# 离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎

# 第9章
# 图的基本概念及其矩阵表示论

# 回顾

- 图的基本概念
- 子图和图的运算
- 路径、回路、连通性

# 9.4图的矩阵表示

## 邻接矩阵

定义： 设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是一个简单有向图，其中的结点集合$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，并且假定各结点已经有了从结点$v_1$到$v_n$的次序。试定义一个$n\times n$的矩阵$A$，使得其中的元素

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 当\langle v_i,v_j\rangle\in E\\ 0 & 当\langle v_i,v_j\rangle\notin E\end{cases}$$

则称这样的矩阵$A$是图$G$的邻接矩阵。

# 邻接矩阵

图的邻接矩阵不具有唯一性。

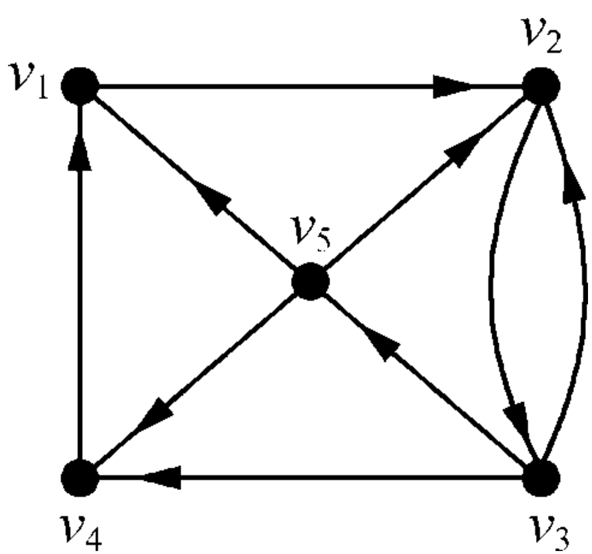
对于给定简单有向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$来说，其邻接矩阵依赖于集合$V$中的各元素间的次序关系。

给定两个有向图和相对应的邻接矩阵，如果首先在一个图的邻接矩阵中交换一些行，而后交换相对应的各列，从而有一个图的邻接矩阵，能够求得另外一个图的邻接矩阵，则事实上这样的两个有向图，必定是互为同构的。

# 邻接矩阵

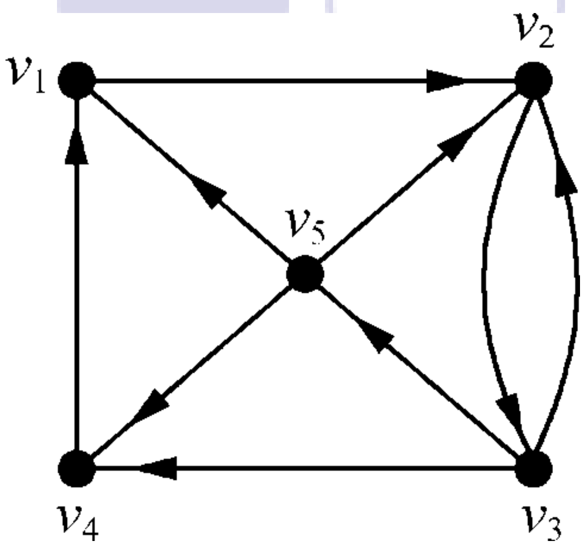
**例：** 写出下图的邻接矩阵，并计算各个节点的出度和入度。

**解：** 首先给各结点安排好一个次序，譬如说是 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ 。得出邻接矩阵如下：




$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 邻接矩阵




上例中，如果重新把各结点排列成$v_5, v_2, v_3, v_4, v_1$，就能写出另外一个矩阵如下：

$$A' = \begin{array}{c} \\ v_5 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_1 \end{array} \begin{bmatrix} v_5 & v_2 & v_3 & v_4 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果首先交换第一行和第五行，而后交换第一列与第五列，那么就能够由邻接矩阵$A'$求得邻接矩阵$A$。

# 邻接矩阵

- 对于给定图$G$，显然不会因结点编序不同而使其结构会发生任何变化
  - 即图的结点所有不同编序实际上仍表示同一个图
  - 换句话说，这些结点的不同编序的图都是同构的，并且它们的$n!$个邻接矩阵都是相似的
- 今后将略去这种由于$V$中结点编序而引起邻接矩阵的任意性
  - 而取该图的任一个邻接矩阵作为该图的矩阵表示

