrightarrow(\exists u)(\forall x)(\exists y)((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge(G(u)\vee\neg G(u)))$$
$$\Leftrightarrow(\exists u)(\exists x)(\exists y)((((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge(G(u)\vee\neg G(u)))\wedge\neg H(u,x))\vee(\forall z)H(u,z))$$
$$\Leftrightarrow(\exists u)(\exists x)(\exists y)(\forall z)((((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge(G(u)\vee\neg G(u)))\wedge\neg H(u,x))\vee H(u,z))$$

（2）$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x,z)\wedge P(y,z))\to(\exists u)Q(x,y,u))$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg(\exists z)(P(x,z)\wedge P(y,z))\vee(\exists u)Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\forall z)(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z))\vee(\exists u)Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)((((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))\wedge\neg H(v,x))\vee(\forall a)H(v,a))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall a)((((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))\wedge\neg H(v,x))\vee H(v,a))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\forall a)((((((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))\wedge\neg H(v,x))\vee H(v,a))$$
$$\wedge\neg I(v,x,y))\vee(\forall b)I(v,x,b))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\forall a)(\forall b)((((((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))\wedge\neg H(v,x))\vee H(v,a))$$
$$\wedge\neg I(v,x,y))\vee I(v,x,b))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists u)(\forall a)(\forall b)((((((((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))\wedge\neg H(v,x))\vee H(v,a))$$
$$\wedge\neg I(v,x,y))\vee I(v,x,b))\wedge\neg J(v,x,y,z))\vee(\forall c)H(v,x,y,c))$$
$$\Leftrightarrow(\exists v)(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists u)(\forall a)(\forall b)(\forall c)((((((((\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))\wedge(G(v)\vee\neg G(v)))\wedge\neg H(v,x))\vee H(v,a))$$
$$\wedge\neg I(v,x,y))\vee I(v,x,b))\wedge\neg J(v,x,y,z))\vee H(v,x,y,c))$$

第三章 集合论

1. 写出下列集合的表示式

解：

(1) 所有一元一次方程的解组成的集合

集合可表示为$\{x \mid ax+b=0, a,b \in R 并且 a \neq 0\}$

(2) x^6-1在实数域中的因式集。

集合可表示为$\{1, x-1, x+1, x^2-x+1, x^2+x+1, x^3-1, x^3+1, x^6-1 \mid \mathrm{x} \in R\}$

(3)直角坐标系中单位圆内（不包括单位圆）的点集。

集合可表示为$\{<x,y> \mid x^2+y^2<1，x,y \in R\}$

(4)极坐标系中单位圆外（不包括单位圆周）的点集

集合可表示为$\{<x,y> \mid x>\cos\theta, y>\sin\theta, \theta \in [0,2\pi]\}$

(5) 能被 5 整除的整数集

集合可表示为$\{x \mid x=5n, n \in \mathrm{Z}\}$

2. 设有某电视台，拟定一项为时半小时的节目，其中包含戏剧、音乐与广告。每项节目都定位为 5 分钟的倍数，试求

解：

设戏剧、音乐、广告分配的时间分别为x,y,z

(1) 各种时间分配情况的集合

解：可表示为$\{<x,y,z> \mid x+y+z=30, x,y,z=5n, n \in N^+\}$

(2) 戏剧分配的时间较音乐多的集合

可表示为$\{<x,y,z> \mid x+y+z=30, x>y, x,y,z=5n, n \in N^+\}$

(3) 广告分配的时间与音乐或戏剧分配的时间相等的集合

可表示为$\{<x,y,z> \mid x+y+z=30, z=x \vee z=y, x,y,z=5n, n \in N^+\}$

(4) 音乐分配的时间恰为 5 分钟集合

可表示为$\{<x,y,z> \mid x+y+z=30, y=5, x,y,z=5n, n \in N^+\}$

3. 给出集合 A、B和 C的例子，使得$\boldsymbol{A \in B}$，$\boldsymbol{B \in C}$而$\boldsymbol{A \notin C}$。

解：
$$A = \{a\}$$
$$B = \{\{a\}, b\}$$
$$C = \{\{\{a\}, b\}, c\}$$

4. 确定下列命题是否为真。

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

该命题为真命题

(2) $\varnothing \in \varnothing$

该命题为假命题

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

该命题为真命题

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

该命题为真命题

(5) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b\}\}$

该命题为真命题。

(6) $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$

该命题为真命题。

(7) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

该命题为真命题。

(8) $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

该命题为假命题。

5. $\boldsymbol{A \subseteq B}$，$\boldsymbol{A \in B}$是可能的吗？予以证明。

解：可能。若 $A = \{1\}, B = \{1,2,\{1\}\}$， $A \subseteq B$并且$A \in B$

6 确定下列集合的幂集

(1) $\{a, \{a\}\}$

解：设$A = \{a, \{a\}\}$

则$\rho(A)=\left\{\emptyset,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\right\}$

(2){ {1, {2, 3}}}

解：设 A={{1, {2, 3}}}

则$\rho(A)=\{\emptyset,\{\{1,\{2,3\}\}\}\}$

(3) $\{\emptyset,a,\{b\}\}$

解：设$A=\{\emptyset,a,\{b\}\}$

则$\rho(A)=\left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{a\},\{\{b\}\},\{\emptyset,a\},\{\emptyset,b\},\{a,\{b\}\},\{\emptyset,a,\{b\}\}\right\}$

(4) $\rho(\emptyset)$

解：设$A=\rho(\emptyset)=\{\emptyset\}$

则$\rho(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

(5) $\rho(\rho(\emptyset))$

解：设$A=\rho(\rho(\emptyset))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

则 $\rho(A)=\left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\right\}$

7 设$\boldsymbol{A}=\{\emptyset\}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}))$

(1) 是否$\emptyset\in B$？是否$\emptyset\subseteq B$？

(2) 是否$\{\emptyset\}\in B$？是否$\{\emptyset\}\subseteq B$？

(3) 是否$\{\{\emptyset\}\}\in B$？是否$\{\{\emptyset\}\}\subseteq B$？

解：$A=\{\emptyset\}$

$\rho(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

$B=\rho(\rho(A))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

(1) $\emptyset\in B$，$\emptyset\subseteq B$

(2) $\{\emptyset\}\in B$，$\{\emptyset\}\subseteq B$

(3) $\{\{\emptyset\}\}\in B$，$\{\{\emptyset\}\}\subseteq B$

8. 设某集合有 101 个元素，试问：

(1) 可构成多少个子集：2^{101}

(2) 其中有多少个子集的元素为奇数：2^{100}

(3) 是否会有 102 个元素的子集：不会

9．设$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$，B_i是S的子集，由B_{17}和B_{31}所表达的子集是什么？应该如何确定子集$\{a_2,a_6,a_7\}$和$\{a_1,a_8\}$

解：把 17 化为二进制，是 00010001，$B_{17}=\{a_4,a_8\}$；

把 31 化为二进制，是 00011111，$B_{31}=\{a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$

$\{a_2,a_6,a_7\}$，编码为 01000110，为 B_{70}

$\{a_1,a_8\}$，编码为 10000001，为 B_{129}

10　设$A=\{x|x<5\wedge x\in N\}$，$B=\{x|x<7\wedge x$是正偶数$\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$。

解：　$A=\{0,1,2,3,4\}$　　　$B=\{2,4,6\}$

$A\bigcup B=\{0,1,2,3,4,6\}$

$A\bigcap B=\{2,4\}$

11　设 $A=\{x\mid x$是book中的字母$\},B=\{x\mid x$是black中的字母$\}$，求$A\bigcup B,A\bigcap B$。

解：$A=\{b,o,k\}$　　　$B=\{b,l,a,c,k\}$

$A\bigcup B=\{b,l,a,c,k,o\}$

$A\bigcap B=\{b,k\}$

12．给定自然数集合的下列子集：

$A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{i\mid i^2<50\}$

$C=\{i\mid i$被3整除$\wedge 0\leqslant i\leqslant 30\}$

$D=\{i\mid 2^k\wedge k\in I^+\wedge 0\leqslant k\leqslant 6\}$

求下列集合：

（1）$A\bigcup(B\bigcup(C\bigcup D))$

（2）$A\bigcap(B\bigcap(C\bigcap D))$

（3）$B-(A\bigcup C)$

（4）$(\sim A\bigcap B)\bigcup D$

解：$A=\{1,2,7,8\}$　　$B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$　　$D=\{1,2,4,8,16,32,64\}$

(1)　$A\bigcup(B\bigcup(C\bigcup D))=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$

(2)　$A\bigcap(B\bigcap(C\bigcap D))=\varnothing$

(3) $A\cup C=\{0,1,2,3,6,7,8,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

$B-(A\cup C)=\{4,5\}$

(4) $\tilde{A}\cap B=\{3,4,5,6\}$

$(\tilde{A}\cap B)\cup D=\{1,2,3,4,5,6,8,16,32,64\}$

13. 证明对于所有集合 A, B, C 有 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，当且仅当 $C\subseteq A$。

（第一种方法）证明：充分性：由于 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

所以 $C=A\cap C$，即 $C\subseteq A$

充分性得证。

必要性：由于 $C\subseteq A$

所以 $C=A\cap C$

所以 $(A\cap B)\cup C=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

必要性得证。

(第二种方法)证明：充分性：

对于任意的 x，设 $x\in C$，则 $x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup\mathrm{C}$，由于 $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup\mathrm{C}=\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$，则 $x\in\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$，因此 $x\in\mathrm{A}$。充分性得证。

必要性：由于 $C\subseteq A$

所以 $C=A\cap C$

所以 $(A\cap B)\cup C=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

必要性得证。

14. 证明对所有集合 A, B，C，有：

（1）$(A-B)-C=A-(B\cup C)$

证明：

$$
\begin{aligned}
&(A-B)-C\\
&=(A\cap\sim B)-C\\
&=(A\cap\sim B)\cap\sim C\\
&=A\cap(\sim B\cap\sim C)\\
&=A\cap\sim(B\cup C)\\
&=A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

（2）$(A-B)-C=(A-C)-B$

证明：

$$
\begin{aligned}
&(A-B)-C\\
&=(A\cap\sim B)-C\\
&=A\cap\sim B\cap\sim C\\
&=A\cap\sim C\cap\sim B\\
&=(A-C)\cap\sim B\\
&=(A-C)-B
\end{aligned}
$$

（3）$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证明：

$$
\begin{aligned}
&(A-C)-(B-C)\\
&=(A\cap\sim C)-(B\cap\sim C)\\
&=(A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C)\\
&=(A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C)\\
&=(A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C)\\
&=A\cap\sim B\cap\sim C\\
&=(A-B)\cap\sim C\\
&=(A-B)-C
\end{aligned}
$$

因此，$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

15. 确定下列各式的运算结果。

解： $\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$

$\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}=\{\{\varnothing\}\}$

16. 假设 A 和 B 是 E 的子集，证明下列各式中每个关系式彼此等价。

(1) $\boldsymbol{A\subseteq B}$，$\boldsymbol{\sim B\subseteq\sim A}$，$\boldsymbol{A\cup B=B}$，$\boldsymbol{A\cap B=A}$

第一种方法 证明：

① 证明 $A\subseteq B\Leftrightarrow\sim B\subseteq\sim A$。

充分性：若 $A\subseteq B$，则若 $x\in A$，那么必有 $x\in B$。因此，若 $x\notin B$，则必有 $x\notin A$，即若$x\in\sim B$，则有$x\in\sim A$，即$\sim B\subseteq\sim A$；

必要性：若$\sim B\subseteq\sim A$，则若$x\in\sim B$，则有$x\in\sim A$，即若 $x\notin B$，则必有 $x\notin A$。那么，若 $x\in A$，那么必有 $x\in B$，即 $A\subseteq B$；

由以上两点可知：$A\subseteq B\Leftrightarrow\sim B\subseteq\sim A$。

② 证明：$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

充分性：若 $x\in A\cup B$，那么有 $x\in A$ 或 $x\in B$。

若 $x \in A$，则由 $A \subseteq B$ 可知，必有 $x \in B$，所以若 $x \in A \bigcup B$，必有 $x \in B$，即 $A \bigcup B \subseteq B$；

若 $x \in B$，那么必有 $x \in A \bigcup B$，即 $B \subseteq A \bigcup B$，所以$A \cup B = B$，充分性得证；

必要性：因为$A \cup B = B$，所以，对于任意的$x \in A$，则 $x \in A \bigcup B$，必有 $x \in B$，所以 $A \subseteq B$，必要性得证；

由以上两点可知：$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

③ 证明：$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

充分性：若 $x \in A \bigcap B$，那么必有 $x \in A$，即 $A \bigcap B \subseteq A$；

若 $x \in A$，那么由 $A \subseteq B$ 可知，必有 $x \in B$，所以 $x \in A \bigcap B$，即 $A \subseteq A \bigcap B$，所以，$A \cap B = A$；

必要性：因为$A \cap B = A$，所以对于任意的 $x \in A$，必有 $x \in A \bigcap B$，$x \in B$，所以 $A \subseteq B$；

由以上两点可知，$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$。

由以上三点可知，$A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$。

第二种方法 证明：

循环证明法。（略）

（2）$A \bigcap B = \emptyset$，$A \subseteq \sim B$，$B \subseteq \sim A$

第一种方法 证明：

① 证明$A \bigcap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \sim B$

对于任意的 x，$x \in A$，假设$x \in B$，则$x \in A \cap B$，与$A \bigcap B = \emptyset$产生矛盾，所以$x \in \sim B$，即$A \subseteq \sim B$成立。

② 证明 $A \subseteq \sim B \Rightarrow B \subseteq \sim A$

对于任意的 x，$x \in B$，假设$x \in A$，由于$A \subseteq \sim B$，则$x \in \sim B$成立，与前提条件矛盾，所以$x \in \sim A$，即$B \subseteq \sim A$成立。

③证明 $B \subseteq \sim A \Rightarrow A \bigcap B = \emptyset$

若存在$x \in A \bigcap B$，则$x \in B$，由于$B \subseteq \sim A$，则$x \in \sim A$，因此$x \notin A \bigcap B$，与前提条件矛盾，所以不存在$x \in A \bigcap B$，即$A \bigcap B = \emptyset$。

综上所述，$A \bigcap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \sim B \Leftrightarrow B \subseteq \sim A$成立。

第二种方法：

① 证明：$A \bigcap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \sim B$

充分性：因为 $A \bigcap B = \varnothing$，所以对于任意的 x，若 $x \in A$，则必有 $x \notin B$，即$x \in \sim B$，所以$A \subseteq \sim B$；

必要性：因为$A \subseteq \sim B$，所以对于任意的 x，若 $x \in A$，则必有$x \in \sim B$，即 $x \notin B$，所以 $A \cap B = \varnothing$；

由以上两点可知：$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \sim B$

② 证明：$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subseteq \sim A$

充分性：因为 $A \cap B = \varnothing$，所以对于任意的 x，若 $x \in B$，则必有 $x \notin A$，即$x \in \sim A$，所以$B \subseteq \sim A$；

必要性：因为$B \subseteq \sim A$，所以对于任意的 x，若 $x \in B$，则必有$x \in \sim A$，即 $x \notin A$，所以 $A \cap B = \varnothing$；

由以上两点可知：$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subseteq \sim A$.

由上可知：$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \sim B \Leftrightarrow B \subseteq \sim A$.

(3) $A \cup B = E$，$\sim A \subseteq B$，$\sim B \subseteq A$

第一种方法 证明：

① 证明$A \cup B = E \Rightarrow \sim A \subseteq B$

因为 $A \cup B = E$，所以若$x \in \sim A$，则必有$x \in B$，所以$\sim A \subseteq B$；

② 证明 $\sim A \subseteq B \Rightarrow \sim B \subseteq A$

对于任意的 x，$x \in \sim B$，假设$x \notin A$，由于$\sim A \subseteq B$，则$x \in B$成立，与前提条件$x \in \sim B$矛盾，所以$x \in A$成立，即$\sim B \subseteq A$成立。

③证明 $\sim B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = E$

由于$B \cup \sim B = E$，由于$\sim B \subseteq A$，则$A \cup B = E$成立。

综上所述，$A \cup B = E \Leftrightarrow \sim A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq$成立。

第二种方法：

① 证明：$A \cup B = E \Leftrightarrow \sim A \subseteq B$

充分性：因为 $A \cup B = E$，所以若 $x \notin A$，则必有 $x \in B$，即若$x \in \sim A$，则必有 $x \in B$，所以$\sim A \subseteq B$；

必要性：因为$A \cup \sim A = E$，又 $\sim A \subseteq B$，必有$A \cup B = E$；

由以上两点可知：$A \cup B = E \Leftrightarrow \sim A \subseteq B$

② 证明：$A \cup B = E \Leftrightarrow \sim B \subseteq A$

充分性：因为 $A \cup B = E$，所以若 $x \notin B$，则必有 $x \in A$，即若$x \in \sim B$，则必有 $x \in A$，所以$\sim B \subseteq A$；

必要性：因为$B \cup \sim B = E$，又 $\sim B \subseteq A$，必有$A \cup B = E$；

由以上两点可知：$A \cup B = E \Leftrightarrow \sim B \subseteq A$.

由上可知：$A \cup B = E \Leftrightarrow \sim A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq A$. 。

(4) $A = B$，$A \oplus B = \phi$

证明：

充分性：由于$A=B$，所以$A\cap\sim B=\phi$，$B\cap\sim A=\phi$

所以$A\oplus B=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)=\phi$

必要性：因为$A\oplus B=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)=\phi$

所以$A\cap\sim B=\phi$并且$B\cap\sim A=\phi$

因为$A\cap\sim B=\phi$，所以$A\subseteq B$

又$B\cap\sim A=\phi$，所以$B\subseteq A$

所以$A=B$。

由上可知：$A=B\Leftrightarrow A\oplus B=\phi$。

17. 化简下述集合公式。

(1) 结果：A

$$(A\cap B)\cup(A-B)=(A\cap B)\cup(A\cap\sim B)=A\cap(B\cup\sim B)=A$$

(2) 结果：A − B。

$$\begin{aligned}(A\cup(B-A))-B&=(A\cup(B\cap\sim A))-B=((A\cup \mathrm{B})\cap(A\cup\sim A))-\mathrm{B}=((A\cup\mathrm{B})\cap E)-B\\&=(A\cup\mathrm{B})-B=(A\cup\mathrm{B})\cap\sim B=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim B)=(A\cap\sim B)\\&=A-B\end{aligned}$$

(3) 结果：A

$$\begin{aligned}&((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)\\&=((A-B)\cap\sim C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)\\&=((A-B)\cap(\sim C\cup C))\cup((A\cap B)\cap(\sim C\cup C))\\&=((A-B)\cap E)\cup((A\cap B)\cap E)=(A\cap\sim B)\cup(A\cap B)=A\cap(\sim B\cup B)\\&=A\end{aligned}$$

(4) 结果：C ∩（A ∪ B）

$$\begin{aligned}&(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)=(A\cap C)\cap(B\cup\sim B)\cup(\sim A\cap B\cap C)\\&=(A\cap C)\cap E\cup(\sim A\cap B\cap C)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)\\&=C\cap(A\cup(\sim A\cap B))=C\cap((A\cup\sim A)\cap(A\cup B))=C\cap(A\cup B)\end{aligned}$$

18. 设 A, B, C 是任意集合，分别求使得下述等式成立的充分必要条件。

(1) $B\subseteq A$

(2) $B\cap A=\emptyset$

(3) $B=A=\emptyset$

(4) $B=A$

(5) $B=\emptyset$

(6) $B=A$

(7) $(A-B)\cap(A-C)=A$

解：$(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)=A$，所以$A\cap(B\cup C)=\emptyset$，即$A\cap B=\emptyset$且$A\cap C=\emptyset$

（8）$(A-B)\cup(A-C)=\emptyset$

解：由于$(A-B)\cup(A-C)=\emptyset$，因此必有$A-B=\emptyset$且$A-C=\emptyset$。也就是$A\subseteq B$并且$A\subseteq C$。

(9) $(A-B)\cap(A-C)=\emptyset$

解：$(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)=A\cap\sim(B\cup C)$

因此 $(A-B)\cap(A-C)=\emptyset$ 意味着$A\subseteq(B\cup C)$

(10) $(A-B)\oplus(A-C)=\emptyset$

解：（或者使用（6））

$$\begin{aligned}&(A-B)\oplus(A-C)\\&=(A\cap\sim B)\oplus(A\cap\sim C)\\&=(A\cap\sim B\cap\sim(A\cap\sim C))\cup(A\cap\sim C\cap\sim(A\cap\sim B))\\&=(A\cap\sim B\cap(\sim A\cup C))\cup(A\cap\sim C\cap(\sim A\cup B))\\&=(A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap\sim C)\\&=A\cap(B\oplus C)\end{aligned}$$

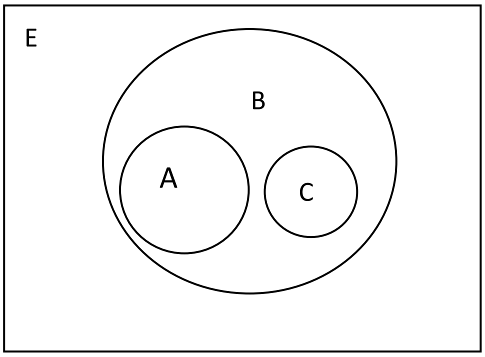
两种可能，第一种 $B\oplus C=\varnothing$，即$B=C$；

第二种，$A\subseteq B\cap C$ 或者 $A\subseteq\sim(B\cup C)$，即$A\cap B=A\cap C=\emptyset$

19. 借助文氏图，考察下列命题的正确性。

(1) 若 A，B和 C是 E的子集，使得$A\cap B\subseteq\sim C$和$A\cup C\subseteq B$则$A\cap C=\emptyset$

(1)

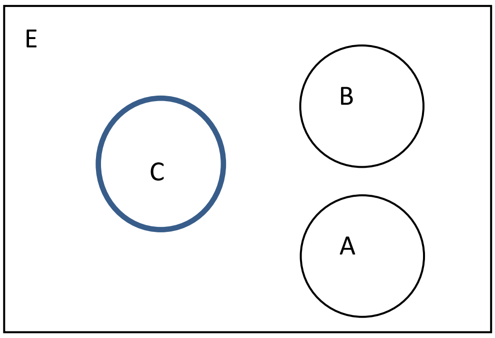


(2) 若 A，B和 C是 E的子集，使得$A\subseteq\sim(B\cup C)$和$B\subseteq\sim(A\cup C)$则$B=\emptyset$

解：$A\subseteq\sim(B\cup C)\Rightarrow A\cap(B\cup C)=\emptyset\Rightarrow\ A\cap B=\emptyset\wedge A\cap C=\emptyset$

$B\subseteq\sim(A\cup C)\Rightarrow B\cap(A\cup C)=\emptyset\Rightarrow\ A\cap B=\emptyset\wedge B\cap C=\emptyset$

(2)



20. 设 A, B, C 为任意集合，是判断下面命题的真假。如果为真，给出证明，否则给出反例。

(1) $\boldsymbol{A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C}$

真命题

证明：对于任意的 x，$x \in A$，由于$A \subset B$，则$x \in B$，由于$B \subseteq C$，所以$x \in C$，即$A \subseteq C$；

由于$A \subset B$，存在$y \in A$并且$y \notin B$，由于$B \subseteq C$，所以$y \notin C$，即存在$y \in A$且$y \notin C$；

由于$A \subset B$，存在$y \in B$并且$y \notin A$，由于$B \subseteq C$，所以$y \in C$，即存在$y \in C$且$y \notin A$；

综上$A \subset C$成立。

(2) $\boldsymbol{A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C}$

解：假命题。

例如 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{1\}$。

(3) $\boldsymbol{(A - B) \cup (B - C) = A - C}$

解：假命题。

例如 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，$C=\{5, 6\}$

$(A - B) \cup (B - C) = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$

$A - C = \{1,2,3\}$

(4) $\boldsymbol{(A - B) \cup B = A}$

解：假命题。

若$A \cap B = \emptyset$，则$(A - B) \cup B = A \cup B$

例如 $A=\{1, 2\}$，$B=\{3\}$

$(A - B) \cup B = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\} \neq B$

$(A - B) \cup B = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\} \neq A$

(5) $\boldsymbol{(A \cup B) - B = B}$

解：假命题。

例如 $A=\{1, 2\}$，$B=\{2, 3\}$

$(A \cup B) - B = (\{1,2\} \cup \{2,3\}) - \{2,3\} = \{1\} \neq B$

(6)　$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{A} = \emptyset$

解：真命题。

$(A \cap B) - A = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap B) \subseteq A$

证明：对于任意的 x，$x \in (A \cap B)$，则显然$x \in A$，因此$(A \cap B) \subseteq A$成立。

(7)　$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

解：假命题。

例如 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$

$A \cup B = A \cup C = \{1,2\} \nRightarrow B = C$

(8)　$\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$

解：真命题

证明：对于任意的 x，$x \in C$，由于$C \subseteq A \wedge C \subseteq B$，有$x \in A \wedge x \in B$，即$x \in A \cap B$，所以$C \subseteq A \cap B$成立。

(9)　$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$

解：真命题。

证明：先证　$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

对于任意的 X，$X \in P(A)$，则$X \subseteq A$，由于$A \subseteq B$，$X \subseteq B$，因此$X \in P(B)$，所以$P(A) \subseteq P(B)$成立；

再证　$P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

对于任意 x，$x \in A$，那么$\{x\} \in P(A)$，由于$P(A) \subseteq P(B)$，所以$\{x\} \in P(B)$，那么$x \in B$，所以$A \subseteq B$成立；

综上，$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$成立。

(10)　$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

解：真命题。

证明：充分性　$P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$

对于任意的 X, $X \in P(A) \cap P(B)$，有$X \in P(A)$并且 $X \in P(B)$，则$X \subseteq A$且$X \subseteq B$，即$X \subseteq A \cap B$成立，那么$X \in P(A \cap B)$，因此$P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$成立；

必要性 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$
对于任意的 X，$X\in P(A\cap B)$，有$X\subseteq A\cap B$，则有$X\subseteq A$且$X\subseteq B$，即$X\in P(A)$且$X\in P(B)$成立，即$X\in P(A)\cap P(B)$，因此$P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$成立；
综上，$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$成立。

（11） $\boldsymbol{P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)}$

解：
证明：对于任意的 X，$X\in P(A)\cup P(B)$，有$X\in P(A)$或者 $X\in P(B)$，即有$X\subseteq A$或者$X\subseteq B$，即$X\subseteq A\cup B$，因此$X\in P(A\cup B)$，所以$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$成立。

（当$A\subseteq B$或者$B\subseteq A$时，$P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$成立）

21. 设在 10 名青年中有 5 名是工人，7 名是学生，其中兼具工人与学生双重身份的青年有三名，求既不是学生也不是工人的青年有几名？

设 A，B 分别代表工人、学生的集合，则：
$|E|=10$，$|A|=5$，$|B|=7$，$|A\cap B|=3$，

则 $|\sim(A\cup B)|=|E-(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)=10-(5+7-3)=1$

解： 设 A，B 分别代表工人、学生，则：

$|S|=10$
$|A|=5$
$|B|=7$
$|A\cap B|=3$
$|\sim A\cap\sim B|=|S|-(|A|+|B|)+|A\cap B|=10-(5+7)+3=1$
所以既不是学生也不是工人的青年有 1 人。

22. 求 1 到 250 之间能够被 2, 3, 5, 7 中任何一个整除的整数的个数。

设$|A|=\lfloor 250/2\rfloor=125$，$|B|=\lfloor 250/3\rfloor=83$，$|C|=\lfloor 250/5\rfloor=50$，$|D|=\lfloor 250/7\rfloor=35$

$|A \cap B| = \lfloor 250 / (2*3) \rfloor = 41$
$|A \cap C| = \lfloor 250 / (2*5) \rfloor = 25$
$|A \cap D| = \lfloor 250 / (2*7) \rfloor = 17$
$|B \cap C| = \lfloor 250 / (3*5) \rfloor = 16$
$|B \cap D| = \lfloor 250 / (3*7) \rfloor = 11$
$|C \cap D| = \lfloor 250 / (5*7) \rfloor = 7$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 250 / (2*3*5) \rfloor = 8$
$|A \cap B \cap D| = \lfloor 250 / (2*3*7) \rfloor = 5$
$|A \cap C \cap D| = \lfloor 250/(2*5*7) \rfloor = 3$
$|B \cap C \cap D| = \lfloor 250 / (3*5*7) \rfloor = 2$
$|A \cap B \cap C \cap D| = \lfloor 250 / (2*3*5*7) \rfloor = 1$
则所求的答案表达式为$|A \cup B \cup C \cup D|$。
求 解 ： $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) + (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) - |A \cap B \cap C \cap D|$ =125 + 83 +50 +35 -(41+25+17+16+11+7)+(8+5+3+2)-(1)
=193;
所以,这样的数共有 193 个。

23. 某足球队有球衣 38 件，篮球队有球衣 15 件，棒球队有球衣 20 件，三队队员总数 58 人，且其中只有三人同时参加三个队，试求同时参加两个队的队员共有几人？

解： 设 A，B，C分别表示参加足球队、篮球队和棒球队的队员的集合
$|A| = 38$，$|B| = 15$，$|C| = 20$
$|A \cup B \cup C| = 58$
$|A \cap B \cap C| = 3$
$|A \cup B \cup C|$=

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \Rightarrow$$
$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cup B \cup C|$$
$$= 38 + 15 + 20 + 3 - 58 = 18$$

