常规必须掌握的题型

1.求μ，$\sigma^2,\sigma_1^2/\sigma_2^2$的置信区间。

2.有关μ，$\sigma^2,\sigma_1^2/\sigma_2^2$的假设检验。

3.矩估计，极大似然估计，验证无偏性。

4.已知X的分布，求$Y=g(X)$的分布。

5.已知(X,Y)的分布，求$Z=g(X,Y)$的分布。

6.已知(X,Y)的分布，求期望，方差，协方差，相关系数等

7.已知(X,Y)的分布，求$Z=\max(X,Y)$的分布。(或$\min$)

8.全概公式

9.已知$f(x,y)$，求边际密度，条件密 度等。

10.给定试验，求二维分布 列，边际分布列，条件 分布列。

一.稍有难度的以往考试题

- **1.** 某射手向一目标独立地连续射击，每次的命中率为**0.3**，以 X 表示第一次命中时的射击次数，Y 表示第二次命中时的射击次数。
- **(1)**求 **(*X*,*Y*)** 的联合分布列；**(2)**求 ***Z*=*Y*-*X*** 的分布列。

解:$(1)P(X=m,Y=n)=0.3^2 0.7^{n-2}, m=1,2\cdots n-1; n=2,3\cdots$

$$(2)P(Z=k)=P(Y-X=k)=\sum_{m=1}^{\infty}P(X=m,Y=m+k)$$

$$k=1,2\cdots$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}0.3^2 0.7^{m+k-2}=0.30.7^{k-1},$$

- **2.** 已知随机变量 $X \sim e(\lambda_1), X \sim e(\lambda_2)$,且 ***X*** **,** ***Y***相互独立，求 $Z=\min(X,Y)$
- 的密度函数。
- 解：由 $x>0, y>0$知$z>0$，当$z \le 0$时， $F_Z(z)=0.$ 当$z>0$时，

$$F_Z(z)=P(Z \le z)=1-P(Z>z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z) \;=1-\{1-F_Y(z)\}\{1-F_X(z)\}=1-e^{-\lambda_1 z}e^{-\lambda_2 z}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

- **3.** 已知随机变量 $X \sim B(12，p)$,求数学期望 $E2^X$.

解：$X \sim B(12，p)$, $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1,\cdots n.$

$$E2^X=\sum_{k=0}^{12}2^k C_n^k p^k(1-p)^{1-k}=\sum_{k=0}^{12}C_n^k(2p)^k(1-p)^{1-k}$$

$$=(2p+1-p)^{12}=(p+1)^{12}$$

- **4. 已知总体** $X \sim U[-\alpha,\alpha]$, $X_1, X_2, \cdots X_n$为X的简单随机样本。

  求α的矩估计量$\hat{\alpha}$，并求$E(\hat{\alpha})^2$.

解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\alpha}, & -\alpha \le x \le \alpha \\ 0, & 其它\end{cases}$, $\quad EX=\int_{-\alpha}^{\alpha} x\frac{1}{2\alpha}dx=0;$

$$EX^2=\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\frac{1}{2\alpha}dx=\frac{1}{6\alpha}x^3\Big|_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{\alpha^2}{3};\quad 令EX^2=A_2;$$

$$\hat{\alpha}^2=3A_2=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2;\quad \hat{\alpha}=\sqrt{3A_2}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2};$$

$$E(\hat{\alpha})^2=E\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=3EX_i^2=3\sigma^2.$$

5. 在**3**次独立重复试验中，已知事件***A***在每次试验中发生的概率均为**1/3**，且在事件***A***发生***i***次（***i=0,1,2,3***）的条件下，事件***B***发生的概率为***i*/4**。求事件***B***发生的概率。

$$P(B|(X=i))=i/4, i=0,1,2,3$$

解：设***X***表示在**3**次独立重复试验中***A***发生的次数，则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$

$$P(B)=P\left\{B\left(\bigcup_{i=0}^{3}(X=i)\right)\right\}=\sum_{i=0}^{3}P\{B(X=i)\}=\sum_{i=0}^{3}P(X=i)P(B|(X=i))$$

$$=\sum_{i=0}^{3}\frac{i}{4}C_3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}iC_3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}=\frac{1}{4}EX=\frac{1}{4}\times 3\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

6. 设总体X的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$，$x\in R$. $X_1,X_2,\ldots X_n$为总体的一个简单随机样本。试求参数α的极大似然估计量 $\hat{\alpha}$，并求$Ee^{-\hat{\alpha}}$ 。