# 邻接矩阵

由邻接矩阵判断有向图的性质：

- 如果有向图是自反的，则邻接矩阵的主对角线上的各元素，必定都是1。
- 如果有向图是反自反的，则邻接矩阵的主对角线上的各元素，必定都是0。
- 对于对称的有向图来说，其邻接矩阵也是对称的，也就说，对于所有的$i$和$j$而言，都应有$a_{ij}=a_{ji}$。
- 如果给定有向图是反对称的，则对于所有的$i$和$j$和$i\neq j$而言，$a_{ij}=1$ 蕴含$a_{ji}=0$。

# 邻接矩阵

- 可以把简单有向图的矩阵表示的概念，推广到简单无向图、多重边图和加权图。
  - 对于简单无向图来说，这种推广会给出一个对称的邻接矩阵
  - 在多重边图或加权图的情况下，可以令
  $$a_{ij} = w_{ij}$$
  其中的$w_{ij}$，或者是边$\langle v_i, v_j \rangle$的重数，或者是边$\langle v_i, v_j \rangle$的权。另外，若$\langle v_i, v_j \rangle \notin E$，则$w_{ij} = 0$。
- 在零图的邻接矩阵中，所有元素都应该是0，亦即其邻接矩阵是个零矩阵。

# 邻接矩阵

逆图的邻接矩阵：

如果给定的图$G = \langle V, E, \psi \rangle$是一个简单有向图，并且其邻接矩阵是$A$，则图$G$的逆图$G^{-1}$的邻接矩阵是$A$的转置$A^T$。

对于无向图或者对称的有向图来说，应有$A^T = A$。

# $B = AA^T$在图上的意义

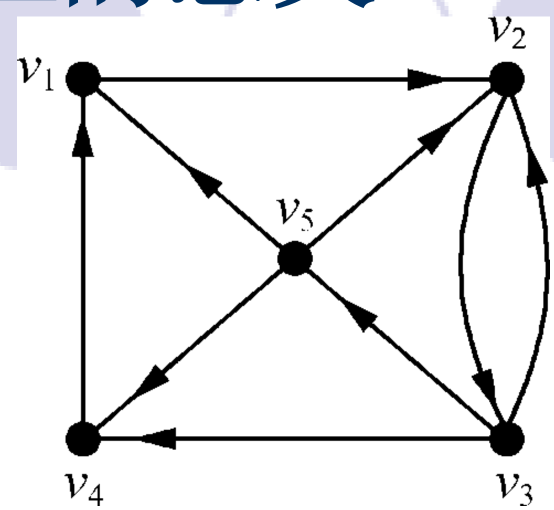
定义矩阵$B = AA^T$。设$a_{ij}$是邻接矩阵中的第$i$行和第$j$列上的$(i,j)$元素，$b_{ij}$是矩阵$B$中的第$i$行和第$j$列上的元素$(i,j)$。于是，对于$i,j = 1,2,3,\cdots,n$来说，有

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$$

- 如果边$\langle v_i, v_k\rangle \in E$，则有$a_{ik} = 1$，如果边$\langle v_j, v_k\rangle \in E$，则有$a_{jk} = 1$。
- 对于某一个确定的$k$来说，如果$\langle v_i, v_k\rangle$和$\langle v_j, v_k\rangle$都是给定图的边，则在表示$b_{ij}$的上述求和表达式中，应该引入基值1。
- 从结点$v_i$和$v_j$二者引出的边，如果能共同终止于一些结点的话，那么这样的一些结点的数目，就是元素$b_{ij}$的值。

# $B = AA^T$在图上的意义

**例：** 如图，求$AA^T$




**解：**

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**简单算法：**

原矩阵$A$中，第$i$行和第$j$行相交，有几个1，$AA^T$的第$i$行第$j$列就是几。

矩阵的主对角线的元素对应了各个节点的出度。

# $C = A^T A$在图上的意义

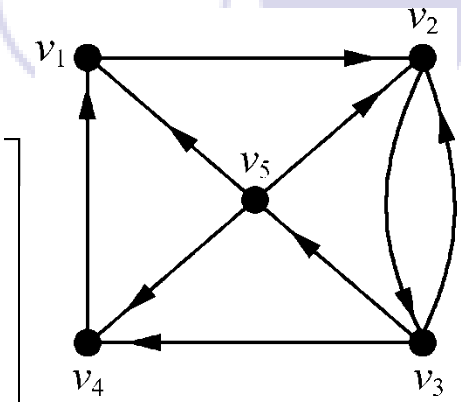
设$a_{ij}$是邻接矩阵$A$中的$(i,j)$元素；$c_{ij}$是矩阵$C$中的元素。于是，对于$i, j = 1,2,3,\cdots,n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