即同时参加两个对的队员共有 18 个。

24. 据调查，学生阅读杂志的情况如下：60%读甲种杂志，50%读乙种杂志，50%读丙种杂志，30%读甲种与乙种，30%读乙种与丙种，30%读甲种与丙种，10%读三类杂志，求：

(1) 读两类杂志的学生的百分比？

(2) 不读任何杂志的学生的百分比？

解：设 A，B，C 分别表示读甲种、乙种、丙种杂志的学生的集合。

(1) $|A\cap B\cap C|=10\%$ $|A|=60\%$ $|B|=50\%$ $|C|=50\%$

$|A\cap B|=30\%$ $|B\cap C|=30\%$ $|A\cap C|=30\%$

$$|A\cap B\cap\sim C|+|A\cap C\cap\sim B|+|B\cap C\cap\sim A|=|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-3|A\cap B\cap C|$$
$$=30\%+30\%+30\%-3*10\%$$
$$=60\%$$

所以确定读两种杂志的学生的百分比为 60%。

(2)

$$\begin{aligned}|\sim A\cap\sim B\cap\sim C| &= |E-(A\cup B\cup C)| = 100\%-|A\cup B\cup C|\\ &= 100\%-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)\\ &= 100\%-(60\%+50\%+50\%-30\%-30\%-30\%+10\%)=20\%\end{aligned}$$

所以不读任何杂志的学生的百分比为 20%。

第四章 二元关系

1. 如果 A={0, 1} 和 B={1, 2}，试求下列集合。

（1）$A\times\{1\}\times B$

解：$A\times\{1\}\times B$={<0,1,1>,<0,1,2>,<1,1,1>,<1,1,2>}

（2）$A^2\times B$

解：$A^2\times B=\{<0,0,1>,<0,1,1>,<1,0,1>,<1,1,1>,<0,0,2>,<0,1,2>,<1,0,2>,<1,1,2>\}$

（3）$(B\times A)^2$

解：$B\times A=\{<1,0>,<1,1>,<2,0>,<2,1>\}$

$$\begin{aligned}(B\times A)^2=\{&<<1,0>,<1,0>>,<<1,0>,<1,1>>,<<1,0>,<2,0>>,<<1,0>,<2,1>>,\\ &<<1,1>,<1,0>>,<<1,1>,<1,1>>,<<1,1>,<2,0>>,<<1,1>,<2,1>>,\\ &<<2,0>,<1,0>>,<<2,0>,<1,1>>,<<2,0>,<2,0>>,<<2,0>,<2,1>>,\\ &<<2,1>,<1,0>>,<<2,1>,<1,1>>,<<2,1>,<2,0>>,<<2,1>,<2,1>>\}\end{aligned}$$

2. 2．在具有 x 和 y 轴的笛卡尔坐标系中，若有

$X=\{x \mid x\in R\wedge -3\leqslant x\leqslant 2\}$
$Y=\{y \mid y\in R\wedge -2\leqslant y\leqslant 0\}$ **给出笛卡尔乘积的解释。**

$X\times Y$ 表示在在笛卡尔坐标系中，$-3\le x\le 2$ 且 $-2\le y\le 0$ 的矩形区域内的点集。

3. 设 A,B 和 C 是任意三个集合，试证下列等式。

（1）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

证明：任取 $<x,y>\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(A\cap B)\times(C\cap D)\\
\Leftrightarrow\ & x\in(A\cap B)\wedge y\in(C\cap D)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)\\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times C\wedge <x,y>\in B\times D\\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times C)\cap(B\times D)
\end{aligned}
$$

由 $<x,y>$ 取值的任意性知，$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

（2）当且仅当，才有 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$

证明：当 $C\subseteq A$ 时，$A\cup C=A$，于是 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$。

当 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ 时，

任取 $x\in C$，可知 $x\in(A\cap B)\cup C$，由 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ 知 $x\in A\cap(B\cup C)$，

于是得到 $x\in A$。所以，$C\subseteq A$。

4．试证 $A\times B=B\times A\Leftrightarrow(A=\varnothing)\vee(B=\varnothing)\vee(A=B)$ 。

证明：

必要性：若 $A=\varnothing$， $A\times B=B\times A=\varnothing$；

同理，若 $B=\varnothing$， $A\times B=B\times A=\varnothing$；

若 $A=B$，则显然有 $A\times B=B\times A$；

必要性得证。

充分性性：由于 $A\times B=B\times A$

所以对于任意的 $<x,y>\in A\times B$，必有 $<x,y>\in B\times A$

$<x,y>\in A\times B\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B \quad <x,y>\in B\times A\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in A$

即若 $x\in A$ 则必有 $x\in B$；若 $y\in B$，则必有 $y\in A$，所以当 $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing$ 时，

$A=B$；

充分性得证。

5. 判断下述命题的真假，如果为真，给出证明；否则给出反例。

（1）$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})$

解：任取 $\langle x,y\rangle\in(A\cup B)\times(C\cup D)$，有

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(A\cup B)\times(C\cup D)\\
\Leftrightarrow\ & x\in(A\cup B)\wedge y\in(C\cup D)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C\vee y\in D)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge(y\in C\vee y\in D))\vee(x\in B\wedge(y\in C\vee y\in D))\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in A\wedge y\in D)\vee(x\in B\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in D)\\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)
\end{aligned}
$$

选择 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{a\}$，$D=\{b\}$

则 $(A\cup B)\times(C\cup D)=\{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>\}$

$(A\times C)\cup(B\times D)=\{<1,a>,<2,b>\}$

因此该等式不成立。

（2）$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})$

解：任取 $\langle x,y\rangle\in(A-B)\times(C-D)$，有

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in (A-B)\times(C-D)\\
\Leftrightarrow&<x,y>\in (A\cap\sim B)\times(C\cap\sim D)\\
\Leftrightarrow&\ x\in (A\cap\sim B)\wedge y\in (C\cap\sim D)\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(y\in C\wedge y\notin D)\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\wedge y\notin D)\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\wedge y\notin D)\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\vee y\in D)
\end{aligned}
$$

选择 A={1，2}，B={1}，C={a，b}，D={a}

$(A-B)\times(C-D)=\{<2,b>\}$

$(A\times C)-(B\times D)=\{<1,b>,<2,a>,<2,b>\}$

因此，该等式不成立。

（3） $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解：设 A={1，2}，B={2}，C={3，4}，D={4}

则 $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\{<1,3>\}$

$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{<1,3>,<1,4>,<2,3>\}$

因此，该等式不成立。

（4） $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

解：取 $<x,y>\in (A-B)\times C$，有

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in (A-B)\times C\\
\Leftrightarrow&<x,y>\in (A\cap\sim B)\times C\\
\Leftrightarrow&\ x\in (A\cap\sim B)\wedge y\in C\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge x\notin B)\wedge y\in C\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C)\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)\\
\Leftrightarrow&\ (x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C)\\
\Leftrightarrow&\ (<x,y>\in A\times C)\wedge(<x,y>\notin B\times C)\\
\Leftrightarrow&<x,y>\in (A\times C-B\times C)
\end{aligned}
$$

因此，该等式成立。

（5）$(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

解：任取取$<x,y> \in (A \times C) \oplus (B \times C)$，有

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in (A \times C) \oplus (B \times C) \\
\Leftrightarrow & ((x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C)) \vee ((x \in B \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in A \wedge y \in C)) \\
\Leftrightarrow & ((x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)) \vee ((x \in B \wedge y \in C) \wedge (x \notin A \vee y \notin C)) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge y \in C) \\
\Leftrightarrow & ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge y \in C \\
\Leftrightarrow & x \in ((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \wedge y \in C \\
\Leftrightarrow & x \in A \oplus B \wedge y \in C \\
\Leftrightarrow & <x,y> \in (A \oplus B) \times C
\end{aligned}
$$

因此，该等式成立。

（6）存在集合 A 使得$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$；

取$\mathrm{A} = \emptyset$，则该命题成立。

（7）$\boldsymbol{P(A) \times P(A) = P(A \times A)}$

假设结合 A 有 n 个元素，则$P(A)$有2^n个元素，则$P(A) \times P(A)$共有2^{2n}个元素；
则$A \times A$有n^2个元素，$P(A \times A)$则有2^{n^2}个元素，显然两者元素数不一样，故命题不成立。

6．设 $A = \{1,2,4,6\}$，列出以下关系 R。

（1）$R = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x+y \neq 2\}$

$$
\begin{aligned}
R = \{ & <1,2>,<1,4>,<1,6>,<2,1>,<2,2>,<2,4>,<2,6>, \\
& <4,1>,<4,2>,<4,4>,<4,6>,<6,1>,<6,2>,<6,4>,<6,6>\}
\end{aligned}
$$

（2）$R = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge |x-y| = 1\}$

$R = \{<1,2>,<2,1>\}$

（3） $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x/y\in A\}$

$R=\{<1,1>,<2,2>,<4,4>,<6,6>,<2,1>,<4,2>,<4,1>,<6,1>\}$

（4） $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge y\text{为素数}\}$

$R=\{<1,2>,<2,2>,<4,2>,<6,2>\}$

7. 列出集合 $A=\{2,3,4\}$ 上的恒等关系$\boldsymbol{I_A}$和全域关系$\boldsymbol{E_A}$。

解：$I_A=\{<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$

$E_A=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<4,2>,<4,3>,<4,4>\}$

8．给出下列关系 R 的所有序偶。

（1） $A=\{0,1,2\},B=\{0,2,4\},R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\cap B\}$

$R=\{<0,2>,<2,0>,<2,2>,<0,0>\}$

（2） $A=\{1,2,3,4,5\},B=\{1,2,3\},R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\wedge x=y^2\}$

$R=\{<1,1>,<4,2>\}$

9. 设$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$都是从 $A=\{1,2,3,4\}$ 到 $B=\{2,3,4\}$ 的二元关系，并且

$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
$R_2=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

求 $R_1\cup R_2$， $R_1\cap R_2$， $\mathrm{dom}R_1$， $\mathrm{dom}R_2$， $\mathrm{ran}R_1$， $\mathrm{ran}R_2$， $\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)$， $\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)$， $\mathrm{fld}(R_1-R_2)$， $R_1\circ R_2$， $R_2\circ R_1$， R_1^2， R_2^3 。

解：

$R_1 \cup R_2 = \{<1,2>,<2,4>,<3,3>,<1,3>,<4,2>\}$
$R_1 \cap R_2 = \{<2,4>\}$
$domR_1 = \{1,2,3\}$
$domR_2 = \{1,2,4\}$
$ranR_1 = \{2,3,4\}$
$ranR_2 = \{2,3,4\}$
$dom(R_1 \cup R_2)=\{1,2,3,4\}$
$ran(R_1 \cap R_2) = \{4\}$
$fld(R_1 - R_2) = fld(\{<1,2>,<3,3>\}) = \{1,3\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$
$R_1 \circ R_2 = \{<1,4>,<2,2>\}$
$R_2 \circ R_1 = \{<1,3>,<4,4>\}$
$R_1^2 = \{<1,4>,<3,3>\}$
$R_2^2 = \{<4,4>,<2,2>\}$
$R_2^3 = \{<2,4>,<4,2>\}$

10．设集合 $A = \{1,2,3\}$，问 A 上有多少种不同的二元关系?

$2^{3^2}=2^9=512$种

11．设关系 $R = \{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求 $R \circ R$， R^{-1}， $R \restriction \{1,2\}$， $R[\{1,2\}]$。

解:
$R \circ R = \{<0,2>,<0,3>,<1,3>\}$
$R^{-1} = \{<1,0>,<2,0>,<3,0>,<2,1>,<3,1>,<>\}$
$R \mid \{1,2\} = \{<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$
$R[\{1,2\}] = \{2,3\}$

12. 设关系 $R=\{\langle\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$，求 R^{-1}，R^2，R^3，$R\restriction\{\varnothing\}$，$R\restriction\varnothing$，$R\restriction\{\{\varnothing\}\}$，$R[\varnothing]$，$R[\{\{\varnothing\}\}]$。

$R^{-1}=\{<\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing>,<\varnothing,\{\varnothing\}>\}$

$R^2=\{<\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>\}$

$R^3=\varnothing$

$R\restriction\{\varnothing\}=\{<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>\}$

$R\restriction\varnothing=\varnothing$

$R\restriction\{\{\varnothing\}\}=\{<\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$\mathrm{R}[\varnothing]=\varnothing$

$\mathrm{R}[\{\{\varnothing\}\}]=\{\varnothing\}$

13. 说明以下关系 R 具有那些性质并说明理由。（仔细校对）

（1）整数集 Z 上的大于关系。

解：反自反的、反对称的、可传递的；

（2）集合$A=\{1,2,\cdots,10\}$上的关系$\boldsymbol{R}=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A\wedge x+y=10\}$

解：对称的、不可传递的；

（3）实数集上的关系$\boldsymbol{R}=\{\langle x,\sqrt{x}\rangle|x\geq 0\}$

解：不可传递，反对称；

（4）任意集合 A 上的恒等关系 I_A

解：自反、对称、可传递、反对称性；

14. 设 A 是所有人的集合，定义 A 上的二元关系 $R_1=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x比y高\}$，$R_2=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x和y有共同的祖父母\}$，说明 R_1 和 R_2 具有哪些性质。

R_1： 反自反，可传递，反对称

R_2： 自反，对称，可传递

15. 设$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是集合 A 中的二元关系。判断下列命题的真假。如果为真，给出证明；否则，给出反例。

（1）如果$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是自反的，则$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$也是自反的。
（2）如果$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是反自反的，则$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$也是反自反的。
（3）如果$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是对称的，则$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$也是对称的。
（4）如果$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是反对称的，则$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$也是反对称的。
（5）如果$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是可传递的，则$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$也是可传递的。
解：（1）证明：
任取$x \in A$，由于$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是自反的，因此$\langle x, x\rangle \in \boldsymbol{R_1}$，$\langle x, x\rangle \in \boldsymbol{R_2}$，可得$\langle x, x\rangle \in \boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$，由$x$取值的任意性可知，$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$是自反的。
（2）设$A = \{1,2,3\}$，$\boldsymbol{R_1} = \{\langle 1,3\rangle\}$，$\boldsymbol{R_2} = \{\langle 3,1\rangle\}$，$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \{\langle 1,1\rangle\}$，不是反自反的。
（3）设$A = \{1,2,3\}$，$\boldsymbol{R_1} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$，$\boldsymbol{R_2} = \{\langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$，$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \{\langle 1,3\rangle\}$，不是对称的。
（4）设$A = \{1,2,3\}$，$\boldsymbol{R_1} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$，$\boldsymbol{R_2} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle\}$，$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$，不是反对称的。
（5）设$A = \{1,2,3,4,5\}$，$\boldsymbol{R_1} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 5,4\rangle\}$，$\boldsymbol{R_2} = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 4,4\rangle\}$，$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 5,4\rangle\}$，不可传递。

16. 证明：若 R 是集合 A 上的自反和可传递关系，则 $R \circ R = R$ 。

只需证明 $R \circ R \subseteq R \wedge R \subseteq R \circ R$

$\forall < x, y >, < y, z > \in R$ ，由复合关系的定义，显然 $< x, z > \in R \circ R$ 。

而根据 R 的传递性，显然 $< x, z > \in R$ 。

由 x, z 的任意性，得知 $R \circ R \subseteq R$ 。

$\forall < x, y > \in R$ 由 R 的自反性，得知 $< x, x > \in R$ 。

从而根据 R 的传递性，得知 $< x, y > \in R \circ R$ 。

由 x, y 的任意性，得知 $R \subseteq R \circ R$ 。

综合得知，$R \circ R = R$.

17. 如果关系 R 和 S 都是自反的。证明：$\boldsymbol{R \cup S}$，$\boldsymbol{R \cap S}$也是自反的。

证明：设 R 是集合 A 上的二元关系，S 是集合 B 上的二元关系。
因为 R 和 S 都是自反的，

所以对于 $\forall x \in A$,都有$<x,x>\in R$，

对于 $\forall x \in B$,都有$<x,x>\in S$。

（1）设 $x \in A \bigcup B$，那么 $x \in A$ 或 $x \in B$。

若 $x \in A$，有 $<x,x>\in R$，那么必有 $<x,x>\in R \bigcup S$。

若 $x \in B$，有 $<x,x>\in S$，那么必有 $<x,x>\in R \bigcup S$。

因此，当 $x \in A \bigcup B$ 时，必有 $<x,x>\in R \bigcup S$，

所以 $R \bigcup S$ 也是自反的。

（2）设 $x \in A \bigcap B$，那么 $x \in A$且x ∈ B

因此$<x,x>\in R$ 且 $<x,x>\in S$，即 $<x,x>\in R \bigcap S$。
所以 $R \bigcap S$ 也是自反的。

18．证明：若关系 R 和 S 是自反的、对称的和可传递的，则 $R \cap S$ 也是自反的、对称的和可传递的。

证明：R,S 自反，则 $I \subseteq R$ 且 $I \subseteq S$，其中 I 是恒等关系，故 $I \not\subset R \bigcap S$，于是 $R \bigcap S$ 也是自反的。

R,S 对称，则 $R^{-1}=R$且$S^{-1}=S$，故 $(R \bigcap S)^{-1}=R \bigcap S$，于是 $R \bigcap S$ 也是对称。

R,S 传递，则 $R^2 \subseteq R$,且$S^2 \subseteq S$，故 $(R \bigcap S)^2 \subseteq R^2 \subseteq R$且$(R \bigcap S)^2 \subseteq S^2 \subseteq S$，于是 $(R \bigcap S)^2 \subseteq R \bigcap S$，$R \bigcap S$ 传递

19. 设集合 A 是有限集，且$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n}$，求：

（1）A 上有多少不同的对称关系。

解：$2^{n(n+1)/2}$

因为$|A|=n,|A\times A|=n^2$ 也就是说集合 A 有 n 平方个有序对，由对称定义可知，对于$a,b\in A$,只要$(a,b)\in$有$(b,a)\in R$ 。另外知道在 n 平方个有序对中有 n 个有序对$((X_i,X_i)$其中$i=1,2,3.....n)$，相应的就有n^2-n个有序对（X,Y)且 X≠Y，定义可知后面的n^2-n个有序对只能成对出现，所以有$(n^2-n)/2$对。前面的那 n 对可以出现任意多对。

图片如下。

$$\underbrace{(1,1)\ (2,2)\ldots\ldots(n,n)}_{n\text{个有序对}}\quad \underbrace{\begin{Bmatrix}(1,2)\ (1,3)\ldots\ldots(n-1,n)\\(2,1)\ (3,1)\ldots\ldots(n,n-1)\end{Bmatrix}}_{(n^2-n)/2\text{个有序对对}}$$

共有 n+（n^2-n)/2 个元素

即 （n^2+n)/2 个

所以得到对称关系数为：$2^{n(n+1)/2}$

（2）A 上有多少不同的反对称关系。

由定义：如果$a,b\in A$,仅当$a=b$时$(a,b)\in R$和$(b,a)\in R$ 如下图。

$$\underbrace{(1,1)\ \ (2,2)\ldots\ldots(n,n)}_{n\text{个有序对}}\quad \underbrace{\begin{Bmatrix}(1,2) & (1,3)\ldots\ldots(n-1,n)\\(2,1) & (3,1)\ldots\ldots(n,n-1)\end{Bmatrix}}_{(n^2-n)/2\text{个有序对对}}$$

这 n 个有序对可以出现任意多次　　　　（n^2-n)/2 个有序对对

2^n × $3^{n(n-1)/2}$（由 6 可知）

所以得结果 ： $2^n\times3^{n(n-1)/2}$ 即 $2^n3^{n(n-1)/2}$

（3）A 上有多少不同的既非自反又非反自反的关系。

解：$2^{n^2}-2\cdot2^{n(n-1)}$

如下结论：

N 元集合上的自反关系数为：$2^{n(n-1)}$

N 元集合上的对称关系数为：$2^{n(n+1)/2}$

N 元集合上的反对称关系数为：$2^n3^{n(n-1)/2}$

N 元集合上的非对称关系数为：$3^{n(n-1)/2}$

N 元集合上的反自反关系数为：$2^{n(n-1)}$

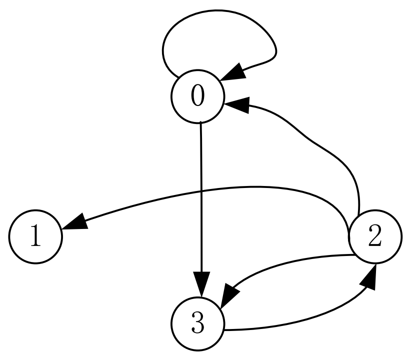
N 元集合上的自反和对称关系数为：$2^{n(n-1)/2}$

N 元集合上的不自反也不反自反关系数为：$2^{n^2}-2\cdot2^{n(n-1)}$

20．给定集合 $A=\{0,1,2,3\}$， R 是 A 上的关系，并可表示成 $R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，试画出 R 的关系图并写出对应的关系矩阵。

解： $M_R = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

关系图如下：



21　设 $A=\{0,1,2,3\}$，R_1 和 R_2 是 A 中的关系，

$R_1=\{\langle i,j\rangle | j=i+1 \vee j=i/2\}$
$R_2=\{\langle i,j\rangle | i=j+2\}$
应用矩阵计算方法，求出关系矩阵：M_{R_1} ，M_{R_1}，$M_{R_1\circ R_2}$，$M_{R_2\circ R_1}$，$M_{R_1\circ R_2\circ R_1}$，$M_{R_1^3}$。
解： $R_1=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$
$R_2=\{\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

由此可得：$R_1\circ R_2=\{<1,0>,<2,1>\}$

$R_2\circ R_1=\{<2,0>,<2,1>,<3,2>\}$

$R_1\circ R_2\circ R_1=\{<1,0>,<1,1>,<2,2>\}$

$R_1^3=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,2>,<2,1>,<2,3>\}$

所以：

$M_{R_1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2} \circ M_{R_1} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$M_{R_1} \circ M_{R_2} \circ M_{R_1} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$M_{R_1^3} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

22．给定集合$A=\{1,2,3\}$。图 4.22 中给出了 12 种A上的关系R的关系图。对于每个关系图，写出相应的关系矩阵，并证明被表达的关系是否是自反的或反自反的；是否是对称的或反对称的；是否是可传递的。

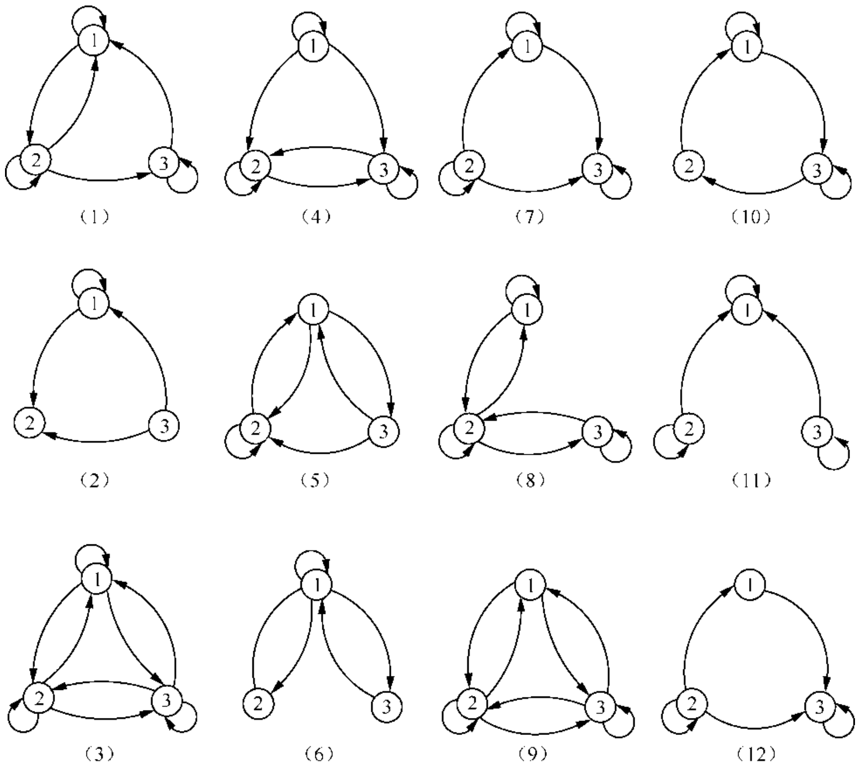


图 4.22　A上的 12 种关系图

（1）自反的、不对称的、不可传递的；

其对应的关系矩阵为：

$$M_R=\begin{matrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{matrix}$$

（2）不自反的、反对称的、可传递的；

其对应的关系矩阵为：

$$M_R=\begin{matrix}1&1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}$$

（3）自反的、对称的、可传递的；

其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

（4）自反的、不对称的、可传递的；
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

（5）不自反的、不对称的、不可传递的；
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

（6）不自反的、对称的、不可传递的；
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

（7）自反的、反对称的、可传递的；
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

（8）自反的、对称的、不可传递的；
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

（9）不自反的、对称的、不可传递的；（1,2；2,1；1,1）
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

（10）不自反的、反对称的、不可传递的；（1,3；3,2；1,2）
其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

（11）自反的、反对称的、可传递的；

其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

（12）不自反的、反对称的、可传递的。

其对应的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

23. 设 A 是一个集合，$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是 A 中的二元关系，并设$\boldsymbol{R_1} \supseteq \boldsymbol{R_2}$，试证明：

（1）$r(R_1) \supseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \supseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \supseteq t(R_2)$

（1）$r(R_1) \supseteq r(R_2)$

证明：a）利用 $r(R_2) = R_1 \cup I_A$

$$R_1 \supseteq R_2 \Longrightarrow (R_1 \cup I_A) \supseteq (R_2 \cup I_A) \Longrightarrow r(R_1) \supseteq r(R_2)$$

（2）$s(R_1) \supseteq s(R_2)$

证明：由于 $s(R_2) = R_2 \cup R_2^{-1}$

$$\forall \langle x, y \rangle \in s(R_2) \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_2 \vee \langle x, y \rangle \in R_2^{-1}$$

a） 若$\forall \langle x, y \rangle \in s(R_2) \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_2$，

由于$R_1 \supseteq R_2$，有$\langle x, y \rangle \in R_1$，所以$\forall \langle x, y \rangle \in s(R_2) \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \vee \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in s(R_1)$

b） 若$\forall \langle x, y \rangle \in s(R_2) \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_2^{-1}$

$$\forall \langle x, y \rangle \in s(R_2) \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \Longrightarrow \langle y, x \rangle \in R_2 \Longrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1}$$
$$\Longrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in R_1 \Longrightarrow \langle x, y \rangle \in s(R_1)$$

（3）$t(R_1) \supseteq t(R_2)$
c）$t(R_1) \supseteq R_1$，由于$R_1 \supseteq R_2$，故$t(R_1) \supseteq R_2$
$t(R_1)$具有传递性，根据定义$t(R_2)$ 是包含R_2的最小传递关系，所以$t(R_1) \supseteq t(R_2)$

24．在图 4.23 中给出三个关系图。试求出每一个关系的自反、对称和可传递闭包，并画出闭包的关系图。

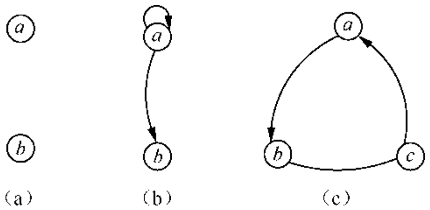


图 4.23　三个关系图

解：由关系图可知，此题图省略。

$R = \varnothing$

则：$r(R) = \{<a,a>,<b,b>\}$

$s(R) = \varnothing$

$t(R) = \varnothing$

b）解：由关系图可知，

$R = \{<a,a>,<a,b>\}$

则：$r(R) = \{<a,a>,<b,b>,<a,b>\}$

$s(R) = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>\}$

$t(R) = \{<a,a>,<a,b>\}$

c）解：由关系图可知，

$R = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

则：$r(R) = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

$s(R) = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,a>,<a,c>\}$

$t(R) = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,c>,<b,a>,<c,b>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

25．$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是集合 A 中的关系。试证明：

（1）$r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$
（2）$s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$
（3）$t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$

证明：

(1)　$r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2)

$$\begin{aligned} s(R_1 \cup R_2) &= R_1 \cup R_2 \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1 \cup R_2 \cup R_1^{-1} \cup R_2^{-1} \\ &= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1}) = s(R_1) \cup s(R_2) \end{aligned}$$

(3)　根据P90第23题(3)：$R_1 \supseteq R_2 \Longrightarrow t(R_1) \supseteq t(R_2)$

$(R_1 \cup R_2) \supseteq R_2 \Longrightarrow t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_2)$

同理 $(R_1 \cup R_2) \supseteq R_1 \Longrightarrow t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1)$

综上，$t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$

26．设集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$， R 是 A 上的二元关系，图 4.24 给出了 R 的关系图。试画出可传递闭包 $t(R)$ 的关系图，并求出 $tsr(R)$。

