姓名：__________

学号：__________

院系：__________

_____ 级_____ 班

装

订

线

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称： 线性代数与解析几何　　试卷： A　　考试形式： 闭卷

授课院（系）： 数学科学学院　考试日期：2015 年 6 月 24 日　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	30	10	8	10	8	10	12	6	6	100
得　分										

得　分

一、（每小题 3 分，共 30 分）填空题

1. 设 $\boldsymbol{a}=[1,4,3]^T,\boldsymbol{b}=[1,-1,2]^T$，则 $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)^{100}=$ $\underline{3^{99}\begin{bmatrix}1&-1&2\\4&-4&8\\3&-3&6\end{bmatrix}}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}|=$ $\underline{\dfrac{125}{2}}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 都是三元列向量，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2,-\boldsymbol{a}_1]$, $|\boldsymbol{A}|=2$，

   则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ $\underline{\ 8\ }$

4. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ $\underline{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{u}_1=[2,1,1]^T$ 和 $\boldsymbol{u}_2=[1,0,0]^T$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两个解, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\underline{k[1,1,1]^T+[1,0,0]^T}$

6. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_4=4\boldsymbol{a}_4+k\boldsymbol{a}_1$，则向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关的充要条件是 k 满足 $\underline{k=24}$

7. 向量 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}$ 下的坐标向量为 $\underline{\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}}$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=0, \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1, \mathrm{r}(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ $\underline{-4}$

9. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2kx_2x_3$ 为正定二次型的

充要条件是k满足 $\underline{1<k<4}$

10. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & 2 & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 & 2 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & 2 & k \end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则$k$需满足 $\underline{k=-6}$

得　分

二、（10 分）

（1）求过点$P_0(1,1,0)$且平行于向量$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$和$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$的平面方程。

（2）将直线L的一般式方程$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$化为对称式方程。

解：（1）所求平面的法向量为$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

该平面的方程为$-2(x-1)+(y-1)+3(z-0)=0$

即$-2x+y+3z+1=0$

（2）令$z=0$，求得直线L上的一点$(1,1,0)$.

直线L的方向向量为$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

直线L的对称式方程为$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$

得　分

三、（8 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 & 3 \\ 10 & 1 & 3 & 3 \\ 10 & 3 & 1 & 3 \\ 10 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-80$$

得　分

四、（10 分）已知向量组$\boldsymbol{a}_1=[1,-2,0,1]^T$, $\boldsymbol{a}_2=[-1,3,2,-2]^T$, $\boldsymbol{a}_3=[1,-1,2,0]^T$,

$\boldsymbol{a}_4=[0,1,3,1]^T,\boldsymbol{a}_5=[2,-6,-5,k]^T$ 的秩为3，求k 及该列向量组的一个极大无关组，并将其它向量用该极大无关组线性表示。

解：$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5]=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\-2&3&-1&1&-6\\0&2&2&3&-5\\1&-2&0&1&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&1&1&1&-2\\0&2&2&3&-5\\0&-1&-1&1&k-2\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&1&1&1&-2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&2&k-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&1&1&1&-2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&k-2\end{bmatrix}$$

$k=2$

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 是一个极大无关组

这时，上式$\to\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&1&1&1&-2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_4$

得　分

五、（8 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&-1\\-1&0&3\end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}$ ，求$\boldsymbol{X}$.

解：由$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}$，得$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&1\\-1&-2&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&-1&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

得　分

六、（10 分）当a,b满足什么条件时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\2x_1+3x_2-x_3=b\\-x_1-3x_2+ax_3=-2\end{cases}$有唯一解；无解；有无穷多解？并在有无穷多解时，求该方程组的通解.

解：$\left[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}\right]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & b\\ -1 & -3 & a & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 0 & -2 & a-1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & a+1 & 2b-2\end{bmatrix}$

当$a\neq -1$时，有唯一解；当$a=-1$且$b\neq 1$时，无解；

当$a=-1$且$b=1$时，有无穷多解。

通解为$\boldsymbol{x}=k\left[2,-1,1\right]^T+\left[-1,1,0\right]^T$

得　分

七、(12 分) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & b\end{bmatrix}$相似，（1）求$a$和$b$.

（2）求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

（3）设$\boldsymbol{u}=\left[x,y,z\right]^T$, 试问方程$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Au}=1$表示什么曲面？

解：（1）$a=1,b=-1$

（2）$\lambda_1=2$对应的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=\left[1,1,0\right]^T$, $\boldsymbol{p}_2=\left[1,0,1\right]^T$

$\lambda_2=-1$对应的特征向量为$\boldsymbol{p}_3=\left[-1,1,1\right]^T$

通过正交化和单位化，求得$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

（3）单叶双曲面

得　分

八、(6 分) 设$\boldsymbol{A}$为三阶实方阵，$\boldsymbol{A}$的每个元素都与其对应的代数余子式相等，$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，证明：$\boldsymbol{A}$为正交矩阵.

证：由$\boldsymbol{A}$的每个元素都与其对应的代数余子式相等，可得$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$

由$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$，得$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\boldsymbol{A}^T\right|,\left|\boldsymbol{A}\right|^2=\left|\boldsymbol{A}\right|,\left|\boldsymbol{A}\right|=1$或$0$.

因为$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，所以$\left|\boldsymbol{A}\right|=1$.

由$\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{AA}^*=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$可知，$\boldsymbol{A}$为正交矩阵.

得　分

九、(6 分) 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别为$\boldsymbol{A}$的特征值$-1$和$1$对应的特征向量，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

证：由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别为$\boldsymbol{A}$的特征值$-1$和$1$对应的特征向量，得$\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，

并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关。

设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$ （1）

用$\boldsymbol{A}$乘上式，得$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_2)=0$ （2）

将（1）式与（2）式相减，得$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=0$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$k_1=k_3=0$

这时，（1）式成为$k_2\boldsymbol{\alpha}_2=0$

再由$\boldsymbol{\alpha}_2$为特征向量，特征向量为非零向量，可得$k_2=0$。

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.