

# 离散数学

大连理工大学软件学院




# 第9章

## 图的基本概念及其矩阵表示论

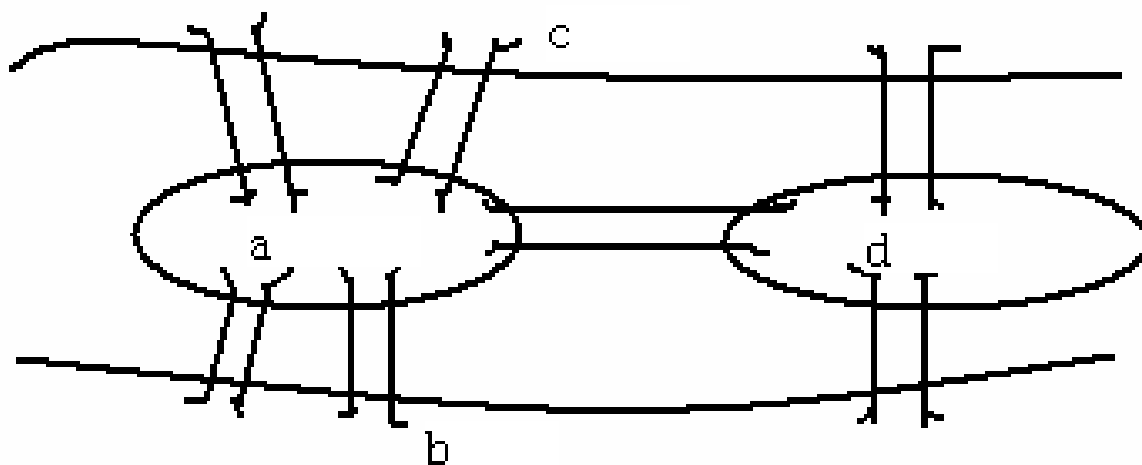
# 回顾

- 数理逻辑
- 集合与关系理论
- 代数系统
  - 代数系统的概念与性质
  - 群论
  - 环与域理论
  - 布尔代数

- 
- 图论（Graph Theory）是数学的一个分支。
  - 它以**图**为研究对象。图论中的图是由若干给定的**点**及连接两点的**线**所构成的图形，这种图形通常用来描述某些**事物之间的某种特定关系**，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。
  - 图论起源于著名的**柯尼斯堡七桥问题**。在柯尼斯堡的普莱格尔河上有七座桥将河中的岛及岛与河岸联结起来，如下图所示，A、B、C，D表示陆地。

# 图论的起源

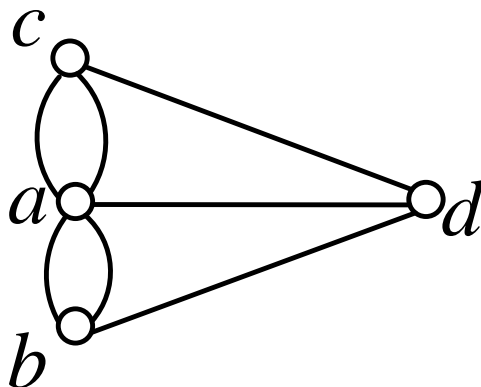
- **哥尼斯堡七桥问题**：17世纪的东普鲁士有一座哥尼斯堡（Konigsberg）城，城中有一条普雷格尔（Pregel）河，全城共有七座桥将河中的岛及岛与河岸联结起来，如下图所示， $a, b, c, d$ 表示陆地。



从四块陆地的任何一块出发，怎样通过且仅通过每座桥一次，最终回到出发地点？

# 图论的起源

- 1736年瑞士大数学家**列昂哈德·欧拉**（Leonhard Euler）解决了这一问题，他用了科学研究中最一般的方法——抽象。
- 用四个字母 $a, b, c, d$ 表示四块陆地，并用7条线表示7座桥，从而将七桥问题抽象为图的问题，寻找经过图中每边一次且仅一次的回路，后来人们把有这样回路的图称为欧拉图。



# 图论的起源

欧拉证明了这个问题没有解，并且推广了这个问题，给出了对于一个给定的图可以某种方式走遍的判定法则。这项工作使欧拉成为图论的创始人。

欧拉被称为图论之父，1736年也被称为“图论元年”。

图论部分共分为三章：**图的基本概念及其矩阵表示**，**几种图的介绍**，**树**。本章将首先讨论图论中的一些基本概念，继之阐述图的基本性质，而后介绍图的矩阵表示方法。

# 主要内容

- 图的基本概念
- 子图和图的运算
- 路径、回路、连通性
- 图的矩阵表示
- 欧拉图
- 哈密尔顿图
- 二部图、平面图
- 网络
- 树

基础知识

特殊图



## 9.1图的基本概念

- 图是由一些顶点和连接这些顶点的一些边所组成的离散结构。
- 根据连接顶点对的边的种类和数目的不同，图有多种类型。几乎每一门可以想到的学科，都有用图模型来解决的问题。

# 图的种类

**定义：** 设一个三元组  $\langle V(G), E(G), \psi \rangle$ ，其中  $V(G)$  是一个非空的节点集合， $E(G)$  是有限的边集合，

(1) 如果  $\psi: E \rightarrow \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V \wedge v_2 \in V\}$ ，则称  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  为无向图。

(2) 如果  $\psi: E \rightarrow V \times V$ ，则称  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  为有向图。

无论是无向图还是有向图，都统称为图，其中  $V$  的元素称为图  $G$  的结点， $E$  的元素称为图  $G$  的边，图  $G$  的结点数目称为图的阶。

可以用几何图形表示上面定义的图。用小圆圈表示结点。在无向图中，若  $\psi(e) = \{v_1, v_2\}$ ，就用连接结点  $v_1$  和  $v_2$  的无向线段表示边  $e$ 。

在有向图中，若  $\psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle$ ，就用  $v_1$  指向  $v_2$  的有向线段表示边  $e$ 。

# 图的基本概念

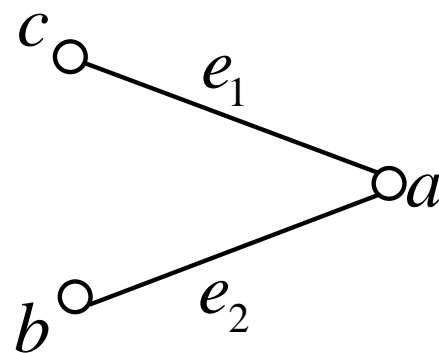
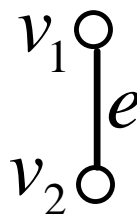
**定义：** 设无向图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ， $e, e_1, e_2 \in E$ ， $v_1, v_2 \in V$

(1) 如果  $\psi(e) = \{v_1, v_2\}$ ，则称  $e$  与  $v_1$  (或  $v_2$ ) 互相关联。 $e$  连接  $v_1$  和  $v_2$ ， $v_1$  和  $v_2$  既是  $e$  的起点，也是  $e$  的终点，也称  $v_1$  和  $v_2$  为 点邻接。

(2) 如果两条不同的边  $e_1$  和  $e_2$  与同一个结点关联，则称  $e_1$  和  $e_2$  为 边邻接。

共边的点称为点邻接；

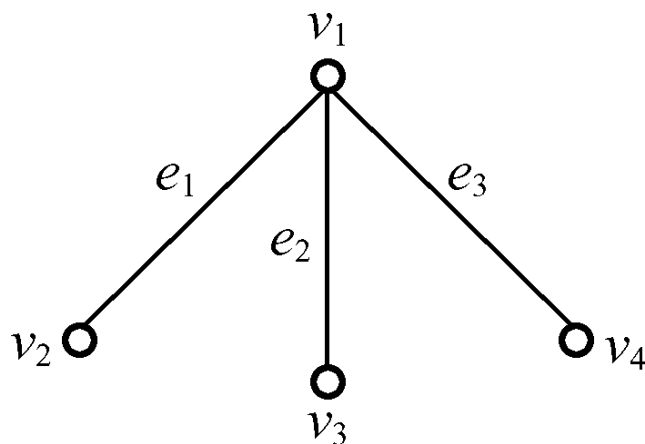
共点的边称为边邻接。



# 图的基本概念

**定义：** 设有向图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ， $e \in E$ ， $v_1, v_2 \in V$ 。  
如果  $\psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle$ ，则称  $e$  连接  $v_1$  和  $v_2$ ， $e$  与  $v_1$  (或  $v_2$ ) 互相关联，分别称  $v_1$  和  $v_2$  是  $e$  的 **起点** 和 **终点**，也称  $v_1$  和  $v_2$  邻接。