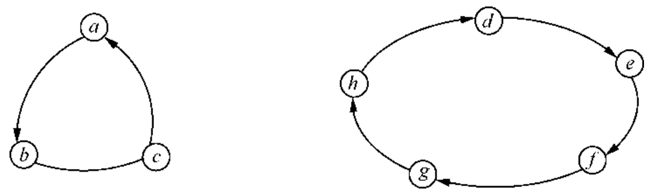


图 4.24　R 的关系图

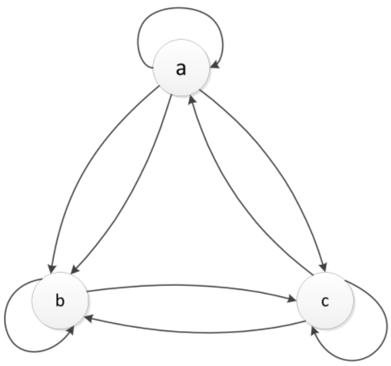
解：由关系图可知，

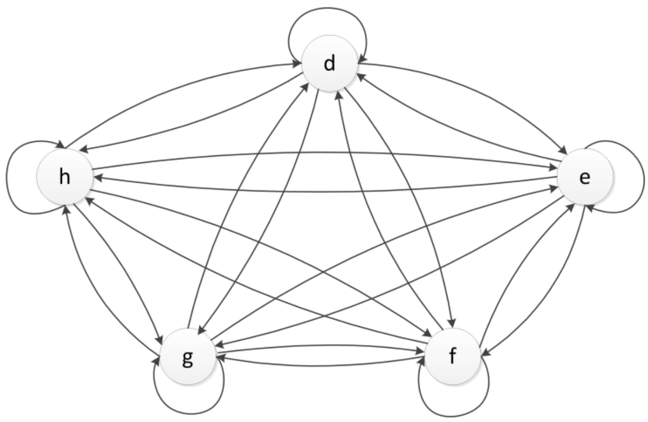
$$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<d,e>,<e,f>,<f,g>,<g,h>,<h,d>\}$$

则：

$$t(R)=\left\{\begin{array}{l} <a,b>,<b,c>,<c,a>,<d,e>,<e,f>,<f,g>,<g,h>,<h,d>,<a,a>,<b,b>, \\ <c,c>,<d,d>,<e,e>,<f,f>,<g,g>,<h,h>,<b,a>,<c,b>,<a,c>,<d,f>, \\ <d,g>,<d,h>,<e,g>,<e,h>,<e,d>,<f,h>,<f,d>,<f,e>,<g,d>,<g,e>, \\ <g,f>,<h,e>,<h,f>,<h,g> \end{array}\right\}$$

$$tsr(R)=\left\{\begin{matrix}<a,b>,<b,c>,<c,a>,<d,e>,<e,f>,<f,g>,<g,h>,<h,d>,<a,a>,<b,b>,\\<c,c>,<d,d>,<e,e>,<f,f>,<g,g>,<h,h>,<b,a>,<c,b>,<a,c>,<d,f>,\\<d,g>,<d,h>,<e,g>,<e,h>,<e,d>,<f,h>,<f,d>,<f,e>,<g,d>,<g,e>,\\<g,f>,<h,e>,<h,f>,<h,g>\end{matrix}\right\}$$





27. 设 R 是集合 A 中的任意关系。试证明：

（1）$(R^+)^+ = R^+$
（2）$R\circ R^* = R^+ = R^*\circ R$
（3）$(R^*)^* = R^*$

（1）证明：
a） 根据定义，显然$R^+ \subseteq (R^+)^+$
b） 欲证 $(R^+)^+ \subseteq R^+$ ，
根据定义，任意的传递关系R''，$R^+ \subseteq R''$，则$(R^+)^+ \subseteq R''$。
取$R'' = R^+$，有$(R^+)^+ \subseteq R^+$成立
综上，$(R^+)^+ = R^+$

（2）$R\circ R^* = R^+ = R^*\circ R$
证明：

$$\begin{aligned}R\circ R^* &= R\circ tr(R) = R\circ rt(R) = R\circ (t(R)\cup I_A)\\ &= \big(R\circ t(R)\big)\cup(R\circ I_A) = \left(R\circ\bigcup_{i=1}^{n}R^i\right)\cup R\\ &= \left(\bigcup_{i=2}^{n+1}R^i\right)\cup R = \bigcup_{i=1}^{n+1}R^i = \bigcup_{i=1}^{n}R^i = R^+\end{aligned}$$

同理可证$R^+ = R^*\circ R$

（3）$(R^*)^* = R^*$
证明： 教材 70 页定理 4.11：
R是自反的当且仅当$R = r(R)$

R是传递的当且仅当$R = t(R)$
R^*是自反的并且是传递的 $\Longrightarrow R^* = r(R^*) = t(R^*)$
所以$(R^*)^* = tr(R^*) = t(R^*) = R^*$

28．对于给定的集合A及其上的关系R，判断R是否为等价关系？

（1）A为实数集，$\forall x, y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x - y = 2$。

不是，不自反

（2）$A = \{1,2,3\}$，$\forall x, y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x + y \neq 3$。

不是，不可传递

（3）$A = \mathbf{Z}^+$，即正整数集，$\forall x, y \in A$，$xRy \Leftrightarrow xy$是奇数。

不是，不自反

29 设$\{\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \cdots, \boldsymbol{A_n}\}$是集合 A 的划分。试证明$\{\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A_2} \cap \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A_n} \cap \boldsymbol{B}\}$ 是集合$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$的划分。

证明：根据划分的定义
a） 由$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是集合$A$的划分，有对于$i = 1,2,\cdots,n$，$A_i \subseteq A$，所以$A_i \cap B \subseteq A \cap B$
b） 对于$i, j = 1,2,\cdots,n$且$i \neq j$，$A_i \cap A_j = \emptyset$，因此$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = A_i \cap A_j \cap B = \emptyset$
c） $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B) = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap B = A \cap B$

（1），（2），（3）构成满足划分的条件，$\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots, A_n \cap B\}$ 是集合$A \cap B$的划分。

30．把n个元素的集合划分为两个类，共有多少种不同的划分方法?

解：$\dfrac{C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n}{2} = \dfrac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$

31．在图 4.25 中给出了集合{1,2,3}中的两个关系图，判断这两个关系是否是等价关系。

解：左侧的关系不是等价关系，因为不满足可传递性；右侧的关系是等价关系。

32．在等价关系图中，如何识别等价类？

解：如果两个元素之间有两条连线，那么说明这两个元素是等价类。

33．设 R 是集合 A 上的关系。对于所有的 $x_i, x_j, x_k \in A$，如果 $x_i R x_j, x_j R x_k$，就有 $x_k R x_i$，则称关系 R 是循环关系。试证明：当且仅当 R 是一个等价关系，R 才是自反的和循环的。

证明：

（1）当 R 是个等价关系时，由等价关系的定义知，等价关系满足自反性，即 R 是自反的。任取 $x,y,z \in A$，若 $<x,y>\in R, <y,z>\in R$，由 R 的可传递性，知 $<x,z>\in R$，再由 R 的对称性，知 $<z,x>\in R$。根据 x，y，z 取值的任意性，知 R 是循环的。

（2）欲证明 R 是等价关系，需证明 R 满足自反性、对称性和传递性

a）证明对称性。对于任意的 $x,y \in A$，若 $\langle x,y\rangle \in R$，由 R 的自反性有 $\langle x,x\rangle \in R$，又由于 R 是循环关系，故当 $\langle x,y\rangle \in R$ 并且 $\langle x,x\rangle \in R$ 时，有 $\langle y,x\rangle \in R$。因此 R 是对称的。

b）证明传递性。对于任意的 $x,y,z \in A$，若 $\langle x,y\rangle \in R$ 并且 $\langle y,z\rangle \in R$，由 R 的循环性可知 $\langle z,x\rangle \in R$。又由于 R 是对称的，所以有 $\langle x,z\rangle \in R$。即若 $\langle x,y\rangle \in R$ 并且 $\langle y,z\rangle \in R$，有 $\langle x,z\rangle \in R$，所以 R 满足传递性。

因为 R 是自反的、对称的和可传递的，因此 R 是一个等价关系。

34．设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的等价关系。试证明：当且仅当 C_1 中的每一个等价类都包含于 C_2 的某一个等价类，才有 $R_1 \subseteq R_2$。

证明：设等价关系 R_1 造成的集合 X 的划分为 $C_1=\{C_{11},C_{12},\cdots,C_{1m}\}$，等价关系 R_2 造成的集合 X 的划分为 $C_2=\{C_{21},C_{22},\cdots,C_{2n}\}$

（1）　当 C_1 中的每一个等价类都包含于 C_2 的某一个等价类之中时，任取 C_1 中的一个等价类 C_{1i}，则必包含在 C_2 的一个等价类里，设包含在 C_{2j} 中，$C_{1i} \subseteq C_{2j}$。任取 C_{1i} 中

两元素 x，y，由等价类的性质知，xR_1y。由$C_{1i} \subseteq C_{2j}$，可知若$<x,y>\in R_1$，则$<x,y>\in R_2$，即xR_2y。由 i, j, x, y 取值的任意性知，$R_1 \subseteq R_2$。

（2） 如果$R_1 \subseteq R_2$，那么对任意的$<x,y>\in R_1 \to <x,y>\in R_2$永真，$<x,y>\in R_1$等价于 x, y 落入$C_1$的某个等价类$C_{1i}$中，$<x,y>\in R_2$等价于 x, y 落入$C_2$的某个等价类$C_{2j}$中，即若$x,y\in C_{1i}$，则$x,y\in C_{2j}$，由 x, y 的任意性可知，$C_{1i} \subseteq C_{2j}$，由 i 的任意性可知，$C_1$中的每一个等价类都包含在$C_2$的某一个等价类之中。

综上所述，当且仅当C_1中的每一个等价类都包含于C_2的某一个等价类之中，才有$R_1 \subseteq R_2$。

35 设 A={1, 2, 3, 4}，在$A\times A$上定义二元关系 R，$\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle \in A\times A$，$\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle \Leftrightarrow u+y=v+x$

(1) 证明 R是$A\times A$上的等价关系。

(2) 确定由 R 所导出的对$A\times A$的划分。

（1）证明：

$\forall <a,b>\in A\times A, a+b=a+b.$

$\because <a,b>R<a,b>$

$\therefore R$是自反的

任意的$<a,b>,<c,d>\in A\times A$

设$<a,b>R<c,d>$,则$a+d=c+b$

$\therefore c+b=a+d \Rightarrow <c,d>R<a,b>$

$\therefore R$是对称的

任意的$<a,b>,<c,d>,<x,y>\in A\times A$

若$<a,b>R<c,d>,<c,d>R<x,y>$

则$a+d=c+b, c+y=x+d$

$\therefore a-b=c-d=x-y$

$\Rightarrow a+y=b+x \therefore <a,b>R<x,y>$

$\therefore R$是可传递的

$\therefore R$是$A\times A$上的等价关系

（2）

$A/R=\{\{<1,2>,<2,3>,<3,4>\},\{<2,1>,<3,2>,<4,3>\},\{<1,3>,<2,4>\},$
$\{<3,1>,<4,2>\},\{<1,4>\},\{<4,1>\},\{<1,1>,<2,2>,<3,3><4,4>\}\}$

36．设 R 为 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元关系，$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow b=d$（1）证明 R 是等价关系。（2）确定由 R 所导出的划分。

（1）证明：

任意的 $<a,b>\in N\times N, b=b$

$\because <a,b>R<a,b>$

$\therefore R$是自反的

任意的 $<a,b>,<c,d>\in N\times N$

设 $<a,b>R<c,d>$,则$b=d$

$b=d\Rightarrow <c,d>R<a,b>$

$\therefore R$是对称的

任意的 $<a,b>,<c,d>,<x,y>\in N\times N$

设 $<a,b>R<c,d>,<c,d>R<x,y>$

则$b=d=y, \therefore <a,b>R<x,y>$

$\therefore R$是可传递的

综上所述，R是$N\times N$上的等价关系。

（2）$N\times N/R=N$

37. 设R_1和R_2是集合 A 上的等价关系，并分别有秩r_1和r_2。试证明：$R_1\cap R_2$也是集合 A 上的等价关系，它的秩至多为r_1r_2。还要证明$R_1\cup R_2$不一定是集合 A 的一个等价关系。

证明：

(1)欲证明$R_1\cap R_2$是等价关系，需证明$R_1\cap R_2$满足自反性、对称性和传递性

a）证明自反性。对于任意的$x\in A$，由于R_1和R_2都是等价关系，所以有$\langle x,x\rangle\in R_1\wedge\langle x,x\rangle\in R_2\Longrightarrow\langle x,x\rangle\in R_1\cap R_2$，因此，$R_1\cap R_2$是自反的。

b）证明对称性。对于任意的$x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2$，则$\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2\Longrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle x,y\rangle\in R_2$，由于$R_1$和$R_2$都是等价关系，$\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2\Longrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle x,y\rangle\in R_2\Longrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\wedge\langle y,x\rangle\in R_2\Longrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\cap R_2$，因此$R_1\cap R_2$满足对称性。

c）证明传递性。对于任意的$x,y,z\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2$并且$\langle y,z\rangle\in R_1\cap R_2$，则分别有$\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_1$和$\langle x,y\rangle\in R_2\wedge\langle y,z\rangle\in R_2$，由于$R_1$和$R_2$都是等价关系，因此分别有$\langle x,z\rangle\in R_1$和$\langle x,z\rangle\in R_2$，$\langle x,z\rangle\in R_1\wedge\langle x,z\rangle\in R_2\Longrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\cap R_2$，因此$R_1\cap R_2$满足传递

性。综上，$R_1 \cap R_2$是等价关系。
由于$|R_1| = r_1$，$|R_2| = r_2$，则$|R_1 \cap R_2| \le \min(r_1, r_2)$
(2)

① 因为 R_1, R_2 是自反的，所以对于任意的 $x \in X$，都有对于任意的 $<x,x> \in R_1, <x,x> \in R_2$，故$<x,x> \in R_1 \cup R_2$，所以$R_1 \cup R_2$是自反的；
② 对于任意的$x, y \in X$，若$<x,y> \in R_1 \cup R_2$，则可能有三种情况：

若$<x,y> \in R_1$且$<x,y> \in R_2$，那么因为R_1, R_2是对称的，所以有$<y,x> \in R_1$，$<y,x> \in R_2$，故$<y,x> \in R_1 \cup R_2$，即$R_1 \cup R_2$是对称的；
若 $<x,y> \in R_1$ 但 $<x,y> \notin R_2$，那么有 $<y,x> \in R_1$ 且 $<y,x> \notin R_2$，此时$<y,x> \in R_1 \cup R_2$，即$R_1 \cup R_2$是对称的；

所以$R_1 \cup R_2$是对称的；

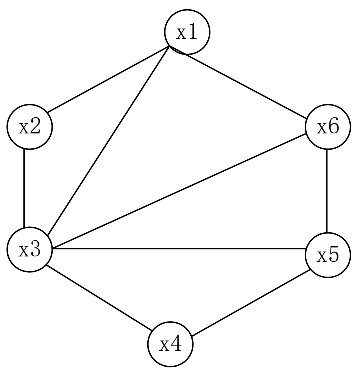
若 $<x,y> \in R_2$ 但 $<x,y> \notin R_1$，那么有 $<y,x> \in R_2$ 且 $<y,x> \notin R_1$，此时$<y,x> \in R_1 \cup R_2$，即$R_1 \cup R_2$是对称的；
③ 对于任意的$x, y, z \in X$，若$<x,y> \in R_1 \cup R_2$，$<y,z> \in R_1 \cup R_2$，当 $<x,y> \in R_1$，$<y,z> \in R_2$时，不能确定$<x,z> \in R_1 \cup R_2$，故$R_1 \cup R_2$不是可传递的。

由上可知，$R_1 \cup R_2$不是等价关系。

38．设集合$X = \{x_1, x_2 \ldots, x_6\}$，$R$是$X$上的相容关系，$R$的简化矩阵如下，试画出相容关系图，并求出所有的最大相容类。

x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	0	1		
x_5	0	0	1	1	
x_6	1	0	1	0	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

解：



（1）$\{x_5,x_6\}$

（2）$\{x_5,x_6\}$，$\{x_4,x_5\}$

（3）$\{x_5,x_6\}$，$\{x_4,x_5\}$，$\{x_3,x_4\}$，$\{x_3,x_5\}$，$\{x_3,x_6\}$，合并后，有

$\{x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_3,x_5,x_6\}$

（4）$\{x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_3,x_5,x_6\}$，$\{x_2,x_3\}$

（5）$\{x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_3,x_5,x_6\}$，$\{x_2,x_3\}$，$\{x_1,x_2\}$，$\{x_1,x_3\}$，$\{x_1,x_6\}$，合并，得

$\{x_1,x_2,x_3\}$，$\{x_1,x_3,x_6\}$，$\{x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_3,x_5,x_6\}$

综上，最大相容类有四个，分别是$\{x_1,x_2,x_3\}$，$\{x_1,x_3,x_6\}$，$\{x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_3,x_5,x_6\}$。

39. 给定集合$S=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$的覆盖，如何才能确定此覆盖的相容关系。

解：集合 S 的任何一个覆盖均能确定一个相容关系，反之亦然。

设$S=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$是给定集合 S 的一个覆盖，那么对于$1\le i\le n$，A_i是相容关系的一个最大相容类，A_i中的任意两个元素是相容的。所以由覆盖$S=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$确定的相容关系可以表示为：$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\cdots\cup A_n\times A_n$

如$X=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$是$S=\{1,2,3\}$的一个覆盖，则此覆盖确定的 S 上的相容关系是：

$\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{2,3\}\times\{2,3\}=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$

40．设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$，R是X上的关系，图 4.26 给出了R的关系图。试画出R^5和R^6的关系图。

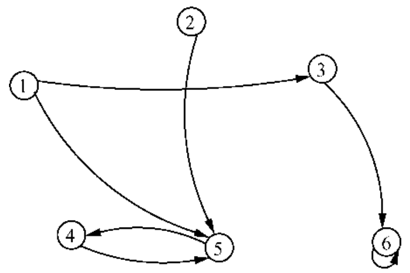


图 4.26　R的关系图

解：$R^5=\{<1,5>,<1,6>,<2,5>,<3,6>,<4,5>,<5,4>,<6,6>\}$

$R^6=\{<1,4>,<1,6>,<2,4>,<3,6>,<4,4>,<5,5>,<6,6>\}$

图略。

41. 假定I_x是集合 X 中的恒等关系，R 是 X 中的任何关系。试证明：$\boldsymbol{I_x \cup R \cup R^{-1}}$是相容关系。

证明：设$S=I_x\cup R\cup R^{-1}$

（1）由于$I_x\subseteq I_x\cup R\cup R^{-1}$，因此$\forall x\in X$，$<x,x>\in S$。知$I_x\cup R\cup R^{-1}$是自反的；

（2）任取$x,y\in X$，若$\langle x,y\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}$，则$\langle x,y\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}\Longrightarrow\langle x,y\rangle\in I_x\vee\langle x,y\rangle\in R\vee\langle x,y\rangle\in R^{-1}$。

若$\langle x,y\rangle\in I_x$，则 $x=y$，此时显然$\langle y,x\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}$；

若$\langle x,y\rangle\in R$，则$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$，此时$\langle y,x\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}$；

若$\langle x,y\rangle\in R^{-1}$，则$\langle y,x\rangle\in R$，因此$\langle y,x\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}$。

可知无论任何情况，若$\langle x,y\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}$，则$\langle y,x\rangle\in I_x\cup R\cup R^{-1}$。故$I_x\cup R\cup R^{-1}$是对称的。

综上所述，$I_x\cup R\cup R^{-1}$既是自反的又是对称的，因此，$I_x\cup R\cup R^{-1}$是相容关系。

42. 给定等价关系R和S，它们的关系矩阵是$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$M_S=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$。试证明$R\circ S$不是等价关系。

证明：

$$M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

可知$R\circ S$不是对称的，因此，$R\circ S$不是等价关系。

43. 设集合 X={1, 2, 3}。求出 X 中的等价关系R_1和R_2，使得$R_1\circ R_2$也是个等价关系。

解：设

$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

$R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

则 R_1 和 R_2 是集合 X 中的等价关系。

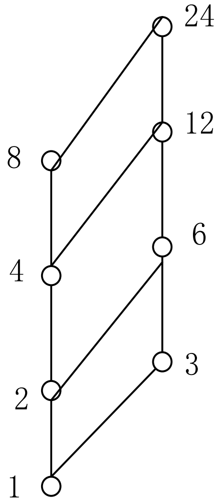
此时$R_1 \circ R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$，也是个等价关系。

44. 对于下列集合中的整除关系画出哈斯图。

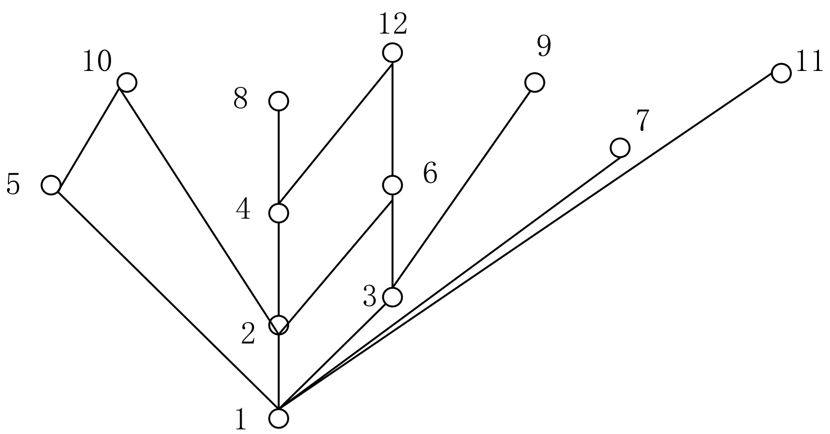
（1）$\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

（2）$\{1,2,3,\ldots,12\}$

解：（1）



（2）



45. 如果 R 是集合 X 中的偏序关系，且 $\boldsymbol{A \subseteq X}$。试证明：$\boldsymbol{R \cap A \times A}$ 是 A 中的偏序关系。

证明：欲证明 $R \cap A \times A$ 是集合 X 中的偏序关系，需证明 R 是自反的，反对称的，可传递的。

（1）因为 R 是自反的，所以 $I_x \subseteq R$；

又 $A \subseteq X$，所以 $I_A \subseteq I_x \subseteq R$，由于 $I_A \subseteq A \times A$，所以 $I_A \subseteq R \cap A \times A$；

所以 $R \cap A \times A$ 是自反的。

（2）对于任意 $x, y \in A$，当 $x \neq y$ 时，若 $\langle x, y\rangle \in R \cap A \times A$，, 那么 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle x, y\rangle \in A \times A$；又 R 是反对称的，所以 $\langle y, x\rangle \notin R$，即 $\langle y, x\rangle \notin R \cap A \times A$，所以 $R \cap A \times A$ 是反对称的。

（3）对于任意 $x, y, z \in A$，若 $\langle x, y\rangle \wedge \langle y, z\rangle \in R \cap A \times A$，那么 $<x, y>, <y, z> \in R$ 且 $<x, y>, <y, z> \in A \times A$。又 R 是可传递的，所以 $<x, z> \in R$，$<x, z> \in A \times A$，即：$<x, z> \in R \bigcap (A \times A)$，所以 $R \cap A \times A$ 是可传递的。

由此可知，$R \cap A \times A$ 满足自反性、反对称性、可传递性，即 $R \cap A \times A$ 是 A 中的偏序关系。

46. 试给出集合 X 的实例，它能使 $(\rho(X), \subseteq)$ 是全序集合。

解：$X = \{a\}$，则 $\rho(X) = \{\varnothing, \{a\}\}$

此时，对于任意的 $x, y \in \rho(X)$，都有 $x \subseteq y \vee y \subseteq x$

所以 $(\rho(X), \subseteq)$ 是全序集合。

47. 给出一个关系，它是集合中的偏序关系又是等价关系。

解：集合 X 上的恒等关系，既是偏序关系又是等价关系。

48. 证明下列命题：

（1）如果R是拟序关系，则$\tilde{R}$也是拟序关系。

（2）如果R是偏序关系，则$\tilde{R}$也是偏序关系。

（3）如果R是全序关系，则$\tilde{R}$也是全序关系。

（4）存在一个集合S和S中的关系 R，使得$<S,R>$是良序的，但$<S,\tilde{R}>$不是良序的。

证明：设R是A上的二元关系，

（a）若R是自反的，则$I_A \subseteq R$，由于I_A的转置仍是I_A，因此，$I_A \subseteq \tilde{R}$，故$\tilde{R}$是自反的；

（b）若R是反自反的，则$I_A \bigcap R = \varnothing$。把$I_A$和$R$都取转置，由于$I_A$的转置仍是$I_A$，因此，$I_A \bigcap \tilde{R} = \varnothing$，故$\tilde{R}$是反自反的；

（c）若R是对称的，任取$<y,x>\in \tilde{R}$，则$<x,y>\in R$，由R的对称性可知，$<y,x>\in R$，于是$<x,y>\in \tilde{R}$。由 x，y 取值的任意性知，$\tilde{R}$是对称的；

（d）若R是反对称的，任取$<y,x>\in \tilde{R}$，则$<x,y>\in R$，由R的反对称性可知，$<y,x>\notin R$，于是$<x,y>\in \tilde{R}$。由 x，y 取值的任意性知，$\tilde{R}$是反对称的；

（e）若R是可传递得，任取$<x,y>\in \tilde{R},<y,z>\in \tilde{R}$，则$<y,x>\in R$，$<z,y>\in R$，由$R$的可传递性，可知$<z,x>\in R$，于是$<x,z>\in \tilde{R}$。故$\tilde{R}$是可传递的。

从上述 5 条可以证明（1）——（3）

（1）若R是拟序关系，即R是反自反的和可传递得，由（b）（e）可知，$\tilde{R}$也是反自反的和可传递得，因此，$\tilde{R}$是拟序关系。

（2）若R是偏序关系，即R是自反的、反对称的，可传递的，由（a）（d）（e）可知，

$\widetilde{R}$ 也是自反的、反对称的，可传递的，因此，$\widetilde{R}$ 是偏序关系。

(3)若 R 是全序关系，则 R 是偏序关系，由(2)知 $\widetilde{R}$ 也是偏序关系；另知，$\forall x,y \in A$，xRy 或 yRx 成立，当 xRy 时，$y\widetilde{R}x$，当 yRx 时，$x\widetilde{R}y$。因此不论任何情况，$\forall x,y \in A$，$x\widetilde{R}y$ 或 $y\widetilde{R}x$ 总成立。综上，$\widetilde{R}$ 也是全序关系。

(4)举例子，设 $<S,R>=<N,\leq>$，N 是自然数集合，则 $<S,R>=<N,\leq>$ 是良序，但是 $<S,\widetilde{R}>=<N,\geq>$ 不是良序。因为取全集 N，在 $<S,\widetilde{R}>=<N,\geq>$ 中没有最小成员。

49. 设 R 是集合 A 上的二元关系，证明，当且仅当 $\boldsymbol{R \cap R^{-1} = \emptyset}$ 和 $\boldsymbol{R = R^{+}}$，R 才是拟序的。当且仅当 $\boldsymbol{R \cap R^{-1} = I_x}$ 和 $\boldsymbol{R = R^{*}}$，R 才是偏序的。

证明：设 R 是集合 A 上的关系

（1）充分性：$R = R^{+}$，故 R 是可传递的；

$R \cap R^{-1} = \emptyset$，所以对于任意的 $x \in A$，都有 $<x,x> \notin R$，即 R 是反自反的。

所以，当 $R \cap R^{-1} = \emptyset$ 和 $R = R^{+}$ 时，R 是拟序的。

必要性：因为 R 是拟序的，所以 R 是反自反的、可传递的、反对称的。

R 是可传递的，故 $R = R^{+}$；

$R = R^{+}$ 是反对称的，所以对于任意 $x,y \in A, x \neq y$，若 $<x,y> \in R$，则 $<x,y> \notin R$；又 R 是反自反的，所以 $R \cap R^{-1} = \emptyset$。

所以，当 R 是拟序时，$R \cap R^{-1} = \emptyset$ 且 $R = R^{+}$。

（2）充分性：$R \cap R^{-1} = I_x$，故 $I_x \subseteq R$，即 R 是自反的；

又 $R \cap R^{-1} = I_x$，所以对于任意 $x,y \in A, x \neq y$，若 $\langle x,y \rangle \in R$，则 $\langle y,x \rangle \in R^{-1}$，s 所以 $<y,x> \notin R$，即 R 是反对称的；

又 $R = R^{*}$，所以 R 是可传递的；

所以，当 $R \cap R^{-1} = I_x$ 和 $R = R^{*}$ 时，R是偏序关系。

必要性：因为 R 是偏序关系，所以 R 是自反的，反对称的，可传递的。

R 是自反的，故 $I_X \subseteq R$ 且 $I_X \subseteq \widetilde{R}$，即 $I_x \subseteq R \cap R^{-1}$；

下面证明 $R \cap R^{-1} \subseteq I_x$

首先证明对于任意的 $x,y \in A$，若 $\langle x,y \rangle \in R \cap R^{-1}$，可以分为两种情况：第一种情况 $x = y$，第二种情况 $x \neq y$。

当 $x = y$ 时，任意的 $x \in A$，有 $\langle x,x \rangle \in R \cap R^{-1}$，那么 $\langle x,x \rangle \in I_x$，即 $R \cap R^{-1} \subseteq I_x$

当$x \neq y$时，假设存在$x, y \in A$，$x \neq y$并且$\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$，那么$\langle x, y\rangle \in R$并且$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$。由于 R 是反对称的，所以$\langle y, x\rangle \notin R$，则$\langle x, y\rangle \notin R^{-1}$，**即$\langle x, y\rangle \notin R \cap R^{-1}$，产生矛盾。因此，不存在这种情况。**对于任意的$x, y \in A$，若$\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$，那么一定有$x = y$。

综上，有$R \cap R^{-1} = I_x$。

又 R是自反的，可传递的，所以它的自反可传递闭包是其本身，即$R = R^*$；

所以，当 R是偏序关系时，$R \cap R^{-1} = I_x$且$R = R^*$。

50. 图 4-28 给出了偏序集合$<P,R>$的哈斯图，这里$P=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$。

