离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405，Tel：62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ：1062258606

回顾

- 集合的定义
- 集合的描述
- 内涵与外延
- 集合的基数
- 集合间的关系
  - 相等
  - 包含、真包含
- 全集
- 补集
- 子集、幂集运算
  - 子集的二进制描述

3.2集合的运算

一、相交运算

定义：由集合A和B的所有公共元素所组成的集合，称为集合A和B的交集。记作 $A\cap B$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

例如：设$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{d,f,a\}$，$C=\{e,f,g\}$

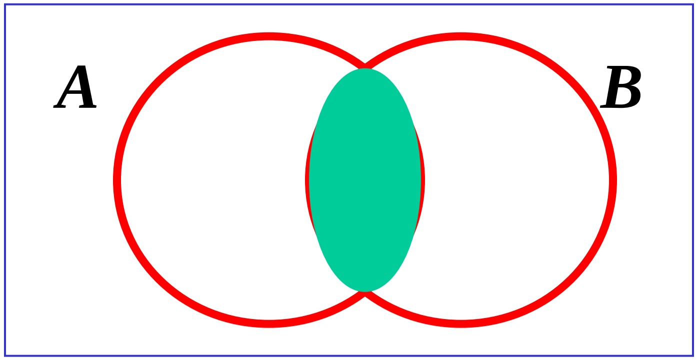
则 $A\cap B=\{a,d\}$

$B\cap C=\{f\}$

$A\cap C=\varnothing$

可以看出

$$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$$



$A\cap B$

一、相交运算

设 $A \subseteq B$, 求证$A \cap C \subseteq B \cap C$.

证明：若$x \in A$ 则$x \in B$，对任一$x \in A \cap C$ ，则 $x \in A$ 且 ，即$x \in C$ 且$x \in B$，故$x \in C$，因此$x \in B \cap C$ 。

$A \cap C \subseteq B \cap C$

集合的交运算具有如下性质：

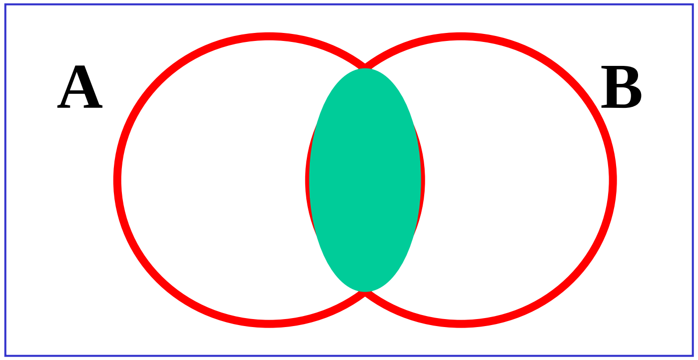
$(a)\ A \cap A = A$

$(b)\ A \cap \varnothing = \varnothing$

$(c)\ A \cap E = A$

$(d)\ A \cap B = B \cap A$

$(e)\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$



$A \cap B$

一、相交运算

试证明$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$.

证明:$(A\cap B)\cap C = \{x \mid x\in A\cap B \wedge x\in C\}$

$$= \{x \mid x\in A \wedge x\in B \wedge x\in C\}$$

$$= \{x \mid x\in A \wedge (x\in B \wedge x\in C)\}$$

$$= \{x \mid x\in A \wedge x\in B\cap C)\}$$

$$= \{x \mid x\in A \wedge x\in B\cap C)\}$$

类推至多个集合的情况，集合的交运算仍满足结合律。

假设有n个集合$A_1,A_2,\cdots A_n$，那么这些集合的交集可表示为：

$$P = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

$$=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

二、联合运算（集合的并）

定义：由集合A和B的所有元素组成的集合称为A和B的并集，记作 $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