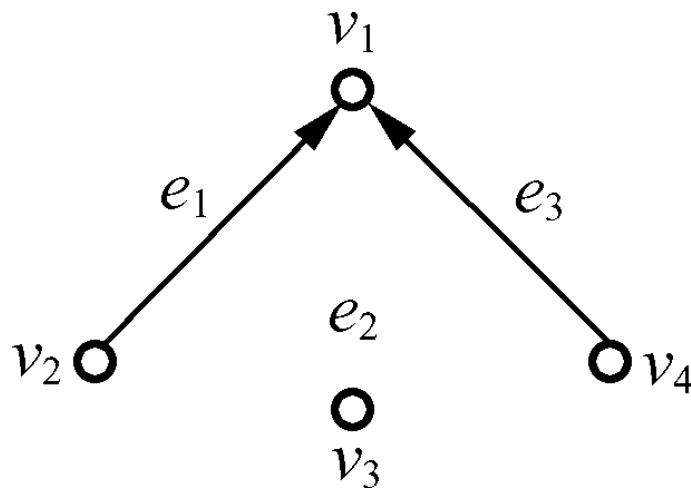
**例：** 无向图



$e_1$  连接  $v_1$  和  $v_2$ ， $v_1$  和  $v_2$  邻接， $e_1$  和  $e_2$  邻接。

# 图的基本概念

例：有向图



$v_2$ 和 $v_1$ 分别是 $e_1$ 的起点和终点， $v_2$ 与 $v_1$ 邻接。

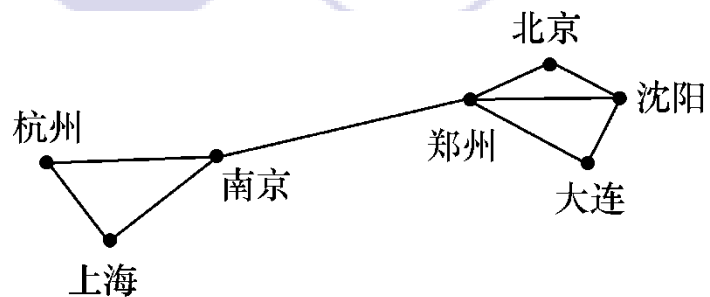
# 图的基本概念

**定义：** 设图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ,  $e_1$  和  $e_2$  是  $G$  的两条不同的边。

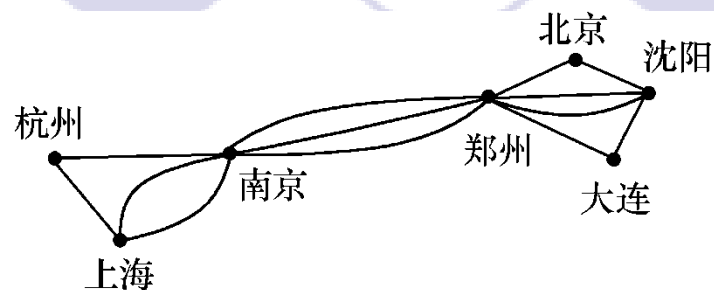
- ① 如果与  $e_1$  关联的两个结点相同，则称  $e_1$  为 **自圈** (或称环和回路)。
- ② 如果  $\psi(e_1) = \psi(e_2)$ ，则称  $e_1$  与  $e_2$  **平行**。
- ③ 如果图  $G$  没有自圈，也没有平行边，则称  $G$  为 **简单图**。
- ④ 如果图  $G$  没有自回路，有平行边，则称  $G$  为 **多重边图**。
- ⑤ 如果图  $G$  既有自回路，又有平行边，则称  $G$  为 **伪图**。

# 图的种类

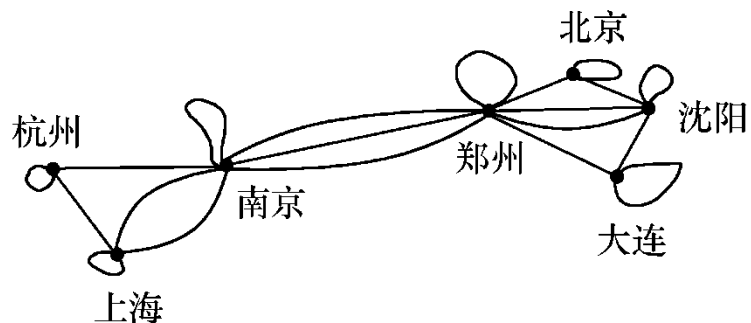
例：中国主要城市通讯图



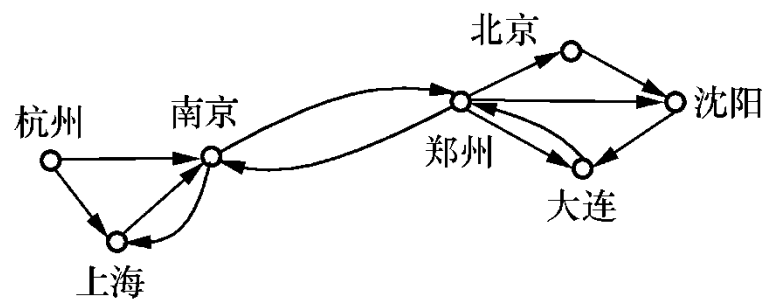
(a) 简单图



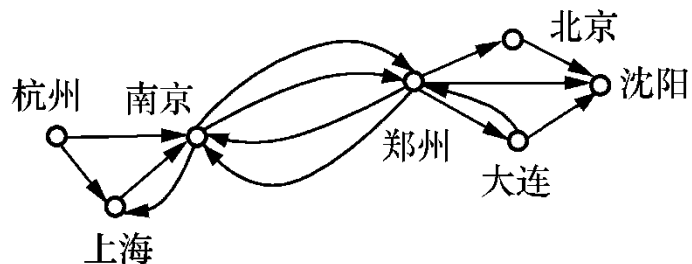
(b) 多重边图



(c) 伪图



(d) 有向图



(e) 多重有向图

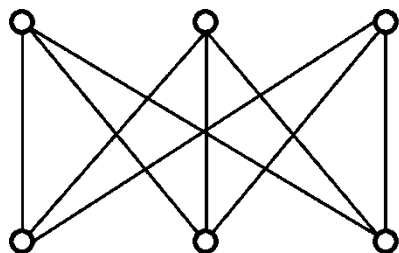
# 图的种类

类型	边	允许平行边	允许自环
简单图	无向	否	否
多重图	无向	是	否
伪图	无向	是	是
有向图	有向	否	是
有向多重图	有向	是	是

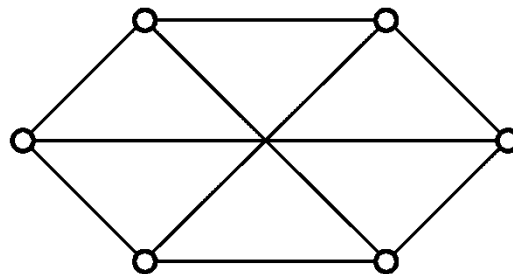


# 图的同构

- 从图的定义可以看出，图的最本质的内容是结点和边的关联关系。
- 两个表面上看起来不同的图，可能表达相同的结点和边的关联关系。

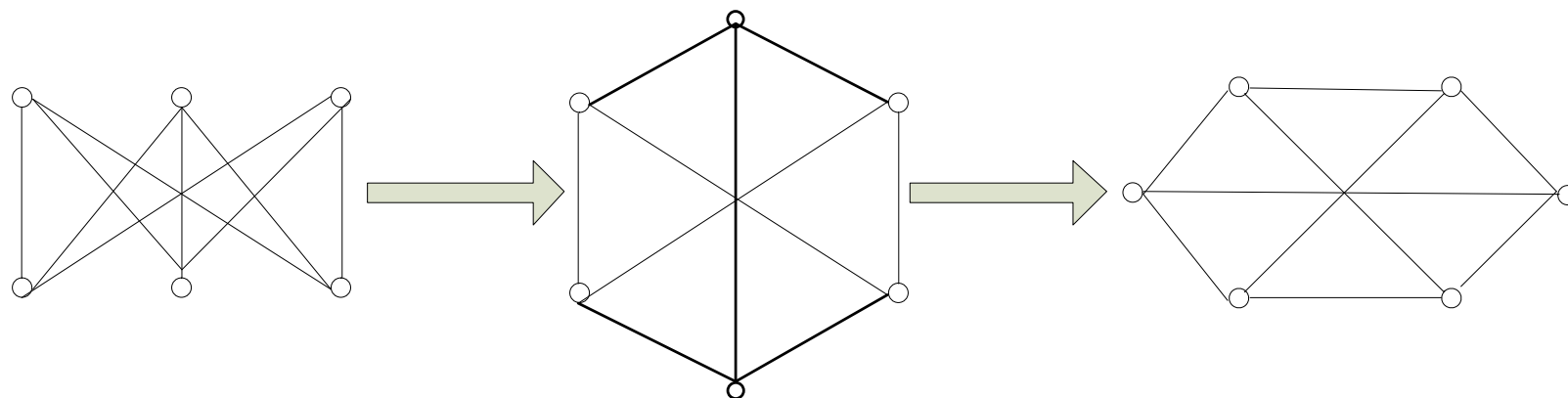


(a)



(b)

# 图的同构



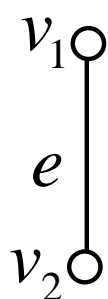
实际中，利用**图的同构**可以研究是否有可能用同样的方式画两个图。例如化学里，表示过去已知化合物的图可以用来判定想象中的新化合物是否已经研究过了。

