



# 离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405，Tel: 62274392  
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921  
Email: zkchen@dlut.edu.cn  
zkchen00@hotmail.com  
QQ: 1062258606

# 回顾

- 关系的定义和性质
- 关系的表示方法
  - 关系图
  - 关系矩阵
- 关系的运算
  - 关系的合成
  - 关系合成的规则
  - 关系的幂
  - 合成关系的矩阵表达与图解

### 三、关系的求逆运算

关系 $R$ 的逆关系 $\tilde{R}$ 定义如下：对于所有的  $x \in X$  和  $y \in Y$  来说，  $xRy \Leftrightarrow y\tilde{R}x$

逆关系的关系矩阵：原关系矩阵转置

逆关系的关系图：原关系图中颠倒弧线上箭头的方向。

区分：逆关系vs补关系

在关系图和关系矩阵上的体现？

### 三、合成关系的求逆运算

定理：设 $R$ 是从集合 $X$ 到 $Y$ 的关系。 $S$ 是从集合 $Y$ 到 $Z$ 的关系。于是有

$$R \circ S = \tilde{S} \circ \tilde{R}$$

证明：对于任何  $x \in X$ ,  $y \in Y$  和  $z \in Z$  来说，如果  $xRy$  和  $ySz$ ，则会有  $x(R \circ S)z$  和  $z(R \circ S)x$ ，因为还有  $z \tilde{S} y$  和  $y \tilde{R} x$ ，所以又有  $z(\tilde{S} \circ \tilde{R})x$ 。因此可有  $R \circ S = \tilde{S} \circ \tilde{R}$ 。

利用关系矩阵也可以理解， $M_{R \circ S}$  的转置和  $M_{\tilde{S} \circ \tilde{R}}$  是一样的。

### 三、合成关系的求逆运算

例：给定关系矩阵 $M_R$ 和 $M_S$ 。

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\tilde{S} \circ \tilde{R}} = M_{\tilde{S}} \wedge M_{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{\tilde{R \circ S}}$$

### 三、关系的求逆运算

定理：给定集合 $X$ 和 $Y$ ， $R$ 、 $R_1$ 、 $R_2$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的关系，于是有：

$$(a) \quad \tilde{\tilde{R}} = R$$

$$(b) \quad R_1 \cup R_2 = \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$$

$$(c) \quad R_1 \cap R_2 = \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$$

$$(d) \quad X \times Y = Y \times X$$

$$(e) \quad \tilde{\phi} = \phi$$

$$(f) \quad (\sim \tilde{R}) = \sim (\tilde{R}), \text{ 这里 } \sim R = X \times Y - R$$

$$(g) \quad R_1 - R_2 = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2, \text{ 这里 } R_1 - R_2 \text{ 表示 } R_1 - R_2 \text{ 的逆关系}$$

$$(h) \quad R_1 = R_2 \rightarrow \tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$$

$$(i) \quad R_1 \subseteq R_2 \rightarrow \tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2$$

### 三、关系的求逆运算

$$(a) \quad \widetilde{\widetilde{R}} = R$$

证明：设  $\langle x, y \rangle$  是  $R$  的任意元素。于是  $\langle x, y \rangle \in R$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \widetilde{R} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \widetilde{\widetilde{R}} \text{ 所以有 } R = \widetilde{\widetilde{R}}。$$

$$(b) \quad R_1 \widetilde{\cup} R_2 = \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2$$

$$\text{证明：} \langle x, y \rangle \in R_1 \widetilde{\cup} R_2 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \widetilde{R}_1 \vee \langle x, y \rangle \in \widetilde{R}_2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2$$

得证

### 三、关系的求逆运算

(f)  $(\sim \tilde{R}) = \sim(\tilde{R})$ , 这里  $\sim R = X \times Y - R$

证明:  $\langle x, y \rangle \in (\sim \tilde{R}) \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \sim R$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \notin R$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \notin \tilde{R}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \sim(\tilde{R}) \quad \text{得证。}$$

(g)  $R_1 - R_2 = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$ , 这里  $R_1 - R_2$  表示  $R_1 - R_2$  的逆关系