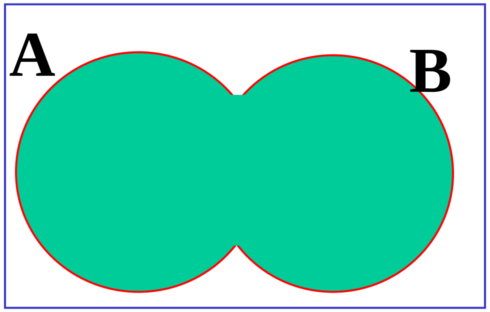
例如 **设A={a,b,c}，B={c,d,f}，C={b,e}**

那么 $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$

$A \cup C = \{a, b, c, e\}$

$B \cup C = \{b, c, d, e, f\}$

可以看出$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$



$A \cup B$

二、集合的并

集合的并运算具有如下性质：

$$(a)\ A\cup A=A$$

$$(b)\ A\cup E=E$$

$$(c)\ A\cup\varnothing=A$$

$$(d)\ A\cup B=B\cup A$$

$$(e)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

*注意：*假设有n个集合$A_1, A_2, \ldots A_n$，那么这些集合的并集可表示为：

$$W=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

二、集合的并

例1：假设 $A\subseteq B, C\subseteq D$，则$A\cup C\subseteq B\cup D$.

证明：对任意$x\in A\cup C$，有$x\in A\vee x\in C$，

若$x\in A$，由$A\subseteq B$可得$x\in B$，故$x\in B\cup D$；

若$x\in C$，由$C\subseteq D$可得$x\in D$，故$x\in B\cup D$。

因此，$A\cup C\subseteq B\cup D$

二、集合的并

定理3.2－1：设A, B, C为三个集合，那么

$$(a)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$(b)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证明：对于任意的x，若

$$\begin{aligned}
& x\in A\cap(B\cup C) \\
& = x\in A\wedge x\in B\cup C \\
& = x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C) \\
& = (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C) \\
& = x\in A\cap B\vee x\in A\cap C \\
& = x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}$$

由x的任意性可知(a)成立。

同理可以证明(b)。

二、集合的并

定理3.2 – 2：设A, B为任意两个集合，那么

$(a)\ A\cup(A\cap B)=A$

$(b)\ A\cap(A\cup B)=A$

$$\text{证明:}(a)A\cup(A\cap B)=(A\cap E)\cup(A\cap B)$$
$$=A\cap(E\cup B)$$
$$=A\cap E$$
$$=A$$

$$\text{证明:}(b)A\cap(A\cup B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$$
$$=A\cup(A\cap B)$$
$$=A$$

二、集合的并

定理3.2－3：$A \subseteq B$，当且仅当$A \bigcup B = B$或$A \bigcap B = A$

证明：(1)若$A \subseteq B$，对任意$x \in A$，必有$x \in B$;

对任意$x \in A \bigcup B$，则$x \in A$或$x \in B$，即$x \in B$，

所以$A \bigcup B \subseteq B$。

又$B \subseteq A \bigcup B$，故得到$A \bigcup B = B$。

(2)若$A \bigcup B = B$,因为$A \subseteq A \bigcup B$,故$A \subseteq B$.

同理可证明$A \subseteq B$,当且仅当$A \bigcap B = A$.

关于交集、并集的例子

老师讲完交集、并集的概念之后，提问学生：

（1）设A={x|x是参加百米赛跑的同学}，B={x|x是参加跳高比赛的同学}，求A∩B.

（2）设A={x|x是红星农场的汽车}，B={x|x是红星农场的拖拉机}，求A∪B.

一学生答道：

（1）中A∩B={x|x是参加百米障碍赛的同学}.

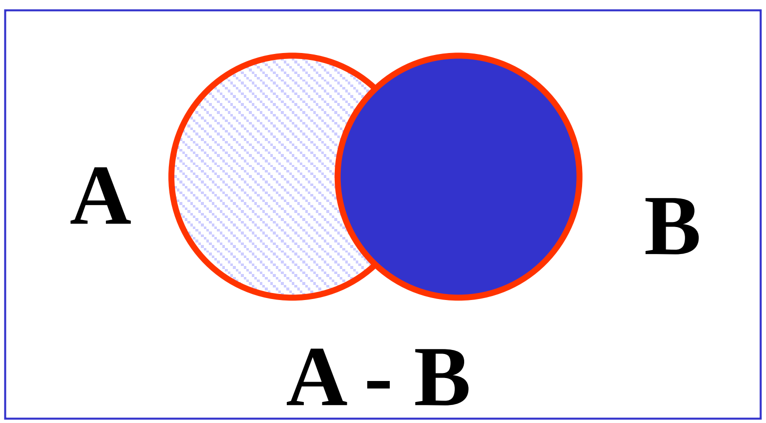
（2）中A∪B={x|x是红星农场的联合收割机}.