# 图的同构

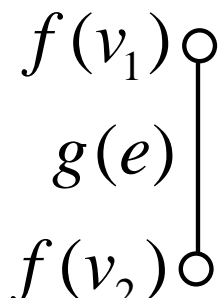
**定义：** 设图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  和  $G' = \langle V', E', \psi' \rangle$ 。如果存在**双射**  $f: V \rightarrow V'$  和**双射**  $g: E \rightarrow E'$ ，使得对于任意的  $e \in E$ ， $v_1, v_2 \in V$  都满足

$$\psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\} & \text{若 } \psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ \langle f(v_1), f(v_2) \rangle & \text{若 } \psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

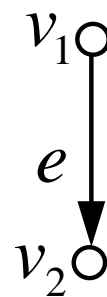
则称  $G$  与  $G'$  同构，记作  $G \cong G'$ ，并称  $f$  和  $g$  为  $G$  和  $G'$  之间的**同构映射**，简称同构。



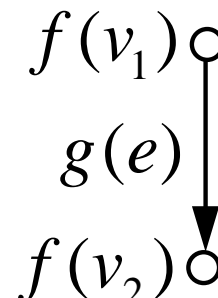
$G$



$G'$



$G$



$G'$

# 图的同构

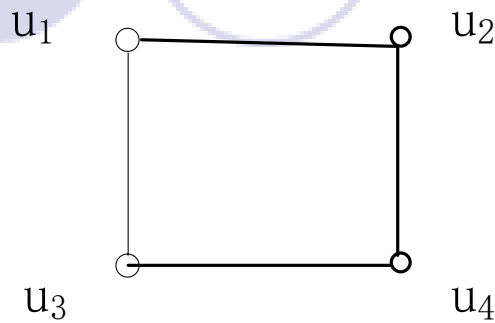
换一种更简单的方法来描述：设图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  和图  $G' = \langle V', E', \psi' \rangle$ ，若存在从  $V$  到  $V'$  的**双射函数**  $f$ ，对于  $V$  中所有的结点  $a$  和  $b$  来说，在  $G$  中有  $a$  到  $b$  的边当且仅当在  $G'$  中有  $f(a)$  和  $f(b)$  的边，就说  $G$  与  $G'$  同构。

也就是说，两个同构的图有**同样多的结点和边**，并且**映射  $f$  保持结点间的邻接关系**，映射  $g$  保持边之间的邻接关系。

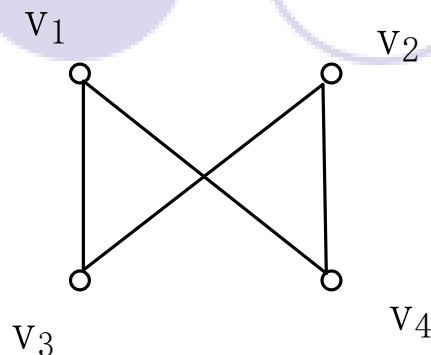
图同构的直观含义，是将其中一个图经过**旋转、平移、拉伸**等变形后与另一个图完全重合。

# 图的同构

例：求证下图  $G$  和  $H$  同构。



$G$

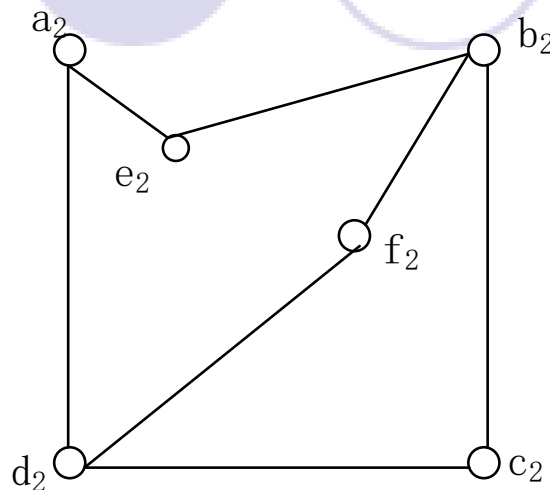
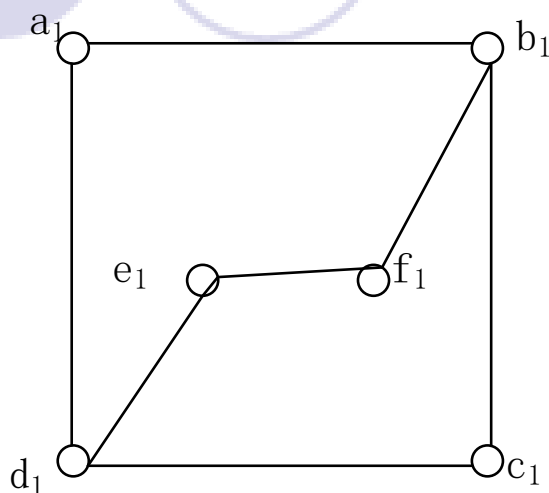


$H$

- 证明：两个图点、边的数目都相同。
- 设函数  $f$  为  $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_4, f(u_3) = v_3, f(u_4) = v_2$ 。
- $G$  中相邻的点是  $u_1$  与  $u_2$ ,  $u_2$  与  $u_4$ ,  $u_4$  与  $u_3$ ,  $u_3$  与  $u_1$ , 对应的像点  $f(u_1) = v_1$  与  $f(u_2) = v_4$ ,  $f(u_2) = v_4$  与  $f(u_4) = v_2$ ,  $f(u_4) = v_2$  与  $f(u_3) = v_3$ ,  $f(u_3) = v_3$  与  $f(u_1) = v_1$  在  $H$  中相邻。因此，二图同构。

# 图的同构

例：判断下列两图是否同构。



- 上面两个图是**同构**的。我们只要构造**双射函数**

$$f: \{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\} \rightarrow \{a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2\}$$

- 并且  $f(a_1)=f_2$  ,  $f(b_1)=b_2$  ,  $f(c_1)=c_2$

$$f(d_1)=d_2 , f(e_1)=a_2 , f(f_1)=e_2$$

- $f$ 是个**双射函数**,并且**保持了边的邻接关系**.

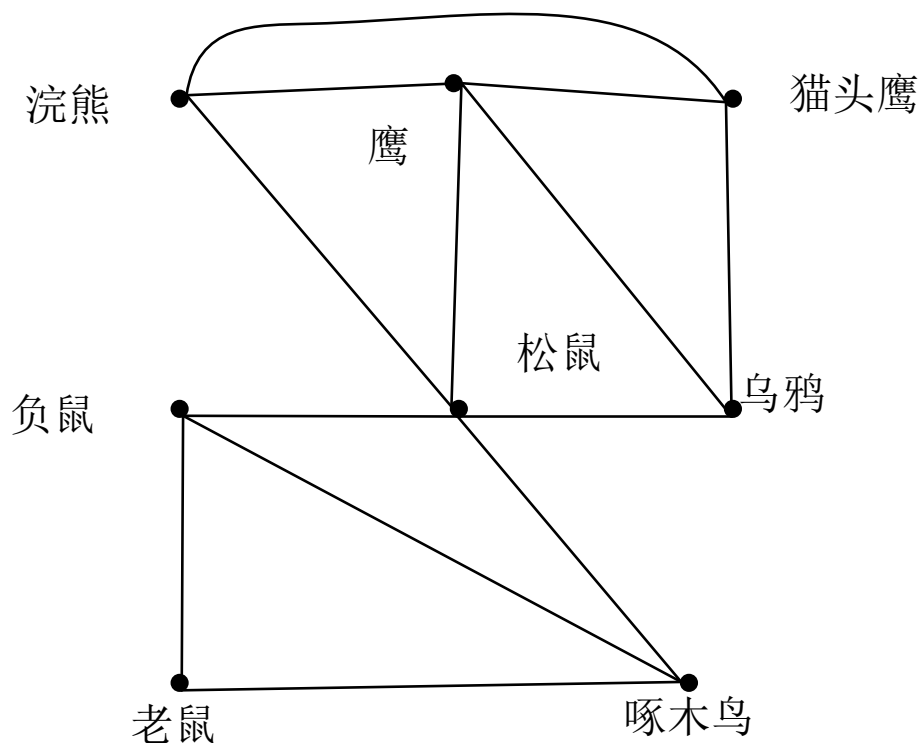
# 图的同构

- 判定两个图是否同构，已知的**最好算法**具有**指数的最坏情形时间复杂度**（对图的结点来说）。
- 不过，解决这个问题的**线性平均情形时间复杂度**的算法已经找到，而且有望找到判定两个图是否同构的多项式最坏情形时间复杂度算法。
- 一个名叫NAUTY的最佳算法，目前可以在个人电脑上 1 秒之内判定带有100个结点的两个图是否同构。