(1) 下列关系中哪一个是真的：

$x_1Rx_2, x_4Rx_1, x_3Rx_5, x_2Rx_5, x_1Rx_1, x_2Rx_3, x_4Rx_5$

(2) 求出 P 中的最大成员和最小成员，如果他们存在的话。

(3) 求出 P 中的极大成员和极小成员。

(4) 求出子集$\{x_2,x_3,x_4\},\{x_3,x_4,x_5\}$和$\{x_1,x_2,x_3\}$的上届及下届。并指出这些子集的 LUB 和 GLB，如果它们存在的话。

解：(1) x_4Rx_1，x_1Rx_1是真的，

(2) 最大成员：x_1；最小成员：无。

(3) 极大成员：x_1；极小成员：x_4，x_5。

(4) 子集$\{x_2,x_3,x_4\}$ 上届：x_1；下届：x_4；LUB：x_1；GLB：x_4。

子集$\{x_3,x_4,x_5\}$ 上届：x_1，x_3；下届：无；LUB：x_3；GLB：无。

子集$\{x_1,x_2,x_3\}$ 上届：x_1，；下届：x_4；LUB：x_1；GLB：x_4。

第五章 函数

1. 下列关系中哪些能够构成函数？对于不是函数的关系，说明不能构成函数的原因。

(1) $R_1 = \{\langle x,y\rangle | (x,y \in N) \wedge (x+y<10)\}$

(2) $R_2 = \{\langle x,y\rangle | (x,y \in R) \wedge (y=x^2)\}$

(3) $R_2 = \{\langle x,y\rangle | (x,y \in R) \wedge (y^2=x)\}$

解：(1) 不能构成函数。违反唯一性。对于某些$x \in N$，不止存在一个$y \in N$使得$x+y<10$成立。

(2) 能构成函数。

(3) 不能构成函数。违反唯一性。对于某些$x \in R$，存在两个$y \in R$使得$y^2 = x$成立。

2. 下列集合中，哪些能够用来定义函数？试求出所定义的函数的域和值域。

(1) $S_1 = \{<1,<2,3>>,<2,<3,4>>,<3,<1,4>>,<4,<1,4>>\}$

(2) $S_2 = \{<1,<2,3>>,<2,<3,4>>,<3,<3,2>>\}$

(3) $S_3 = \{<1,<2,3>>,<2,<3,4>>,<1,<2,4>>\}$

(4) $S1 = \{<1,<2,3>>,<2,<2,3>>,<3,<2,3>>\}$

解：(1) 能够用来定义函数。

域：$\{1,2,3,4\}$

值域：$\{<2,3>,<3,4>,<1,4>\}$

(2) 能够用来定义函数。

域：$\{1,2,3\}$

值域：$\{<2,3>,<3,4>,<3,2>\}$

(3) 不能够用来定义函数。

(4) 能够用来定义函数。

域：$\{1,2,3\}$

值域：$\{<2,3>\}$

3．设 Z 是整数集合，Z^+是正整数集合，并且把函数 $f: I \to I_+$，定义为 $f(i) = |2i| + 1$。试求出函数 f 的值域R_f。

解：R_f 为正奇数的集合。

4．设 E 是全集，$\rho(E)$ 是 E 的幂集，$\rho(E)\times\rho(E)$ 是由 E 的子集所构成的所有序偶的集合，对任意的 $S_1,S_2\in\rho(E)$，把 $f:\rho(E)\times\rho(E)\to\rho(E)$ 定义为 $f(S_1,S_2)=S1\cap S2$。试证明： f 的陪域与值域相等。

证明：f 的陪域为 $\rho(E)$，设值域为 R_f，假定 f 的陪域与值域不相等，即 $R_f\subset\rho(E)$。

那么一定存在 $\rho(E)$ 的一个元素 A，使得 $A\notin R_f$。因为 $f(S_1,S_2)=S_1\cap S_2$，因此，不存在任何一个 S_1,S_2，使得 $S_1\cap S_2=A$。设 $S_1=E$，则对于任何 $S_2\in\rho(E)$，$S_1\cap S_2=S_2$，

由 $S_1\cap S_2\neq A$ 知 $S_2\neq A$，由 S_2 取值的任意性可知，$A\notin\rho(E)$。这与 A 的取值在 $\rho(E)$ 中相矛盾，因此 f 的陪域与值域不相等不成立。即 f 的陪域与值域相等。

5. 设 $A=\{-1,0,1\}$，并定义函数 $f:A^2\to B$ 如下：

$$f(<x,y>)=\begin{cases}0,\text{若x}\cdot y>0\\ x-y,\mathrm{x}\cdot y\le 0\end{cases}$$

(1) 写出 f 的全部序偶。

(2) 求出 R_f。

(3) 写出 $f/\{0,1\}^2$ 中的全部序偶 。

(4) 有多少个和 f 具有相同的定义域和值域的函数 $g:A^2\to B$。

解：

（1） $$\begin{aligned}f=\{&<<-1,-1>,0>,<<-1,0>,-1>,<<-1,1>,-2>,<<0,-1>,1>,\\&<<0,0>,0>,<<0,1>,-1>,<<1,-1>,2>,<<1,0>,1>,<<1,1>,0>\}\end{aligned}$$

（2） $R_f=\{-2,-1,0,1,2\}$

（3） $f/\{0,1\}^2=\{<0,0,0>,<0,1,-1>,<1,0,1>,<1,1,0>\}$

（4）f 定义域元素的个数是 9，值域元素的个数是 5。求 $g:A^2\to B$ 的个数，等同于求从 9 个元素的集合到 5 个元素集合满射函数的个数。

$5^9\text{-}C_5^1 4^9\text{+}C_5^2 3^9\text{-}C_5^3 2^9\text{+}C_5^4 1^9\text{=}834120$种

6．设 R 是实数集合，并且对于 $x\in R$，函数 $f(x)=x+3$，$g(x)=2x+1$ 和 $h(x)=x/2$，试求出合成函数 $g\circ f, f\circ g, f\circ f, g\circ g, f\circ h, h\circ g, h\circ f$和$f\circ h\circ g$。

解： $g\circ f=g(x+3)=2(x+3)+1=2x+7$

$$
\begin{aligned}
&f \circ g = f(2x+1) = 2x+1+3 = 2x+4 \\
&f \circ f = f(x+3) = x+3+3 = x+6 \\
&g \circ g = g(2x+1) = 2(2x+1)+1 = 4x+3 \\
&f \circ h = f(x/2) = x/2+3 \\
&h \circ g = h(2x+1) = (2x+1)/2 = x+1/2 \\
&h \circ f = h(x+3) = (x+3)/2 \\
&f \circ h \circ g = f(h \circ g) = f(x+1/2) = x+0.5+3 = x+3.5
\end{aligned}
$$

7. 设集合 $X = \{0,1,2\}$。试求出 X^X 中如下的所有函数 $f: X \to X$：

(1) $f^2(x) = f(x)$

(2) $f^2(x) = x$

(3) $f^3(x) = x$

解：

(1) 10 种情况

$$f = \{<0,0>,<1,1>,<2,2>\} \quad \text{一对一}$$

$$\left.\begin{array}{l}
f = \{<0,0>,<1,0>,<2,2>\} \\
f = \{<0,1>,<1,1>,<2,2>\} \\
f = \{<0,0>,<1,1>,<2,0>\} \\
f = \{<0,2>,<1,1>,<2,2>\} \\
f = \{<0,0>,<1,1>,<2,1>\} \\
f = \{<0,0>,<1,2>,<2,2>\}
\end{array}\right\}\text{二对一}$$

$$\left.\begin{array}{l}
f = \{<0,1>,<1,1>,<2,1>\} \\
f = \{<0,2>,<1,2>,<2,2>\} \\
f = \{<0,0>,<1,0>,<2,0>\}
\end{array}\right\}\text{三对一}$$

(2) 4 种情况

$$f = \{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$$

$$f = \{<0,1>,<1,0>,<2,2>\}$$

$$f = \{<0,2>,<1,1>,<2,0>\}$$

$$f = \{<0,0>,<1,2>,<2,1>\}$$

(3) 3 种情况

$$f = \{<0,1>,<1,2>,<2,0>\}$$

$$f = \{<0,2>,<1,0>,<2,1>\}$$

$$f = \{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$$

8. 设 N 是自然数集合，R 是实数集合。下列函数中哪些是满射的，哪些是单射的，哪些是双射的？

(1) $f: N \to N, f(i) = i^2 + 2$

(2) $f: N \to N, f(i) = i(\bmod 3)$

(3) $f: N \to N, f(i) = 1\begin{cases} 1, i\text{是奇数} \\ 0, i\text{是偶数} \end{cases}$

(4) $f: N \to \{0,1\}, f(i) = 1\begin{cases} 0, i\text{是奇数} \\ 1, i\text{是偶数} \end{cases}$

(5) $f: N \to R, f(i) = \log_{10} i$

(6) $f: R \to R, f(i) = i^2 + 2i - 15$

(7) $f: N^2 \to N, f(i) = i(< n_1, n_2 >) = n^{1^{n_2}}$

(8) $f: R \to R, f(i) = 2^i$

(9) $f: N \to N \times N, f(n) = < n, n+1 >$

(10) $f: \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*, f(x) = xa$

(11) $f: I \to N, f(x) = |x|$

解：

(1) 是单射，不是满射，不是双射。

(2) 不是单射，不是满射，不是双射。

(3) 不是单射，不是满射，不是双射。

(4) 不是单射，是满射，不是双射。

(5) 是单射，不是满射，不是双射。

(6) 不是单射，不是满射，不是双射。

(7) 是单射，是满射，是双射。

(8) 是单射，不是满射，不是双射。

(9) 是单射，不是满射，不是双射。

(10) 是单射，不是满射，不是双射。

(11) 不是单射，是满射，不是双射。

9. 设 X 和 Y 都是有限集合，X 和 Y 的基数分别为 $|X| = m$ 和 $|Y| = n$。

(1) 有多少个从 X 到 Y 的单射函数？

(2) 有多少个从 X 到 Y 的满射函数？

(3) 有多少个不同的双射函数？

解：

(1) 当存在从 X 到 Y 的单射函数时，$m \le n$，单射函数有 $C_n^m * m!$

(2) 当存在从 X 到 Y 的满射函数时，$m \ge n$，满射函数的个数有

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)\cdot 1^m$$

(4) 当存在从 X 到 Y 的双射函数时，$m = n$，双射函数的个数有 $m!$ 个。

10. 设 $A = \{1,2,3\}$。有多少个从 A 到 A 的满射函数 f 具有性质 $f(1) = 3$？

解：有两个。分别为 $f_1 = \{<1,3>,<2,1>,<3,2>\}$ 和 $f_2 = \{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$。

11. 设 $A = \{1,2,,\ldots n\}$，有多少满足以下条件的从 A 到 A 的函数 f：

(1) $f \circ f = f$ (2) $f \circ f = I_A$ (3) $f \circ f \circ f = I_A$

解：

(1) 此题暂无答案

12. 设集合 $X = \{-1,0,1\}^2$，且函数 $f: X \to Y$ 是

$$f(<x,y>) = \begin{cases} 0, 若\mathrm{x}\cdot y > 0 \\ x - y, \mathrm{x}\cdot y \le 0 \end{cases}$$

有多少与 f 具有同样的域和值域的不同函数？

解：f 定义域元素的个数是 9，值域元素的个数是 5。求 $g: A^2 \to B$ 的个数，等同于求从 9 个元素的集合到 5 个元素集合满射函数的个数。

$5^9 - C_5^1 4^9 + C_5^2 3^9 - C_5^3 2^9 + C_5^4 1^9 = 834120$种

13 设函数 $f:R\to R$ 是 $f(x)=x^2-2$ 。试求反函数 f^{-1} 。

解：设 $y=f(x)=x^2-2$

$y=x^2-2\Rightarrow x^2=y+2\Rightarrow x=\sqrt{y+2}$

故 $f^{-1}=\sqrt{x+2}(x\ge -2)$

14. 设集合 $X=\{1,2,3,4\}$ 。试定义一个函数 $f:X\to X$ ，能使 $f\ne I_X$ ，并且是单射的。求出 $f\circ f=f^2, f^3=f\circ f^2, f^{-1}$ 和 $f\circ f^{-1}$ 。能否求出另外一个单射函数 $g:X\to X$ ，能使 $g\ne I_X$ ，但是 $g\circ g=I_X$ 。

解：$f=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,1>\}$

$f^2=f\circ f=\{<1,3>,<2,4>,<3,1>,<4,2>\}$

$f^3=f\circ f^2=\{<1,4>,<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$

$f^{-1}=\{<1,4>,<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$

$f\circ f^{-1}=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$

设单射函数 $g=\{<1,2>,<2,1>,<3,4>,<4,3>\}$

$g\ne I_X$，但是 $g\circ g=I_X$ 。

15. 试证明，从 $X\times Y$ 到 $Y\times X$ 存在一个一对一的映射，并且验明此映射是否是映满的。

证明：

设 $|X|=m \quad |Y|=n$

则 $|X\times Y|=|Y\times X|=mn$，满足 $|X\times Y|\le|Y\times X|$

所以，存在一对一的映射。

因为是一对一的映射，不同的 $x\in|X\times Y|$ 对应的 $y\in|Y\times X|$ 不相等，所以至少需要 mn 个 $y\in|Y\times X|$ 与之想对应，所以该映射是满射。

16. 证明：特征函数所具有的性质(1)-(7)和(10)-(11)。

证明：

(1) 由特征函数的定义可知。

(2) 充分性：因$\psi_A=0$，故对于任意的 $x\in E$ ，都有 $x\notin A$

所以 $A=\varnothing$ 。

必要性：因 $A=\varnothing$，所以对于任意的 $x\in E$，都有 $x\notin A$，即对于所有的 $x\in E$，都有 $\psi_A(x)=0$，即 $\psi_A=0$。

(3) 充分性：因 $\psi_A=1$，故对于任意的 $x\in E$，都有 $x\in A$

所以 $A=E$。

必要性：因 $A=E$，所以对于任意的 $x\in E$，都有 $x\in A$，即对于所有的 $x\in E$，都有 $\psi_A(x)=1$，即 $\psi_A=1$。

(4) 充分性：因 $\psi_A\le\psi_B$，则有三种情况 $\psi_A=0$，$\psi_B=0$；$\psi_A=0$，$\psi_B=1$；$\psi_A=1$，$\psi_B=1$。

当 $\psi_A=0$，$\psi_B=0$ 时，$A=B=\varnothing$，所以 $A\subseteq B$；

当 $\psi_A=0$，$\psi_B=1$ 时，$A=\varnothing, B=E$，所以 $A\subseteq B$；

当 $\psi_A=1$，$\psi_B=1$ 时，$A=B=E$，所以 $A\subseteq B$；

所以，当 $\psi_A\le\psi_B$ 时，有 $A\subseteq B$，充分性得证。

必要性：当 $x\in A$ 时，$\psi_A=1$；由于 $A\subseteq B$，所以必定有 $x\in B$，所以 $\psi_B=1$；

所以有 $\psi_A\le\psi_B$；

当 $x\notin A$ 时，$\psi_A=0$；由于 $A\subseteq B$，所以有 $x\in B$ 或 $x\notin B$ 两种情况。

若 $x\in B$，则 $\psi_B=1$，此时 $\psi_A\le\psi_B$；
若 $x\notin B$，则 $\psi_B=0$，此时 $\psi_A\le\psi_B$；
所以，当 $A\subseteq B$ 时，有 $\psi_A\le\psi_B$，必要性得证。

(5) 充分性：当 $\psi_A=\psi_B=0$ 时，对于所有的 $x\in E$，都有 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，故 $A=B=\varnothing$。

当 $\psi_A=\psi_B=1$ 时，对于所有的 $x\in E$，都有 $x\in A$ 且 $x\in B$，故 $A=B=E$。

所以当 $\psi_A=\psi_B$ 时，必有 $A=B$，充分性得证。

必要性：当 $x\in A$ 时，$\psi_A=1$；由于 $A=B$，所以必定有 $x\in B$，所以 $\psi_B=1$；

所以有 $\psi_A=\psi_B$；

当 $x\notin A$ 时，$\psi_A=0$；由于 $A=B$，所以必定有 $x\notin B$，故 $\psi_B=0$；

所以有 $\psi_A=\psi_B$；

所以，当 $A=B$ 时，有 $\psi_A=\psi_B$，必要性得证。

(6) 若 $x\in A$，则必有 $x\notin\sim A$。此时 $\psi_A=1$，$\psi_{\sim A}=0$，即 $\psi_{\sim A}=1-\psi_A$。

(7) 当 $x\in A\bigcap B$ 时，$\psi_{A\cap B}=1$，由于 $x\in A\bigcap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$，所以有 $\psi_A=1$，$\psi_B=1$

所以有 $\psi_{A\cap B}=\psi_A*\psi_B$；

当 $x\notin A\bigcap B$ 时，$\psi_{A\cap B}=0$，由于

$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$，于是有以下几种情况：

若 $x \notin A \wedge x \in B$，此时 $\psi_A = 0$，$\psi_B = 1$，$\psi_{A\cap B} = \psi_A * \psi_B = 0$；

若 $x \in A \wedge x \notin B$，此时 $\psi_A = 1$，$\psi_B = 0$，$\psi_{A\cap B} = \psi_A * \psi_B = 0$；
若 $x \notin A \wedge x \notin B$，此时 $\psi_A = 0$，$\psi_B = 0$，$\psi_{A\cap B} = \psi_A * \psi_B = 0$；
得证。

(8) 见书上 P108。

(9) 当 $x \in A - B$ 时，$\psi_{A-B} = 1$，由于 $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$，此时 $\psi_A = 1$，$\psi_B = 0$

$\psi_{A-B} = \psi_A - \psi_A * \psi_B = 1 - 1 * 0 = 1$

当 $x \notin A - B$ 时，，$\psi_{A-B} = 0$，由于 $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$，于是可能有以下几种情况：

若 $x \notin A$ 且 $x \notin B$，则 $\psi_A = 0$，$\psi_B = 0$，$\psi_{A-B} = \psi_A - \psi_A * \psi_B = 0$；

若 $x \in A$ 且 $x \in B$，则 $\psi_A = 1$，$\psi_B = 1$，$\psi_{A-B} = \psi_A - \psi_A * \psi_B = 0$；

若 $x \notin A$ 且 $x \in B$，则 $\psi_A = 0$，$\psi_B = 1$，$\psi_{A-B} = \psi_A - \psi_A * \psi_B = 0$；

得证。

(10) 充分性：若 $x \in A$，则 $\psi_A = 1$，由于 $\psi_A = \psi_A * \psi_B$，所以 $\psi_B = 1$，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，即 $A \subseteq B$；

若 $x \notin A$，则 $\psi_A = 0$，即 $A = \varnothing$。所以必有 $A \subseteq B$；

当 $\psi_A = \psi_A * \psi_B$ 时，必有 $A \subseteq B$，充分性得证。

必要性：

若 $x \in A$，则 $\psi_A = 1$，由于 $A \subseteq B$，于是 $x \in B$，$\psi_B = 1$，此时 $\psi_A = \psi_A * \psi_B = 1$；

若 $x \notin A$，则 $\psi_A = 0$，由于 $A \subseteq B$，于是有以下两种情况；

若 $x \notin B$，则 $\psi_B = 0$，此时 $\psi_A = \psi_A * \psi_B = 0$；

若 $x \in B$，则 $\psi_B = 1$，此时 $\psi_A = \psi_A * \psi_B = 0$；

当 $A \subseteq B$ 时，必有 $\psi_A = \psi_A * \psi_B$，必要性得证。

(11) 若 $x \in A$，则 $\psi_A = 1$，此时 $\psi_A = \psi_A * \psi_A = 1$；

若$x \notin A$，则$\psi_A = 0$，此时$\psi_A = \psi_A * \psi_A = 0$.

所以$\psi_A = \psi_A * \psi_A$。

17. 应用特征函数求下列各式成立的充分必要条件。

(1) $(A - B) \cup (A - C) = A$

(2) $A \oplus B = \emptyset$

(3) $A \oplus B = A$

(4) $A \cap B = A \cup B$

解：

(1) $\psi_{(A-B)\cup(A-C)} = \psi_{A-B} + \psi_{A-C} - \psi_{A-B} * \psi_{A-C}$.

$= (\psi_A - \psi_A * \psi_B) + (\psi_A - \psi_A * \psi_C) - (\psi_A - \psi_A * \psi_B) * (\psi_A - \psi_A * \psi_C)$

$= \psi_A - \psi_A * \psi_B * \psi_C$

$\psi_A - \psi_A * \psi_B * \psi_C = \psi_A \Leftrightarrow \psi_A * \psi_B * \psi_C = 0$ 即$A \cap B \cap C = \phi$

所以$(A - B) \cup (A - C) = A$ 的充要条件为 $A \cap B \cap C = \phi$。

(2) $\psi_{A\oplus B} = \psi_{(A-B)\cup(B-A)} = \psi_{(A-B)} + \psi_{(B-A)} - \psi_{(A-B)} * \psi_{(B-A)}$.

$= (\psi_A - \psi_A * \psi_B) + (\psi_B - \psi_B * \psi_A) - (\psi_A - \psi_A * \psi_B) * (\psi_B - \psi_B * \psi_A)$

$= \psi_A + \psi_B - 2\psi_A * \psi_B$

$\psi_A + \psi_B - 2\psi_A * \psi_B = \psi_\phi \Leftrightarrow (\psi_A - \psi_B) = 0$ 即$\psi_A = \psi_B$，$A = B$

所以 $A \oplus B = \emptyset$的充要条件为$A = B$

(3) $\psi_{A\oplus B} = \psi_{(A-B)\cup(B-A)} = \psi_{(A-B)} + \psi_{(B-A)} - \psi_{(A-B)} * \psi_{(B-A)}$.

$= (\psi_A - \psi_A * \psi_B) + (\psi_B - \psi_B * \psi_A) - (\psi_A - \psi_A * \psi_B) * (\psi_B - \psi_B * \psi_A)$

$= \psi_A + \psi_B - 2\psi_A * \psi_B$

$\psi_A + \psi_B - 2\psi_A * \psi_B = \psi_A \Leftrightarrow \psi_B(1 - 2\psi_A) = 0$ 即$\psi_B = 0$ 或$\psi_A = 1/2$(不符合)

即$B = \phi$

所以$A \oplus B = A$的充要条件为$B = \phi$

(4) $\psi_{A\cap B} = \psi_A * \psi_B$

$\psi_{A\cup B} = \psi_A + \psi_B - \psi_A * \psi_B$

由题可知$\psi_{A\cap B} = \psi_{A\cup B}$，故$\psi_A * \psi_B = \psi_A + \psi_B - \psi_A * \psi_B$

$(\psi_A - \psi_B)^2 = 0$，即$\psi_A = \psi_B$，$A = B$

所以$A \cap B = A \cup B$的充要条件为$A = B$。

18.

(1) 证明：设 $A = \{k \mid k = 3n - 2, n \in N\}$

因为集合 A 与自然数集 N 之间存在一个双射函数 $f(n) = 3n - 2$，因此集合 A 等势于自然数集 N，所以集合 $A = \{k \mid k = 3n - 2, n \in N\}$ 是可数的。

(2) 证明：设 $A = \{k \mid k = n^2, n \in N\}$

因为集合 A 与自然数集 N 之间存在一个双射函数 $f(n) = n^2$，因此集合 A 等势于自

然数集 N，所以集合 $A=\{k \mid k=n^2, n\in N\}$ 是可数的。

(3) 证明：设 $A=\{k \mid k=n^2 \vee k=3n-2, n\in N\}$

因为集合 A 与自然数集 N 之间存在一个双射函数，因此集合 A 等势于自然数集 N，

所以集合 $A=\{k \mid k=n^2 \vee k=3n-2, n\in N\}$ 是可数的。

19. 证明[0,1]等势于[1,2].

证明：取f[0,1]~[1,2],

可以令 $f(n)=n+1, n \in [0,1]$；

f(n)为双射函数。

所以：$[0,1] \rightarrow [1,2]$

21. 设 A,B,C,D 是集合，且 $A \sim C$，$B \sim D$，证明 $A\times B \sim C\times D$。

证明：

因为：A~C；

所以：存在 f，使得任意 $x\in A$, $f(x) \in C$, 且值域为 C，f 为双射函数。同理存在 g.

取 $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, $\langle x, y\rangle \in A\times B$,

存在唯一的 $\langle y_1, y_2\rangle$ 与之对应。

所以，$A\times B \sim C\times D$

22 证明：A_1, A_2 都可数，则 A_1 与 $N_1=\{2n \mid n\in N\}$ 等势，A_2 与 $N_2=\{2n+1 \mid n\in N\}$ 等势。

$\because A_1$ 与 A_2 不相交，且 N_1 与 N_2 不相交

$\therefore A_1 \cup A_2 \sim N_1 \cup N_2 = N$

$\therefore A_1 \cup A_2$ 是可数的。

第六章 代数系统习题答案

1．举出生活中的例子，说明什么是幺元、逆元和零元。

解：幺元，就是具有不变性，实数集合 R 上的加法运算中 0 就是幺元，实数集合 R 上的乘法运算中，1 就是幺元；若 ab=ba=1，则 a 与 b 互为逆元，实数乘法运算中，互为倒数的两个数互称逆元，例 2 和 1/2 互为逆元，1 和其本身互为逆元；乘法运算中，零元就是对任意元 x，都有 xa=ax=a，则 a 为零元，因此 0 即为零元。

2．设 I 是整数集合，且 g：$I\times I\rightarrow I$ 且

$$g<x,y>=x*y=x+y-xy$$

试证明二元运算*是可交换的、可结合的。求出幺元，并指出每个元素的逆元。

证明：

（1）可交换性：因为 $g<x,y>=x*y=x+y-xy$，所以有，

$$\begin{aligned}&y*x\\&=y+x-yx\\&=x+y-xy\\&=x*y\end{aligned}$$

因此，二元运算*是可交换的。

（2）可结合性：由二元关系*可得，

$$\begin{aligned}&(x*y)*z\\&=(x+y-xy)*z\\&=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z\\&=x+y+z-xy-xz-yz+xyz\\&=x+(y+z-yz)-(xy+xz-xyz)\\&=x+(y+z-yz)-(y+z-yz)x\\&=x*(y*z)\end{aligned}$$

因此，二元关系*是可结合的。

（3）计算幺元，逆元：

设对任意的 x 若存在幺元 e，则 $x*e=e*x=x+e-xe=x$，所以求得幺元 $e=0$；

对任意 x，若其逆元 x^{-1} 存在，则 $x*x^{-1}=x+x^{-1}-xx^{-1}=0$，得出：

$$x^{-1}=x/(x-1)$$

又因 x^{-1} 为整数，故只有 2 和 0 有逆元，$2^{-1}=2$，$0^{-1}=0$。

3．设*是自然数集合 N 中的二元运算，并可给定成 $x*y=x$。证明*不是可交换的，但是可结合的。问哪些元素是等幂的？是否有左幺元和右幺元？

证明：

（1）不可交换性：因为 $x*y=x$，$y*x=y$，所以 $x*y\neq y*x$，二元关系*是不可交换的。

（2）可结合性：因为

$$\begin{aligned}&(x*y)*z=x*z=x,\\&x*(y*z)=x*y=x,\\&(x*y)*z=x*(y*z),\end{aligned}$$

所以，二元关系*是可结合的。

（3）自然数集合 N 中每个元素都是等幂元。

（4）不存在左幺元，集合 N 中每个元素都是右幺元。

4．设*是正整数集合 I_+ 中的二元运算，且 $x*y=x$ 和 y 的最小公倍数，

试证明*是可交换的和可结合的。求出幺元，并说明哪些元素是等幂的？

证明：

（1）可交换性：因为 $x*y=x$ 和 y 的最小公倍数，所以 $y*x=y$ 和 x 的最小公倍数= x 和 y 的最小公倍数 $=x*y$，因此，二元运算*是可交换的。

（2）可结合性：$(x*y)*z=x$，y 和 z 的最小公倍数 $=x*(y*z)$，所以*运算是可结合的。

（3）求幺元，等幂元：

对所有正整数 $a\in I_+$，均有 $a*a=a$，因此集合 I_+ 中的每个元素都是*的等幂元；幺元为 1。

5．设 S 为有限集合，问 S 上有多少个二元运算？其中有多少个是可交换的？有多少个运算具有单位元？

解：集合 S 的集合有 $|S|=n$ 个元素，一个二元运算表示 $S*S$ 到 S 的映射，因此共有二元运算有 n^{n^2} 个；可交换对应运算矩阵中关于对角线对称的运算，故有 $n^{1+2+\dots+n}$ $=n^{n^2-\frac{n}{2}}$个，有单位

元对应于有一行或者一列取定值，因此，含有 $n\times n^{n^2-2n+1}$ 个

6．对于如下定义的 R 上的二元运算∗，确定其中哪些是可交换的和可结合的？关于哪些二元运算有幺元？对于有幺元的二元运算，找出 R 中的可逆元素。

$a_1 * a_2 = |a_1 - a_2|$

$a_1 * a_2 = (a_1 + a_2)/2$

$a_1 * a_2 = a_1 / a_2$

解：

（1）因为 $a_1 * a_2 = |a_1 - a_2| = |a_2 - a_1| = a_2 * a_1$，所以是可交换的；$a_1 * a_2 \ * a_3 = ||a_1 - a_2| - a_3|$，$a_1 * \ a_2 * a_3 \ = |a_1 - |a_2 - a_3||$，$a_1 * a_2 \ * a_3 \neq a_1 * \ a_2 * a_3$，所以是不可结合的；不存在幺元与逆元。