- 解：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x_i|}{\theta}}$$

$$=2^{-n}\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

$$\ln L(\theta)=\ln 2^{-n}+\ln\theta^{-n}-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln(L(\theta))}{d\theta}=-\frac{n}{\hat{\theta}}+\frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

得：$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$$Ee^{-\hat{\theta}}=Ee^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}=\prod_{i=1}^{n}Ee^{-\frac{1}{n}|x_i|}=\left(Ee^{-\frac{1}{n}|x_i|}\right)^n$$

$$Ee^{-\frac{1}{n}|x_i|}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{n}|x_i|}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}-\frac{1}{n}|x_i|}dx=\frac{n}{n+\theta}$$

$$Ee^{-\hat{\theta}}=\left(\frac{n}{n+\theta}\right)^n$$

7.设张三每天接到的电话的个数*X* 服从参数为6的泊松分布，而每个电话为诈骗电话的概率均为1/3，以*Y* 表示张三每天接到诈骗电话的个数，求*Y* 的分布列。

解：设张三每天接到的 电话数$X \sim P(6)$，分布列为：

$$P(X=n)=\frac{6^n}{n!}e^{-6}, n=0,1,2\cdots$$ 此n个电话中诈骗电话数为 Y

$$P(Y=m \mid X=n)= C_n^m\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}, m=0,1,2\ldots n$$

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m|X=n)$$

- (X,Y)的联合分布列为：

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)\,P(Y=m|X=n)$$

$$=\frac{6^n}{n!}e^{-6}\quad C_n^m\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(6\times 2/3)^{n-m}}{n!}e^{-6}(1/3\times 6)^m$$

$$=\frac{(4)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-6}(2)^m,n=0,1\ldots;m=0,1\ldots n$$

$$=\frac{(4)^{n-m}}{(n-m)!}e^{-4}\,\frac{(2)^m}{m!}e^{-2},n=0,1\ldots;m=0,1\ldots n$$

- **(2) *Y* 的边际分布列：**

$$P(Y=m)=\sum P(X=n,Y=m) \quad =\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(4)^{n-m}}{(n-m)!}e^{-6}\frac{(2)^m}{m!}$$

$$=e^{-6}\ \frac{(7.14)^m}{m!}\ \sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(4)^{n-m}}{(n-m)!}\ \overset{t=n-m}{=}\ e^{-6}\frac{(2)^m}{m!}\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{(4)^t}{t\,!}$$

$$=e^{-14}\frac{(2)^m}{m!}e^4 \qquad =e^{-2}\frac{(2)^m}{m!},m=0,1\ldots \qquad Y\sim P(2)$$

- **(3)** 显然 $P(X=n,Y=m)\neq P(X=n)P(Y=m)$，***X*与*Y* 不独立。**

二.个别作业题以及部分期末自测题

1. 一批产品中含有废品，今从中随机抽取85只，发现5只废品。使用极大似然估计估计废品率。

解：设产品废品率为p，$X\sim B(1,p)$，$(X_1,X_2,\cdots X_{85})$为X的样本，

$$\text{似然函数} L(p)=\prod_{i=1}^{85}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{85}x_i}(1-p)^{85-\sum_{i=1}^{85}x_i}$$

$$\ln(p)=\sum_{i=1}^{85}x_i\ln p+\left(85-\sum_{i=1}^{85}x_i\right)\ln(1-p),\qquad \sum_{i=1}^{85}x_i=5$$

$$\frac{d\{\ln l(p)\}}{dp}=0\qquad \hat{p}=\frac{1}{85}\sum_{i=1}^{85}x_i=\frac{5}{85}$$

- **2.**设$\left(X_1, X_2, \cdots X_n\right)$为总体$X \sim N(0,1)$ 的样本，样本均值为$\overline{X}$ ，记
- $Y_i = X_i - \overline{X}$ ，求：**1**）$D\left(Y_i\right)$；**2**）$Cov\left(Y_1, Y_n\right)$；**3**）$P\left(Y_1 + Y_n < 0\right)$ ；
- **4**）若$c\left(Y_1 + Y_n\right)^2$是$\sigma^2$ 的无偏估计量，确定c.