- 对于某一个确定的$k$来说，如果$\langle v_k, v_i \rangle$，$\langle v_k, v_j \rangle$都是给定图的边，则在上式中应引入基值1。
- 可得从图中的一些点所引出的边，如果能够同时终止于结点$v_i$和$v_j$的话，那么这样的一些结点的数目，就是元素$c_{ij}$的值。

# $C=A^TA$在图上的意义

**例：** 如图，求$A^TA$




**解：**

$$A=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}\qquad A^T=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}2&1&0&1&0\\1&3&0&2&1\\0&0&1&0&0\\1&2&0&2&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

简单算法：

原矩阵$A$中，第$i$列和第$j$列相交，有几个1，$A^TA$的第$i$行第$j$列就是几。

矩阵的主对角线的元素对应了各个节点的入度。

# 邻接矩阵的幂

- 对于$n=2,3,4,\cdots$来说，考察邻接矩阵$A$的幂$A^n$可知
  - 邻接矩阵$A$中的第$i$行和第$j$列上的元素值1，说明了图$G$中存在一条边$\langle v_i, v_j\rangle$，也就是说，存在一条从结点$v_i$到$v_j$长度为1的路径。
  - 定义矩阵$A^2$，使得$A^2$中的各元素$a_{ij}^2$为

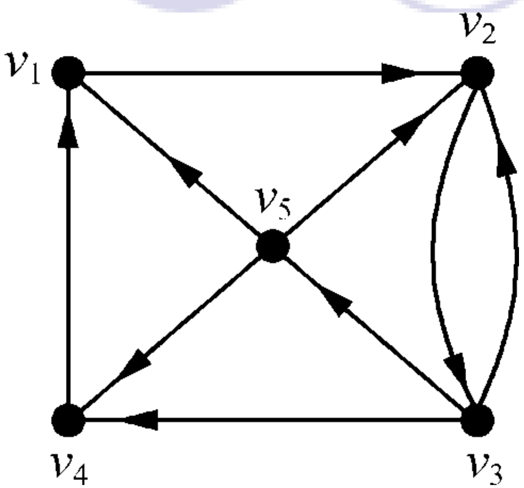
$$a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj}$$

元素值$a_{ij}^2$等于从$v_i$到$v_j$长度为2的不同路径的数目。

  - 显然，矩阵$A^2$中主对角线上的元素$a_{ii}^2$的值，表示了结点 $v_i (i=1,2,\cdots,n)$上长度为2的循环的个数。
  - 矩阵$A^3$中的元素值$(i,j)$依次类推。

# 邻接矩阵的幂

例：




$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},\qquad A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\0&1&0&1&1\\2&2&2&2&1\end{bmatrix},\qquad A^5=\begin{bmatrix}1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\3&6&3&4&3\\2&1&1&1&0\\3&5&2&3&2\end{bmatrix}$$

# 邻接矩阵的幂

**定理：** 设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是一简单有向图，并且$A$是$G$的邻接矩阵。对于$m=1,2,3,\cdots$来说，矩阵$A^m$中的元素$(i,j)$的值，等于从$v_i$到$v_j$长度为$m$的路径数目。