证明: 因为  $R_1 - R_2 = R_1 \cap \sim R_2$ , 于是有

$$R_1 - R_2 = R_1 \cap \sim R_2 = \tilde{R}_1 \cap (\sim \tilde{R}_2) = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$$

得证。



### 三、关系的求逆运算

定理：设 $R$ 是集合 $X$ 中的关系。于是当且仅当  $R = R^{-1}$ ， $R$ 才是对称的。

证明:(充分性)若  $R = R^{-1}$  则  $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R$   
即 $R$ 是对称的。

(必要性)设 $R$ 是对称的，那么对任何

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

即  $R \subseteq R^{-1}$ ;

$$\text{对任何 } \langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

即  $R \subseteq R^{-1}$

必要性证明完毕。

## 四、关系的闭包运算

闭包的定义：给定集合 $X$ ， $R$ 是 $X$ 中的二元关系。如果有另一个关系 $R'$ 满足

(1)  $R'$ 是自反的(对称的、可传递的);

(2)  $R' \supseteq R$

(3) 对于任何自反的(对称的、可传递的)关系 $R''$ ，如果 $R'' \supseteq R$ ，则 $R'' \supseteq R'$

则称关系 $R'$ 为 $R$ 的自反的(对称的、可传递的)闭包。并用 $r(R)$ 表示的 $R$ 自反闭包，用 $s(R)$ 表示 $R$ 的对称闭包，用 $t(R)$ 表示 $R$ 的可传递闭包。

## 四、关系的闭包运算

定理：给定集合 $X$ ， $R$ 是 $X$ 中的关系。于是可有

(a) 当且仅当 $r(R) = R$ ， $R$ 才是自反的。

(b) 当且仅当 $s(R) = R$ ， $R$ 才是对称的。

(c) 当且仅当 $t(R) = R$ ， $R$ 才是传递的。

证明：仅给出 (a) 的证明过程

如果是 $R$ 自反的，则 $R$ 具有定义给出的应具备 $R'$ 的全部性质。因此有 $r(R) = R$ 。反之，如果 $r(R) = R$ ，则由定义的(1)得 $R$ 是自反的。

## 四、关系的闭包运算

定理： 设 $X$ 是任意集合， $R$ 是 $X$ 中的二元关系， $I_X$ 是 $X$ 中的恒等关系。于是可有

$$r(R) = R \cup I_X$$

在整数集合中，小于关系“ $<$ ”的自反闭包是“ $\leq$ ”；恒等关系 $I_X$ 的自反闭包是 $I_X$ 。不等关系“ $\neq$ ”的自反闭包是全域关系；空关系的自反闭包是恒等关系。

## 四、关系的闭包运算

定理：给定集合 $X$ ， $R$ 是 $X$ 中的二元关系。于是可有

$$S(R) = R \cup \tilde{R}$$

在整数集合中，小于关系“ $<$ ”的对称闭包是不等关系“ $\neq$ ”；小于或等于关系“ $\leq$ ”的对称闭包是全域关系；恒等关系 $I_X$ 的对称闭包是 $I_X$ ；不等关系“ $\neq$ ”的对称闭包是不等关系“ $\neq$ ”。

## 四、关系的闭包运算

定理：给定集合 $X$ ， $R$ 是 $X$ 中的二元关系。于是可有

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

当 $A$ 是有限集时， $A$ 上只有有限个不同的关系，因此，存在某个正整数 $m$ ，使得

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^m R^i$$

事实上，可以证明，若  $\# A = n$  ， 则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i$$

## 四、关系的闭包运算

例：给定集合  $X=\{a,b,c\}$ ， $R$ 和 $S$ 是 $X$ 中的关系，给定

$$R = \{\langle a,b \rangle, \langle a,c \rangle, \langle c,b \rangle\}$$

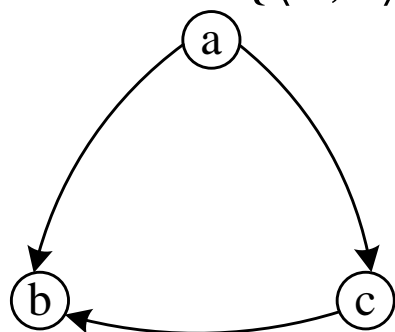
$$S = \{\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle\}$$