解：1) $D\left(Y_i\right) = D\left(X_i - \overline{X}\right) = D\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_j\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2}$

$= 1 - \frac{1}{n}$

2）$Cov\left(Y_1, Y_n\right) = Cov\left(X_1 - \overline{X}, X_n - \overline{X}\right)$

$= Cov\left(X_1, X_n\right) + Cov\left(\overline{X}, \overline{X}\right) - Cov\left(X_1, \overline{X}\right) - Cov\left(X_n, \overline{X}\right)$

$= D\left(\overline{X}\right) - \frac{1}{n} D\left(X_1\right) - \frac{1}{n} D\left(X_n\right) = -1/n$

- 3） $P(Y_1+Y_n<0)=P(X_1-\overline{X}+X_n-\overline{X}<0)$

$$=P(X_1+X_n-2\overline{X}<0)=1/2$$

$$X_i\sim N(0,1);\ \overline{X}_n\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right);\ X_1+X_n-2\overline{X}\sim N(0,\ \ \sigma^2)$$

4） $\sigma^2=Ec(Y_1+Y_n)^2=\ cE(X_1+X_n-2\overline{X})^2$

$$=cE\left(X_1^2+X_n^2+2X_1X_n+4\overline{X}^2-4X_1\overline{X}-4X_n\overline{X}\right)=c\left(2-\frac{4}{n}\right)$$

$$EX_1X_n=0,\ \ E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=1/n\qquad c=n/(2n-4)$$

$$EX_1^2=EX_n^2=1,\qquad EX_1\overline{X}=EX_n\overline{X}=EX_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}$$

- **3.** 设X 的概率密度为 $f(x)$ 关于 $x=c$ 对称，即 $f(c-x)=f(x+c)$ ，且 $E(X)$ 存在，
- 证明 $E(X)=c$。
- 证明：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+c)f(x+c)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+c)dx+c=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(c-x)dx+c$$

$$\overset{(t=c-x)}{=}\int_{+\infty}^{-\infty}(c-t)f(t)(-dt)+c=c-\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt+c$$

$$E(X)=c-E(X)+c; \quad E(X)=c.$$

- **4.**已知总体 $X \sim N(0,1)$，$(X_1, X_2, \cdots X_n)$为来自总体 的容量为 n 的样本。$\overline{X}$ 及 S^2分别为样本均值和样本方差，且 $T = n\overline{X}^2 + S^2$，试证明 $D(T) = 2n/(n-1)$。
- 证明：$\overline{X} \sim N(0,1/n) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}-0}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\dfrac{\overline{X}-0}{1/\sqrt{n}}\right)^2 = n\overline{X}^2 \sim \chi^2(1)$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1) \qquad D\left(n\overline{X}^2\right) = 2$$

$$D\left((n-1)S^2\right) = 2(n-1); \Rightarrow DS^2 = 2/(n-1)$$

$$D(T) = D\left(n\overline{X}^2\right) + D\left(S^2\right) = 2 + \frac{2}{n-1} = \frac{2n}{n-1}$$

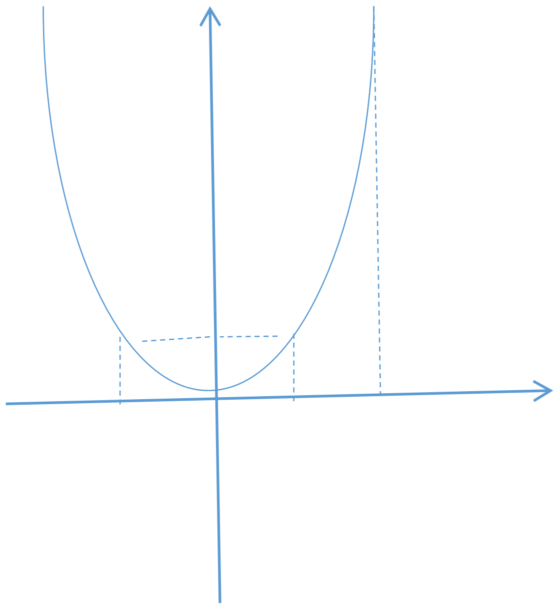
- **5. 把数字1到 n 任意排列成一行，如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置，**
- **称为一个匹配，求匹配数的数学期望。**
- **解：用随机变量 X 表示匹配数，并设**
-
-

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第 i 位匹配}\\ 0 & \text{第 i 位不匹配}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots n$$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，而 $P(X_i=1)=\dfrac{1}{n}$

$$E(X)=nE(X_i)=nP(X_i=1)=n\frac{1}{n}=1$$

- 6. 设随机变量 X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & -1<x<0 \\ \frac{1}{4} & 0\le x<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，令$Y=X^2$
-
- $F(x,y)$ 为 (X,Y) 的分布函数， 求 1）Y 的分布密度。2）$F(2，4)$。
- 解：1）由 -1<x<2 ,及 $Y=X^2$ 知 0<y<4,