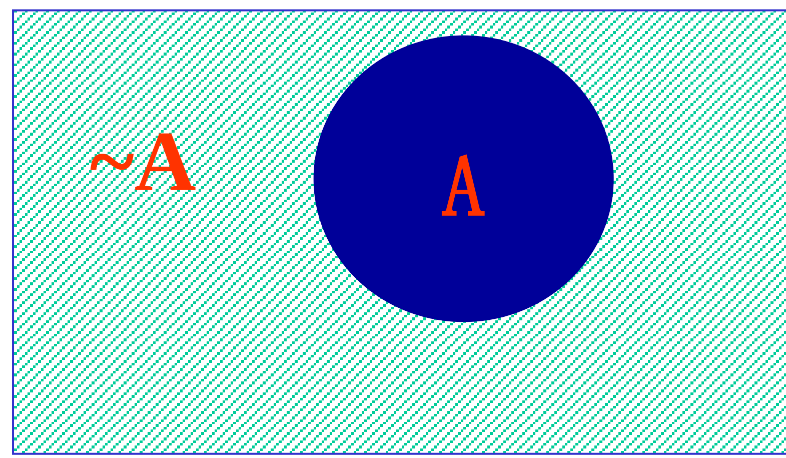
三、差分运算（集合的补）

定义：设*A*,*B*是两个集合，所有属于*A*而不属于*B*的元素组成的集合，称为*A*和*B*的差集或*B*对*A*的相对补集。记作*A*- *B*

$$A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$$

绝对补集：*B*对E的相对补集叫做绝对补集，简称补集，记作~ *B*





三、差分运算（集合的补）

例：设A是小于10的素数集合，B是奇数集合，求A-B。

解：A={1,2,3,5,7}　　　　B={1,3,5,7,9}

A-B={2}

例：设U=I (I是整数集合)

$$A=\{i \mid i \in I, i>0\}$$

解：$U-A=\{i \mid i \in I, i \leq 0\}$

$$A-U=\varnothing$$

三、差分运算（集合的补）

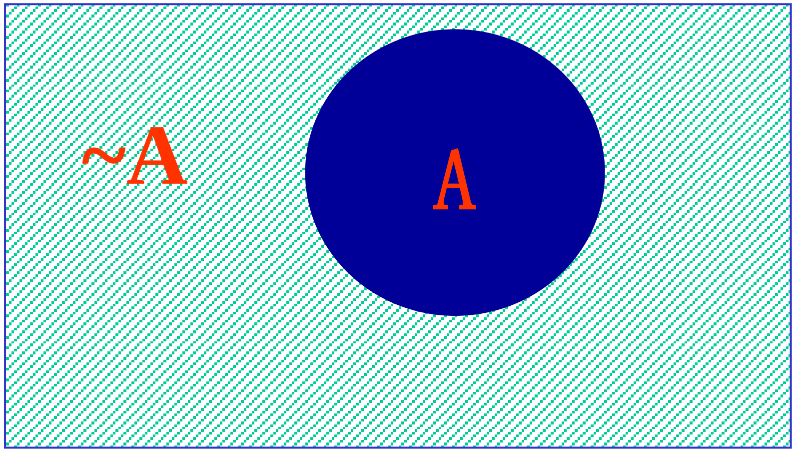
集合的差分运算还具有如下性质：

$$(a) \sim(\sim A) = A$$

$$(b) \sim E = \varnothing$$

$$(c) A \cup \sim A = E$$

$$(d) A \cap \sim A = \varnothing$$



三、差分运算（集合的补）

定理3.2-4：设A,B为任意两个集合，则下列关系式成立。

$$(a)\ \sim(A\bigcup B) = \sim A\bigcap \sim B$$

$$(b)\ \sim(A\bigcap B) = \sim A\bigcup \sim B$$

证明：（a）$\sim(A\bigcup B) = \{x \mid x \in \sim(A\bigcup B)\}$

$$= \{x \mid x \notin A\bigcup B\}$$

$$= \{x \mid \neg x \in A\bigcup B\}$$

$$= \{x \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\}$$

$$= \{x \mid \neg x \in A \wedge \neg x \in B\}$$

$$= \{x \mid x \in \sim A \wedge x \in \sim B\}$$

$$= \{x \mid x \in \sim A\bigcap \sim B\}$$

$$= \sim A\bigcap \sim B$$

三、差分运算（集合的补）

定理3.2-5：设A,B为任意两个集合，则下列关系式成立。

$$(a)\ A-B=A\cap\sim B$$

$$(b)\ A-B=A-(A\cap B)$$

证明: (b) 设 $x\in A-B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$，因为 $x\notin B$