# 图模型

- 图可以用在各种模型里，用于不同的行业。

**栖息地重叠图：**顶点表示物种，若两个物种竞争（他们共享某些食物来源），则用无向边连接表示他们的顶点。





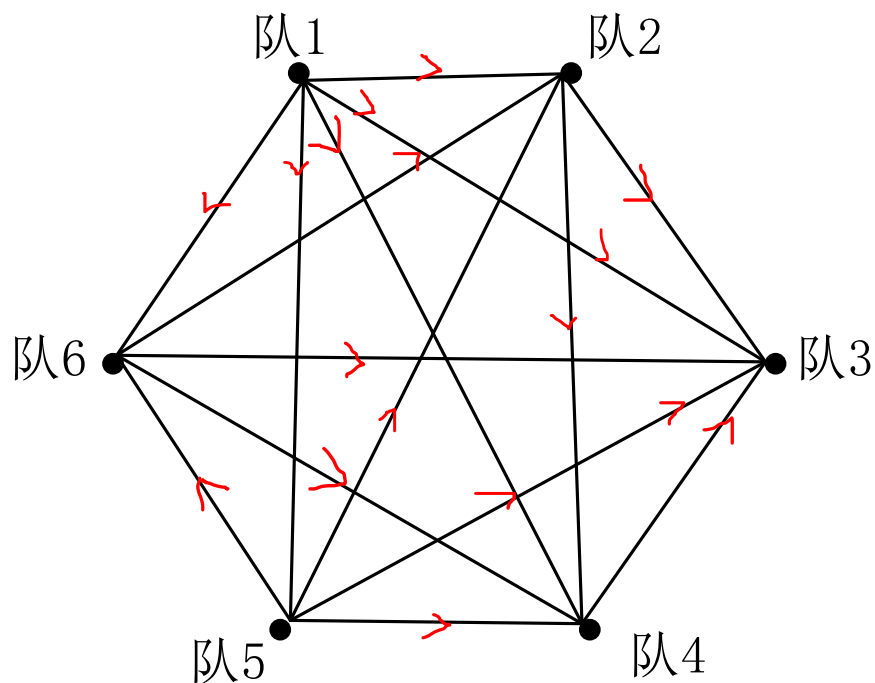
# 图模型

**熟人图：**可以用模型表示人与人之间的各种关系。顶点表示人，当两个人互相认识时，用一条无向边连接这两个人。据估计，世界上所有人的熟人图有超过60亿个顶点和可能超过1万亿条边。

**好莱坞图：**好莱坞图用顶点表示演员，当两个顶点的演员共同出演一部电影时，就用一条无向边连接这两个顶点。根据无联网电影数据库，在2001年11月，好莱坞图有574724个顶点和超过1600万条边，这些顶点所表示的演员出现在292609部电影中。

# 图模型

**循环赛图：** 每个队其他所有队各有一次的比赛称为循环赛。其中每个顶点表示每个队，若a队击败b队，则有一条从a指向b的有向边。



# 图模型

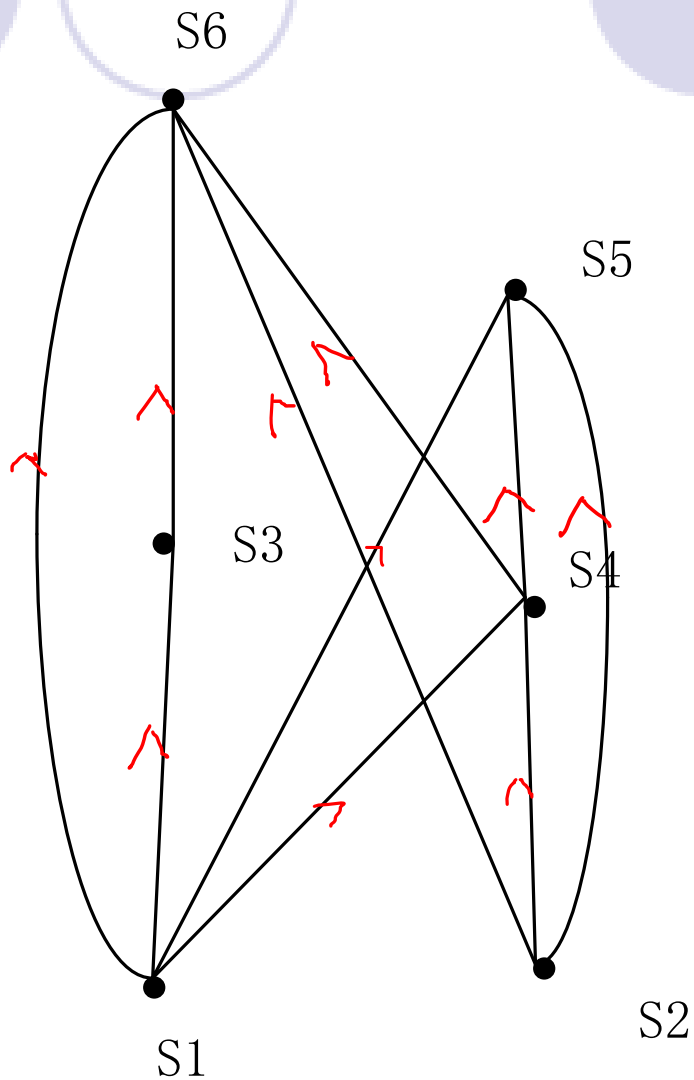
**合作图：**合作图可以用来为学术论文的合作者关系建立模型。顶点表示某个文章的某个作者（人），如果两个人合作论文，则用无向边连接这两个人。已经发现在数学研究论文上合作的合作图有超过337000个顶点和496000条边。

**网络图：**互联网可以用有向图来建模，用顶点表示网页，若有从网页 $a$ 指向网页 $b$ 的链接，则做一条从 $a$ 指向 $b$ 的有向边。网络图几乎是连续变化的，几乎每秒都有新页面产生而又有其他页面被删除。目前网络图有超过10亿个顶点和几百亿条边。许多研究者正在研究网络图的性质，以便更好的理解网络的特性。

# 图模型

**优先图与并发处理：**通过**并发**的执行某些语句，计算机程序可能执行的更快。但重要的是，要避免语句执行时还要用到尚未执行语句的结果。语句与前面语句的**相关性**可以表示成**有向图**。用顶点表示某个语句，若在a语句执行完之前不能执行b语句，则引出一个从a到b的有向边，这样的图称为**优先图**。

# 图模型



S1:  $a := 0$

S2:  $b := 0$

S3:  $c := a + 1$

S4:  $d := b + a$

S5:  $e := d + 1$

S6:  $f := c + d$

# 度

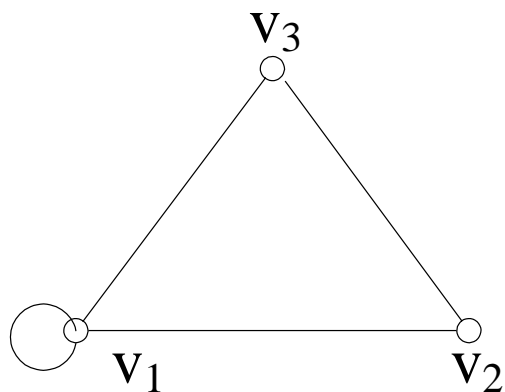
**定义:**  $G = \langle V, E \rangle$

- ① 如果 $G$ 是无向图,  $G$ 中与 $v$ 关联的边和与 $v$ 关联的自回路的数目之和称为 $v$ 的**度**(或次), 记为 $d_G(v)$ 。
- ② 如果 $G$ 是有向图,  $G$ 中以 $v$ 为起点的边的数目称为 $v$ 的**出度**, 记为 $d_G^+(v)$ ;  $G$ 中以 $v$ 为终点的边的数目称为 $v$ 的**入度**, 记为 $d_G^-(v)$ ;  $v$ 的出度与入度之和称为 $v$ 的**度**, 记为 $d_G(v)$ 。

注意, 在计算**无向图**中结点的度时, **自回路**要考虑**两遍**, 因为自回路也是边。

# 度

例：计算下图中各结点的度。



$$d_G(v_1) = 4, \quad d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$$

$$d_D^+(v_1) = d_D^+(v_2) = d_D^-(v_3) = 2$$

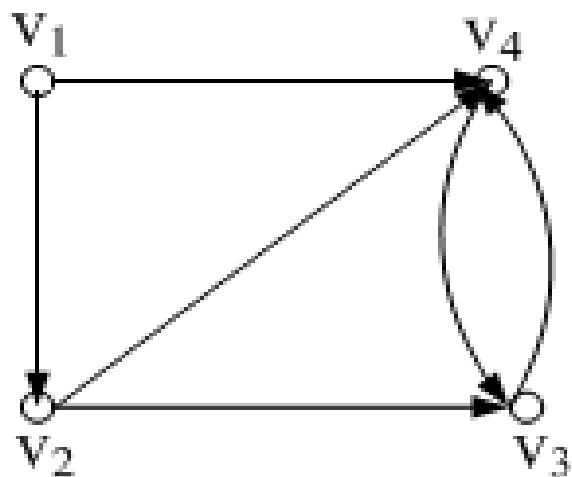
$$d_D^-(v_1) = 0, \quad d_D^-(v_4) = 3$$