- 当0<y<1时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(X^2\le y\right)$
- $(-1<x<1)$ $\quad = P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

-

- 当 $1\le y<4\left(1\le x<2\right)$ 时，

$$F_Y\left(y\right)=P\left(Y\le y\right)=P\left(X^2\le y\right)$$

$$=P\left(-1\le X\le\sqrt{y}\right)$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

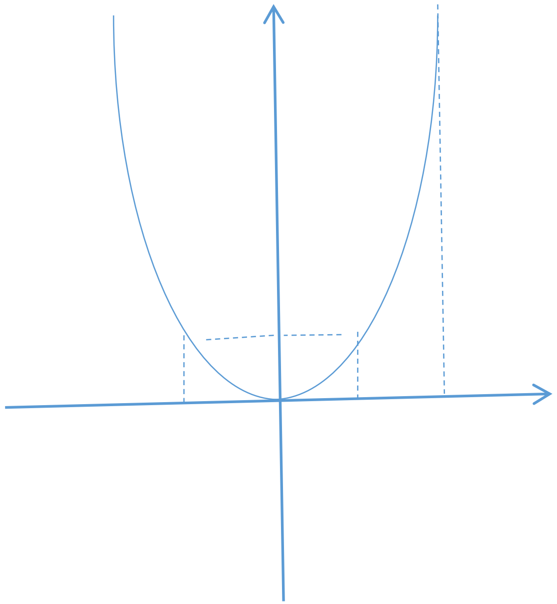
$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}} & 0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}} & 1<y<4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

2) $F\left(2,4\right)=P\left(X\le 2,Y\le 4\right)$

$$=P\left(X\le 2,X^2\le 4\right)$$

$$=P\left(-2\le X\le 2\right)$$

$$=F_X\left(2\right)-F_X\left(-2\right)=1$$



- **7.** 设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 中任意两个的相关系数均为 ρ，证明：$\rho \ge -\frac{1}{n-1}$
- 证明：$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_J) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{1\le i<j\le n} \rho\sqrt{DX_i}\sqrt{DX_j}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} DX_i + \rho\sum_{1\le i<j\le n}\left(DX_i + DX_j\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + \rho(n-1)\sum_{i=1}^{n} DX_i$$

$$\rho \ge -\frac{1}{n-1}$$

$$\begin{array}{cccccc}
DX_1 & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots & (1,n) \\
 & DX_2 & (2,3) & (2,4) & \cdots & (2,n) \\
 & & DX_3 & (3,4) & \cdots & (3,n) \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \cdots & (n-1,n) \\
 & & & & & DX_n
\end{array}$$

-

$$D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2 + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_2, X_1)$$
$$= DX_1 + DX_2 + 2Cov(X_1, X_2)$$

$$Cov(X,Y) = \rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

$$(2ab \le a^2 + b^2)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1 & X_2 \\
X_1 & DX_1 & (1,2) \\
X_2 & (2,1) & DX_2
\end{array}$$

- **8. 设一袋子中装有黑、白两种球若干，其比例为 ϑ，ϑ 为未知参数。现有放回的摸出 n 次球，其中摸出黑球的次数为 Y 次。试证明：$\dfrac{Y}{n-Y}$ 为 ϑ 的极大似然估计。**

- 证明：设$X=1$表示摸黑球，$P(X=1)=\dfrac{\theta}{\theta+1}$,则有总体 $X \sim B\left(1,\dfrac{\theta}{\theta+1}\right)$

- 设摸出 n 次结果 为 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

- $$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{x_i}\left(1-\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{1-x_i}=\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(\frac{1}{\theta+1}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{Y}{n-Y}$$

$$LnL(\theta)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\frac{\theta}{\theta+1}+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\frac{1}{\theta+1},\quad \frac{d(LnL(\theta))}{d\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\hat{\theta}}-\frac{n}{\hat{\theta}+1}=0$$

- **9.** 设随机变量 $X \sim e(1)$，试证明 $Y=\Phi^{-1}\left(1-e^{-X}\right) \sim N(0,1)$。

证明：$Y=\Phi^{-1}\left(1-e^{-X}\right)$ 为严格单调增函数 $0<x<+\infty$ ，$0 \le \Phi(x) \le 1$