**证：** 对于$m$进行归纳证明。当$m=1$时，由邻接矩阵的定义中能够得到$A^m=A$。

设矩阵$A^l$中的元素$(i,j)$值是$a_{ij}^l$，且对于$m=l$来说结论为真。

因为$A^{l+1}=A^lA$，所以应有

$$a_{ij}^{l+1}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{l}\,a_{kj}$$

$a_{ik}^{l}a_{kj}$是从结点$v_i$出发，经过结点$v_k$到$v_j$的长度为$l+1$的各条路径的数目。

这里$v_k$是倒数第二个结点。因此，$a_{ij}^{l+1}$应是从结点$v_i$出发，经过任意的倒数第二个结点到$v_j$的长度为$l+1$的路径总数。

因此，对于$m=l+1$，定理成立。

# 邻接矩阵的幂

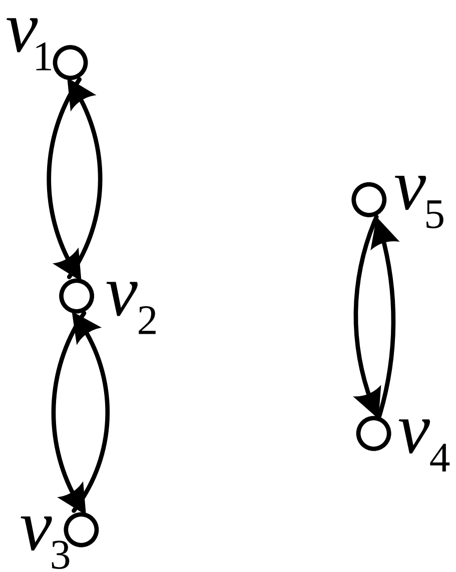
根据上述定理，可得出结论：

- 能使矩阵$A^m$中的元素$(i,j)$值是非零的最小正整数$m$，就是距离$d\langle v_i, v_j \rangle$。

- 对于$m = 1,2,\cdots n-1$和$i \neq j$来说，如果矩阵$A^m$中的$(i,j)$元素值和$(j,i)$元素值都为0，那么就不会有任何路径连通结点$v_i$和$v_j$。因此，结点$v_i$和$v_j$必定是属于图$G$的不同分图。

# 邻接矩阵的幂

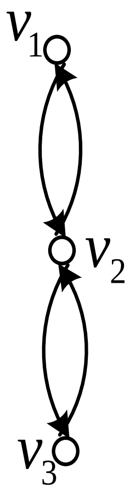
**例**：给定一个简单有向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，如下图所示，其中的结点集合$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$。试求出图$G$的邻接矩阵$A$和$A$的幂$A^2$，$A^3$，$A^4$。

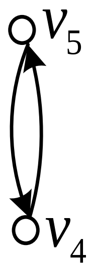



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

# 邻接矩阵的幂

解：




$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&4&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

# 可达性矩阵

- 给定一个简单有向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，并且设结点$v_i,v_j\in V$。
  - 可知，由图$G$的邻接矩阵$A$能够直接确定$G$中是否存在一条从$v_i$到$v_j$的边。
  - 设$r\in I_+$，由矩阵$A^k$能够求得从结点$v_i$到$v_j$长度为$k$的路径数目$r$。
- 试构成矩阵

$$B_k=A+A^2+\cdots A^k$$

  - 矩阵$B_k$的$(i,j)$元素值表示了从结点$v_i$到$v_j$长度小于或等于$k$的路径数目$r$。
- 当图中的结点数目为$n$时，矩阵$B_n$都能够提供足够的信息，以表明从图中的任何结点到其它结点的可达性。

# 可达性矩阵

**定义：** 给定一个简单有向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，其中$|V|=n$，并且假定$G$中的各结点是有序的。试定义一个$n\times n$的路径矩阵$P$，使得其元素为

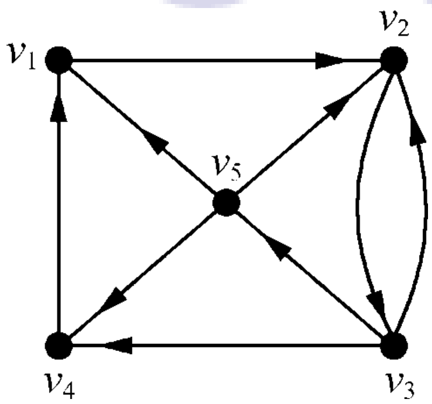
$$P_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果从}v_i\text{到}v_j\text{至少存在一条路径}\\ 0 & \text{如果从}v_i\text{到}v_j\text{不存在任何路径}\end{cases}$$

路径矩阵$P$仅表明了图中的任何结点偶对之间是否至少存在一条路径，以及在任何结点上存在循环与否；

路径矩阵$P$并不能指明存在的所有路径。

# 可达性矩阵

**例**：试构成下列有向图的路径矩阵$P$。




**解**：设邻接矩阵$A$=$A^1$。在前面的例中，已经求出过矩阵的幂$A^2$，$A^3$和$A^4$, $A^5$。求出矩阵$B_5$和路径矩阵$P$如下：

$$B_5 = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 9 & 14 & 8 & 9 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# 可达性矩阵