（2）因为 $a_1 * a_2 = \ a_1 + a_2 \ /2 = \ a_2 + a_1 \ /2 = a_2 * a_1$，所以是可交换的；

$a_1 * a_2 \ * a_3 = \ a_1 + a_2 \ /2 \ * a_3 = \ a_1 + a_2 \ /2 + a_3 \ /2 = \ a_1 + a_2 \ /4 + a_3/2$；

$a_1 * \ a_2 * a_3 \ = \ a_1 + \ a_2 + a_3 \ /2 \ /2 = a_1/2 + \ a_2 + a_3 \ /4$，$a_1 * a_2 \ * a_3 \neq a_1 * \ a_2 * a_3$，所以是不可结合的；不存在幺元与逆元。

（3）$a_1 * a_2 = a_1 / a_2 \neq a_2 / a_1 = a_2 * a_1$，因此是不可交换的；$a_1 * a_2 \ * a_3 = a_1 / \ a_2 a_3$，$a_1 * \ a_2 * a_3 \ = a_1 / \ a_2 / a_3 \ = \ a_1 a_3 \ / a_2$，$a_1 * a_2 \ * a_3 \neq a_1 * \ a_2 * a_3$，所以是不可结合的；不存在幺元与逆元。

7．设∗是 S 中的可结合的二元运算，并且对于任意 $x, y\in S$，若 $x*y = y*x$，则 $x = y$。试证明 S 中的每个元素都是等幂的。

证明：对任意的 $x\in S$，因为 $x*x \ *x = x* \ x*x$，由条件可得：$x*x = x$，所以 S 中的每个元素都是等幂的。

8．试举出两个你所熟悉的代数系统。

解：非空集合和集合上的运算组成一个代数系统，例如<N, +>，<Z, +, ∗>, <R, +, ∗>都是代数系统，其中+和∗分别表示普通的加法和乘法。

9．给定代数系统 X=<S，+>，Y=<S，∗>和 Z=<S，+，∗>，其中 S={a，b}，运算表如下。

+	a	b
a	a	b
b	b	a

∗	a	b
a	a	a
b	a	b

试确定 X 对+和 Y 对∗是否满足交换律和结合律？是否有幺元？Z 是否满足+对∗和∗对+的分配律？

解：因为 X 对+关于主对角线对称，所以满足交换律，同理，Y 对∗也满足交换律；X 对+满足结合律， Y 对∗满足结合律。

运算表存在幺元的充分必要条件是该元素对应的行和列依次与该表表头的行、列相一致，因此 X 中的幺元是元素 a，Y 中的幺元是元素 b；

Z+对∗不满足分配律：$b + (a * b) = \mathrm{b}$；$(b + a) * (b + b) = a$

<u>∗对+满足分配律</u>

10．设 A={0，1}，S= A^A，

（1）试列出 S 中的所有函数。

（2）给出 S 上合成运算的运算表。

解：

（1） $f_1 = <0,0>,<1,0>$ ， $f_2 = <0,0>,<1,1>$ ， $f_3 = <0,1>,<1,0>$ ， $f_4 = <0,1>,<1,1>$ ；

（2）

○	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

11．设 $A=\{a，b，c\}$，$a，b，c\in$R，能否确定 $a，b，c$ 的值使得

（1）A 对一般意义下的乘法封闭。

（2）A 对一般意义下的加法封闭。

解：

(1)　0, 1, -1

(2)　不存在

12．设 $U=<Z，+，*>$，其中+和*分别代表一般意义下的加法和乘法，对下面给定的每个集合确定是否构成 U 的子代数系统，为什么？

（1）$S_1=\{2n|n\in Z\}$。

（2）$S_2=\{2n+1|n\in Z\}$。

（3）$S_3=\{-1, 0, 1\}$。

解：

（1）是子代数系统；

（2）不能构成 U 的代数子系统，因为 S_2 对+不是封闭的；

（3）不是子代数系统，因为 S_3 对+不是封闭的。

13．设 $V=<\{1, 2, 3\}, \circ, 1>$其中 $x\circ y$ 表示取 x 和 y 之中较大的数。求出 V 的所有子代数。指出哪些是平凡的子代数，哪些是真子代数。

解：

V 的所有子代数有：$<1,2,3, \circ, 1>$，$<1, \circ, 1>$，$<1,2, \circ, 1>$，$<1,3, \circ, 1>$；

V 的平凡子代数有：$<1,2,3, \circ, 1>$，$<1, \circ, 1>$；

V 的真子代数有：$<1, \circ, 1>$，$<1,2, \circ, 1>$，$<1,3, \circ, 1>$。

14．设 $U=<A，+>$，$V=<B，*>$为同类型代数系统，$U\times V$ 是积代数，定义函数 $f：A\times B\to A$，$f(<x，y>)=x$，证明 f 是 $U\times V$ 到 U 的同态映射。

证明：

设 $U\times V=<A\times B,\bullet>$，对于任意 $<x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in A\times B$，有：

$f\ (<x_1,y_1>\bullet<x_2,y_2>)$

$=f\ (<x_1+x_2,y_1*y_2>)$

$=x_1+x_2$

$=f\ (<x_1,y_1>)+f\ (<x_2,y_2>)$

所以，f 是 $U\times V$ 到 U 的同态映射。

15．$U=<Z，+，*>$，$V=<Z_n，+_n，*_n>$，其中 Z 为整数集，+和*分别为一般意义下的加法和乘法，$Z_n=\{0，1，2，…，n-1\}$，$+_n$，$*_n$为模 n 加法和模 n 乘法。令 $f：Z\to Z$，$f(x)=(x) \bmod n$。证明 f 为 U 到 V 的满同态映射。

证明：因为 $\forall x, y\in Z$，有：

$$
\begin{aligned}
& f(x+y) \\
&= (x+y) \bmod n \\
&= x \bmod n +_n y \bmod n \\
&= f(x) +_n f(y)
\end{aligned}
$$

同理可得：$f(x*y)=f(x)*_n f(y)$，满足同态映射的条件，同时映射 f 是满射，但不是单设，因此，f 为 U 到 V 的满同态映射。

16．V=<R^*，*>，其中 R^* 为非零实数集合，*为一般意义下的乘法，判断下面哪些函数是 V 的自同态，是否为单自同态、满自同态、自同构？计算 V 的同态像。

（1）$f(x)=|x|$。

（2）$f(x)=2x$。

（3）$f(x)=x^2$。

（4）$f(x)=1/x$。

（5）$f(x)=-x$。

（6）$f(x)=x+1$。

解：

（1）$\forall x,y\in R^*$，有 $f(x,y)=|xy|=f(x)f(y)$，所以 f 是 V 的自同态；又 $ranf\neq R^*$，所以 f 不是 V 的满自同态；且对于任意 $y\in ranf$，存在不唯一的 $x\in R^*$ 满足 $f(x)=y$，所以 f 不是 V 的单自同态，也不是自同构。

（2）$\forall x,y\in R^*$，有 $f(x,y)=2xy\neq 2x*2y=f(x)f(y)$，所以 f 不是 V 的自同态。

（3）$\forall x,y\in R^*$，有 $f(x,y)=x^2y^2=f(x)f(y)$，所以 f 是 V 的自同态；f 不是 V 的满自同态，不是 V 的单自同态，也不是自同构。

（4）$\forall x,y\in R^*$，有 $f(x,y)=1/(xy)=f(x)f(y)$，所以 f 是 V 的自同态；又 $ranf=R^*$，所以 f 是 V 的满自同态；f 是 V 的单自同态，但不是自同构。

（5）$\forall x,y\in R^*$，有 $f(x,y)=-(xy)\neq f(x)f(y)$，所以 f 不是 V 的自同态。

（6）$\forall x,y\in R^*$，有 $f(x,y)=xy+1\neq(x+1)(y+1)=f(x)f(y)$，所以 f 不是 V 的自同态。

17．给定代数系统 V=<Z_n，$+_n$>

（1）求积代数 $V_3\times V_2$ 的所有同余关系。

（2）证明 $V_3\times V_2$ 与 V_6 同构。

解：

（1）由题意可知 $V_3\times V_2$ 同构于 V_6，因此积代数 $V_3\times V_2$ 的所有同余关系，只需要研究 V_6 上的同余关系即可。V_6 共有四个同余关系：

①全域关系；

②{<0, 0>，<2, 2>，<4, 4>，<0, 2>，<2, 0>，<0, 4>，<4, 0>，<2, 4>，<4, 2>，<1, 1>，<3, 3>，<5, 5>，<1, 3>，<3, 1>，<1, 5>，<5, 1>，<3, 5>，<5, 3>}；

③{<0, 0>，<3, 3>，<0, 3>，<3, 0>，<1, 1>，<4, 4>，<1, 4>，<4, 1>，<2, 2>，<5, 5>，<2, 5>，<5, 2>}；

④相等关系。

（2）由于 $V_3\times V_2=\{<0,1>,<0,1>,<1,0>,<1,1>,<2,0>,<2,1>\}$，令 $f:V_3\times V_2\rightarrow V_6$，$f(<m,n>)=(2m+3n)\bmod 6$，可验证 f 是双射。

对任意 $<i,j>,<k,l>\in V_3\times V_2$，有：

$$
f(<i,j>)\oplus f(<k,l>)=<i+_3 k.j+_2 l>=(2(i+_3 k)+3(j+_2 l))\bmod 6
$$

$$
\begin{aligned}
& f(<i,j>) +_6 f(<k,l>) \\
&= (2i+3j) \bmod 6 +_6 (2k+3l) \bmod 6 \\
&= (2i+3j+2k+3l) \bmod 6 \\
&= (2(i+k)+3(j+l)) \bmod 6 \\
&= (2(i+_2 k)+3(j+_3 l)) \bmod 6
\end{aligned}
$$

所以可得：$f(<i,j>\oplus<k,l>) = f(<i,j>) +_6 f(<k,l>)$，因此，$f$ 是 $V_3\times V_2$ 到 V_6 的同构。

第七章 群与环

1. 指出下述各代数系统哪些是半群，哪些是拟群，并说明理由。

（1） $\langle Z, -\rangle$

（2） $\langle C, \times\rangle$

（3） $S\neq\phi$，$\langle P(S), \cup\rangle$

（4） $\langle M_{m,n}(Q), +\rangle$

（5） $\langle Z_n, \oplus\rangle$，$\oplus$ 为同余类的加法运算

解:⑴ 不是半群， $\forall a,b,c\in Z,(a-b)-c=a-b-c,a-(b-c)=a-b+c$ 不满足结合律。

不是拟群。

⑵ 是半群，$\forall a,b,c\in C,(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ，满足结合律。

是拟群，$1\times a=a\times1=a,a\in C$ ，有单位元 $e=1$ 。

⑶ 是半群，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ ，满足结合律。

是拟群，$\varnothing\cup A=A\cup\varnothing$ ，有单位元 $e=\varnothing$ 。

⑷ 是半群，$(M_{m,n}^1(Q)\cup M_{m,n}^2(Q))\cup M_{m,n}^3(Q)=M_{m,n}^1(Q)\cup(M_{m,n}^2(Q)\cup M_{m,n}^3(Q))$ ，满足结合律。

是拟群，$0_{m,n}+M_{m,n}^1(Q)=M_{m,n}^1(Q)+0_{m,n}$ ，有单位元 $e=0_{m,n}$ 。

⑸ 是半群，$([i]\oplus[j])\oplus[k]=[i]\oplus([j]\oplus[k])$ ，满足结合律。

是拟群，$[0]\oplus[i]=[0]\oplus[i]$,有单位元 $e=[0]$ 。

2. 判断下列集合关于指定的运算是否构成半群，独异点和群。

（1） a 是正实数，$G=\{a^n|n\in Z\}$，运算为普通乘法。

（2） Q^+为正有理数，运算为普通乘法。

（3） Q^+为正有理数，运算为普通加法。

（4） 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法。

（5） 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法。

解：⑴ 是半群， $\forall x,y,z\in G\Rightarrow x=a^n,y=a^m,z=a^l$，

则 $a^n*(a^m*a^l)=(a^n*a^m)*a^l=a^{mnl}$ 满足结合律.

是独异点。$\forall x\in G,x*1=1*x=x$ ，有单位元 $e=1=a^0$ 。

是群。$\forall x=a^n\in G,x^{-1}=a^{-n}\in G,$且$x*x^{-1}=a^n*a^{-n}=1$ ，对于每个元素存在逆元。

⑵ 是半群，Q^+ 对乘法封闭，且满足结合律。

是独异点，有单位元 1，$1 \in Q^+$ 。

是群，$\forall x \in Q^+$，x 是正有理数，$1/x$ 也是正有理数，$1/x \in Q^+$, 且 $x * 1/x = 1/x * x = 1$,

故 $1/x = x^{-1}$ ，对于每个元素存在逆元。

(3) 是半群，Q^+ 对加法封闭，且加法满足结合律。

不是独异点，不是群，Q^+ 既无单位元，也无逆元。

(4) 是半群，该集合关于多项式乘法封闭且满足结合律。
是独异点，单位元是多项式 1。
不是群。

$\forall$ 多项式 $P(x)$，$P(x)^{-1} = 1/P(x)$ 不一定是多项式，故 $P(x)^{-1}$ 不一定存在。

（5）是半群，该集合关于多项式加法封闭且满足结合律。
是独异点，单位元是多项式 0。

是群，$\forall$ 一元实数多项式 $P(x)$, 其关于加法的逆是 $-P(x)$ 。

3. 指出下列代数系统中哪些是群，哪些是可交换群，并说明理由。
（1） $\langle Z, \oplus \rangle$，其中 $\oplus$ 定义如下：任意 $a, b \in Z$, $a \oplus b = a + b - 2$。
（2） 1 的 n 次根（包含复根与实根），关于乘法的运算。
（3） $\langle R^*, * \rangle$，其中*定义如下：任意 $a, b \in R$, $a*b = a^2 b^2$, $R^* = R - \{0\}$。
（4） $\langle F(x), + \rangle$，其中 $F(x) = \{a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \mid a_i \in R, i = 1, \cdots, n; n \in N\}$，+为多项式加法运算。
（5） $< \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}, + >$。

解：(1) 是可交换群。

a) 满足结合律。$(a \oplus b) \oplus c = a + b + c - 4 = a \oplus (b \oplus c)$ 。

b) 有单位元 $e = 2$ 。$e \oplus a = a \oplus e = e + a - 2 = a$ 。

c) 每一个元素有逆元。$a^{-1} = 4 - a$ 。

d) 可交换。$a \oplus b = b \oplus a = a + b - 2$ 。
(2) 是可交换群。
a) 复数乘法满足结合律与交换律。
b) 有单位元 $e = 1$ 。
c) 每一个元素有逆元。1 的 n 次方根形式为：

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} (k = 0, 1, \cdots n-1)$$

$$x^{-1} = \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}$$

(3) 不是群。

a）不满足结合律。$a*(b*c)=a^2b^4c^4 \neq (a*b)*c=a^4b^4c^2$

(4) 是可交换群。

a）满足结合律与交换律。。

b）有单位元 $f(x)=0$ 。

c）每一个元素有逆元。$\forall g(x)\in F(x)$,逆元为$-g(x)$ 。

(5) 是可交换群。

a）该集合相当于有理数加法，满足结合律与结合律。

b）有单位元$e=0$。

c）每一个元素有逆元。$\forall a+b\sqrt{2}\in\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$,逆元为$-a-b\sqrt{2}$ 。

4. $S=\{a, b, c\}$，*是 S 上的二元运算，且$\forall$ $x, y\in S$, $x*y=x$。

（1） 证明 S 关于*运算构成半群。

（2） 试通过增加最少的元素使得 S 扩张成一个独异点。

解：(1) 因为$x*y=x$，所以$(x*y)*z=x*z=x, x*(y*z)=x*y=x$，

$(x*y)*z=x*(y*z)$，即*是封闭的且满足结合律，因此 S 关于*运算构成半群。

(2) S 不存在幺元，因此无法增加的元素，使得 S 成为一个独异点。

5. 给定半群<S，*>，$a\in S$, 对于 S 中的任意元素 x 和 y, 定义二元运算如下：$x\oplus y=x*a*y$。试证：<R ，$\oplus$ >是半群。

证明：

∵ S,∗ 是半群

∴*在 S 上满足结合律

$$(x\oplus y)\oplus z=(x*a*y)\oplus z=x*a*y*a*z=x*a*(y*a*z)=x*a*(y\oplus z)$$
$$=x\oplus(y\oplus z)$$

∴ 是可结合的

∴ R, ⊕ 是半群。

6. 给定代数结构<R, *>,其中 R 是实数集合,对 R 中任意元 a 和 b,*定义如下：$a*b=a+b+ab$。试证：<R ，*>是独异点。

证明：由题意可知

$$\begin{aligned}&(a*b)*c\\&=(a+b+ab)*c\\&=a+b+ab+c+(a+b+ab)c\\&=a+b+c+ab+ac+bc+abc\end{aligned}$$

并且，

$a*(b*c)$
$=a*(b+c+bc)$
$=a+b+c+bc+a(b+c+bc)$
$=a+b+c+ab+ac+bc+abc$

所以可得：$a*(b*c)=(a*b)*c$，即∗满足结合律且是封闭的，所以⟨R, ∗⟩是半群；

又因为，存在幺元$e=0$；因此⟨R, ∗⟩是独异点。

7. 已知<G,∗>为不可交换群，证明必存在 $a, b\in G$，$a\neq b$，$a\neq e$，$b\neq e$，但 $a*b=b*a$。
证明：
∵ ⟨G,·⟩为群；

∴ $\forall a\in G$，存在 a 的逆元$a^{-1}\in G, aa^{-1}=a^{-1}a=e$

∴ 令$b=a^{-1}\in G$

则 $ab=ba=e$

∴ 必存在$a,b\in G, a\neq b, a\neq e, b\neq e, a*b=b*a$。

8. 设 $S=\{1, 2, 3\}$，⊗ 为模 4 乘法，即：
$\forall x, y\in S, x\otimes y=(xy)\bmod 4$
问<S ，⊗ >构成什么代数系统（半群，独异点，群）？并说明理由。
解：
由于运算不是封闭的，因此不是代数系统（半群，独异点，群）；

9. 给定群<G ，∗>，且 $H=\{x\,|\,a,x\in G\wedge x*a=a*x\}$，试证<$H$ ，∗>是<G ，∗>的子群。
证明：
（1）显然，H 是 G 的子集；

（2）设群⟨G, ∗⟩的幺元为e，则$e*a=a*e=a$，因此$e\in H$；

（3）令$a,b\in H$，则$a*b\in G$，设$c=a*b\in G$，

存在$(a*b)*a=a*(b*a)=a*(a*b)$，

即$c*a=a*c$，所以$a*b=c\in H$；

（4）对于任意$x\in H$，存在逆元$x^{-1}\in H$，使得$x^{-1}*a=a*x^{-1}$，$x^{-1}\in H$

$x^{-1}*a=x^{-1}*a*e=x^{-1}*a*x*x^{-1}=x^{-1}*x*a*x^{-1}=a*x^{-1}, \therefore x^{-1}\in H$

综上所述，⟨H, ∗⟩是⟨G, ∗⟩的子群。

10. 设 G 为群，a 是 G 中给定元素，a 的正规化子 $N(a)$ 表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即：$N(a)=\{x\,|\,x\in G\wedge xa=ax\}$。
证明 $N(a)$ 是 G 的子群。

证明：

（1）显然，N(a)是 G 的子集；

（2）设群⟨G, ∗⟩的幺元为e，则$ea=ae=a$，因此$e\in N(a)$；

（3）令$a,b\in N(a)$，则$ab\in G$，设$c=ab\in G$，

存在$(ab)a=a(ba)=a(ab)$，

即$ca=ac$，所以$ab=c\in N(a)$；

（4）对于任意$x\in N(a)$，存在逆元$x^{-1}\in N(a)$，使得$x^{-1}a=ax^{-1}$，$x^{-1}\in N(a)$

$x^{-1}a=x^{-1}ae=x^{-1}axx^{-1}=x^{-1}xax^{-1}=ax^{-1},\therefore x^{-1}\in N(a)$

综上所述，N(a)是 G 的子群。

11. 设 $G=(a)$，$|G|=n$，证明：它的任意子群是循环群。

证明：

对于任意$a\in G$，则$|a|=n$，所以$a=\pm n$，因此$\pm n$为 G 的生成元，

由循环群的定义可知，G 为循环群；

根据定理可知，G 的任意子群都是循环群。

12. 设 $G=\langle a\rangle$是 15 阶循环群：

（1） 求出 G的所有生成元。

（2） 求出 G的所有子群。

解：

15 的正因子是 1, 3, 5, 15：

（1）G 的所有生成元为：$a,a^2,a^4,a^7,a^8,a^{11},a^{13},a^{14}$

（2）G 的所有子群为：

(a)，$(a^3)=\{e,a^3,a^6,a^9,a^{12}\}$，$(a^5)=\{e,a^5,a^{10}\}$，G

13. 下面集合关于数的加法+，与乘法·是否成环？

（1） $\{a+b\sqrt{5}\,|\,a,b\in Z\}$

（2） $\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\,|\,a,b,c\in Z\}$

（3） 非负整数集 D

解：

（1）是环。

（2）不是环，因为乘法不封闭。

（3）不是环，因为除 0 外的任何整数 x 的加法逆元是-x，而$-x\notin D$，因此不是环。

14. 下列系统是否是环，并说明理由。

（1） n阶方阵，关于矩阵的加法与乘法。

（2） 区间[-1,1]上所有实连续函数，关于函数的加法与乘法。

（3） $\langle R, +, \cdot\rangle$，$R$ 为实数，+为实数加法，$\cdot$ 定义为 $a, b\in R$，$a\cdot b=|a|b$。

解：

（1）是环，其关于矩阵的加法和乘法封闭，且含有幺元和逆元。

（2）不是环，乘法运算不封闭。

（3）不是环，不满足分配律。

15. 给定环$\langle R, +, \cdot\rangle$，且 $a, b, c, d\in R$，试证：

（1） $(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d$

（2） 若 $a\cdot b=b\cdot a=0$，则$(a+b)^n=a^n+b^n$

证明：

（1）因为$\langle R; +, \cdot\rangle$是环，所以$\cdot$对+运算满足分配律，则有

$$
\begin{aligned}
&(a+b)\bullet(c+d)\\
&=(a+b)\bullet c+(a+b)\bullet d\\
&=a\bullet c+b\bullet c+a\bullet d+b\bullet d
\end{aligned}
$$

（2）

$(a+b)^2=(a+b)\bullet(a+b)=a^2+2a\bullet b+b^2=a^2+b^2$，

$(a+b)^3=(a+b)^2\bullet(a+b)=(a^2+b^2)\bullet(a+b)=a^3+a^2\bullet b+a\bullet b^2+b^3=a^3+b^3$，

以此类推，可得：$(a+b)^n=a^n+b^n$

16. 设 a 和 b 是含幺环 R 中的两个可逆元，证明：

（1） $-a$ 也是可逆元，且$(-a)^{-1}=-a^{-1}$。

（2） ab 也是可逆元，$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。

证明：

（1）因为 a 是含幺环 R 中的可逆元，令幺元为 e，则：

$aa^{-1}=a^{-1}a=e$，假设-a 可逆，且逆元为 b，所以，

$-ab=-ba=e$，即$-ab=e=aa^{-1}$，因此$b=(-a)^{-1}=-a^{-1}\in R$

综上，-a 也是可逆元，且$(-a)^{-1}=-a^{-1}$

（2）显然$ab\in R$，假设 ab 可逆，且逆元为$c=(ab)^{-1}\in R$，则

$abc=cab=e$，即$abc=e=aa^{-1}$，根据消去率，$bc=a^{-1}$，

所以，$ebc=ea^{-1}, bb^{-1}bc=bc=bb^{-1}a^{-1}$，即$c=b^{-1}a^{-1}$。

17. 设 R 是环，令：

$C=\{x\mid x\in R\wedge\forall a\in R(xa=ax)\}$

C称作 R的中心，证明 C是 R的子环。

证明：
显然，C 是 R 的子集；
设 e 为R的幺元，$\forall a \in R, ea = ae = a$，符合C的定义，因此$e \in C$；对于任意元素$a \in R$，

显然其逆元$a^{-1} \in C$；设$a, b, c \in C$，则$abc = bac$，

所以$c = ab \in C$。

18. 给定域$\langle R, +, \cdot\rangle$，且$S \subseteq R, S$定义为：
$S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$
其中 R，Q分别为实数集合和有理数集合。试证：$\langle S, +, \cdot\rangle$为$\langle R, +, \cdot\rangle$的子域。

证明：
（1）显然，由定义可知，$S \in R$；
（2）$a\text{-}b \in S$：

$\exists a, b \in S$，令$a = x_1 + y_1\sqrt{2}, x_1, y_1 \in Q$，$b = x_2 + y_2\sqrt{2}, x_2, y_2 \in Q$，

则有：$a - b = \left(x_1 - x_2\right) + \left(y_1 - y_2\right)\sqrt{2}$，

又因为，$(x_1 - x_2) \in Q, (y_1 - y_2) \in Q$，所以$(a - b) \in S$。

（3）$a \bullet b^{-1} \in S$：

$\exists a, b \in S$，令$a = x_1 + y_1\sqrt{2}, x_1, y_1 \in Q$，$b = x_2 + y_2\sqrt{2}, x_2, y_2 \in Q$，

对于乘法运算，幺元为 1，所以，

$bb^{-1} = 1 = (x_2 + y_2\sqrt{2})b^{-1}$，

所以得到，$b^{-1} = \dfrac{x_2}{x_2^2 - 2y_2^2} + \dfrac{y_2}{x_2^2 - 2y_2^2}\sqrt{2} \in Q$，

根据封闭性可知，$a \bullet b^{-1} \in S$.
综上所述，$\langle S, +, \cdot\rangle$为$\langle R, +, \cdot\rangle$的子域。

第 8 章 格与布尔代数

1. 设 S 是所有命题组成的集合，说明 S 在什么运算下构成代数格，在什么偏序下构成偏序格。

解：设 R 是集合 S 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的和可传递的，则 R 为 S 上的偏序关系，简称偏序，偏序 R 和集合 S 一起叫做偏序集。在偏序集中，对于集合 S 中的任意两个元素组成的集合都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序构成格。

2．设<L，×，+>是一个格，a，b∈L，令 S={x|（x∈L）∧（a≤x≤b）}，其中≤是与<L，×，+>等价的偏序格中的偏序，证明<S，×，+>是 L 的子格。

证明：对任意的 $x, y \in S$，有 $a \le x \le b$，$a \le y \le b$，从而有：

$a \times a \le x \times y \le b \times b$，$a + a \le x + y \le b + b$

即 $a \le x \times y \le b$，$a \le x + y \le b$，因此，$x \times y, x + y \in L$，故运算×,+ 在 S 上是封闭的，所以<S，×，+>是 L 的子格。

3．设 D 是集合 S 上的整除关系，判断以下偏序集是否为格。

（1）S={1, 2, 3, 4, 6, 12}。

（2）S={1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12}。

（3）S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}。

（4）S={2, 4, 6, 12, 24, 36}。

解：

（1）是格；

（2）不是格，10 和 12 的公倍数不在 S 内；

（3）不是格，9 和 12 的公倍数不在 S 内；

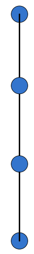
（4）不是格，24 和 36 的公倍数不在 S 内。

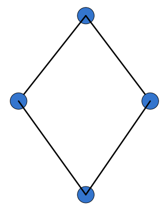
3．**证明**：4 个元素的格<L，×，+>必同构于格<I_4，≤>或格<S_6, D>。

证明：设<L，×，+>的 4 个元素分别为 11，12，13，14，

因为<L，×，+>为 4 个元素的格，因此存在上界 11 和下界 14，则元素 12，13 在哈斯图中要么并列，要么串连显示。

格<I4，≤>和格<S6,D>的哈斯图分别为：





因此，格<L，×，+>的哈斯图必然相同于格<I4，≤>或格<S6,D>，即格<L，×，+>必同构于格<I4，≤>或格<S6,D>。

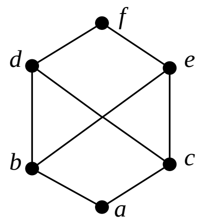
5．试举出满足下列条件的例子。

（1）是偏序集，不是格。

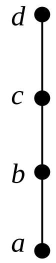
（2）是分配格，不是布尔代数。

解：

（1）用哈斯图表示：是偏序集，但不是格



（2）用哈斯图表示：是分配格，不是布尔代数



6．设 L 是格，a，b，$c\in L$，且 $a\leqslant b\leqslant c$，证明：$a\vee b=b\wedge c$。

证明：

因为 $a\le b$，所以可得 $a\vee b=b$；

又因为 $b\le c$，所以 $b\wedge c=b$，

因此，$a\vee b=b\wedge c$。

7．设<L，$\leqslant$>是格，任取 $a\in L$，令

$$S=\{x\,|\,x\in L\wedge x\leqslant a\},$$

证明：<S，$\leqslant$>是 L 的子格。

证明：因为 $a\le a$，所以 $a\in S$，即 S 是非空子集。

对任意 $x,y\in S$，由 $x\le a,y\le a$ 可知：

$x*y=GLB\ \ x,y\ \ \le a$，即 $x*y=GLB\ \ x,y\ \ \in S$

$x\oplus y=LUB\ \ x,y\ \ \le a$，即 $x\oplus y=LUB\ \ x,y\ \ \in S$

所以，<S，$\leqslant$>是 L 的子格。

8．设<L，$\wedge$，$\vee$，0，1>是有界格，证明 $\forall a\in L$，有

$$a\wedge 0=0,\ a\vee 0=a,\ a\wedge 1=a,\ a\vee 1=1$$

解：<L，$\wedge$，$\vee$，0，1>是有界格，且 a∈L，所以 $0\le a\le 1$，

因为 $a\wedge 0\in L$ 且 0 是全下界，所以 $0\le a\wedge 0$，又因为 $a\wedge 0\le 0$，因此 $a\wedge 0=0$；