则 $-\infty<y<+\infty$

$$F_Y(y)=P(Y \le y)=P\left(\Phi^{-1}\left(1-e^{-X}\right) \le y\right)$$

$$=P\left(\left(1-e^{-X}\right) \le \Phi(y)\right)=P\left(e^{-X} \ge 1-\Phi(y)\right)$$

$$=P\left(X \le -\ln(1-\Phi(y))\right)=F_X(-\ln(1-\Phi(y)))$$

$$=1-e^{-(-\ln(1-\Phi(y)))}=\Phi(y).$$ 则 $Y \sim N(0,1)$。

- **10.** $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为相互独立的连续性随机变量，且 X_i 的分布函数为
- $F_i(x_i), i = 1,2..,$ 试证明随机变量 $Y = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_i(X_i) \sim \chi^2(2n)$
- 证明：令 $Y_i = -2\ln F_i(X_i)$，其分布函数为：

$$F_{Y_i}(y) = P(Y_i \le y) \;\; = P(-2\ln F_i(X_i) \le y)$$

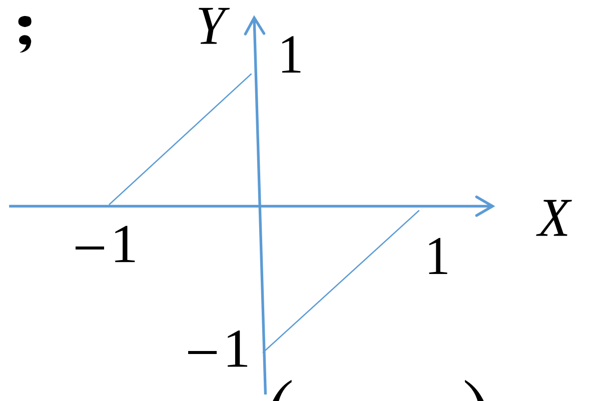
$$= P(\ln F_i(X_i) \ge -\frac{y}{2}) = P(F_i(X_i) \ge e^{-\frac{y}{2}})$$

$$= P(X_i \ge F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}})) = 1 - P(X_i \le F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}}))$$

$$= 1 - F_i(F_i^{-1}(e^{-\frac{y}{2}}) = 1 - e^{-y/2}, \quad Y_i \sim e(1/2)$$

即 $Y_i \sim \chi^2(2), \;\; i = 1,2\cdots n$，$Y = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_i(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \chi^2(2n).$

- **11.**已知随机变量 $X \sim U(-1,1)$，令 $Y=\begin{cases}X+1 & X<0\\ X-1 & X>0\end{cases}$；



- 求 *Y* 的密度函数 $f_Y(y)$.
- **解：由 $-1<x<1$ 知 $-1<y<1$ ； 当 $-1<y<0$ 时 $0\le x<1$;**
- $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X-1\le y)=P(0<X<1+y)=\frac{(y+1)}{2}$
- 当 $0<y<1$ 时，$-1<x<0$ $\quad f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=1/2$
- $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y\le 0)+P(0<Y\le y)$

$$=P(0<X\le 1)+P(-1<X\le y-1)$$
$$=1/2+P(-1<X\le y-1)$$
$$=1/2+\frac{(y-1)+1}{2},\qquad f_Y(y)=1/2.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/2 & -1<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

-
12. 已知 $X \sim U[0,3]$, $Y=\begin{cases} X & 0\le y<1 \\ 2/3 & y=1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，　1）求 $F_Y(y)$。

- 解：当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 1$，$F_Y(y)=1$；
- 当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=x/3$；

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ x/3 & 0\le y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases}$$

2）求 $P(Y=0)$ 以及 $P(Y=1)$。

解：$P(Y=0)=P(Y\le 0)-P(Y<0)=0$

$$P(Y=1)=P(Y\le 1)-P(Y<1)=F_Y(1)-\frac{1-0}{3}-0=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

- **13.** 设总体***X~U*(-*θ*,*θ*)**, $X_1, X_2 \cdots X_n$ 是一个样本，试求参数 θ 的矩估计量，
- 并求 $E\hat{\theta}^2$.
- 解: $EX=\dfrac{\theta-\theta}{2}=0$ ； $EX^2=DX=\dfrac{(\theta+\theta)^2}{12}=\dfrac{\theta^2}{3}$ ；
- 令 $A_2=EX^2$, 得 $\hat{\theta}=\sqrt{3A_2}$,

$$E\hat{\theta}^2=E3A_2=3E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=3EX_i^2=3\frac{\theta^2}{3}=\theta^2$$