**注意：**

对于具有$n$个结点的图而言，长度为$n$的路径不可能是基本路径。

假定图中的每一个结点，从它本身出发总是可达的，由矩阵$B_{n-1}$构成路径矩阵$P$，或由矩阵$B_n$构成路径矩阵$P$，这两种方法都可以采纳。

# 布尔矩阵

**定义：** 元素或为0或为1的任何矩阵，都称为比特矩阵或布尔矩阵。

- 邻接矩阵也是布尔矩阵
  - 第$i$行上值为1的元素的个数，等于结点$v_i$的出度；
  - 第$j$列上值为1的元素的个数，等于结点$v_j$的入度。

# 可达性矩阵

首先构成矩阵$A,A^2,\ldots,A^n$，而后由他们构成矩阵$B_n$，再由矩阵$B_n$构成路径矩阵$P$，太麻烦了。

为了减少计算工作量，应该设法使得不产生这些不必要的信息。

**生成路径矩阵$P$的简单方法：**布尔矩阵法。

**布尔和和布尔积：**

对于两个$n\times n$的布尔矩阵$A$和$B$，$A$和$B$的布尔和是$A\vee B$，$A$和$B$的布尔积是$A\wedge B$，并分别称为矩阵$C$和$D$，它们也都是布尔矩阵。

把布尔和矩阵$C=A\vee B$的元素定义成

$$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$$

布尔积矩阵$D=A\wedge B$的元素定义成

$$d_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$$

# 可达性矩阵

邻接矩阵$A$是个布尔矩阵。路径矩阵$P$也是个布尔矩阵。对于$r = 2,3,\ldots$来说，令

$$A \wedge A = A^{(2)}$$

$$A^{(r-1)} \wedge A = A^{(r)}$$

于是，可以把路径矩阵$P$表示成

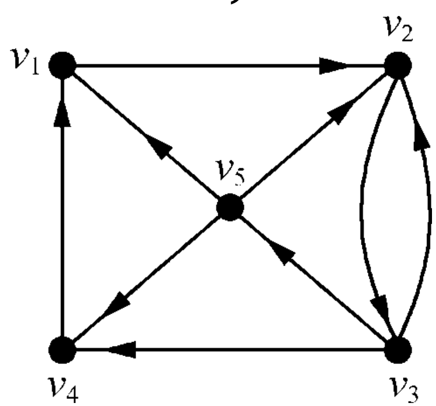
$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \cdots \vee A^{(n)} = \bigvee_{k=1}^{n} A^{(k)}$$

**注意：**

- $A^{(m)}$表示布尔矩阵，如果从$v_i$到$v_j$有长度为$m$的路径的话，$A^{(m)}$矩阵中$(i,j)$元素为1；
- $A^m$中$(i,j)$元素表示从$v_i$到$v_j$的长度为$m$的路径的个数。

# 可达性矩阵

**例：** 对于下述的有向图来说，试求出矩阵$A^{(2)}$,$A^{(3)}$, $A^{(4)}$ ),$A^{(5)}$和$P$。




$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},\quad A^{(3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(4)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\quad A^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}\vee A^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

# 可达性矩阵

- 可以用不同的方法解释矩阵$A, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$。
- 在简单有向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$中，应有$E \subseteq V \times V$，因此可以把集合$E$看成是$V$中的二元关系。
- 邻接矩阵$A$是关系$E$的关系矩阵。
- 在第四章中，**曾经把合成关系$\boldsymbol{E \circ E = E^2}$定义成这样一种关系：如果存在一个结点$\boldsymbol{v_k}$，能使$\boldsymbol{v_i E v_k}$和$\boldsymbol{v_k E v_j}$，则必有$\boldsymbol{v_i E^2 v_j}$。**
- 换句话说，从$v_i$到$v_j$如果至少存在一条长度为2的路径的话，那么$E^2$的关系矩阵中的$(i,j)$元素值是1。这就说明了，矩阵$A^{(2)}$是关系$E^2$的关系矩阵。
- 与此类似，$A^{(3)}$是$V$中的关系 $\boldsymbol{E \circ E \circ E = E^3}$ 的关系矩阵，类推。

# 可达性矩阵

- 设$E_1$和$E_2$是$V$中的两种关系，并且$A_1$和$A_2$分别是$E_1$和$E_2$的关系矩阵。
- 于是，关系$E_1 \cup E_2$和$E_1 \circ E_2$的关系矩阵分别是$A_1 \vee A_2$和$A_1 \wedge A_2$。