$$d_D^-(v_2) = d_D^+(v_3) = d_D^+(v_4) = 1$$

$$d_D(v_1) = 2$$

$$d_D(v_2) = d_D(v_3) = 3$$

$$d_D(v_4) = 4$$



# 度

**定理：**在无向图中，所有节点的度数之和等于边数的2倍。

证：

因为每条边给图 $G$ 带来两度，

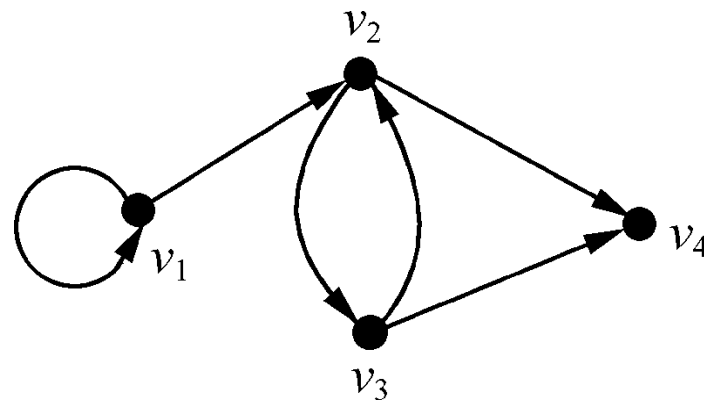
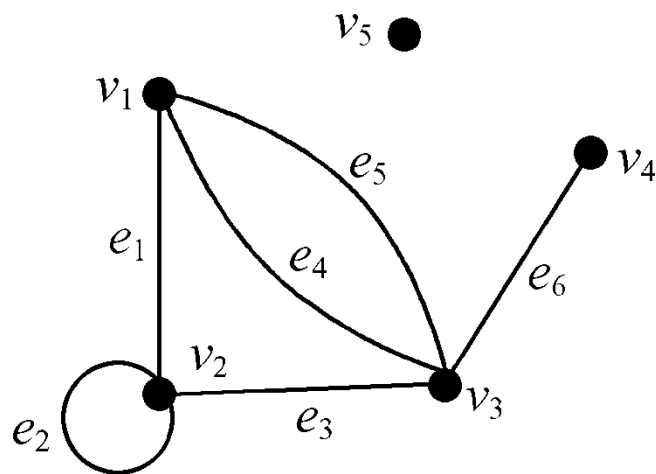
设图 $G$ 有 $m$ 条边，所以图 $G$ 共有 $2m$ 度  
等于图 $G$ 的所有结点的度数之和。

**定理：**在有向图中，所有顶点的度数之和等于边的2倍；所有顶点的入度之和等于所有节点的出度之和，都等于边数。



# 度

- 例：结点的度。



# 结点

**定义：** 度数为奇数的结点称为奇结点，度数为偶数的结点称为偶结点。

**定理：** 任何图都有偶数个奇结点。

证： 设  $V_1 = \{v \mid v \text{ 为奇点} \}$ ， $V_2 = \{v \mid v \text{ 为偶点} \}$ ， 则

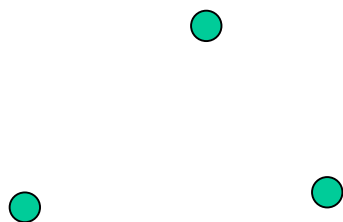
$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v) = 2m$ ， 因为  $\sum_{v \in V_2} d(v)$  是偶数， 所以

$\sum_{v \in V_1} d(v)$  也是偶数， 而  $V_1$  中每个点的度均为奇数， 因此  $|V_1|$  为偶数。

**定义：** 度为0的结点称为孤立结点， 度为1的结点称为端点。

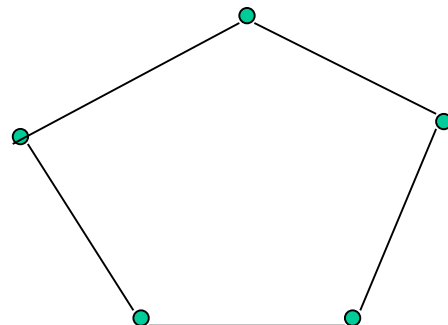
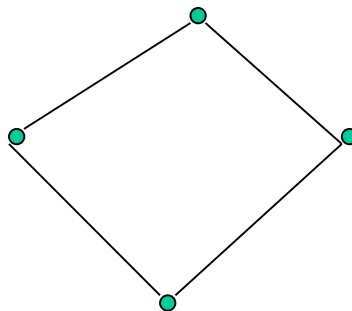
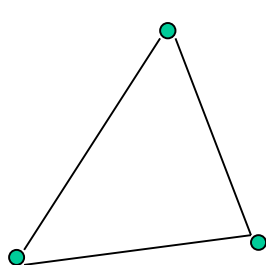
# 一些特殊的简单图

**零图**：结点都是孤立结点的图称为**零图**。



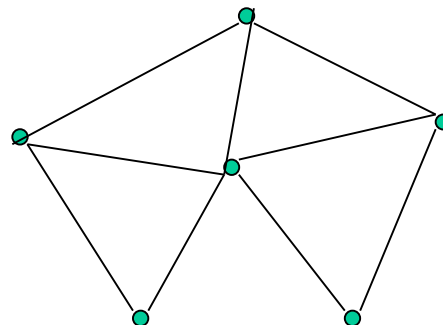
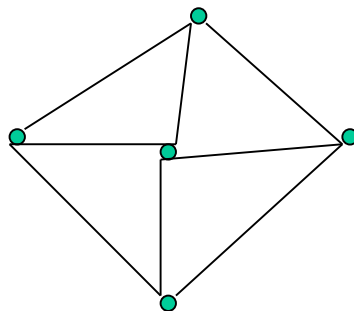
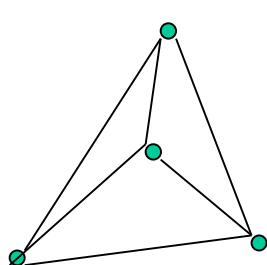
**平凡图**：一阶零图称为**平凡图**。

**圈图** ( $C_n (n \geq 3)$ )：是由 $n$ 个顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 以及边 $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ 组成的。



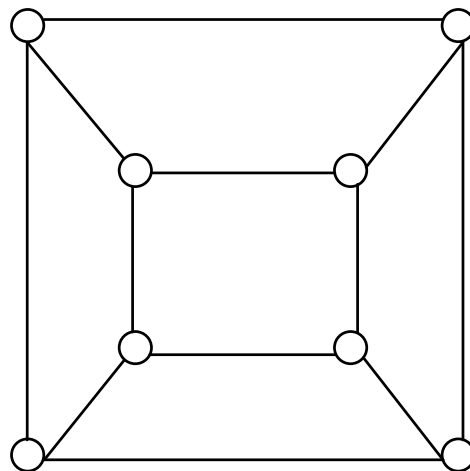
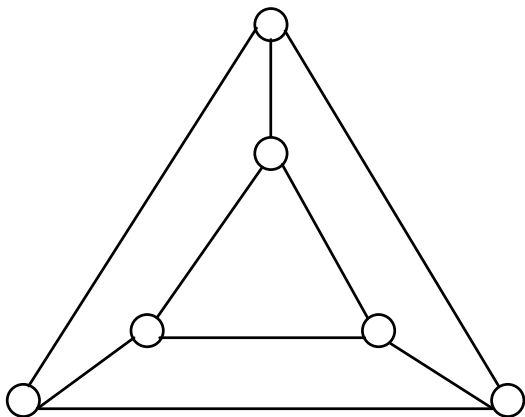
# 一些特殊的简单图

**轮图：** 对 $n \geq 3$  来说，当给圈图 $C_n$ 添加一个顶点，并且把这个新顶点与 $C_n$ 里的 $n$ 个顶点逐个连接，可以得到轮图 $W_n$ 。



# 一些特殊的简单图

**正则图：** 所有结点的度均为自然数 $d$ 的无向图称为 $d$ 度正则图。

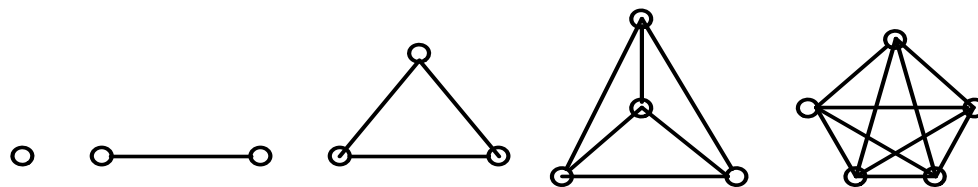


3度正则图

# 一些特殊的简单图

**完全无向图：** 设  $n \in I_+$ ，如果  $n$  阶简单无向图  $G$  是  $n-1$  度正则图，则称  $G$  为 **完全无向图**，记为  $K_n$ 。

**注意：** 完全无向图的任意两个不同结点都邻接。

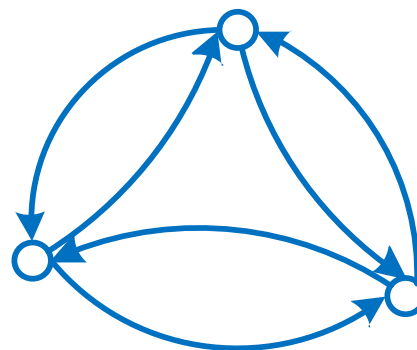


一至五阶完全无向图

# 一些特殊的简单图

**完全有向图：** 设 $n \in I_+$ ，每个结点的出度和入度均为 $n-1$ 的 $n$ 阶简单有向图称为**完全有向图**。

注意：完全有向图的任意两个不同结点之间都有一对方向相反的有向边相连接。



一至三阶完全有向图

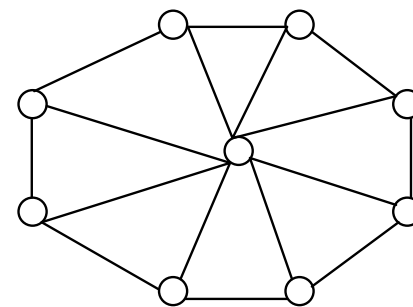
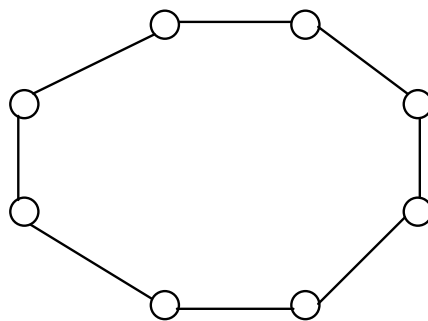
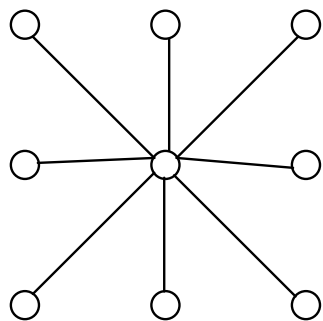
# 一些特殊的简单图