试求出  $t(R), t(S)$ ，并画出关系图

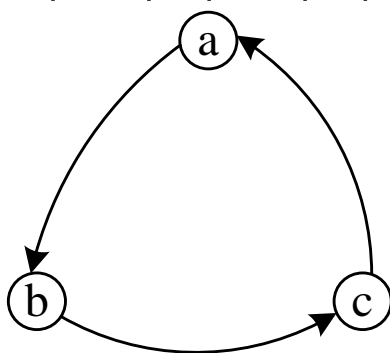
解：  $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = R$

$$t(S) = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \dots = S^1 \cup S^2 \cup S^3$$

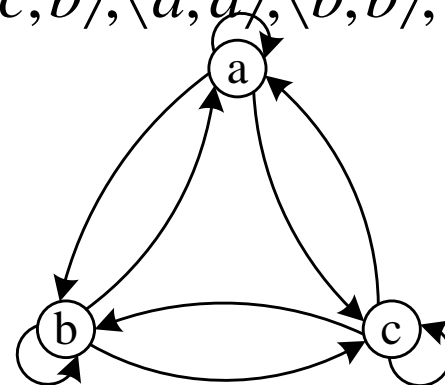
$$\{\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle, \langle a,c \rangle, \langle b,a \rangle, \langle c,b \rangle, \langle a,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle c,c \rangle\}$$



$R, t(R)$



$S$



$t(S)$

## 四、关系的闭包运算

定理：设 $X$ 是集合， $R$ 是 $X$ 中的二元关系，于是有

- (1) 如果 $R$ 是自反的，那么 $s(R), t(R)$ 也是自反的；
- (2) 如果 $R$ 是对称的，那么 $r(R), t(R)$ 也是对称的；
- (3) 如果 $R$ 是可传递的，那么 $r(R)$ 也是可传递的。

证明 (1)：若 $R$ 是自反的，则对于所有的 $x \in X$ 都有

$$\langle x, x \rangle \in R \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R \cup \tilde{R} = s(R)$$

$$\langle x, x \rangle \in R \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = t(R)$$

即 $s(R), t(R)$ 是自反的



## 四、关系的闭包运算

证明 (2) :

对于任意的  $\langle x, y \rangle \in r(R)$ , 由于  $r(R) = R \cup I_x$ , 因此  $\langle x, y \rangle \in R$  或  $\langle x, y \rangle \in I_x$ 。

若  $\langle x, y \rangle \in R$ , 由  $R$  的对称性可知,  $\langle y, x \rangle \in R$ , 也即  $\langle y, x \rangle \in r(R)$

若  $\langle x, y \rangle \in I_x$ , 则  $x = y$ , 于是有  $\langle y, x \rangle \in r(R)$

因此, 无论何种情况, 都有  $\langle y, x \rangle \in r(R)$

由  $x, y$  的任意性可知,  $r(R)$  是对称的。

## 四、关系的闭包运算

证明 (2) :

对于任意的  $\langle x, y \rangle \in t(R)$  , 由于  $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$  , 因此  $\langle x, y \rangle \in R^i (i \in N)$  , 也即

$$\langle y, x \rangle \in \widetilde{R^i} (i \in N)$$

下面用数学归纳法证明当  $R$  满足对称性时,  $\widetilde{R^i} = R^i$

(1) 当  $i=1$  时, 由  $R$  的对称性知,  $\widetilde{R} = R$

(2) 假设对于任意正整数  $n$ , 有  $\widetilde{R^n} = R^n$

(3) 当  $i=n+1$  时,  $\widetilde{R^{n+1}} = \widetilde{R^n \circ R} = \widetilde{R} \circ \widetilde{R^n} = R \circ R^n = R^{n+1}$

由  $n$  的任意性可知, 对于任意的  $i \in N$  , 均有  $\widetilde{R^i} = R^i$

于是由  $\langle y, x \rangle \in \widetilde{R^i} (i \in N)$  知,  $\langle y, x \rangle \in R^i (i \in N)$  , 即  $\langle y, x \rangle \in t(R)$