则必有 $x\notin A\cap B$，故有 $x\in A-(A\cap B)$，即为

$A-B\subseteq A-(A\cap B)$ 。

设 $x\in A-(A\cap B)$，则 $x\in A$ 且 $x\notin(A\cap B)$，即

$x\in A$ 且 $x\in\sim A$ 或者 $x\in\sim B$，显然只能 $x\in A$ 与

$x\in\sim B$ 成立。即 $x\in A-B$。 $A-(A\cap B)\subseteq A-B$

三、差分运算（集合的补）

定理3.2-6：设A,B,C为任意三个集合，则下列关系式成立。

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证：$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap\sim C)$

$$=A\cap B\cap\sim C$$

又$(A\cap B)-(A\cap C)$

$$=(A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$$

$$=(A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$$

$$=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$=A\cap B\cap\sim C$$

因此，$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

三、差分运算（集合的补）

定理3.2－7：设A, B是任意两个集合，若$A \subseteq B$，则

$$(a) \sim B \subseteq \sim A$$

$$(b)\ (B - A) \bigcup A = B$$

证：（a）若$x \in A$，则$x \in B$；因此，若$x \notin B$，必有$x \notin A$。即若$x \in \sim B$，则$x \in \sim A$。即$\sim B \subseteq \sim A$。

$$\begin{aligned}
\text{证}:(b)\ & (B - A) \bigcup A \\
& = (B \bigcap \sim A) \bigcup A \\
& = (B \bigcup A) \bigcap (\sim A \bigcup A) \\
& = (B \bigcup A) \bigcap E \\
& = B \bigcup A
\end{aligned}$$

因为$A \subseteq B$，所以$B \bigcup A = B$。(b)得证。

四、对称差分运算

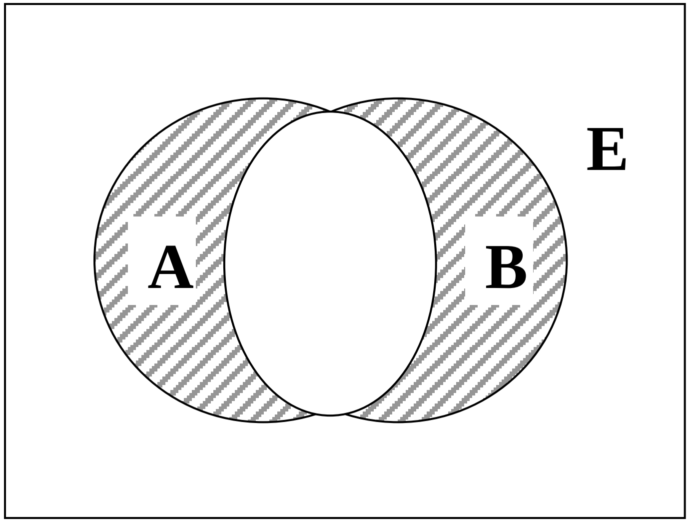
定义：设*A*、*B*为任意两个集合。属于*A*但不属于*B*的所有元素和属于*B*但不属于*A*的所有元素的并集，称为*A*和*B*的对称差集，记作$A\oplus B$。