- **定理：**  $n$ 个节点的**无向完全图** $K_n$ 的**边数**为 $C_n^2$
- **证明：** 因为在无向完全图 $K_n$ 中，任意两个节点之间都有边相连，所以 $n$ 个节点中任取两个点的组合数为 $C_n^2$ ，故无向完全图的边数为 $C_n^2$ 。
- 如果在 $K_n$ 中，对**每条边**任意**确定一个方向**，就称该图为 $n$ 个节点的**有向完全图**。显然**有向完全图**的**边数**也是 $C_n^2$



# 特殊类型的图的一些应用

**局域网：**在一座大楼里，像小型计算机和个人电脑这样的计算机，以及像打印机这样的外设，可以用局域网来连接。有三种常见的局域网拓扑结构。



局域网的星形、环形及混合型拓扑

# 用度的概念判断图的同构

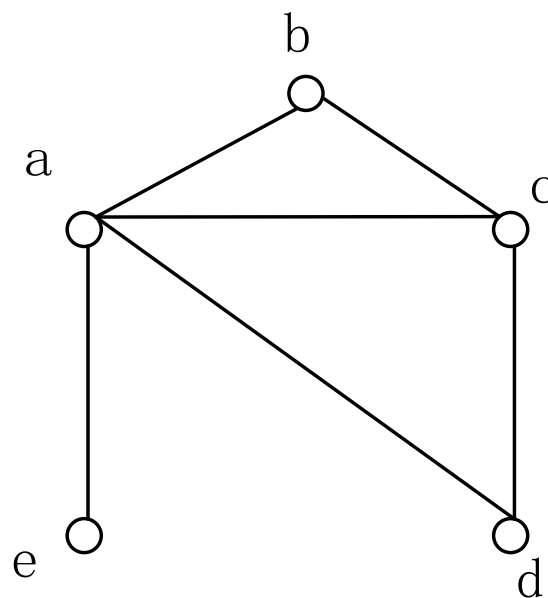
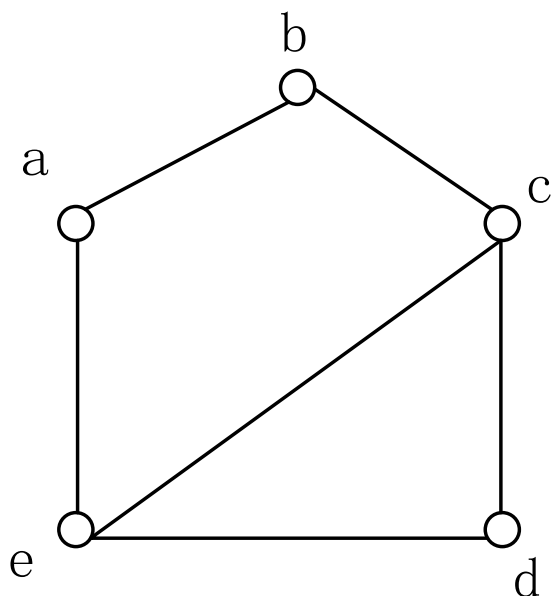
两个图**同构**必须满足的**必要条件**是：

- (1) 顶点个数相同
- (2) 边数相同
- (3) 度数相同的顶点个数相同
- (4)  $K$ 度顶点的导出子图同构

判定图的同构比较难，但是却可以**通过上述四点证明图不同构**。

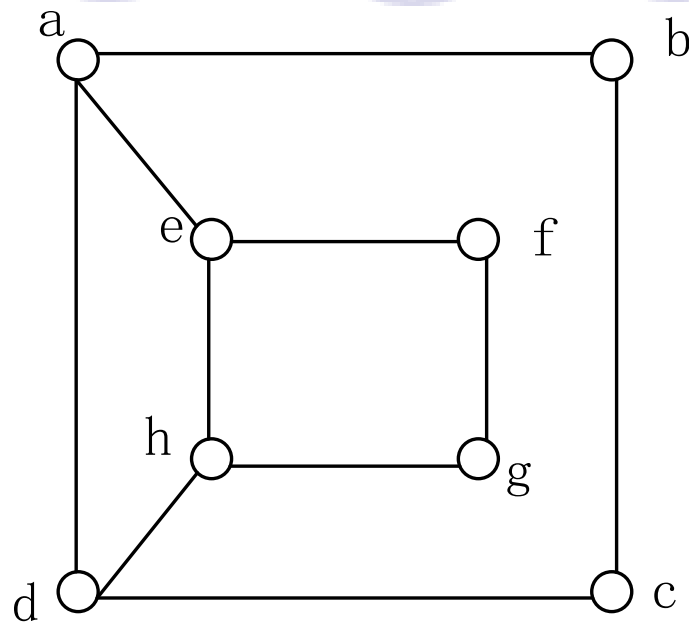
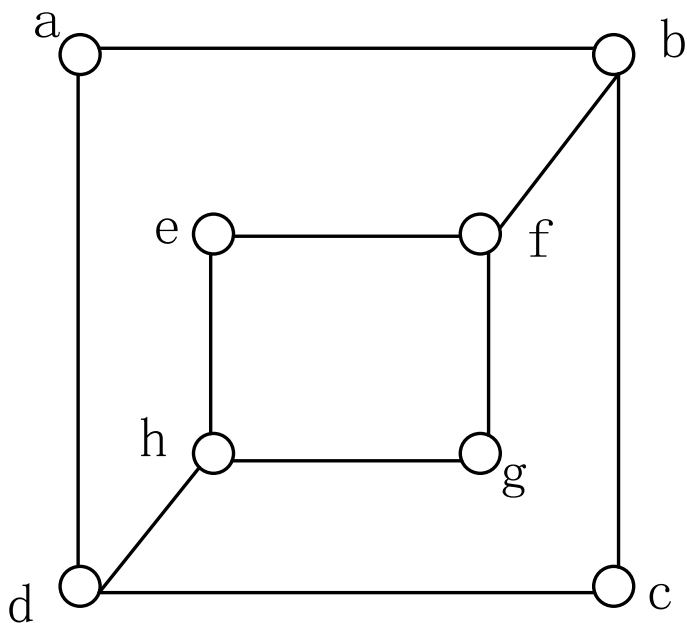
# 用度的概念判断图的同构

例：判断下列两图是否同构。



# 用度的概念判断图的同构

**例：**判断下列两图是否同构。



- 上面两个图不是同构的，因为左图中 2 度结点都和两个 3 度结点相关联，而右图中的 2 度结点和一个 3 度结点相关联还和一个 2 度结点相关联。

## 9. 2子图和图的运算

**定义：** 设  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  和  $G' = \langle V', E', \psi' \rangle$  为图。

(1) 如果  $V' \subseteq V, E' \subseteq E, \psi' \subseteq \psi$ ，则称  $G'$  是  $G$  的子图，记作  $G' \subseteq G$ ，并称  $G$  是  $G'$  的母图。

(2) 如果  $V' \subseteq V, E' \subset E, \psi' \subset \psi$ ，则称  $G'$  是  $G$  的真子图，记作  $G' \subset G$ 。

(3) 如果  $V' = V, E' \subseteq E, \psi' \subseteq \psi$ ，则称  $G'$  是  $G$  的生成子图。

**平凡生成子图：** 对于图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ， $G$  本身以及零图  $G = \langle V, \emptyset \rangle$  都是  $G$  的平凡生成子图。

# 子图

**定义：** 设图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ， $V' \subseteq V$  且  $V' \neq \emptyset$ 。以  $V'$  为结点集合，以起点和终点均在  $V'$  中的边的全体为边集合的  $G$  的子图，称为由  $V'$  导出的  $G$  的子图，记为  $G[V']$ 。