由  $x, y$  的任意性可知,  $t(R)$  是对称的。

## 四、关系的闭包运算

证明 (3) :

任取  $x, y, z \in X$ , 当  $\langle x, y \rangle \in r(R), \langle y, z \rangle \in r(R)$  时, 由于  $r(R) = R \cup I_x$

于是可得 ( $\langle x, y \rangle \in R$  或者  $\langle x, y \rangle \in I_x$ ) 并且 ( $\langle y, z \rangle \in R$  或者  $\langle y, z \rangle \in I_x$ ), 组合可以得到四种情况:

- (1)  $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ , 由  $R$  的传递性可知  $\langle x, z \rangle \in R$ , 于是  $\langle x, z \rangle \in r(R)$
- (2)  $\langle x, y \rangle \in I_x, \langle y, z \rangle \in R$ , 由  $I_x$  的性质可知,  $x = y$ , 于是  $\langle x, z \rangle \in R$ , 得到  $\langle x, z \rangle \in r(R)$
- (3)  $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in I_x$ , 由  $I_x$  的性质可知,  $y = z$ , 于是  $\langle x, z \rangle \in R$ , 得到  $\langle x, z \rangle \in r(R)$
- (4)  $\langle x, y \rangle \in I_x, \langle y, z \rangle \in I_x$ , 由  $I_x$  的性质可知,  $x = y = z$ , 于是  $\langle x, z \rangle \in I_x$ , 得到  $\langle x, z \rangle \in r(R)$

由上可知, 无论哪种情况, 都有  $\langle x, z \rangle \in r(R)$

由  $x, y, z$  的任意性可知,  $r(R)$  是可传递的。

## 四、关系的闭包运算

定理：设 $X$ 是集合， $R$ 是集合中的二元关系，于是有

$$(a) \quad rs(R) = sr(R)$$

$$(b) \quad rt(R) = tr(R)$$

$$(c) \quad ts(R) \supseteq st(R)$$

证明：  $(a) \quad sr(R) = s(R \cup I_X)$

$$= (R \cup I_X) \cup (R \tilde{\cup} I_X)$$

$$= R \cup I_X \cup \tilde{R} \cup \tilde{I}_X$$

$$= R \cup \tilde{R} \cup I_X$$

$$= r(R \cup \tilde{R})$$

$$= rs(R)$$

## 四、关系的闭包运算

证明 (b) : 因为  $tr(R) = t(R \cup I_X)$ ,  $rt(R) = t(R) \cup I_X$ , 而对于所有的  $n \in N$  有  $I_X^n = I_X$ , 以及  $I_X \circ R = R \circ I_X = R$ 。根据这些关系式, 可有  $(R \cup I_X)^n = I_X \cup \bigcup_{i=1}^n R^i$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad tr(R) &= t(R \cup I_X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (R \cup I_X)^i \\ &= (R \cup I_X) \cup (R \cup I_X)^2 \cup (R \cup I_X)^3 \cup \dots \\ &= I_X \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \\ &= I_X \cup t(R) \\ &= rt(R) \end{aligned}$$

## 四、关系的闭包运算

证明 (c) : 如果  $R_1 \supseteq R_2$ , 则  $s(R_1) \supseteq s(R_2)$ ,  $t(R_1) \supseteq t(R_2)$

根据对称闭包的定义, 有  $s(R) \supseteq R$ 。首先构成上式两侧的可传递闭包, 再依次构成两侧的对称闭包, 可以求得  $ts(R) \supseteq t(R)$  以及  $sts(R) \supseteq st(R)$ 。而  $ts(R)$  是对称的, 所以  $sts(R) = ts(R)$ , 从而有  $ts(R) \supseteq st(R)$ 。

## 四、关系的闭包运算

注意：

- (1) 通常用 $R^+$ 表示 $R$ 的可传递闭包 $t(R)$ ，并读作“ $R$ 加”。
- (2) 通常用 $R^*$ 表示 $R$ 的自反可传递闭包 $tr(R)$ ，并读作“ $R$ 星”。

# 作业

- **P103 21,23,25,27**