离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎　博士、教授、博士生导师

办公室：　综合楼405，Tel：　62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
　　　　zkchen00@hotmail.com
QQ：　1062258606

离散数学

第二章 谓词逻辑

回顾

- 谓词、个体、量词
  - 一元、多元、域、全称、存在
- 合式谓词公式
  - 定义：**5**条
- 自由变元和约束变元
- 含有量词的等价式和永真蕴含式

- 量词辖域扩张及收缩律
- 谓词公式的翻译

量词辖域扩张及收缩律

$$\forall x A(x) \vee P \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee P)$$

$$(\forall x) A(x) \wedge P \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge P)$$

$$(\exists x) A(x) \vee P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee P)$$

$$(\exists x) A(x) \wedge P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge P)$$

证明：仅对第一个式子证明，其余类推。

$$\begin{aligned}(\forall x) A(x) \vee P &\Leftrightarrow (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)) \vee P \\ &\Leftrightarrow (A(a_1) \vee P) \wedge (A(a_2) \vee P) \wedge \ldots \wedge (A(a_n) \vee P) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee P)\end{aligned}$$

量词分配律

- 全称量词对∧满足分配律，存在量词对∨满足分配律。

$$\forall x(A(x)\land B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x)\land \forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\lor B(x))\Leftrightarrow \exists xA(x)\lor \exists xB(x)$$

证明：仅证明第一个式子。

$$(\forall x)(A(x)\land B(x))$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1)\land B(a_1))\land (A(a_2)\land B(a_2))\land \ldots \land (A(a_n)\land B(a_n))$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1)\land A(a_2)\land \ldots \land A(a_n))\land (B(a_1)\land B(a_2)\land \ldots \land B(a_n))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\land (\forall x)B(x)$$

量词分配律

- 全称量词对∨，存在量词对∧不满足分配律。

例：个体域是人的集合。

A(x)：**x**是女人。　**B(x)**：**x**是男人。

$(\forall x)(A(x)\vee B(x))$ 为真；

$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$ 为假。

$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 为假.

$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$ 为真。

- 仅满足：$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

  $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

- 为正确理解上面第二式。设
  - **A(x) :x**会用左手拿筷子吃饭
  - **B(x): x**会用右手拿筷子吃饭

重要等价式和永真蕴含式

$$E_{31}\quad (\exists x)(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$$

$$E_{32}\quad (\forall x)(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$$

$$E_{33}\quad \neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)\neg A(x)$$

$$E_{34}\quad \neg(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)$$

$$E_{35}\quad (\forall x)A(x)\vee P\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\vee P)$$

$$E_{36}\quad (\forall x)A(x)\wedge P\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\wedge P)$$

重要等价式和永真蕴含式

$$E_{37}\quad (\exists x)A(x) \vee P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee P)$$

$$E_{38}\quad (\exists x)A(x) \wedge P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge P)$$

$$E_{39}\quad (\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$$

$$E_{40}\quad (\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$$

$$E_{41}\quad A \rightarrow (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$$

$$E_{42}\quad A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$$

$$E_{43}\quad (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$$

重要等价式和永真蕴含式

$$I_{17}\quad (\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$$

$$I_{18}\quad (\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$$

$$I_{19}\quad (\exists x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$$

$$I_{20}\quad (\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)$$

量词交换式

$$B_1 \quad (\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$B_2 \quad (\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$B_3 \quad (\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$$