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$$
$$=(A\cup B)-(A\cap B)$$

例如：**A={1,2,3}**

B={3,2,4}

则 $A\oplus B$ **={1,4}**



四、对称差分运算

集合的对称差分运算满足如下性质：

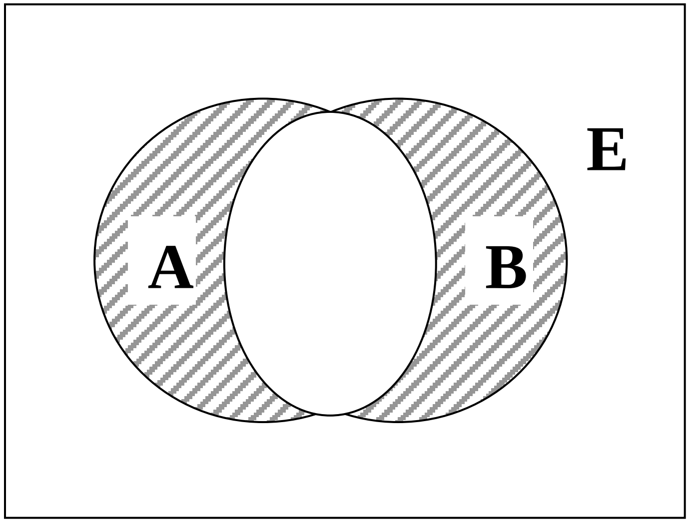
$$(a)\ A \oplus B = B \oplus A$$

$$(b)\ A \oplus \varnothing = A$$

$$(c)\ A \oplus A = \varnothing$$

$$(d)\ A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$

$$(e)\ (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



四、对称差分运算

求证$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

证：$(A\oplus B)\oplus C=((A\oplus B)\cap\sim C)\cup(\sim(A\oplus B)\cap C)$

$=(((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup(\sim((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap C)$

$=A\cap\sim B\cap\sim C\cup\sim A\cap B\cap\sim C\cup(\sim A\cup B)\cap(A\cup\sim B)\cap C$

由于

$(\sim A\cup B)\cap(A\cup\sim B)\cap C$

$=((\sim A\cup B)\cap A)\cup((\sim A\cup B)\cap\sim B)\cap C$

$=((\sim A\cap A)\cup(A\cap B)\cup(\sim A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim B))\cap C$

$=(\varnothing\cup(A\cap B)\cup(\sim A\cap\sim B)\cup\varnothing)\cap C$

$=(A\cap B\cap C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$

四、对称差分运算

所以, $(A\oplus B)\oplus C$

$$=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$$
$$\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$$

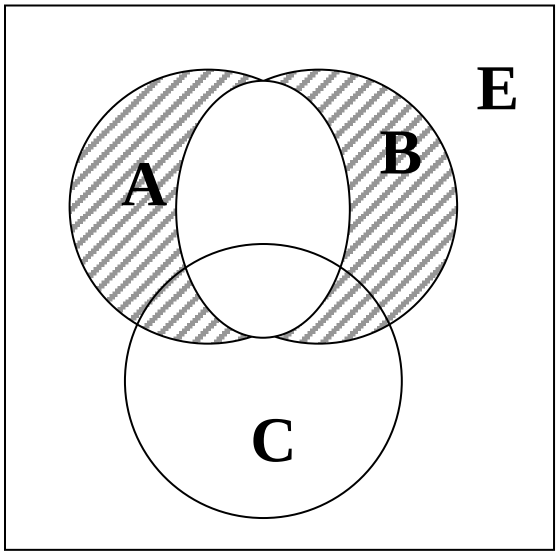
又因为, $A\oplus(B\oplus C)$

$$=(A\cap\sim(B\oplus C))\cup(\sim A\cap(B\oplus C))$$
$$=(A\cap\sim((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))\cup(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$$
$$=(A\cap(\sim B\cup C)\cap(B\cup\sim C))\cup(\sim A\cap B\cap\sim C\cup\sim A\cap\sim B\cap C)$$
$$=A\cap\sim B\cap B\cup A\cap\sim B\cap\sim C\cup A\cap B\cap C\cup A\cap C\cap\sim C\cup\sim A\cap$$
$$B\cap\sim C\cup\sim A\cap\sim B\cap C$$
$$=A\cap\sim B\cap\sim C\cup A\cap B\cap C\cup\sim A\cap B\cap\sim C\cup\sim A\cap\sim B\cap C$$

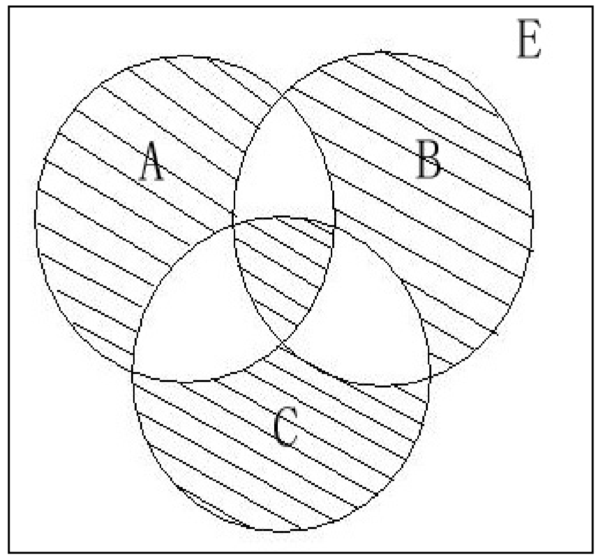
得证 $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