因为 $a\le a,0\le a$，所以 $a\vee 0\le a$，又因为 $a\le a\vee 0$，因此 $a\vee 0=a$；

同理可证 $a\wedge 1=a$，$a\vee 1=1$

9．设 B 是布尔代数，B 中的表达式 f 是

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(b\wedge c)$$

（1）化简 f。

（2）求 f 的对偶式 f^*。

解：

（1）因为 $a\wedge b\ \ge\ a\wedge b\wedge c$，所以 $a\wedge b\ \vee\ a\wedge b\wedge c\ =a\wedge b$；

$f=\ a\wedge b\ \vee\ a\wedge b\wedge c\ \vee\ b\wedge c$

$=\ a\wedge b\ \vee\ b\wedge c$

（2）f 的对偶式 f *为：$a\vee b\ \wedge\ a\vee b\vee c\ \wedge\ b\vee c\ =\ a\vee b\ \wedge\ b\vee c$。

10．设 B 是布尔代数，$\forall a$，$b\in B$，证明：$a\leqslant b\leftrightarrow a\wedge b'=0\leftrightarrow a'\vee b=1$

证明：

（1） $a\le b\leftrightarrow a\wedge b'=0$

因为$a\le b$，所以有$a\wedge b=a, a\vee b=b$，

因此可得

$a\wedge b'=a\wedge b\wedge b'=a\wedge\ b\wedge b'\ =a\wedge 0=0$

所以$a\le b\to a\wedge b'=0$；

又因为$a\wedge b'=0$，所以 $a\wedge b'\ \vee b=b$，因而 $a\vee b\ \wedge\ b\vee b'\ =a\vee b=b$，所以 $a\le b$，因此，$a\le b\leftrightarrow a\wedge b'=0$ 。

（2） $a\wedge b'=0\leftrightarrow a'\vee b=1$

因为$a\wedge b'=0$，所以 $a\wedge b'\ '=1$，即$a'\vee b=1$，因此$a\wedge b'=0\to a'\vee b=1$

因为$a'\vee b=1$，所以 $a'\vee b\ '=0$ ，即$a\wedge b'=0$，因此$a\wedge b'=0\leftarrow a'\vee b=1$

因此，$a\wedge b'=0\leftrightarrow a'\vee b=1$ 。

综上所述：$a\le b\leftrightarrow a\wedge b'=0\leftrightarrow a'\vee b=1$。

11．设B是布尔代数，且$a_1,a_2,a_3\ldots,\ a_n\in B$，证明：

（1）$(a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n)'=a_1'\wedge a_2'\wedge a_3'\wedge\ldots\wedge a_n'$ 。

（2）$(a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n)'=a_1'\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'$ 。

证明：

（1） $(a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n)'=a_1'\wedge a_2'\wedge a_3'\wedge\ldots\wedge a_n'$

因为：

$a_1'\wedge a_2'\wedge a_3'\wedge\ldots\wedge a_n'\ \vee\ a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n$

$=\ a_1'\vee a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n\ \wedge\ a_1\vee a_2'\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n\ \wedge\ldots\wedge\ a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n'\vee a_n$

$=\ 1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n\ \wedge\ a_1\vee 1\vee a_3\vee\ldots\vee a_n\ \wedge\ldots\wedge\ a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee 1$

$=1$

又因为：

$a_1'\wedge a_2'\wedge a_3'\wedge\ldots\wedge a_n'\ \wedge\ a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n$

$=\ a_1'\wedge a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n\ \vee\ a_1\wedge a_2'\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n\ \vee\ldots\vee\ a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n\wedge a_n'$

$=\ 0\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n\ \vee\ a_1\wedge 0\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n\ \vee\ldots\vee\ a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge 0$

$=0$

因此，$(a_1\vee a_2\vee a_3\vee\ldots\vee a_n)'=a_1'\wedge a_2'\wedge a_3'\wedge\ldots\wedge a_n'$ 。

（2） $(a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n)'=a_1'\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'$

因为：

$a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\ldots\wedge a_n\ \vee\ a_1'\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'$

$=\ a_1'\vee a_1\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'\ \wedge\ a_1'\vee a_2'\vee a_2\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'\ \wedge\ldots\wedge\ a_1'\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n\vee a_n'$

$=\ 1\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'\ \wedge\ a_1'\vee 1\vee a_3'\vee\ldots\vee a_n'\ \wedge\ldots\wedge\ a_1'\vee a_2'\vee a_3'\vee\ldots\vee 1$

$=1$

又因为：

$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n \ \wedge \ a_1' \vee a_2' \vee a_3' \vee \ldots \vee a_n'$

$= \ a_1' \wedge a_1 \wedge a_2' \wedge a_3' \wedge \ldots \wedge a_n' \ \vee \ a_1' \wedge a_2' \wedge a_2 \wedge a_3' \wedge \ldots \wedge a_n' \ \vee \ldots \vee \ a_1' \wedge a_2' \wedge a_3' \wedge \ldots \wedge a_n \wedge a_n'$

$= \ 0 \wedge a_2' \wedge a_3' \wedge \ldots \wedge a_n' \ \vee \ a_1' \wedge 0 \wedge a_3' \wedge \ldots \wedge a_n' \ \vee \ldots \vee \ a_1' \wedge a_2' \wedge a_3' \wedge \ldots \wedge 0$

$= 0$

因此，$(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee a_3' \vee \ldots \vee a_n'$ 。

12．画出下列格。

（1）$\langle Z_{16}$，$\oplus\rangle$的子群格。

（2）3 元对称群 S_3 的子群格。

解：

（1）16 的约数有 1, 2, 4, 8, 16，所以子群有：

$\langle 1\rangle = \langle Z_{16}, \oplus\rangle$，

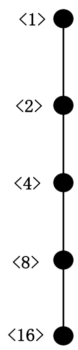
$\langle 2\rangle = \langle\{[0], [2], [4], [6], [8], [10], [12], [14]\}, \oplus\rangle$，

$\langle 4\rangle = \langle\{[0], [4], [8], [12]\}, \oplus\rangle$，

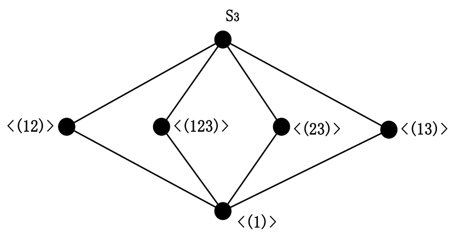
$\langle 8\rangle = \langle\{[0], [8]\}, \oplus\rangle$，

$\langle 16\rangle = \langle\{[0]\}, \oplus\rangle$，

$\langle Z_{16}$，$\oplus\rangle$的子群格为：



（2）



13．设*为集合 S 上可交换、可结合的二元运算，若 a 和 b 是 S 上的关于*运算的等幂元，证明 $a*b$ 也是关于*运算的等幂元。

证明：由题意可知 $a*a = a$，$b*b = b$，所以：

$a*b \ * \ a*b$

$= a*b*a*b$

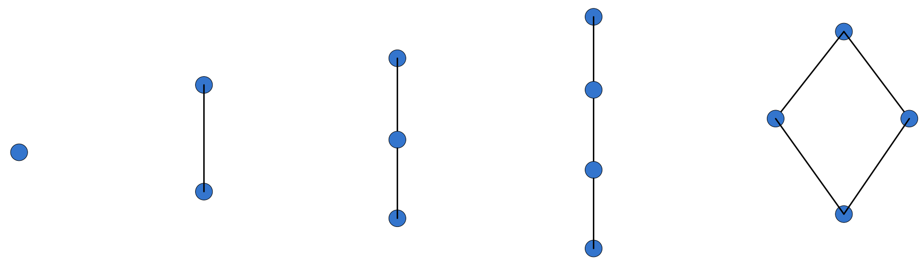
$= \ a*a \ * \ b*b$

$= a*b$

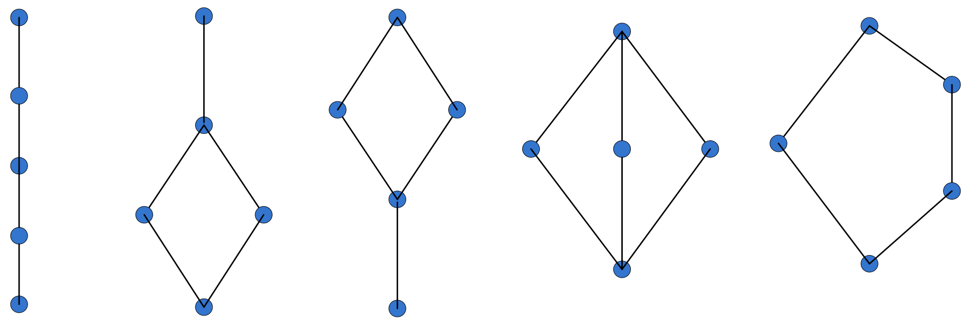
因此，$a*b$ 是关于* 运算的等幂元。

14．对于 n=1, 2, 3, 4, 5，给出所有不同构的 n 元格，并说明其中哪些是分配格、有补格和布尔格。

解：



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)



(6)　(7)　(8)　(9)　(10)

布尔格：(1)，(2)，(5)；

分配格：(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)；

有补格：(1)，(2)，(5)，(9)，(10)。

第 9 章　图的基本概念及其矩阵表示

1. 画出图 $G=\langle V,E,\psi\rangle$ 的图示，指出其中哪些图是简单图并给出各结点的度（出度、入度）。

（1）$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$

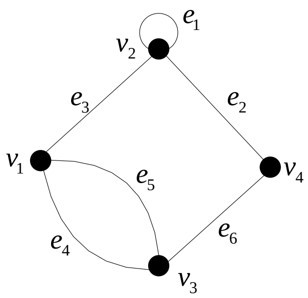
$\psi=\{\langle e_1,\{v_2\}\rangle,\langle e_2,\{v_2,v_4\}\rangle,\langle e_3,\{v_1,v_3\}\rangle,\langle e_4\{v_1,v_3\}\rangle,\langle e_5\{v_1,v_3\}\rangle,\langle e_6\{v_3,v_4\}\rangle\}$

（2）$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$

$E=\{e_i \mid i\in I_+ \wedge 1\leqslant i\leqslant 11\}$

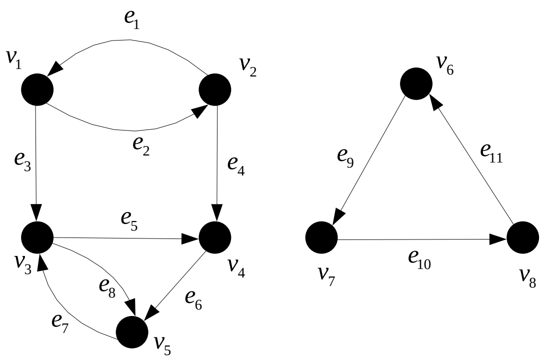
$$\psi=\{\langle e_1,\langle v_2,v_1\rangle\rangle,\langle e_2,\langle v_1,v_2\rangle\rangle,\langle e_3,\{v_1,v_3\}\rangle,\langle e_4,\langle v_2,v_4\rangle\rangle,\langle e_5\langle v_3,v_4\rangle\rangle,\langle e_6\langle v_4,v_5\rangle\rangle,\langle e_7\langle v_5,v_3\rangle\rangle,$$
$$\langle e_8\langle v_3,v_5\rangle\rangle,\langle e_9\langle v_6,v_7\rangle\rangle,\langle e_{10}\langle v_7,v_8\rangle\rangle,\langle e_{11}\langle v_8,v_6\rangle\rangle\}$$

解：（1）



不是简单图。

（2）



是简单图。

2．下列各组数中，哪些能构成无向图的度序列？哪些能构成无向简单图的度序列？

（1）1,1,1,2,3。

（2）2,2,2,2,2。

（3）3,3,3,3。

（4）1,2,3,4,5。

（5）1,3,3,3。

解：(1)，(2)，(3)，(5) 能够成无向图的度序列，其中 (1)，(2)，(3) 能够成无向简单图的度序列。

3．写出图 9.34 的抽象数学定义。

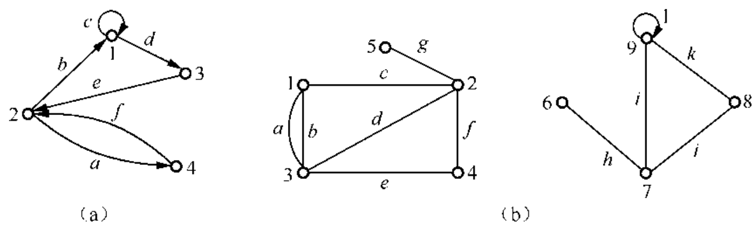


图 9.37

（1） 解：$G=\langle V,E,\psi\rangle$，其中 $V=\{1,2,3,4\}$，

$E=\{a,b,c,d,e,f\}$，

$\psi=\{<a,<2,4>>,<b,<1,2>>,<c,<1,1>>,<d,<1,3>>,<e,<3,2>>,$
$<f,<4,2>>\}$

（2） 解：$G=\langle V,E,\psi\rangle$，其中 $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$E=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$

$\psi=\{<a,\{1,3\}>,<b,\{1,3\}>,<c,\{1,2\}>,<d,\{2,3\}>,<e,\{3,4\}>,$
$<f,\{2,4\}>,<g,\{2,5\}>,<h,\{6,7\}>,<i,\{7,9\}>,<j,\{7,8\}>,<k,\{8,9\}>,$
$<l,\{9,9\}>\}$

4．设图 $G=<V,E>,|V|=8$, 若 G 有三个 3 度结点，两个 2 度结点，三个 1 度结点，试问：G 有多少条边?

解：度数之和为 16， $\dfrac{3\times3+2\times2+3\times1}{2}=\dfrac{16}{2}=8$条 ，因此应该有 8 条边。

5．图 G 有 12 条边，三个度为 4 的结点，其余结点的度均为 3，问图 G 有多少个结点？

解：由于图中有 12 条边，所以度数之和应为 24，三个 4 度结点的度数之和是 12，则其余度数之和也为 12，而其余结点的度均为 3，所以 3 度结点应该有 4 个，因此图中应有结点 7 个。

6．证明在 n 阶简单有向图中，完全有向图的边数最多，其边数为 $n(n-1)$。

证明：简单有向图是没有自环，没有平行边的有向图，只要两个不同的结点之间才能有边。完全有向图是每个结点的出度和入度都是 $n-1$ 的简单有向图，也就是每个结点都有到其他所有结点的边，因此，完全有向图的边数最多。

在完全有向图中，所有结点的出度之和为 n(n-1)，所有结点的入度之和为 n(n-1)，设边的个数为 m，由握手定理可知，2m= n(n-1)+ n(n-1)，即 m= n(n-1)，得证。

7．图 9.35 的两个图是否同构？若两图同构，写出结点之间的对应关系；若不同构，则说明理由。

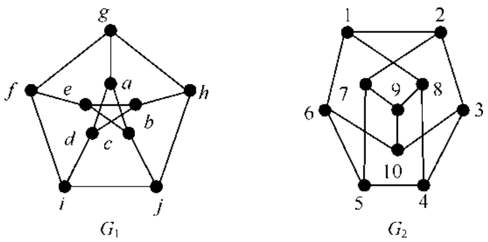


图 9.38

解：同构。结点的对应关系为：g->1, a->8, h->2, b->7, i->10, c->4, j->3, d->9, f->6, e->5.

8．图 9.36 中的两个图是否同构，说明理由。

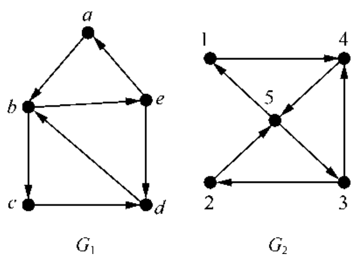


图 9.39

解：同构。因为 G1 与 G2 结点之间存在一一对应关系，变得方向一致，其对应关系为：a->2， b->5， c->1， d->4， e->3。

9．证明任何阶大于 1 的简单无向图必有两个结点的度数相等。

证明：考虑一个有 n 个结点的连通图（如果有一个孤立结点，去掉孤立结点考虑联通子图）。因为是无向连通图，每个结点的最大度数是 n-1，最小度数是 1。即对 n 个点赋值，共 n-1 种取值，由抽屉原理，必有两个结点的取值相同，即必有两个点的度数相同。

10．设 n 阶无向图 G 有 m 条边，其中 n_k 个结点的度数为 k，其余结点的度数为 $k+1$，证明 $n_k=(k+1)n-2m$。

证明：由题意，结点数为 n，由总边数建立关系：

$m=\dfrac{n_k\cdot k+(n-n_k)(k+1)}{2}$，由此可得：$n_k=(k+1)n-2m$。

11．（1）试证明，若无向图 G 中只有两个奇点，则这两个结点一定是连通的。

（2）若有向图 G 中只有两个奇点，它们一个可达另一个或互相可达吗？

（1）证明：设 G 中的两个奇度结点分别为 u 和 v，若 u 与 v 不连通，即它们之间无通路，则 G 至少有两个连通分支。记一个连通分支 G1，G2=G-G1，这时 u、v 分别属于 G1 和 G2，于是 G 的子图 G1 和 G2 各含有一个奇度结点，这与握手定理的推断是矛盾的，因此 u 与 v 一定是连通的。

（2）解：若有向图 G 中只有两个奇度结点 u 和 v，u 与 v 不一定相互可达，也不一定一个可达另一个。例如：图 G=<V,E>（其中 V={u,v,w}，E={（u,w)，（v,w）}）中，结点 u、v 的度数均为 1，w 的度数为 2，但 u 不可达 v，v 也不可达 u。

12．证明图 9.37 中的基本路径必为简单路径。

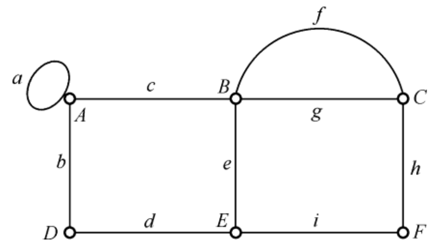


图 9.40

证明：基本路径要求途经的顶点不重复，简单路径要求途经的边不重复。在图中，对于所有的基本路径，边不重复出现。所以基本路径必是简单路径。

13．在图 9.38 所示的 4 个图中，哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是弱连通图？

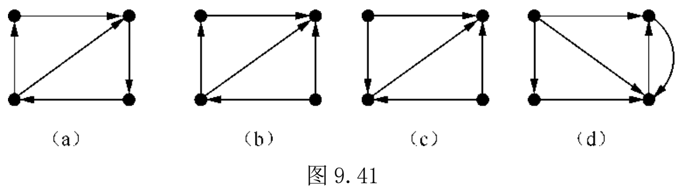


图 9.41

解：（a）是强连通图，（a）（b）（d）是单向连通图，（a）（b）（c）（d）是弱连通图。

14. 考虑图 9.43

(1) 对于每个结点 v，求 $R(v)$。

(2) 找出所有强分支，单向分支，弱分支。

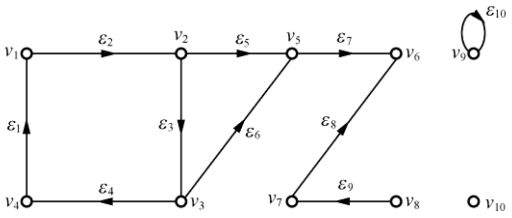


图 9.43

(1) 图略。

解：$R(v_1)=R(v_2)=R(v_3)=R(v_4)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},$

$R(v_5)=\{v_5,v_6\},R(v_6)=\{v_6\},R(v_7)=\{v_6,v_7\}$

$R(v_8)=\{v_6,v_7,v_8\},R(v_9)=\{v_9\},R(v_{10})=\{v_{10}\}$

(2)

解：强分支 7 个，分别是$\{v_9\},\{v_{10}\},\{v_8\},\{v_7\},\{v_6\},\{v_5\},\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

单项分支 4 个，分别是$\{v_9\},\{v_{10}\},\{v_6,v_7,v_8\},\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

弱分支 3 个，分别是$\{v_9\},\{v_{10}\},\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$

15. 设 v_1，v_2，v_3是任意无向图（有向图）G的三个任意结点，以下三个公式是否成立？如果成立，给出证明；如果不成立，举出反例。

(1) $d(v_1,v_2)\geqslant 0$，并且等号成立，当且仅当$v_1=v_2$。

(2) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$。

(1) 解：成立。当$v_1=v_2$时，距离必定大于 1。

(2) 解：成立。因为无向图是无方向的。

16. 有向图的每个结点（每条边）是否恰处于一个强分支中？是否恰处于一个单向分支中？

解：有向图中的每个结点处于一个强分支中，而边不一定。有向图的结点和边可能出现在两个单向分支中。

17. 设图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，其中

$V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\}$

$E=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,p\}$

$\psi=\{\langle a,\langle 1,6,\rangle\rangle,\langle b,\langle 1,8\rangle\rangle,\langle c,\langle 1,7\rangle\rangle,\langle d,\langle 7,6\rangle\rangle,\langle e,\langle 8,7\rangle\rangle,\langle f\langle\langle 6,4\rangle\rangle,\langle g,\langle 7,5\rangle\rangle,\langle h,\langle 8,3\rangle\rangle,\langle i,\langle 5,8\rangle\rangle,$
$\langle j,\langle 4.5\rangle\rangle,\langle k,\langle 5,3\rangle\rangle,\langle i,\langle 4,3\rangle\rangle,\langle m,\langle 4,2\rangle\rangle,\langle n,\langle 5,2\rangle\rangle,\langle p,\langle 3,2\rangle\rangle,\}$

判断 G 是否有有向回路。

解：存在。只需要找到起点和终点是同一个点的有向边序列即可。如：4j5i8e7d6f4; 5i8e7g5; 8e7g5i8; 7g5i8e7;

18．设（n，m）一简单图 G 满足 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明 G 必是连通图。构造一个 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 的非连通简单图。

证明：假设 G 不连通，分支 $G_1, G_2, \cdots G_k$，那么他们的边数的最大值 $\max(\mathrm{m}) = \sum(\mathrm{n}_i - 1)\mathrm{n}_i / 2 \le \sum(\mathrm{n}_i - 1)(\mathrm{n}-1)/2 = (\mathrm{n}-1)/2\sum(\mathrm{n}_i - 1) = (\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-\mathrm{k})/2$，所以只有当 k=1 时才能满足题设要求，G 是连通的。如果将顶点集合分成两个点集，|V1|=1，|V2|=n-1，构成如下的有两个分支的非联通简单图，G1=（1,0），G2=Kn-1,满足题设要求的条件。

19．设 G 是阶数不小于 3 的连通图，证明下面四条命题相互等价。
（1）G 无割边。
（2）G 中任何两个结点位于同一回路中。
（3）G 中任何一结点和任何一边都位于同一回路中。
（4）G 中任何两边都在同一回路中。

证明：（1）=>（2）
因为 G 连通，且 G 无割边，所以任意两个结点 u,v 都存在简单道路 $p = u\cdots wv$。又因为 G 无割边，所以删除边 wv 后，子图依然连通，即 w,v 存在简单道路 p'，以此类推，可以找到一条和 p 每条边都不相同的 $p'' = v\cdots u$，这样 p 和 p'' 就构成了一条回路。
（2）=>（3）
因为 G 中任意两个节点都位于同一回路中，所以任意结点 u 和任意边 e 的两个端点 v_1, v_2 都分别在两给回路 c_1, c_2 中，如果 c_1=c_2=$u\cdots v_1\cdots v_2\cdots u$，那么将回路中 $v_1\cdots v_2$ 用 $v_1v_2 = e$ 替换，就得到新的回路，并满足要求。如果 $c_1 != c_2, c_1 = u\cdots v_1\cdots u, c_2 = u\cdots v_2\cdots u$，那么构成新的道路 $p = u\cdots v_1 u\cdots v_2\cdots u$，在其中将重复边剔除，得到新的回路 c_3，其中包含 v_1, v_2 结点，可以将回路中 $v_1\cdots v_2$ 用 $v_1v_2 = e$ 替换，就得到新的回路，并满足要求。
（3）=>（4）
对任意两条边 e_1, e_2 其端点分别为 u_1, u_2, v_1, v_2。根据（3）存在回路 $c_1 = u_1\cdots v_1v_2\cdots u_1, c_2 = u_2\cdots v_1v_2\cdots u_2$．那么可以形成新的闭道路 $p = u_1\cdots v_1v_2\cdots u_2\cdots v_1v_2\cdots u_1$，在其中将重复边剔除得到新的回路 c_3，其中包含 e_2 和 u_1, u_2 结点，可以将回路中 $u_1\cdots u_2$ 用 u_1u_2=e_1 替换，就得到新的回路，包含 e_1, e_2，满足要求。
（4）=>（1）
以为任意两条边都在同一回路中，所以不存在割边。假设 e 是割边，那么删除此边，图不连通，分支中的任何一对不在同一分支中的边，不能构成回路，与条件矛盾。所以，G 中无割边。

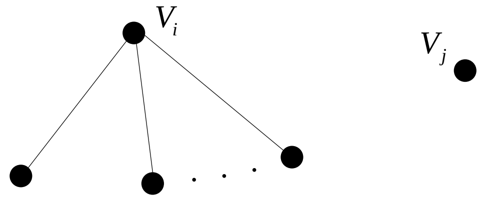
20．证明有 k 个弱分支的 n 阶简单有向图至多有 $(n-k)\times(n-k+1)$ 条边。

证明：

$$\max(m)=\sum(n_i-1)n_i\le\sum(n_i-1)(n-k+1)=(n-k+1)\sum(n_i-1)=(n-k+1)(n-k)$$

21．设 G 为 n 阶简单无向图，对于 G 的任意结点 v，$d_G(v)\geqslant(n-1)/2$，证明 G 是连通的。

证明：



任取 V_i,V_j，因为 $d_G(v)\ge(n-1)/2$，故至少存在 $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ 个点与 V_i 相连，最多还剩余 $n-2-\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil-1<\frac{n-1}{2}$（除去 V_i,V_j 剩余的点）。故对于 V_j 至少存在一个与 V_i 连接的点与 V_j 相连，因此 V_i 与 V_j 联通。由 V_i 与 V_j 选取的任意性，G 联通。

22．求图 9.44 的直径，全部强分图和单向分图。

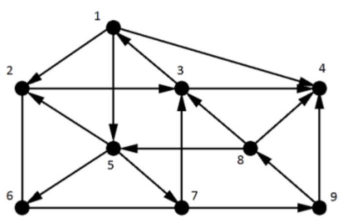


图 9.44

解：用邻接矩阵求解，可得到此图包含两个强分图，一个是只包含画圈结点，另一个包含所有其他结点。由于两个强分图之间存在有向道路，因此全部结点构成单向分图。

23．图 9.41 给出了一个加权图，旁边的数字是该边上的权，求出从 v_1 到 v_{11} 的加权距离。

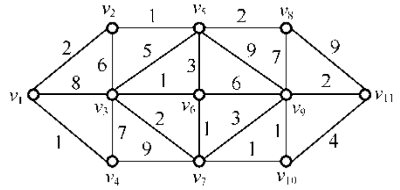
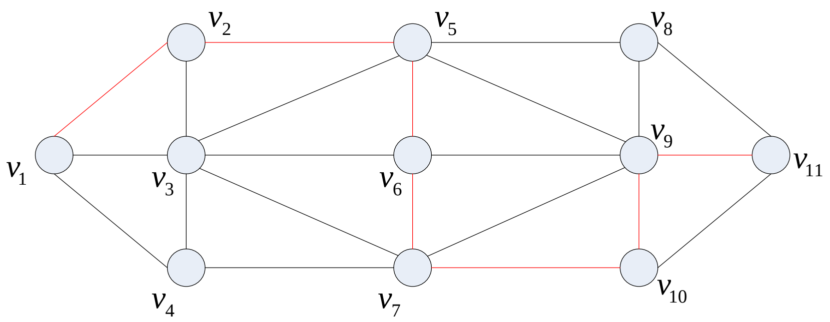


图 9.44

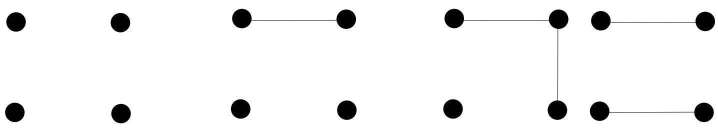
解：



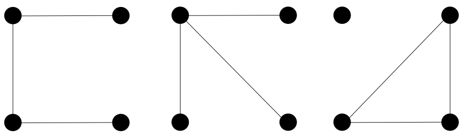
v_1到v_{11}的距离路径如上图红色线$v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_6 \to v_7 \to v_{10} \to v_9 \to v_{11}$，加权距离为：2+1+3+1+1+1+2=11

24．画出 k_4的所有不同构的子图，并说明其中哪些是生成子图，找出互为补图的生成子图。

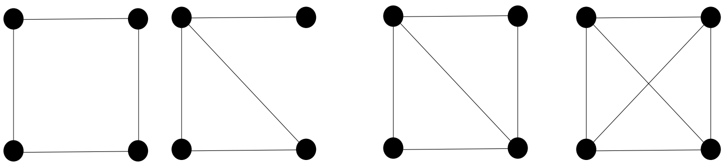
解：以及点数分别为 1,2,3 的点的子集，及其对应所有的不同构的图的集合。下图仅为当点集中点数为 4 时，所对应的子图。



(1) (2) (3)



（4）



(5) (6) (7)

其中，（1）和（7），（2）和（6），（3）和（5），（4）中的后两个图可以构成互补的生产子图。

25．画出图 9.42 的两个图的交、并和环和。

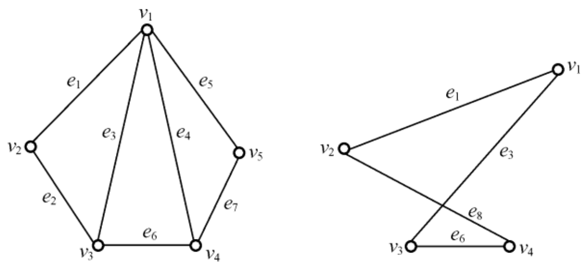
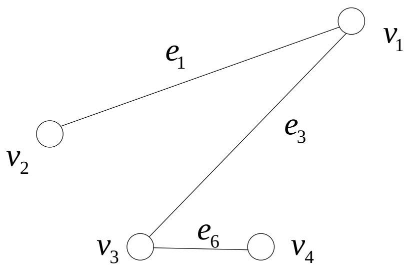
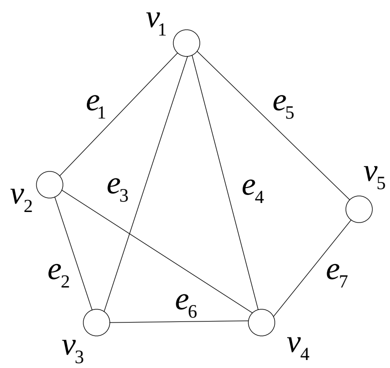


图 9.45

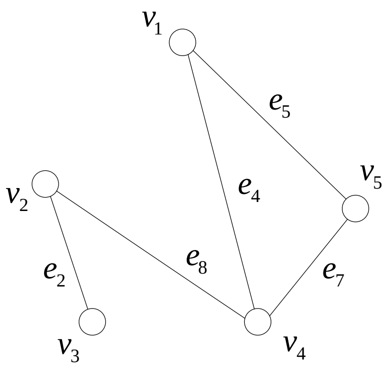
解：

交：　　　　　　　　　　　　　　　　　并：





环和：



26．证明：没有 3 阶完全无向图的子图的 n 阶简单无向图，最多有 $[n^2/4]$ 条边。

证明：用数学归纳法：

(1)当 n=3 时，显然成立。最多有 2 条边。$\left[\dfrac{3^2}{4}\right]=2$

(2)设当 n=k（$k \geq 4$）时成立，即最多有 $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ 条边，

当 n=k+1 时，

①若 k 是偶数，则第 k+1 个结点最多 k/2 个边（否则会构成 K3），

$\left[\dfrac{k^2}{4}\right]+\dfrac{k}{2}=\dfrac{k^2+2k}{4}\leq\left[\dfrac{k^2+2k+1}{4}\right]=\left[\dfrac{(k+1)^2}{4}\right]$，成立。

②当 k 是奇数时，则第 k+1 个结点最多有 $\dfrac{k+1}{2}$ 个边，

$\left[\dfrac{k^2}{4}\right]+\dfrac{k+1}{2}=\left[\dfrac{k^2-1}{4}\right]+\dfrac{k+1}{2}\leq\left[\dfrac{k^2-1+2k+2}{4}\right]=\left[\dfrac{(k+1)^2}{4}\right]$，成立。

综上，原命题成立。

27．设无向图 $G=\langle V, E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

（1）试问 $d(v_1)$ = ？ $d(v_2)$ = ？
（2）图 G 是否为完全图 ？
（3）从 v_1 到 v_2 长为 3 的路有多少条?
（4）借助图解表示法写出从 v_1 到 v_2 长为 3 的每一条路。

解：（1） $d(v_1)=2, d(v_2)=3$

（2）不是完全图

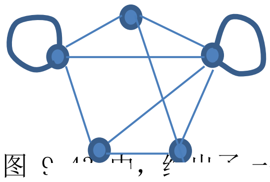
（3）4 条

（4） $v_1v_2v_1v_2, v_1v_2v_3v_2, v_1v_2v_4v_2, v_1v_4v_1v_2$.