$$B_4 \quad (\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

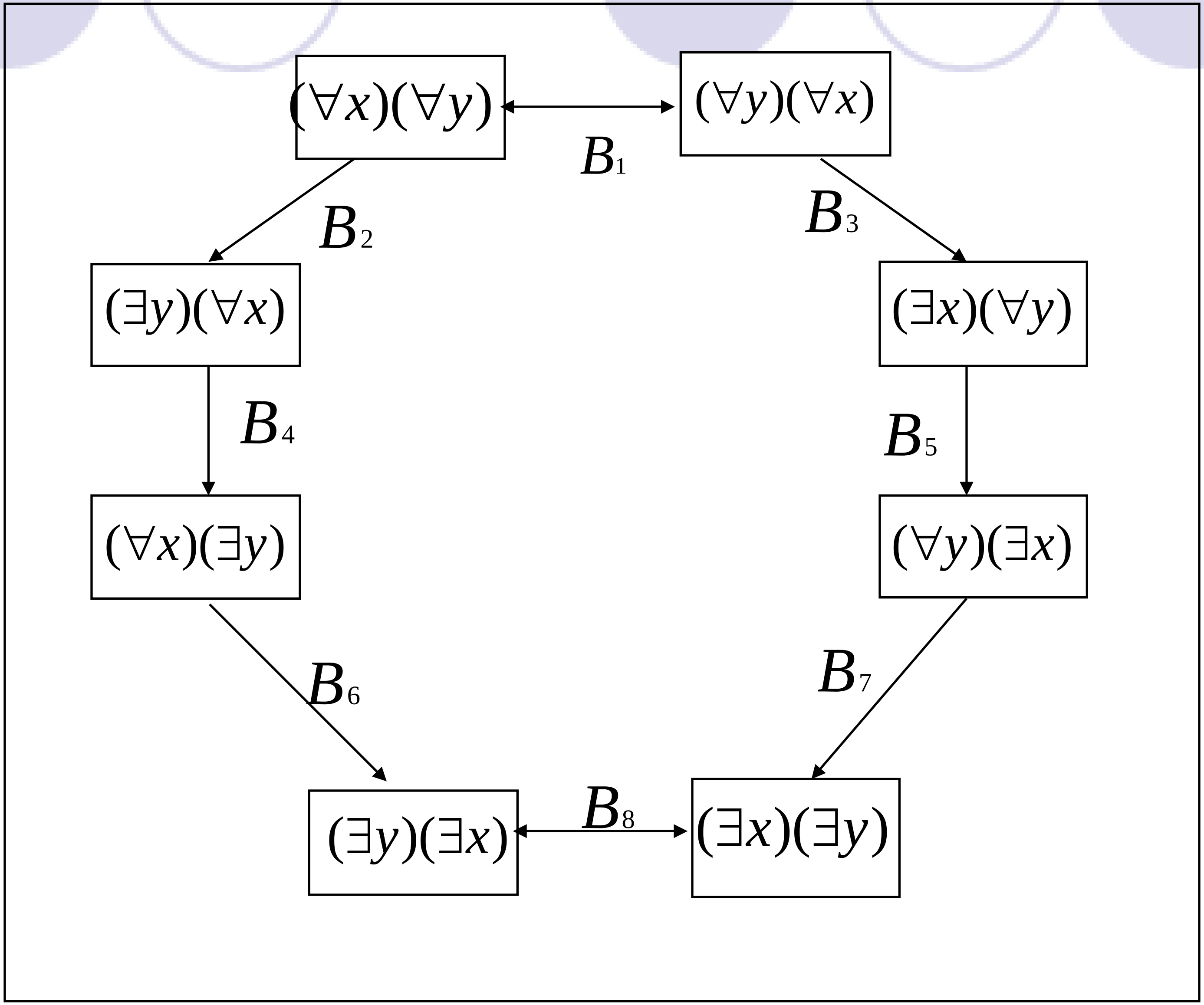
$$B_5 \quad (\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

$$B_6 \quad (\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$B_7 \quad (\forall y)(\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$$

$$B_8 \quad (\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

记忆规律


$(\forall x)(\forall y)$
$(\forall y)(\forall x)$
B_1
B_2
B_3
$(\exists y)(\forall x)$
$(\exists x)(\forall y)$
B_4
B_5
$(\forall x)(\exists y)$
$(\forall y)(\exists x)$
B_6
B_7
$(\exists y)(\exists x)$
B_8
$(\exists x)(\exists y)$

谓词公式的翻译

- 任何整数都是实数。
  - $P(x)$：x是整数；
  - $Q(x)$：x是实数。
  - 符号化为：$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
- 没有不犯错误的人。
  - $P(x)$：x是人；
  - $Q(x)$：x犯错误。
  - 符号化为：$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
  - 或符号化为：$\neg(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$

谓词公式的翻译

- 有一个大于**10**的偶数。
  - $P(x)$：x**>10**；
  - $Q(x)$：x是偶数。
  - 符号化为：$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
- 每个学生都要锻炼身体。
  - $P(x)$：x是学生；
  - $Q(x)$：x锻炼身体。
  - 符号化为：$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
  - 不能符号化为：$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

- 有的狮子不爱喝咖啡。
  - $P(x)$：x是狮子；
  - $Q(x)$：x爱喝咖啡。
  - 符号化为：

$$(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

  - 不能符号化为：

$$(\exists x)(P(x) \to \neg Q(x))$$

谓词公式的翻译

- 不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫。
  - $P(x)$：x是黑猫。
  - $Q(x)$：x是白猫。
  - $R(x)$：x是抓住老鼠的猫。
  - $G(x)$：x是好猫。
  - 符号化为： $(\forall x)(R(x)\wedge(P(x)\vee Q(x))\to G(x))$
- 有些人对某些食物过敏。
  - $A(x)$：x是人。
  - $B(x)$：x是食物。
  - $C(x,y)$：x对y过敏。
  - 符号化为： $(\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y)\wedge C(x,y))$

谓词公式的翻译

- 一切人不是一样高。
  - $P(x)$：x是人。
  - $Q(x,y)$：x与y一样高。
  - $R(x,y)$：x与y是不一样。
  - 符号化为：$(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y) \wedge R(x, y)) \to \neg Q(x, y))$
- 不是一切人都一样高。
  - 符号化为：$\neg \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \to Q(x, y))$
  - 或：$\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg Q(x, y))$

谓词公式的翻译

符号化：没有只爱江山不爱美人的英雄

$Hero(x)$：x是英雄

$Love(x,y)$：x爱y

符号化为：

$$(\forall x)(Hero(x) \wedge Love(x, \text{江山}) \rightarrow Love(x, \text{美人}))$$