四、对称差分运算

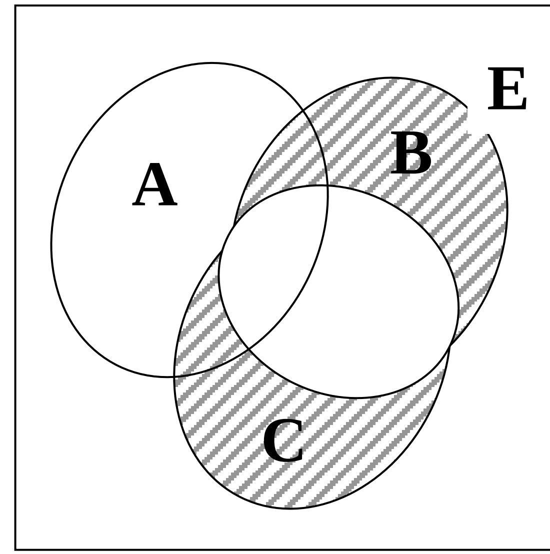
上述证明结果可以通过以下文氏图清楚看出。



$A \oplus B$



$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$



$B \oplus C$

3.3集合定律

S_1 $A\cap B\subseteq A$

S_2 $A\cap B\subseteq B$

S_3 $A\subseteq A\cup B$

S_4 $B\subseteq A\cup B$

S_5 $A-B\subseteq A$

S_6 $A\oplus B\subseteq A\cup B$

$$\left.\begin{array}{ll} S_7 & A\cup B=B\cup A \\ S_8 & A\cap B=B\cap A \\ S_9 & A\oplus B=B\oplus A \end{array}\right\}\text{交换律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{10} & A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ S_{11} & (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \\ S_{12} & (A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C) \end{array}\right\}\text{结合律}$$

3.3集合定律

$$\left.\begin{array}{ll} S_{13} & A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \\ S_{14} & A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \end{array}\right\}\text{分配律}$$

$$S_{15} \quad \sim\sim A=A \quad \text{双重否定律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{16} & \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B \\ S_{17} & \sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B \end{array}\right\}\text{德·摩根律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{18} & A\cap A=A \\ S_{19} & A\cup A=A \end{array}\right\}\text{等幂律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{20} & A\cap\sim A=\varnothing \\ S_{21} & A\cup\sim A=E \end{array}\right\}\text{补余律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{22} & A\cap E=A \\ S_{23} & A\cup\varnothing=A \\ S_{24} & A-\varnothing=A \\ S_{25} & A\oplus\varnothing=A \end{array}\right\}\text{同一律}$$

3.3集合定律

$$\left.\begin{array}{ll} S_{26} & A\cap\varnothing=\varnothing \\ S_{27} & A\cup E=E \end{array}\right\}\text{零律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{28} & A\cup(A\cap B)=A \\ S_{29} & A\cap(A\cup B)=A \end{array}\right\}\text{吸收律}$$

$$S_{30} \quad \sim\varnothing=E$$

$$S_{31} \quad \sim E=\varnothing$$

$$S_{32} \quad A\oplus A=\varnothing$$

$$S_{33} \quad A\cap(B-A)=\varnothing$$

$$S_{34} \quad A\cup(B-A)=A\cup B$$

$$S_{35} \quad A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

3.3集合定律

S_{36} $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

S_{37} $A-B=A\cap\sim B$

S_{38} $A\oplus B=(A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$

S_{39} $(A\cup B\neq\varnothing)\Rightarrow(A\neq\varnothing)\vee(B\neq\varnothing)$

S_{40} $(A\cap B\neq\varnothing)\Rightarrow(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing)$

证明: (39) 转化为假设$(A\neq\varnothing)\vee(B\neq\varnothing)$ **为假，证明** $A\cup B\neq\varnothing$**为假。**

由 $(A\neq\varnothing)\vee(B\neq\varnothing)$ **为假可知,** $A\neq\varnothing$ **和** $B\neq\varnothing$ **均__为假，即** $A=\varnothing$ **并且** $B=\varnothing$ **为真，也就是** $A\cup B=\varnothing$ **为真，使得** $A\cup B\neq\varnothing$**为假。**