若  $V' \subset V$ ，导出子图  $G[V - V']$ ，记为  $G - V'$ 。

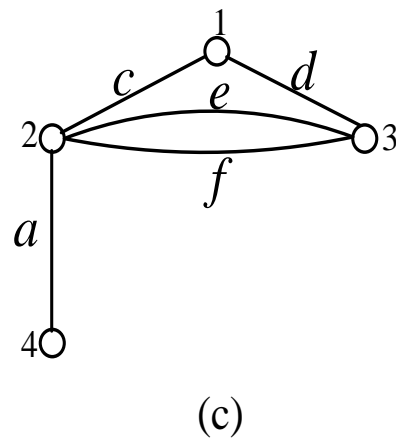
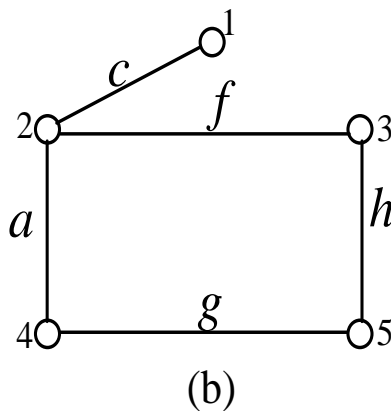
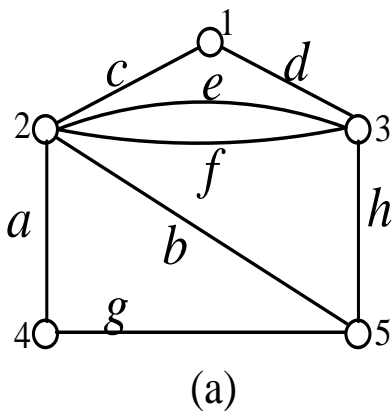
$G - V'$  是从  $G$  中去掉  $V'$  中的结点以及与这些结点关联的边而得到的图  $G$  的子图。

**定义：** 设图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ， $E' \subseteq E$  且  $E' \neq \emptyset$ ， $V' = \{v \mid v \in V \wedge (\exists e)(e \in E' \wedge v \text{ 与 } e \text{ 关联})\}$ 。以  $V'$  为结点集合，以  $E'$  为边集合的  $G$  的子图称为由  $E'$  导出的子图。

# 子图

- 从图示看，图 $G$ 的**子图**是图 $G$ 的一部分，
- $G$ 的**真子图**的边数比 $G$ 的边数少，
- $G$ 的**生成子图**与 $G$ 有**相同的结点**，
- $G$ 的**导出子图** $G[V']$ 是 $G$ 的以 $V'$ 为结点集合的**最大子图**。

例：

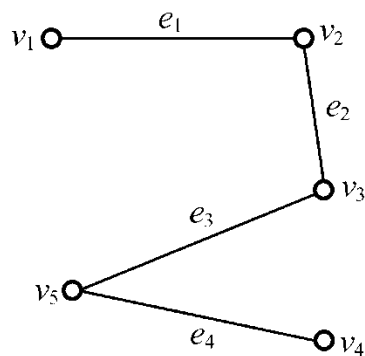


(b)是(a)的子图、真子图和生成子图，(c)是(a)的由 $\{1,2,3,4\}$ 导出的子图。

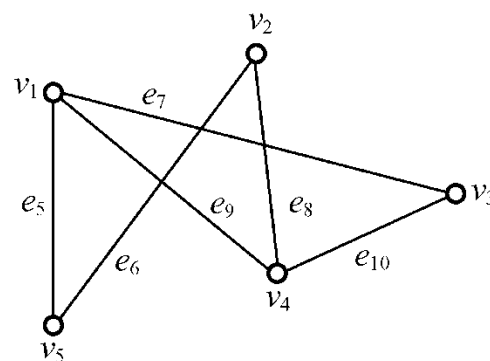
# 子图

定义：设  $n$  阶无向图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  是  $n$  阶完全无向图  $K_n$  的生成子图，则称  $K_n - E$  为  $G$  的补图，记为  $\bar{G}$ 。

显然，简单无向图都有补图，并且一个简单无向图的每个补图都是同构的。对于任意两个简单无向图  $G_1$  和  $G_2$ ，如果  $G_2$  是  $G_1$  的补图，那么  $G_1$  也是  $G_2$  的补图。



(a)



(b)



# 图的运算

**定义：** 设 $G = \langle V, E, \psi \rangle$ 和 $G' = \langle V', E', \psi' \rangle$ 同为无向图或同为有向图。

(1)如果对于任意 $e \in E \cap E'$ 具有 $\psi(e) = \psi'(e)$ ，则称 $G$ 和 $G'$ 是可运算的。

(2)如果 $V \cap V' = E \cap E' = \emptyset$ ，则称 $G$ 和 $G'$ 是不相交的。

(3)如果 $E \cap E' = \emptyset$ ，则称 $G$ 和 $G'$ 是边不相交的。

# 图的运算

设  $G_1 = \langle V_1, E_1, \psi_1 \rangle$  和  $G_2 = \langle V_2, E_2, \psi_2 \rangle$  为可运算的。

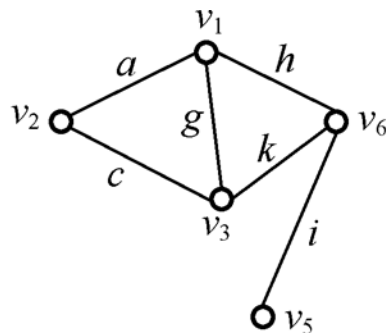
(1) 称以  $V_1 \cap V_2$  为结点集合，以  $E_1 \cap E_2$  为边集合的  $G_1$  和  $G_2$  的公共子图为  $G_1$  和  $G_2$  的交，记为  $G_1 \cap G_2$ 。

(2) 称以  $V_1 \cup V_2$  为结点集合和以  $E_1 \cup E_2$  为边集合的  $G_1$  和  $G_2$  的公共母图为  $G_1$  和  $G_2$  的并，记为  $G_1 \cup G_2$ 。

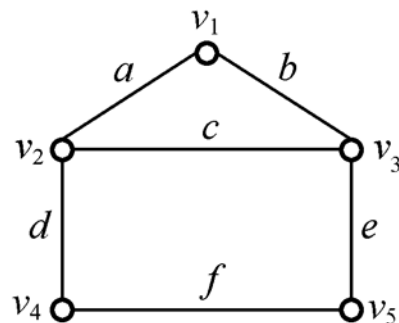
(3) 称以  $V_1 \cup V_2$  为结点集合，以  $E_1 \oplus E_2$  为边集合的  $G_1 \cup G_2$  的子图为  $G_1$  和  $G_2$  的环和，记为  $G_1 \oplus G_2$ 。

# 图的运算

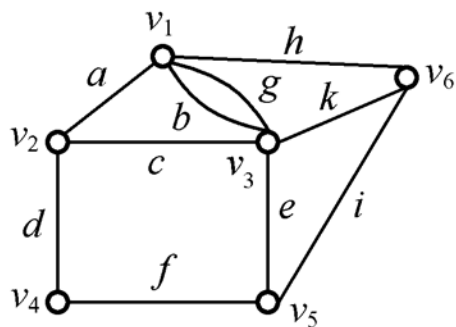
例：(a)和(b)分别为 $G_1$ 和 $G_2$ ，则图c、d、e分别是 $G_1 \cup G_2$ 、 $G_1 \cap G_2$  和  $G_1 \oplus G_2$ 。