# 闭包

对于集合$V$中的关系$E$来说，$E$的可传递闭包$E^{+}$应是

$$E^{+}=E\cup E^{2}\cup E^{3}\cup\cdots$$

可传递闭包$E^{+}$的关系矩阵$A^{+}$应为：

$$A^{+}=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee\cdots$$

式中的$A$是关系$E$的关系矩阵。

如果$|V|=n$，则图中的基本路径或基本循环的长度不会超过$n$。因此

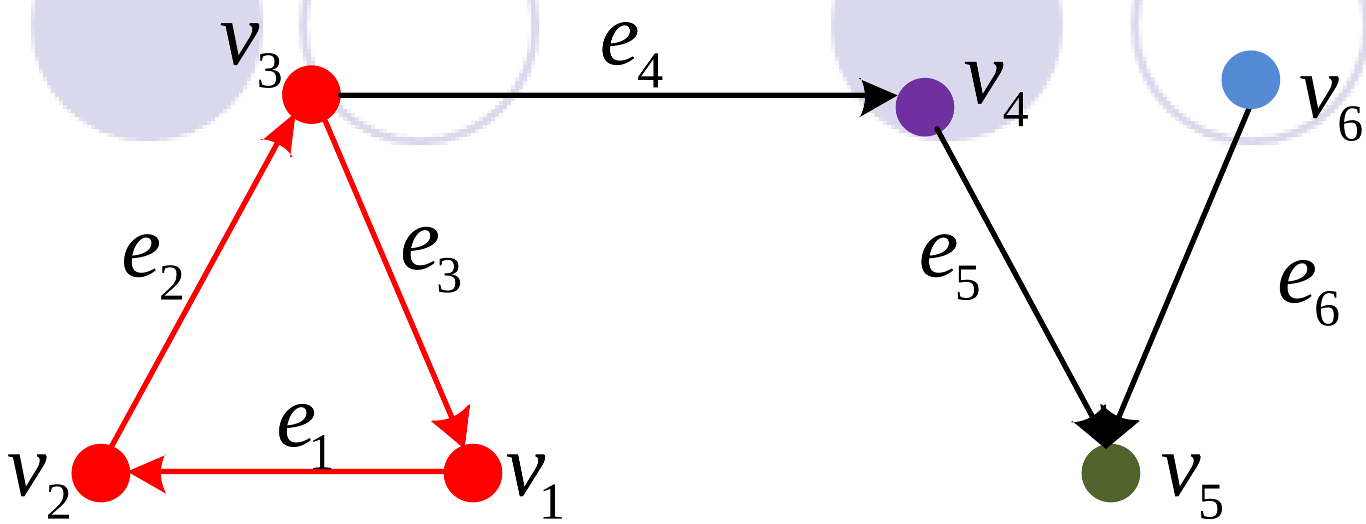
$$A^{+}=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee\cdots\vee A^{(n)}=P$$

可见，矩阵$A^{+}$与路径矩阵$P$相同。
计算关系的可传递闭包等同于计算对应关系图的路径矩阵。

# 可达性矩阵判断强分图

- 由路径矩阵$P$可以求得含有给定图的任何特定结点的强分支。
- 设$G = \langle V, E, \psi \rangle$是一个简单有向图，并且$G \neq \Phi$。$P$是图$G$的路径矩阵，$P^T$是矩阵$P$的转置。
    - 设矩阵$P$中的$(i,j)$元素为$p_{ij}$，而矩阵$P^T$中的$(i,j)$元素为$p_{ij}{}^T$。
    - 试定义一个矩阵$P \wedge P^T$，使得它的$(i,j)$元素为$p_{ij}p_{ij}^T$。于是，矩阵$P \wedge P^T$中的第$i$行，就确定了含有结点$v_i$的强分支。