或

$$\neg(\exists x)(Hero(x) \wedge Love(x, \text{江山}) \wedge \neg Love(x, \text{美人}))$$

谓词逻辑中的推理规则

- 推理规则

规则1：约束变元的改名规则

$$(\forall x)P(x) \quad \text{等价于} \quad (\forall y)P(y)$$

- 对约束变元进行换名，*使得一个变元在一个公式中只呈一种形式出现。*规则如下：
  - 欲改名之变元应是某量词作用范围内的变元，且应同时更改该变元在此量词辖域内的所有约束出现，而公式的其余部分不变。
  - 新的变元符号应是此量词辖域内原先没有使用过的，最好是公式中未出现过的符号。

规则1：约束变元的改名规则

- 例：对公式$\forall x(P(x,y)\rightarrow \exists yQ(x,y,z)) \land S(x,z)$进行换名，使各变元只呈一种形式出现。

解：

需要对约束变元*x*，*y*进行换名

$$\forall u(P(u,y)\rightarrow \exists vQ(u,v,z))\land S(x,z)$$

不对的：

$$\forall u(P(u,v)\rightarrow \exists vQ(u,v,z))\land S(x,z)$$

$$\forall u(P(u,y)\rightarrow \exists zQ(u,z,z))\land S(x,z)$$

规则2：自由变元的代入规则

- 对公式中自由变元的更改叫做代入。规则如下：
  - 欲改变自由变元的名，必改在公式中的每一处自由出现。
  - 新变元不应在原公式中以任何约束形式出现。

例：对公式 $\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y,z)) \wedge S(x,z)$ 的变元 **x,y**的自由出现用**w,t**代入，得

$$\forall x(P(x,t) \rightarrow \exists y Q(x,y,z)) \wedge S(w,z)$$

例如 对公式

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\vee(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$$

为清楚起见，可对第二个约束变元x进行换名

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\vee(\forall y)(P(y)\rightarrow R(y))$$

又例如 对公式

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x,y))\wedge Q(x,y)$$

可对约束变元x进行换名，得

$$(\forall z)(P(z)\rightarrow R(z,y))\wedge Q(x,y)$$

错误：$(\forall z)(P(z)\rightarrow R(\utilde{x},y))\wedge Q(x,y)$

$$(\forall \utilde{y})(P(\utilde{y})\rightarrow R(\utilde{y},y))\wedge Q(x,y)$$

规则3：命题变元的代换规则

- 用任一谓词公式A_i代换永真公式 B中某一命题变元P_i的所有出现，所得到的新公式B'仍然是永真式（但在A_i的个体变元中不应有 B 中的约束变元出现,并有$B \Rightarrow B'$。

规则4：取代规则

- 设 $A'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow B'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 都是含***n***个自由变元的谓词公式，且***A*′**是***A***的子公式。若在***A***中用***B*′**取代***A*′**的一处或多处出现后所得的新公式是***B***，则有 $A \Leftrightarrow B$。如果***A***为永真式，则***B***也是永真式。

谓词逻辑的推理

在谓词逻辑中，推理的形式结构仍为

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$ 是永真式，

则称由前提 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 逻辑的推出结论C，

在此 $H_1, H_2, \ldots, H_n$，C均为谓词公式。

规则5：量词的增加和删除规则

- 全称特指规则***US***：从 $(\forall x)A(x)$ 可得出结论***A(y)***，其中***y***是个体域中任一个体，即：

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$$

  - 注意：***y***不能和***A(x)***中其它指导变元重名。

- 存在特指规则***ES***：从 $(\exists x)A(x)$可得出结论***A(a)***，其中***a***是 $(\exists x)A(x)$和在此之前不曾出现过的个体常量，即： $$(\exists x)A(x) \Rightarrow A(a)$$

  - 注意：***a***不能和指定前提中任一自由变元同名，也不能和使用本规则以前任一推导步骤上得到的公式的自由变元同名。

规则5：量词的增加和删除规则

- 存在推广规则***EG***：从***A*(*x*)** 可得出结论$(\exists y)A(y)$ ，其中***x***是个体域中的某一个个体，即：

$$A(x) \Rightarrow (\exists y)A(y)$$

注意：***y***不和***A*(*x*)**中其他自由变元或指导变元同名。

- 全称推广规则***UG***：从***A*(*x*)** 可得出结论$(\forall y)A(y)$ ，其中***x***是个体域中的任意个体，即：

$$A(x) \Rightarrow (\forall y)A(y)$$

使用条件: **(1)*x***不是给定前提中任一公式的自由变元;

(2)*x*不是在前面推导步骤中使用***ES***规则引入的变元;

(3)若在前面推导过程中使用***ES***规则引入新变元***u***时，***x***是自由变元，那么在***A*(*x*)**中，***u***应约束出现。

- **UG-------Universal Generalization**
- **EG-------Existential Generalization**
- **UI-------Universal Instantiation**
- **EI-------Existential Instantiation**
- **US-------Universal Specialisation**
- **ES------- Existential Specialisation**

作业

- **P48**
  - **3**
  - **4（1、3）**
  - **5**
  - **6（1,3）**