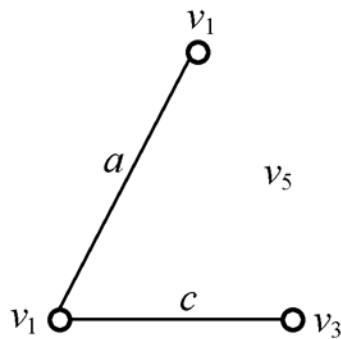
(a)  $G_1$



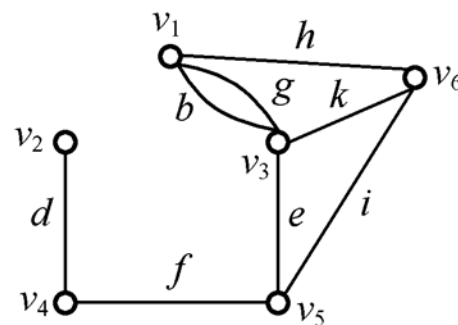
(b)  $G_2$



(c)  $G_1 \cup G_2$

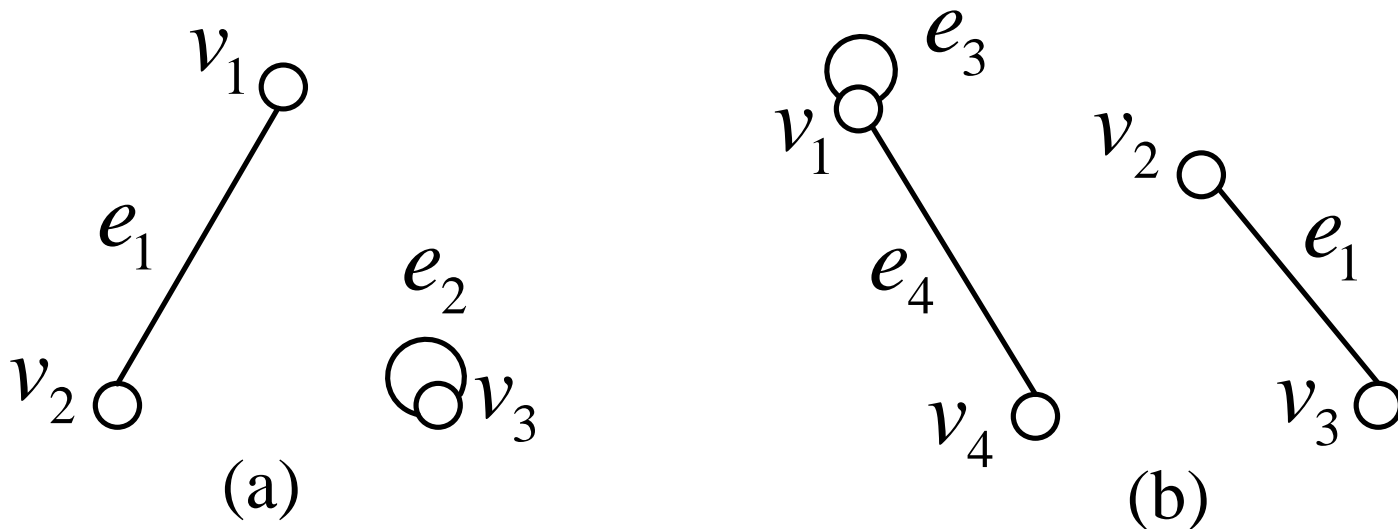


(d)  $G_1 \cap G_2$



(e)  $G_1 \oplus G_2$

# 图的运算



并不是任何两个图都有交、并和环和。如上图，(a)和(b)没有交和并，因为边 $e_1$ 在(a)中连接 $v_1$ 和 $v_2$ ，而在(b)中连接 $v_2$ 和 $v_3$ 。

# 图的运算

**定理：** 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1, \psi_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2, \psi_2 \rangle$ 为可运算的。

(1)如果 $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ ，则存在**唯一**的 $G_1 \cap G_2$ 。

(2)存在**唯一**的 $G_1 \cup G_2$ 和 $G_1 \oplus G_2$ 。

(1)证： 设 $G_1$ 和 $G_2$ 同为有向图，若同为无向图也可同样证明。

- 定义 $\psi: E_1 \cap E_2 \rightarrow (V_1 \cap V_2) \times (V_1 \cap V_2)$  为： 对任意的 $e \in E_1 \cap E_2$ ， $\psi(e) = \psi_1(e) = \psi_2(e)$ 。
- 显然， $\langle (V_1 \cap V_2), (E_1 \cap E_2), \psi \rangle = G_1 \cap G_2$ 。
- 设图  $G = \langle (V_1 \cap V_2), (E_1 \cap E_2), \psi \rangle$  和图  $G' = \langle (V_1 \cap V_2), (E_1 \cap E_2), \psi' \rangle$  均为 $G_1$ 和 $G_2$ 的交。
- 因为 $G \subseteq G_1$ ，对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ ， $\psi(e) = \psi_1(e)$ 。
- 因为 $G' \subseteq G_1$ ，对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ ， $\psi'(e) = \psi_1(e)$ 。
- 这表明 $\psi = \psi'$ 。因此， $G = G'$ 。

# 图的运算

(2) 证: 定义  $\psi: E_1 \cup E_2 \rightarrow (V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)$  如下:

$$\psi(e) = \begin{cases} \psi_1(e) & e \in E_1 \\ \psi_2(e) & e \in E_2 - E_1 \end{cases}$$

- 显然,  $\langle (V_1 \cup V_2), (E_1 \cup E_2), \psi \rangle = G_1 \cup G_2$ 。
- 设  $G = \langle (V_1 \cup V_2), (E_1 \cup E_2), \psi \rangle$  和  $G' = \langle (V_1 \cup V_2), (E_1 \cup E_2), \psi' \rangle$  均为  $G_1$  和  $G_2$  的并。
- 因为  $G_1 \subseteq G$  且  $G_1 \subseteq G'$ , 所以对任意  $e \in E_1$ ,  
 $\psi(e) = \psi_1(e) = \psi'(e)$ ,
- 因为  $G_2 \subseteq G$  且  $G_2 \subseteq G'$ , 所以对任意  $e \in E_2$ ,  
 $\psi(e) = \psi_2(e) = \psi'(e)$ ,
- 这表明  $\psi = \psi'$ , 因此  $G = G'$ 。

对于存在唯一的  $G_1 \oplus G_2$  可同样证明。

# 图的运算

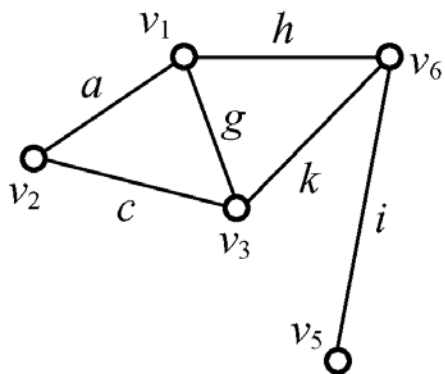
**定义：** 设图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$ ， $E' \subseteq E$ ，  
记  $\langle V, E - E', \psi / (E - E') \rangle$  为  $G - E'$ ，  
对任意  $e \in E$ ，记  $G - \{e\}$  为  $G - e$ 。

$G - E'$  是从  $G$  中去掉  $E'$  中的边所得到的  $G$  的子图。

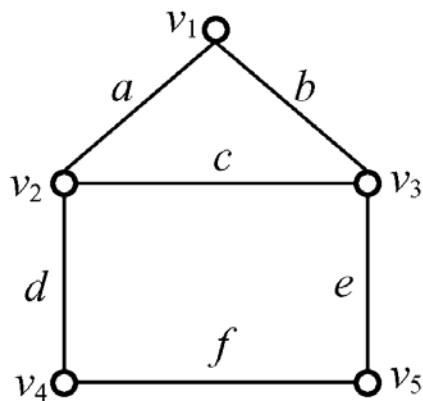
**定义：** 设  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  和  $G' = \langle V', E', \psi' \rangle$  同为无向图  
或同为有向图，并且 **边不相交**，记  $G + G'$  为  $G + E'_{\psi}$ 。

$G + E'_{\psi}$  是由  $G$  增加  $E'$  中的边所得到的图，其中  $\psi'$  指出  $E'$  中的边与结点的关联关系。

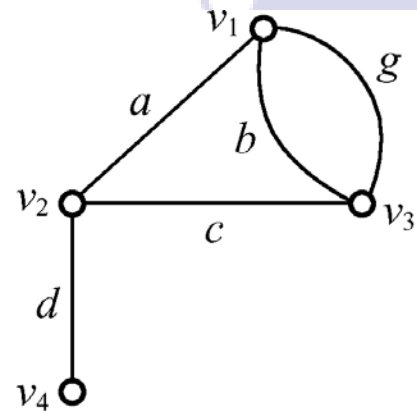
# 图的运算



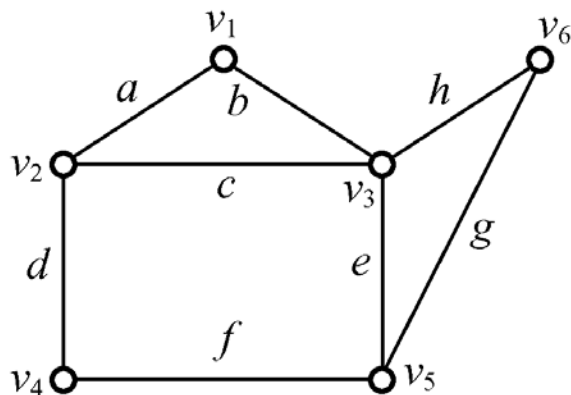
(a)  $G_1$



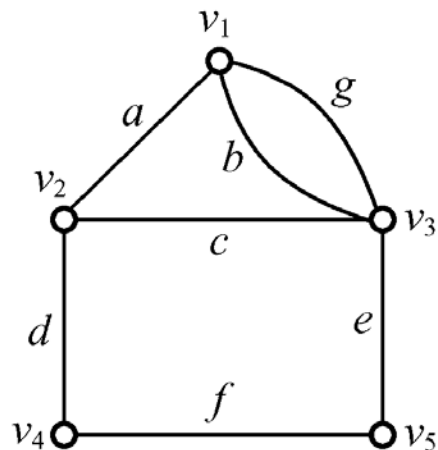
(b)  $G_2$



(c)  $G_1 \cup G_2 - \{v_5, v_6\}$



(d)  $G_1 \cup G_2 - \{g, h\}$



(e)  $G_2 + E'_\psi$

$$E' = \{g\}, \psi' = \{ \langle g, \{v_1, v_3\} \rangle \}$$



# 图的运算

上面的例子中, (a)和(b)分别为 $G_1$ 和 $G_2$ , 则图  
c,d,e分别是  $(G_1 \cup G_2) - \{v_5, v_6\}$ ,  
 $(G_1 \cup G_2) - \{g, h\}$ ,  $G_2 + E'_{\psi}$ , 其中  $E' = \{g\}$   
 $\psi' = \{ \langle g, \{v_1, v_3\} \rangle \}$

# 习题

• 2, 4, 8, 10