28．画出邻接矩阵为 A 的无向图 G 的图形，其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

解：



29．在图 9.[illegible]中，给[illegible]一个简单有向图。试求出给定有向图的邻接矩阵。求出从结点 v_1 到 v_4 的长度为[illegible]的基[illegible]径。试证明，还存在一个长度为 4 的简单路径。用计算矩阵 A^2，A^3 和 A^4 的方法，来证实这些结果。

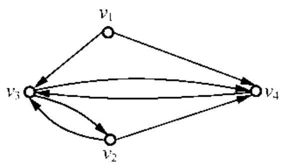


图 9.46

解：根据图得：

v_1 到 v_4：

长度为 1 的基本路径为：$v_1 \to v_4$

长度为 2 的基本路径为：$v_1 \to v_3 \to v_4$

$$\text{长度为 4 的基本路径为：}\begin{matrix}v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_3 \to v_4\\ v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_4\\ v_1 \to v_3 \to v_4 \to v_3 \to v_4\end{matrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}0&2&3&3\\0&2&3&3\\0&1&4&3\\0&2&1&2\end{bmatrix}$$

30．有向图 G 如图 9.44 所示。

（1）写出图 G 的邻接矩阵 A。

（2）G 中长度为 3 的通路有多少条？其中有几条为回路？

（3）利用图 G 的邻接矩阵 A 的布尔运算求该图的可达性矩阵 P，并根据 P 来判断该图是否为强连通图，单向连通图。

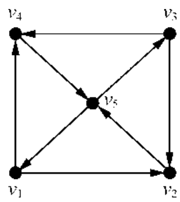


图 9.47

解：（1）图 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{bmatrix}\ A^3=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}\ p=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

（2）为了求 G 中长度为 3 的通路，就要计算 A_3，有 20 条。长度为 3 的回路有 12 条。

（3）因为 P 中每个元素都是 1，所以 G 是强连通的，当然也是单向连通的。

31．对于图 9.44 中的有向图，试求出邻接矩阵 A 的转置 A^T，AA^T 和 A^TA，列出矩阵 $A\wedge A^T$ 的元素值，并说明它们的意义。

解：A^T 表示有向图逆图的邻接矩阵，即原图中如果有第 i 个结点到第 j 个结点长度为 1 的路径，则 A^T 中第 j 行第 i 列为 1；

第 i 个结点和第 j 个结点引出的边，可以同时终止于某些结点，这些结点的个数为 AA^T 中第 i 行第 j 列的元素值。

从某些结点引出的边，可以同时终止于第 i 个结点和第 j 个结点，这些结点的个数为 A^TA 中第 i 行第 j 列的元素值。

$A\wedge A^T$ 中第 i 行第 j 列对应元素为 1 表示从第 i 个结点和第 j 个结点引出的边，可以同时终止于某些结点；为 0 表示第 i 个结点和第 j 个结点引出的边，不可以同时终止于

某个结点。

32．试求图 9.44 中有向图的路径矩阵 $p = A^{+}$。

解：路径矩阵如图：

$$p=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

33．求出图 9.45 和 9.46 的关联矩阵。

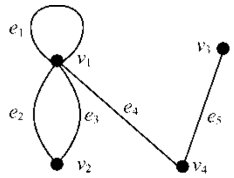


图 9.48

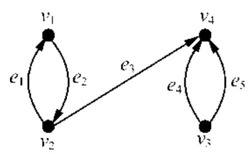


图 9.49

解：关联矩阵分别为：

$$M_5=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix},\quad M_6=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

第 10 章 几种图的介绍

1．确定图 10.63 的 6 个图像哪个是欧拉图，欧拉有向图？找出其中的一条欧拉闭路。

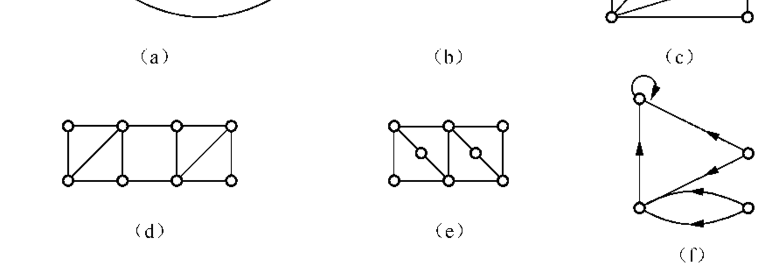


图 10.63

解：a)，b)，c)是欧拉图，d)，e)，f)不是欧拉图。为欧拉图的无向连通图均有一条欧拉闭路。

2.设连通图 G 有 k 个奇数度的结点，证明在图 G 中至少要添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使其成为欧拉图。

证明：任何图中度数为奇数的结点必是偶数，可知 k 是偶数.

图 G 是欧拉图的充分必要条件是图 G 不含奇数度结点. 因此只要在每对奇数度结点之间各加一条边，使图 G 的所有结点的度数变为偶数，成为欧拉图.

故最少要加 $\frac{k}{2}$ 条边到图 G 才能使其成为欧拉图.

3. n 为何值时，无向完全图 K_n 是欧拉图? n 为何值时 K_n 仅存在欧拉链而不存在欧拉回路?

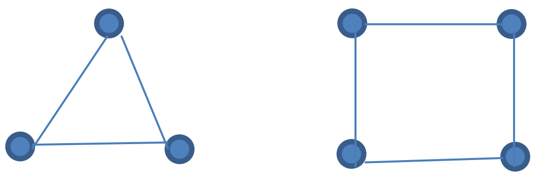
解：当 n=2k+1（k 为正整数）时，Kn 是欧拉图。当 n=2 时，Kn 仅存在欧拉链而不存在欧拉回路。

4. 如果 G_1 和 G_2 是可运算的欧拉有向图，则 $G_1 \oplus G_2$ 仍是欧拉有向图。这句话对吗？如果对，给出证明，如果不对，举出反例。

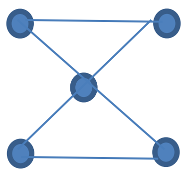
证明：正确。参照定理 10.5 的证明，对于有向图运算后仍然是有向图。

5. 构造 (n, m) 一欧拉图使满足条件：（1）m 和 n 有相同奇偶性；（2）m 和 n 的奇偶性相反。

解：（1）



（2）



6. 在图 10.64 所示的图中，哪些图中有哈密尔顿圈，那些图中有哈密尔顿路？

解：在图中（2）（3）（4）中有哈密尔顿圈，（1）（5）中只有哈密尔顿路而没有哈密尔顿圈。（1）中的路为 abcdejhgig；（2）中的圈为 afidejhcbga；（3）中的圈为 agkfeicbhdja；（4）中的圈为 abrfgcdihja；（5）中的路为 jabihfgkdec。

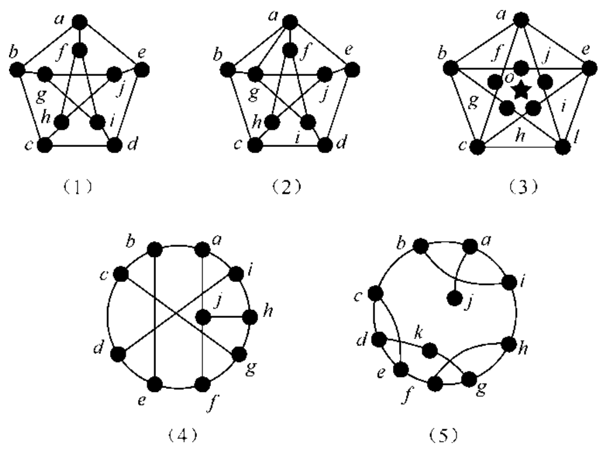


图 10.64

7. 证明图 10.65 所示的图不是哈密尔顿图。

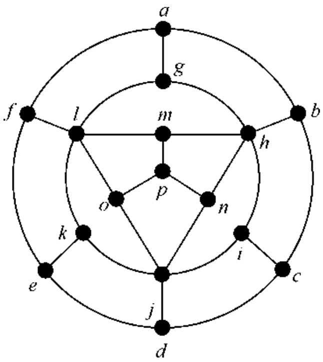


图 10.65

证明：设 V1={a, c, e, h, j, l, p}，则有 w(G-V1)=9>7=|V1|，所以它不是哈密尔顿图。

8．证明凡有割点的图都不是哈密顿图。

证明:反证法，假设存在有个点 v 的图是哈密尔顿图，那么此图存在哈密尔顿圈。在此圈中删除割点 v，那么剩下的结点依然连通。这和割点的定义相矛盾，所以题设命题成立。

9．图 10.66 中的各个图是否能够一笔画出？如果能够，给出具体的画法。

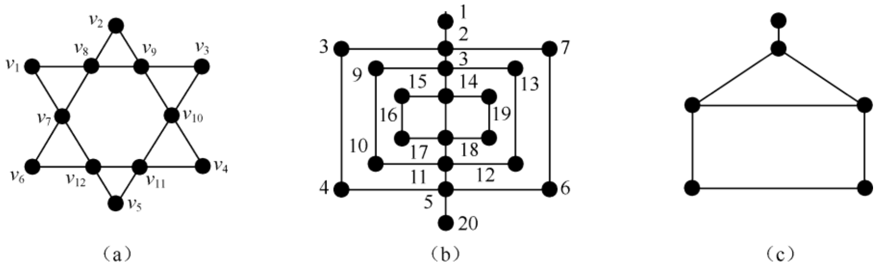


图 10.66　判定一笔画

解：（a）（b）能够一笔画出，但（c）不能够一笔画出。具体画法如下

（a）：$v_1v_8v_9v_3v_{10}v_{11}v_5v_{12}v_7v_2v_9v_{10}v_4v_{11}v_{12}v_6v_7v_1$

（b）:1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 8, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 14, 17, 11, 5, 20。

10．给出满足下列条件之一的图的实例。

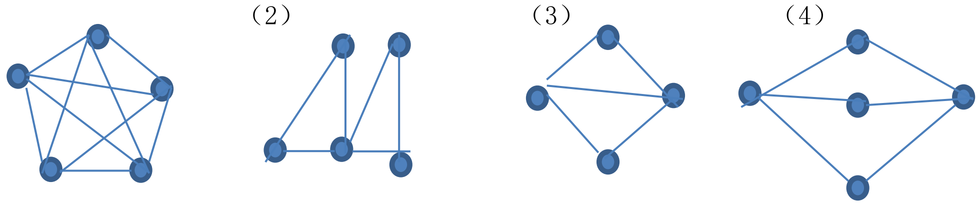
（1）图中同时存在欧拉回路和哈密顿回路。

（2）图中存在欧拉回路，但不存在哈密顿回路。

（3）图中不存在欧拉回路，但存在哈密顿回路。

（4）图中不存在欧拉回路，也不存在哈密顿回路。

解：（1）　（2）　（3）　（4）



11．图 10.67 是不是二部图？如果是，找出其互补结点子集。

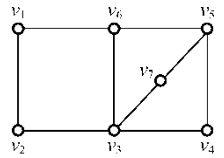


图 10.67

解：是，互补结点子集是：$\{v_1,v_3,v_5\}$，$\{v_2,v_4,v_6,v_7\}$。

12．图 10.68 是否存在$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$到$\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$的完美匹配？如果存在，指出它的一个完美匹配。

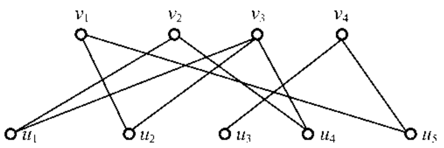


图 10.68

解：存在。如：v_1u_2，v_2u_1，v_3u_4，v_4u_5。

13．求图 10.69 两个二部图的最大匹配。

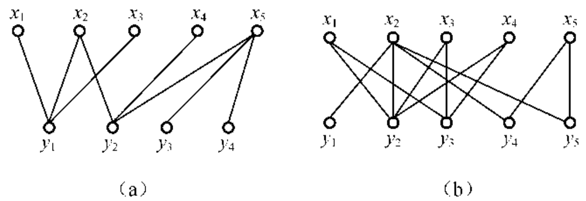


图 10.69

解：（a）$\{x_1y_1,x_2y_2,x_5y_3\}$ (b) $\{x_1y_2,x_2y_1,x_3y_3,x_5y_4\}$

14．如何由无向图G的邻接矩阵判断G是不是二部图？

解：设 G 的邻接矩阵为A，$|V|=n$，计算$A^{(2)}$，$A^{(3)}$，$\cdots A^{(n)}$。其中如果矩阵的对角线出现了基数，则 G 不是二部图。如果所有的矩阵（包括矩阵A）的回路长度都是偶数，则是二部图。

15．证明n阶简单二部图的边数不能超过$[n^2/4]$。

证明：对于简单二部图，当为完全二部图时边数最多，边数为$|V_1|*|V_2|$，又$|V_1|+|V_2|=n$，当$|V_1|=|V_2|$即$|V_1|=|V_2|=n/2$时，$|V_1|*|V_2|$有最大值$n^2/4$，故边数取整，故边数不能超过$[n^2/4]$。得证。

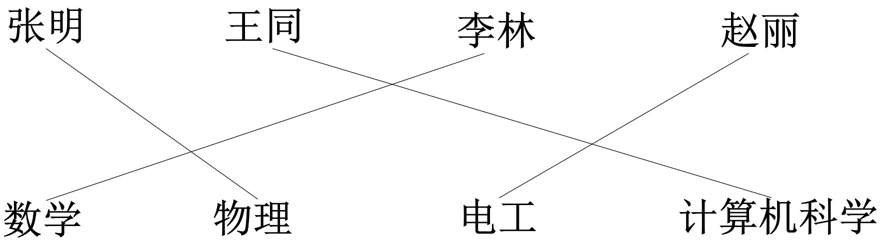
16．某单位有 7 个工作空缺$p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7$要招聘，有 10 个应聘者$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$。他们能胜任的工作岗位集合分别为：$\{p_1,p_5,p_6\}$，$\{p_2,p_6,p_7\}$，$\{p_3,p_4\}$，$\{p_1,p_5\}$，$\{p_6,p_7\}$，$\{p_3\}$，$\{p_2,p_3\}$，$\{p_1,p_3\}$，$\{p_1\}$，$\{p_5\}$。如果规定每个应聘者最多只能安排一个工作，试给出一种分配方案使落聘者最少？

解：可利用二部图求解：一种解决方案是：

a1->p6, a2->p7, a3->p4, a7->p2, a8->p3, a9->p1, a10->p5

17．有 4 名教师：张明、王同、李林和赵丽，分配他们去教 4 门课程：数学、物理、电工、和计算机科学。张明懂物理和电工，王同懂数学和计算机科学，李林懂数学、物理和电工，赵丽只懂电工。应如何分配，才能使每人都教一门课，每门课都有人教，并且不是任何人去教他不懂的课。

解：



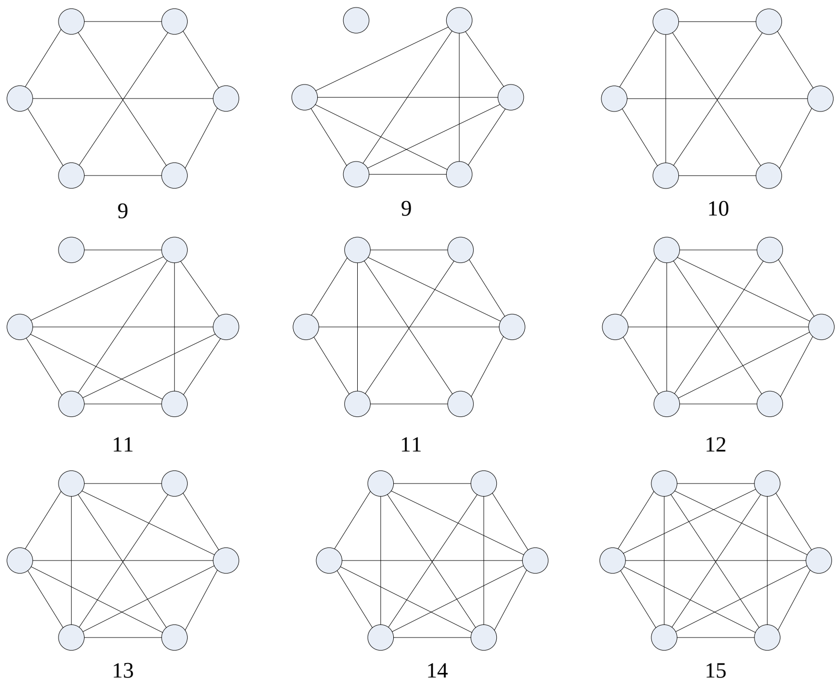
18．对于下面情况，验证欧拉公式 $n-m+k=2$。

一个具有 $(r+1)^2$ 个结点的无向图，它描述了 r^2 个正方形的网络，诸如棋盘等。

解：顶点个数为 $(r+1)^2$，面的个数为 r^2+1，边的个数为 $2r(r+1)$，$(r+1)^2+r^2+1-2r(r+1)=2$，成立。

19．画出所有不同构的六阶非平面图。

解：根据分析图至少有 9 条边，最多为 15 条边。所有情况如下图：



20．设 $k\geqslant 3, n\geqslant (k+2)/2$，$n$ 阶连通平面图 G 有 m 条边，在它的一个平面表示中，每个面的边界至少包含 k 条边，证明 $m\leqslant k(n-2)/(k-2)$

证明：由欧拉公式得面得个数 $r=m-n+2$；

所以根据题意得：$m\geq (m-n+2)k/2$，化简可证。

21．在图 10.70 中给多了一个多边形的图，试构成该图的对偶。

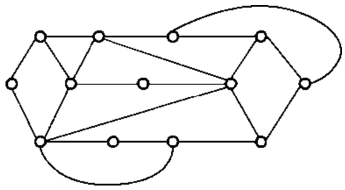
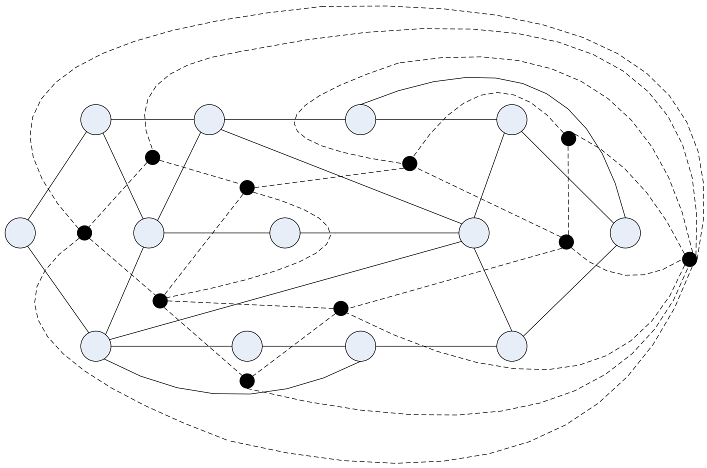


图 10.70

解：对偶图如下：



22．设 G 是（n，m）一简单图，则 $\chi(G) \geqslant \frac{n^2}{n^2-2m}$ 。

证明：对给定的 n,k,求 max m.

对 $k=1$，即把 n 个点放到一个集合中，$m=0$。

对 $k=2$，即把 n 个点放到两个集合中，

不妨设每个集合中结点数为 n_1,n_2，令 $n_1+n_2=n$，

则 $m=n_1\cdot n_2=\frac{n^2-n_1^2-n_2^2}{2}\le\frac{n^2}{2}$。

同理对 $k=3$，即把 n 个点放到两个集合中，

不妨设每个集合中结点数为 n_1,n_2,n_3，令 $n_1+n_2+n_3=n$，

则 $m=n_1\cdot n_2+n_1\cdot n_3+n_2\cdot n_3=\frac{n^2-n_1^2-n_2^2-n_3^2}{2}\le\frac{n^2}{3}$。

同理当 $k=k$时,$m\le\frac{(k-1)n^2}{2k}\Rightarrow k\ge\frac{n^2}{n^2-2m}$。

23．证明若 G 的任何两个奇数长回路都有至少一个公共结点，则 $\chi(G)\leqslant 5$。

证明：若 $\chi(G)\ge 6$，且假定在 G 上已有 χ 种颜色着色，令 G_1 是 G 中 1,2,3 色的顶点在 G 中的导出子图，G_2 是 G 中着 4,5 色的顶点在 G 中的导出子图。显然 $\chi(G_1)=3,\chi(G_2)=\chi-3\ge 3,$ 由于二分图的色数均为 2，故 G_1,G_2 均不是二分图，所以在 G_1,G_2 中均含有奇圈且它们互不相交，这和假设矛盾，故 $\chi(G)\le 5$。

24．用标号法求图 10.71 所示运输网络的最大流，其中无向的边是双向的。

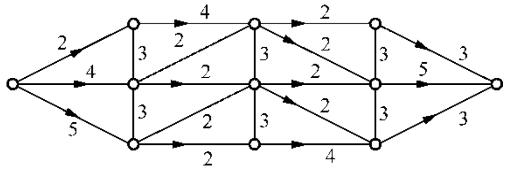
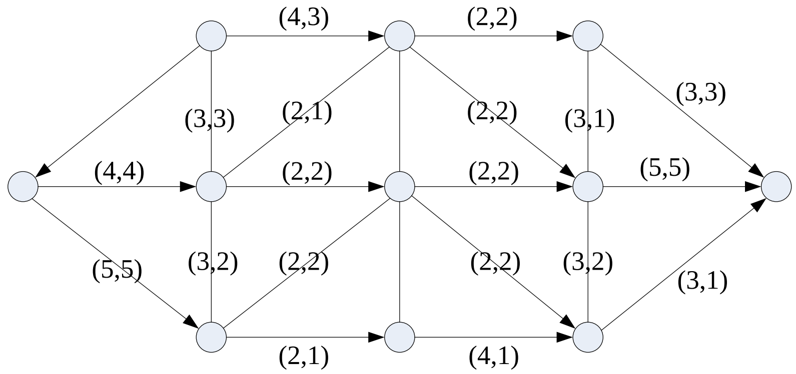


图 10.71

解：求得的网络流量分配如下图：



25．设 x_1,x_2,x_3 是三家工厂， y_1,y_2,y_3 是三个仓库，工厂生产的产品要运往仓库，其运输网络如图 10.72 所示，设 x_1,x_2,x_3 的生产能力分别为 40，20，10 个单位，问应如何安排生产?

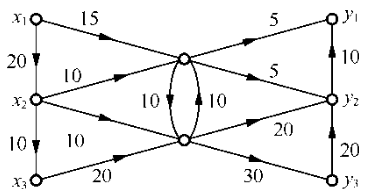
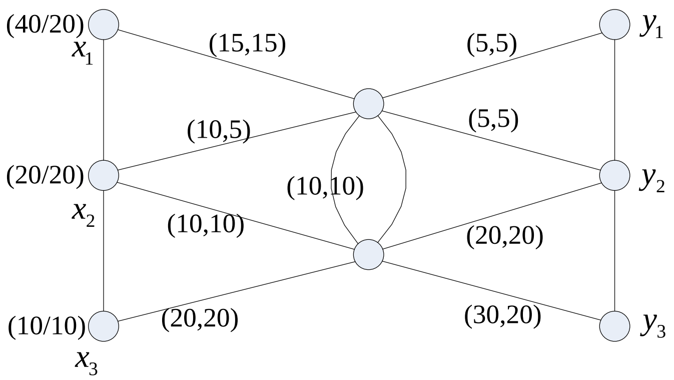


图 10.72

解：x_1 生产 20 个单位，x_2 生产 20 个单位，x_3 生产 10 个单位，最多生产 50 个单位。运输网络分配如下图：

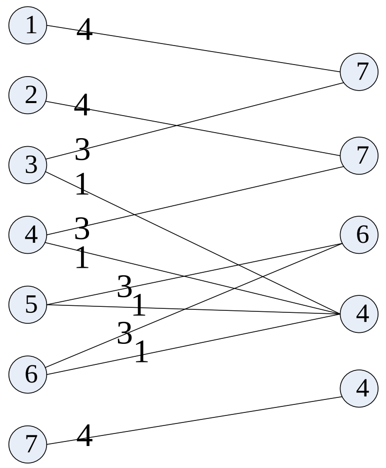


26．7 种设备要用 5 架飞机运往目的地，每种设备各有 4 台，这 5 架飞机容量分别是 8，8，5，4，4 台，问能否有一种装法，是同一种类型设备不会有两台在同一架飞机上?