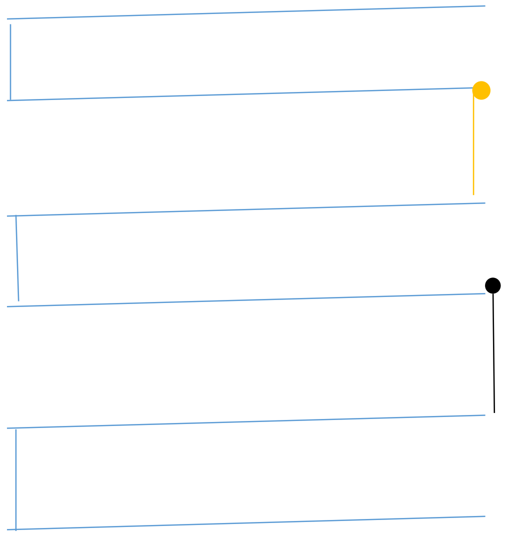
- **14.** 设随机变量 $X \sim N\left(0,\sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(0,\sigma_2^2\right)$ ，且X与Y相互独立。
- 求 $P\left(\frac{X^2}{\sigma_1^2}+\frac{Y^2}{\sigma_2^2}\le 9\right)$。 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}$
- 解：

$$P\left(\frac{X^2}{\sigma_1^2}+\frac{Y^2}{\sigma_2^2}\le 9\right)=\iint\limits_{\frac{X^2}{\sigma_1^2}+\frac{Y^2}{\sigma_2^2}\le 9}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}dxdy$$

$$\overset{\left(\begin{array}{l}\frac{x}{\sigma_1}=r\sin\theta\\ \frac{y}{\sigma_2}=r\cos\theta\end{array}\right)}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^3\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=-\int_0^{2\pi}\int_0^3\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(-\frac{r^2}{2}\right)d\theta$$

$$=-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^3=1-e^{-\frac{9}{2}}$$

- **15. 一个人将6根绳子紧握手中，仅露出绳子的头和尾。然后请另一个人将绳子的6个头两两相连，6个尾两两相连，求放开手后，6根绳子恰巧连成一个环的概率。**
- **解：设 *A* =(6根绳子恰巧连成一个环)**
- $$P(A)=\frac{C_6^1C_4^1\,C_4^1\,C_2^1}{C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1C_2^2}=\frac{8}{15}$$



- **16.** 某工厂的车床，磨床，钻床，刨床台数比为 **9:3:2:1**，他们在一段时间内需要修理的概率之比为 **1:2:3:1**，当有一台机床需要修理时，求这台机床是车床的概率。

- 解：设任选一台机床是车床，磨床，钻床，刨床的事件为 A_1, A_2, A_3, A_4.

$$B=\left(\text{机床需要维修}\right) \quad P\left(A_1\right)=\frac{9}{15}, P\left(A_2\right)=\frac{3}{15}, \quad P\left(A_3\right)=\frac{2}{15},$$

$$P\left(B \middle| A_1\right)=\frac{1}{7}, P\left(B \middle| A_2\right)=\frac{2}{7}, P\left(B \middle| A_3\right)=\frac{3}{7}, P\left(B \middle| A_4\right)=\frac{1}{7}. P\left(A_4\right)=\frac{1}{15}.$$

$$P(B)=P(BS)=\sum_{i=1}^{4} P\left(A_i\right) P\left(B \middle| A_i\right)=\frac{9/15 \times 1/7}{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}+\frac{3}{15}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{15}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{15}\times\frac{1}{7}}$$

- **17.假设 0.5，1.25，0.8，2 是来自总体 *X* 的简单随机样本值，已知**
- $Y=\ln X\sim N(\mu,1)$，**求：1）*EX* (记*EX*为*b*)。2）μ 的置信度为0.95的置信区间。3）利用上述结果求*b*的置信度为0.95的置信区间。**
- **解：**1）$Y=\ln X,\ X=e^{Y},\ EX=E\left(e^{Y}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy \overset{t=y-\mu}{=} e^{\mu+\frac{1}{2}}$

2）$\overline{y}=\frac{1}{4}\left(\ln 0.5+\ln 1.25+\ln 0.8+\ln 2\right)=0$

$\mu:\left(\overline{y_4}\pm Z_{0.025}\,\sigma/\sqrt{4}\right)=\left(\pm 1.96\frac{1}{2}\right)=(-0.98,0.98)$

3）$b:\left(e^{-0.98+\frac{1}{2}},e^{0.98+\frac{1}{2}}\right)$