# 可达性矩阵判断强分图



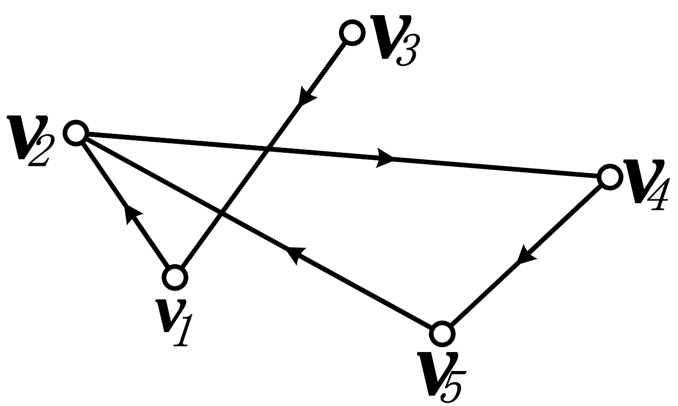

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{P}^{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$$

# 可达性矩阵判断递归过程

- 利用简单有向图的可达矩阵，能够确定某过程是否为递归的。
- 假设$V_{Prg}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$是程序$Prg$中的过程集合，做有向图$G=<V_{Prg}, E>$，其中$p_i \in V_{Prg}$，$i=1, 2, \ldots, n$；$<p_i, p_j> \in E$ *iff* $p_i$调用$p_j$。
- 如果图$G$中有包含$p_i$的回路，则断言$p_i$是递归的。
- 为此，由图$G$的邻接矩阵$A=(a_{ij})$计算出关系矩阵$A^+=(a_{ij}^+)$。如果$A^+$中的主对角线上的某元素$a_{ii}^+=1$，则$p_i$是递归的

# 可达性矩阵判断递归过程

例如，已知程序$Prg$中的过程集合$V_{Prg}$={$p_1$，$p_2$，$p_3$，$p_4$，$p_5$}，其过程的调用关系可表成下图所示的有向图，该图的邻接矩阵$A$为：




$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 可达性矩阵判断递归过程

于是可求得$A^+$:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可知，$p_2$，$p_4$和$p_5$是递归的。

# 关联矩阵

- 定义：设$G$=($V$,$E$)是一个无环的、至少有一个有向边的有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。

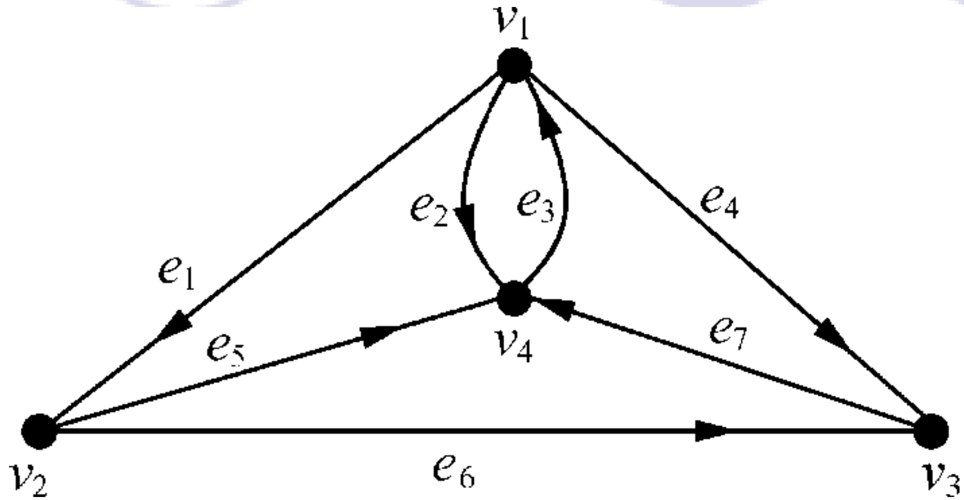
  构造$n\times m$的矩阵$M$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}e_j\text{是}v_i\text{的出边}\\ -1 & \text{当}e_j\text{是}v_i\text{的入边}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称矩阵$M$是图$G$的关联矩阵

# 关联矩阵

**例**，求下图所示的有向图的关联矩阵。




$$M=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}_{4\times 7}$$

# 关联矩阵

- 同邻接矩阵一样，关联矩阵也给出了一个图的全部信息。从定义不难发现：

① 第$i$行中$(1 \le i \le n)$，1的个数是$v_i$的出度，-1的个数是$v_i$的入度

② 矩阵中每一列都有且仅有一个1和一个-1

③ 若矩阵中有全零元素行，则图有孤立点

④ 若有向图$G$的结点和边在一种编号(定序)下的关联矩阵是$M_1$，在另一种编号下的关联矩阵是$M_2$，则必存在置换阵$P$和$Q$，使$M_1 = PM_2Q$

# 习题

- **27，29，31，32**