解：飞机容量为 8：类型一 4 台+类型二 4 台，飞机容量为 8：类型三 4 台+类型四 4 台，飞机容量为 5：类型五 4 台，飞机容量为 4：类型六 4 台，飞机容量为 4：类型七 4 台。

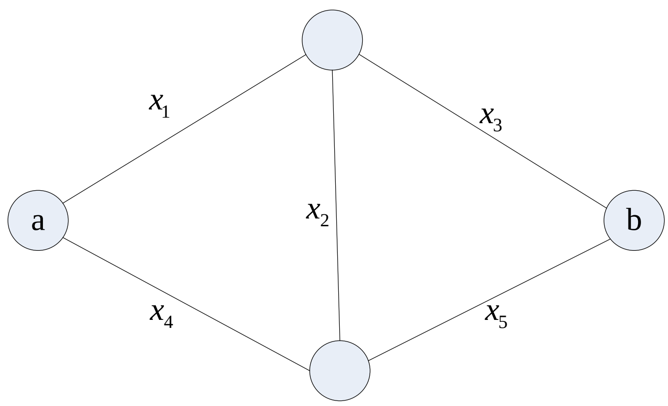
27．在第 26 题中，若飞机的容量分别是 7，7，6，4，4 台，求问题的解。

解：各个飞机的分配如下图：



28．若已知开关函数 $f_{ab}=x_1x_3+x_1x_2x_5+x_2x_3x_4+x_4x_5$ 求实现这个简单接触的网络。

解：简单接触网络如下图：



29．在图 10.73 中求中国邮递员问题的解。

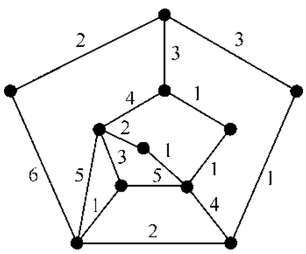
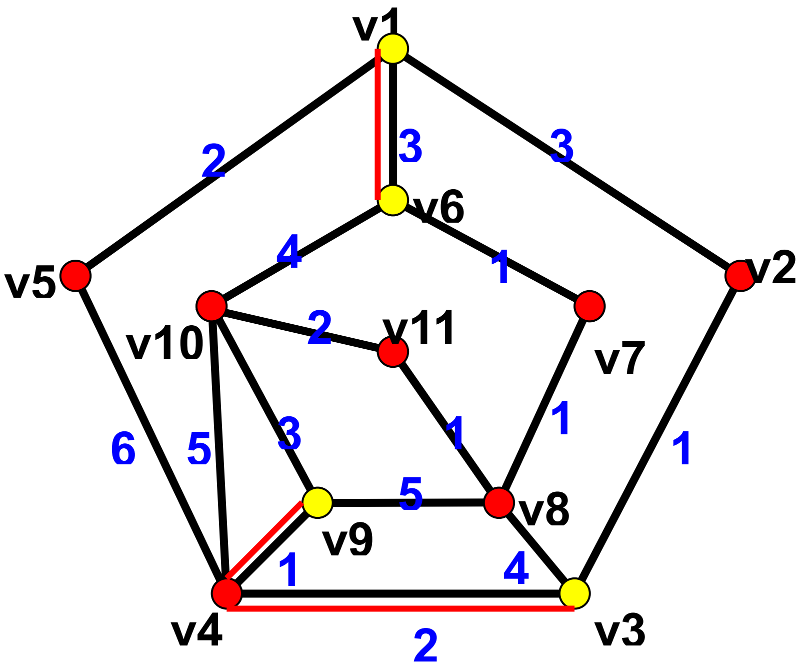


图 10.73

解：



如上图标号：
图中有 4 个奇数度结点 v1,v6,v9,v3, 求两两之间最短长度：
Pv1v6=3 （v1v6）, Pv1v9=7 （v1v2v3v4v9）,
Pv1v3=4 （v1v2v3）, Pv6v9=7 （v6v7v8v9）,
Pv3v6=6 （v3v8v7v6）, Pv3v9=3 （v3v4v9）,
Pv1v6 和 Pv3v9 满足最小性要求，
复制 v1v6 和 v3v4v9 的边，图中欧拉回路即为所求解

30．求图 10.74 给出的网络图中 v_1 到其余各点的最短路。

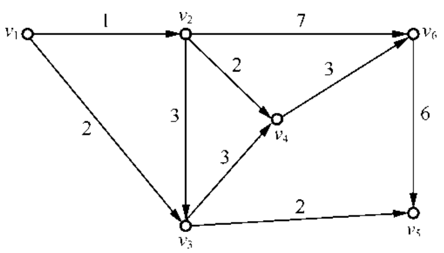


图 10.74

解：用 Dijkstra 算法求解。

$v_1 \to v_2 : 1$

$v_1 \to v_3 : 2$

$v_1 \to v_2 \to v_4 : 3$

$v_1 \to v_3 \to v_5 : 4$

$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_6 : 6$

31．求图 10.75 给出的网络图中 v_1 到其余各点的最短路。

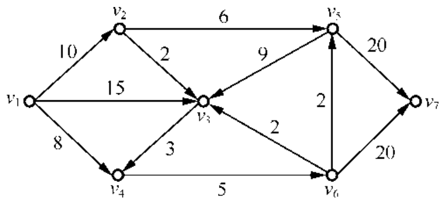


图 10.75

解：用 Dijkstra 算法求解。

$v_1 \to v_4 : 8$

$v_1 \to v_2 : 10$

$v_1 \to v_2 \to v_3 : 12$

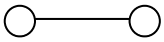
$v_1 \to v_4 \to v_6 : 13$

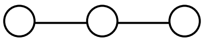
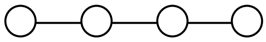
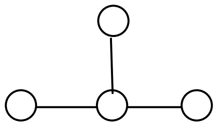
$v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_5 : 15$

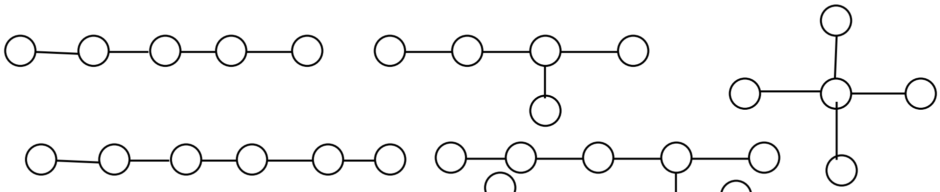
$v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_7 : 33$

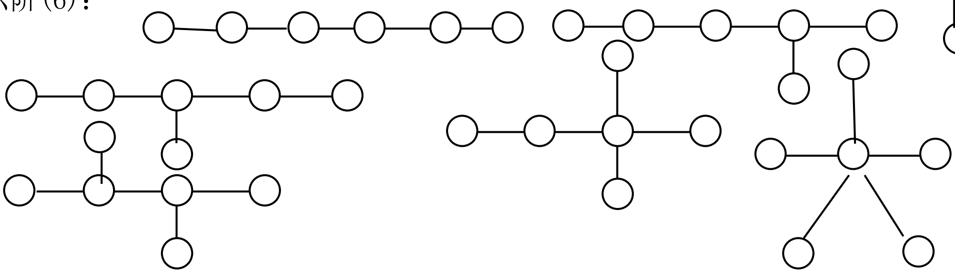
第 11 章 树

1．画出所有不同构的一、二、三、四、五、六阶树。

解：一阶：  二阶： 

三阶：  四阶(2)：  

五阶(3)： 

六阶(6)： 

2．一棵树有 5 个度为 2 的节点，3 个度为 3 的节点，4 个度为 4 的节点，2 个度为 5 的节点，其余均是度为 1 的节点，问有几个度为 1 的节点？

解：设度数为 1 的结点有 x，则结点个数为 $x+5+3+4+2$ 个，由于树的边数是结点个数减 1，故树的边数为 $x+5+3+4+2-1$，该树的所有结点总度数为 $x+\dot{5}*2+3*3+4*4+2*5$

结点总度数等于边数的 2 倍，故的方程

$$x+\dot{5}*2+3*3+4*4+2*5=2(x+5+3+4+2-1)$$

解得 $x+45=2(x+13)$

$x=19$

故度数为 1 的结点有 19 个

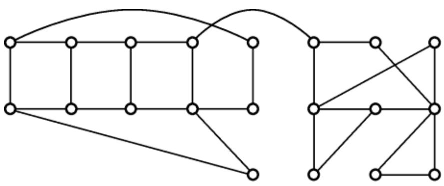
3．设一棵树中度为 k 的结点数是 n_k，求它的叶的数目。

解：$n_3+2n_4+\cdots(k-2)n_k+2$

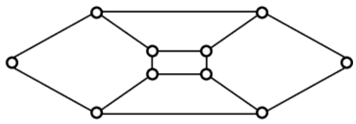
4．如何由无向图 G 的邻接矩阵确定 G 是不是树？

解：根据“G 不含回路而且有 n-1 条边则 G 是树”可以得出图 G 是一棵树的判定条件如下：(1)无线图 G 的邻接矩阵 的 n 次幂中，对角线上全是 0（说明不存在回路)。(2）邻接矩阵中 1 的个数的总数为 2(n-1),说明边的个数为 n-1。邻接矩阵同时满足上面两个条件可以判断图 G 是树，如果不同时满足，则判断不是树。

5．找出图 11.21 的连通无向图的一个生成树，并求出它的基本回路的秩。



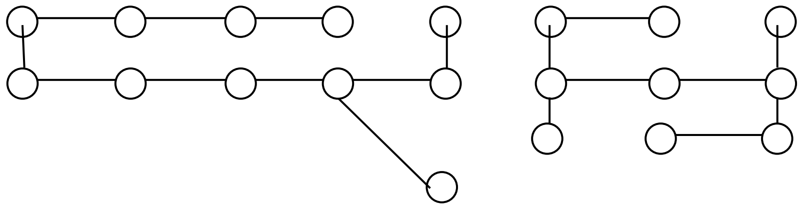
(a)



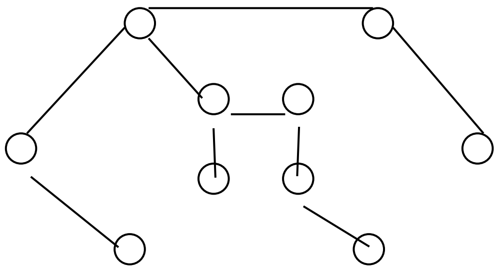
(b)

图 11.21

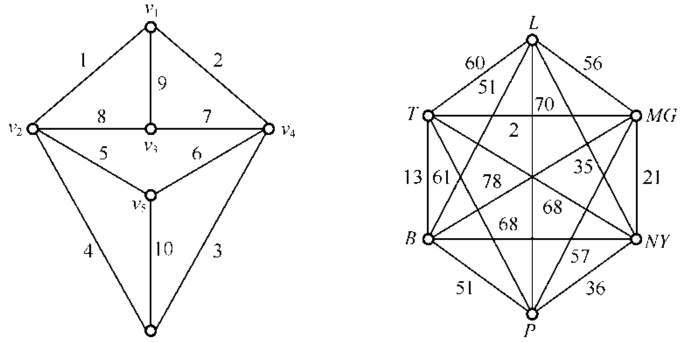
解：a)



b)

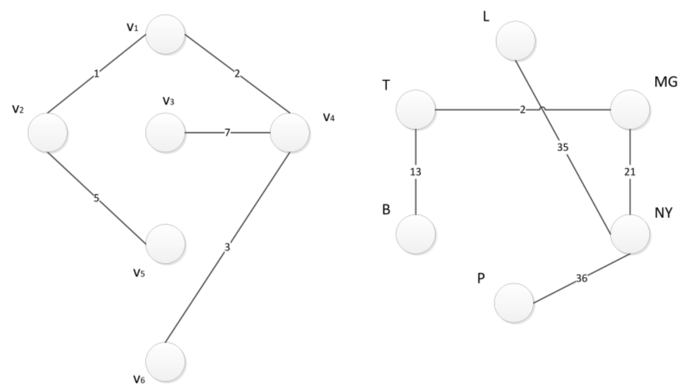


6．用 Kruskal 算法求图 11.22 的一棵最小生成树。



（a）　　　　　　　　　　（b）

图 11.22



7．设 e 是连通图 G 的一条边，证明 e 是 G 的割边当且仅当 e 含于 G 的每个生成树中。

证明：充分性：e 是 G 的割边则 e 含于 G 的每个生成树中

假设 e 不包含在某棵生成树 T 中，那么 e 一定在 T 的树的补边集中，那么 G-{e}中依然包含树 T，因此 G-{e}连通，与 e 是割边矛盾，因此 e 含于 G 的每个生成树中。

必要性：反证法可证。

8．设T_1和T_2是连通图G的两棵不同的生成树，a是在T_1中但不在T_2中的一条边。证明T_2中存在一条边b，使得$(T_1-a)+b$和$(T_2-b)+a$也是G的两棵不同的生成树。

证明：从 T1 中删除边 a,得到树 T1-1 和 T1-2，分别用 V1，V2 表示这两棵子树的结点集合，设 Ea={e|e 的两个端点分属于 V1 和 V2}，显然，a 属于 Ea。因为 a 不在 T2 中，所以 a 是 T2 的树补边。设 C（a）为在 T2 中增加边 a 后所得到的圈，则 C(a)中必然存在 T2 的树边 b 不在 T1 中但是在 Ea 中。否则，C(a)上的 T2 的所有树边均在 T1 中或不在 Ea 中。如果 C(a)上的 T2 的所有树边均在 T1 中，则 C(a)上的所有边都在 T1 中，与 T1 是树矛盾。如果 C(a)上的 T2 的所有边均不在 Ea 中，则 C(a)中除 a 外所有的边的端点均在 V1,V2 中，与 C(a)是基本回路矛盾。所以 C(a)中必然存在不在 T1 中但在 T2 中的树边，设 b 是其中的一条。则（T1-a）+b 连通且误会路是 G 的生成子图，它是 G 的生成树。同理（T2-b）+啊也是 G 的生成树。

9．设v和v'是树T的两个不同结点，从v至v'的基本路经是T中最长的基本路径。证明$d_T(v)=d_T(v')=1$。

证明：反证法

假设v或v'有一个结点的度数大于 1,不妨设$d_T(v)>1$,则必然存在一个v''与v相连，由树的定义知v''不在v至v'的路径中（否则构成了环）。设v至v'的路径长度为l，则v'到v''的距离为$l+1>l$，这与v至v'的基本路径是 T 中最长的基本路径矛盾。故$d_T(v)=d_T(v')=1$。

10．一棵树有n_2个 2 度节点，n_3个 3 度节点，…，n_k个k度节点，求其叶节点的数目。

解：$n_2*2+n_3*3+\cdots+n_k*k+t=2(n_2+n_3+\cdots+n_k+t-1)$，t 为叶节点数目。

$t=n_3+2*n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$

11．今有煤气站A，将给一居民区供应煤气，居民区各用户所在位置如图 11.23 所示，铺设各用户点的煤气管道所需的费用（单位：万元）如图边上的数字所示。要求设计一个最经济的煤气管道路线，并求所需的总费用。

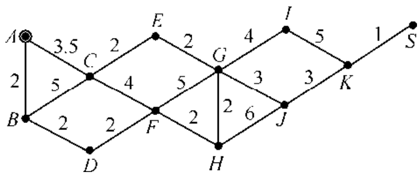
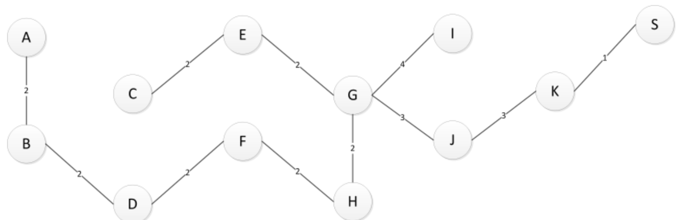


图 11.23

解：求最小生成树。



12．证明树T中最长路径的起点和终点必都是T的叶。

证明：假设 T 中最长道路 P=$v_{i1}v_{i2}\cdots v_{ik}$的起点或终点不是在 T 的叶节点，设 d($v_{i1}$)>1，则 v_{i1}的所有理解结点（v'^{1},v'^{2},…v'^{1}）都在 P 中，那么 T 中可以找到一个回路，那么截取道路 P，得到回路 C= $v_{i1}\ldots v'^{1}$ v_{i1}。与 T 中无回路矛盾。对于 d(v_{ik})>1 时同理。因此，假设不成立，即原命题成立。

13．证明 n 阶二叉树有 $\dfrac{n+1}{2}$ 片叶，其高度 h 满足

$$\log_2(n+1)-1 \leqslant h \leqslant \frac{n-1}{2}\text{。}$$

证明：（1）在二叉树中，出度为 0 的结点是叶子结点，出度为 2 的结点是分支结点，设分支结点个数为 x，由上题证明过程可知，n=2x+1， x=(n-1)/2。因此，叶子结点的个数为 n-x=(n+1)/2。

（2）n 阶二叉树的叶子结点有(n+1)/2 个，分支结点有(n-1)/2 个。利用(n-1)/2 个结点构造一棵一元或二元树，设树高为 m，则 h=m+1。

考察(n-1)/2 个结点构造的一棵一元或二元树，树高最大的情况是一元树，高度为(n-1)/2-1，因此，h 最大值是(n-1)/2-1+1=(n-1)/2。

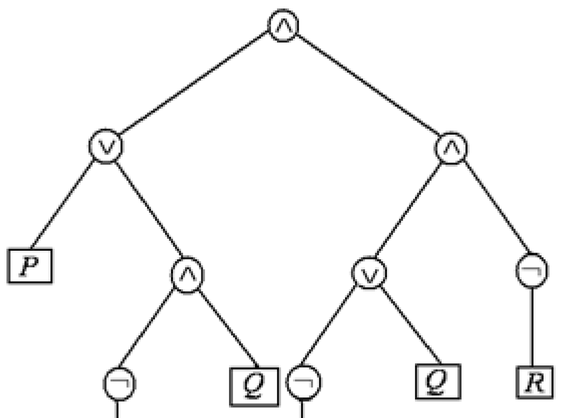
树高最小的情况是构造了一棵满二叉树，满二叉树的高度 x 和结点个数(n-1)/2 满足关系 2x+1-1=(n-1)/2，解得 x=log(n+1)-2，因此 h 最小值是 log(n+1)-1。因此，log2(n+1)-1≤h≤(n-1)/2。

14．如何由有向图 G 的邻接矩阵确定 G 是不是有向树？

解：根据有向树的判定定义：仅一个结点的入度为 0，其余结点的入度均为 1 的连通有向图。如果 G 是有向树，则其邻接矩阵满足：（1）有且仅有一列全为 0。（2）其余的列有且只有一个 1。否则有向图不是有向树。

15．用二叉树表示命题公式 $(P\vee(\neg P\wedge Q))\wedge((\neg P\vee Q)\wedge\neg R)$ 。

解：



16．假设有一台计算机，它有一条加法指令，可计算 3 个数之和。如果要求 9 个数 x_1，x_2， ……， x_9 之和，问至少要执行几次加法指令？

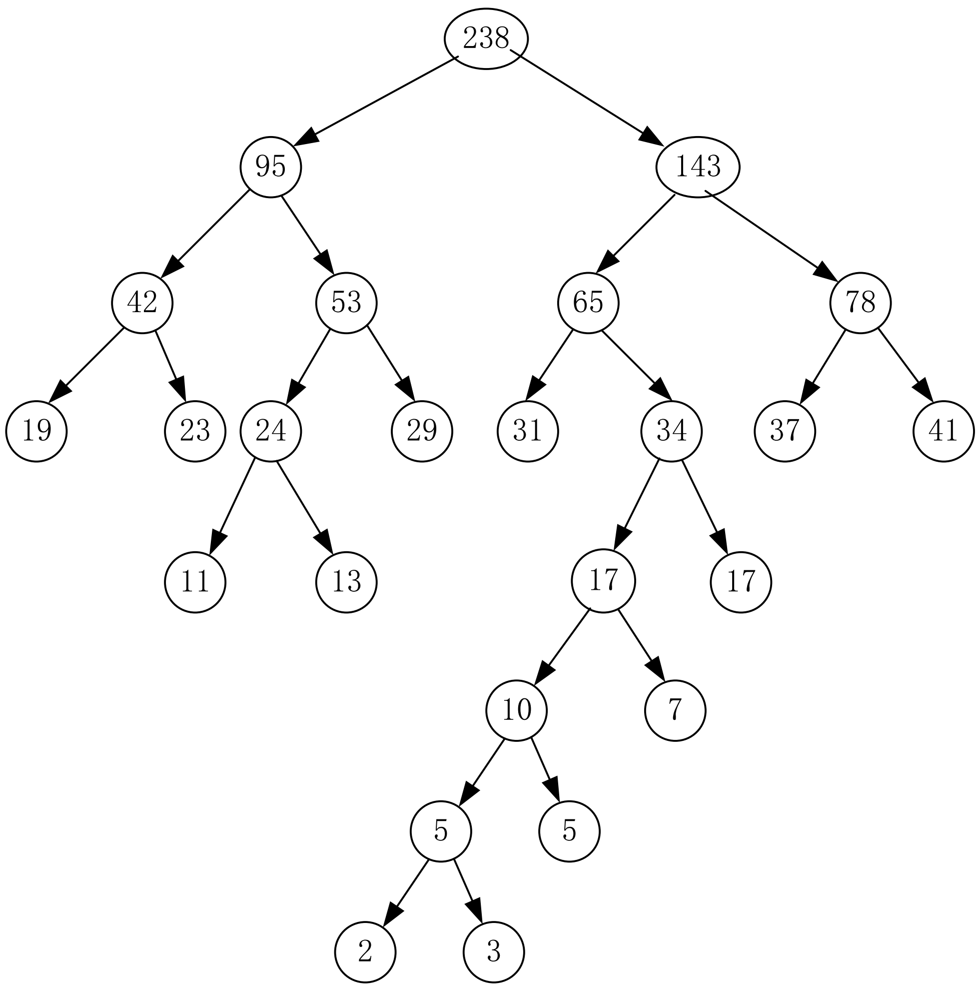
解：4 次

17．找出叶的权分别为 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41 的最优叶加权二叉树，并求其叶加权路径长度。

解：对于 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41，先组合两个最小的权 2+3=5，得 5,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41；在所得到的序列中再组合 5+5=10，得 10,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41；再组合 10+7=17，得 17,11,13,17,19,23,29,31,37,41；继续下去。。。。，过程如下：

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
5	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	
	10	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	
		17	11	13	17	19	23	29	31	37	41	
		17		24	17	19	23	29	31	37	41	
				24	34	19	23	29	31	37	41	
				24	34		42	29	31	37	41	
					34		42	53	31	37	41	
							42	53	65	37	41	
							42	53	65		78	
								95	65		78	
								95			143	
											238	

所得到的最优二叉树如下图：



18．假设在通讯中，十进制数字出现的频率分别是

0：20%；　1：15%；　2：10%；　3：10%；　4：10%；

5：5%；　6：10%；　7：5%；　8：10%；　9：5%

（1）求传输它们的最佳前缀码。

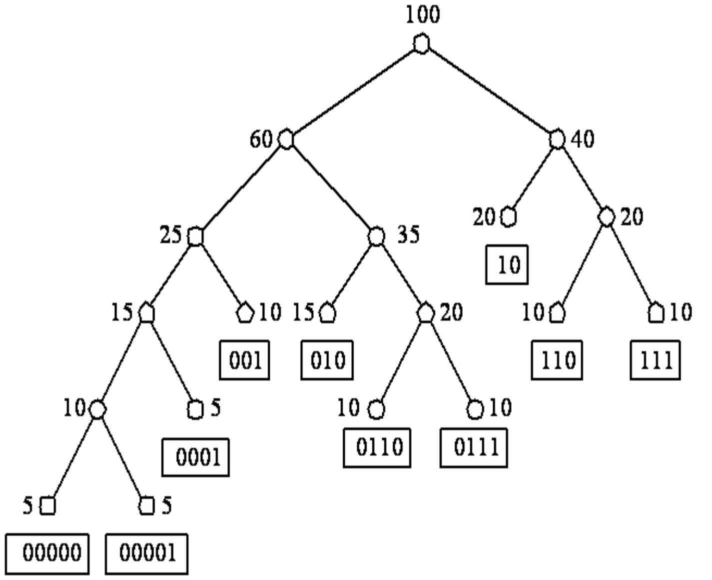
（2）用最佳前缀码传输 10000 个按上述频率出现的数字需要多少个二进制码？
（3）它比用等长的二进制码传输 10000 个数字节省多少个二进制码？

解：（1）令 i 对应的树叶的权 $w_i = 100 p_i$，则

$w_0 = 20$；$w_1 = 15$；$w_2 = 10$；$w_3 = 10$；$w_4 = 10$；

$w_5 = 5$；$w_6 = 10$；$w_7 = 5$；$w_8 = 10$；$w_9 = 5$。

构造一棵带权 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 20 的最优二叉树，数字与前缀码的对应关系见图右侧。



0—10
1—010
2—111
3—110
4—0111
5—0001
6—0110
7—00001
8—001
9—00000

即最佳前缀码为：{10，010，111，110，001，0111，0001，0110，00000，00001}。

（2）（2×20%+3×（10%+15%+10%+10%）+4×（5%+10%+10%）+5×（5%+5%））×10000=32500

即传输 10000 个数字需 32500 个二进制码。

（3）因为用等长码传输 10 个数字码长为 4，即用等长的码传输 10000 个数字需 40000 个二进制码，故用最佳前缀码传输 10000 个数字节省了 7500 个二进制码。

19．找出图 11.24 给出的有向序森林所对应的二元有向有序树，并求其前缀编码。

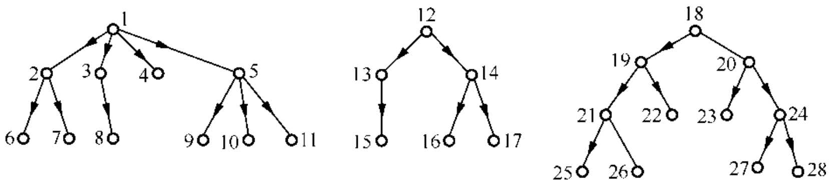


图 11.24

19．找出图 11.24 给出的有向序森林所对应的二元有向有序树，并求其前缀编码。

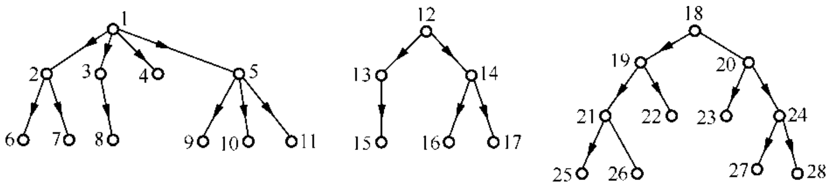
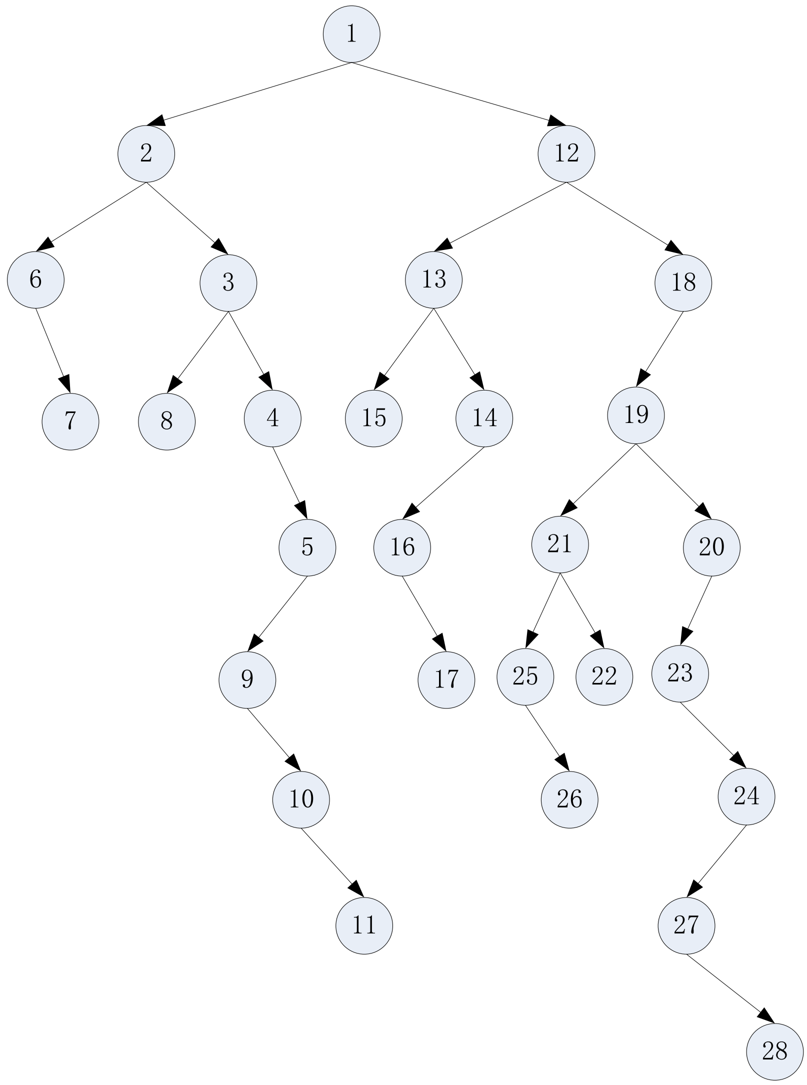


图 11.24

解：



1：ε　　2：0　　3：01　　4：011　　5：0111
6：00　　7：001　　8：010　　9：01110　　10：011101
11：111011　　12：1　　13：10　　14：101
15：100　　16：1010　　17：10101　　18：11
19：110　　20：1101　　21：1100　　22：11001
23：11010　　24：110101　　25：11000　　26：110001
27：1101010　　28：11010101

20．对图 11.25 给出的二元有序树进行三种方式的遍历，并写出遍历结果。

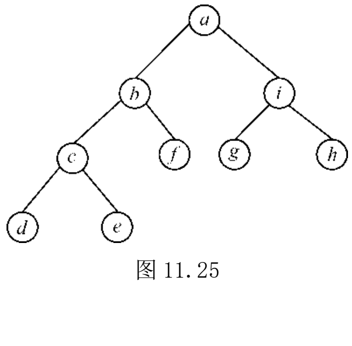


图 11.25

解：前序：abcdefgh

中序：dcebfagih

后序：decfbghia

21．8 枚硬币问题。若有 8 枚硬币 a,b,c,d,e,f,g,h，其中 7 枚重量相等，只有 1 枚稍轻。现要求以天平为工具，用最少的比较次数挑出轻币来。

解：两次