3.4 包含排斥原理

集合的运算，可用于有限个元素的技术问题。

集合的基数：集合所含元素的个数。集合**A**的基数用|A|或**#A**表示。

设A_1,A_2是有限集合，用$|A_1|$,$|A_2|$分别表示它们的基数，那么可以推出：

$$|A_1 \cup A_2| \le |A_1| + |A_2|$$

$$|A_1 \cap A_2| \le \min(|A_1|, |A_2|)$$

$$|A_1 - A_2| \ge |A_1| - |A_2|$$

$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

3.4包含排斥原理

定理3.4-1：设A_1,A_2是有限集合，$|A_1|,|A_2|$为其基数，则

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

证:(1)当A_1和A_2不相交，即$A_1 \cap A_2 = \varnothing$时，

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

(2)当$A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$，那么

$$|A_1| = |A_1 \cap \sim A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_2| = |\sim A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

所以$|A_1| + |A_2| = |A_1 \cap \sim A_2| + |\sim A_1 \cap A_2| + 2|A_1 \cap A_2|$

由于$|A_1 \cap \sim A_2| + |\sim A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cup A_2|$

因此$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

3.4包含排斥原理

例3.4.1：假设在**10**名青年中有**5**名是工人，**7**名是学生，其中兼具有工人与学生双重身份的青年有三名，问既不是工人又不是学生的青年有几名？

解：设工人的集合为W，学生的集合为S，则根据题设应有：

$|W|=5, |S|=7, |W\cap S|=3$, 又因为$|\sim W\cap\sim S|+|W\cup S|=10$, 则

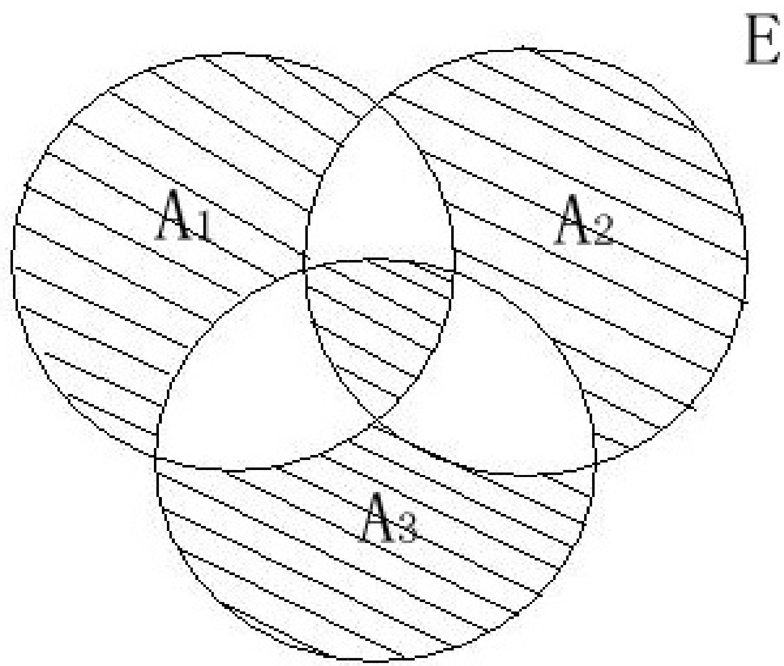
$$
\begin{aligned}
|\sim W\cap\sim S| &= 10-|W\cup S| \\
&= 10-(|W|+|S|-|W\cap S|) \\
&= 10-(5+7-3)=1
\end{aligned}
$$

因此既不是工人又不是学生的青年有1人

3.4包含排斥原理

包含排斥原理在三个有限集和上的推广：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



例**3.4.2** 求**1**到**1000**之间（包含**1**和**1000**在内）既不能被**5**和**6**，也不能被**8**整除的数有多少个？

解： 设

$$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\leqslant x\leqslant 1000\}$$

$$A=\{x \mid x\in S \wedge x\text{可被5整除}\}$$

$$B=\{x \mid x\in S \wedge x\text{可被6整除}\}$$

$$C=\{x \mid x\in S \wedge x\text{可被8整除}\}$$

用$|P|$表示有穷集***P***中的元素数,$\lfloor x \rfloor$表示小于等于***x***的最大整数, $lcm(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \ldots, x_n$的最小公倍数，则有

$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$

$|B| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$

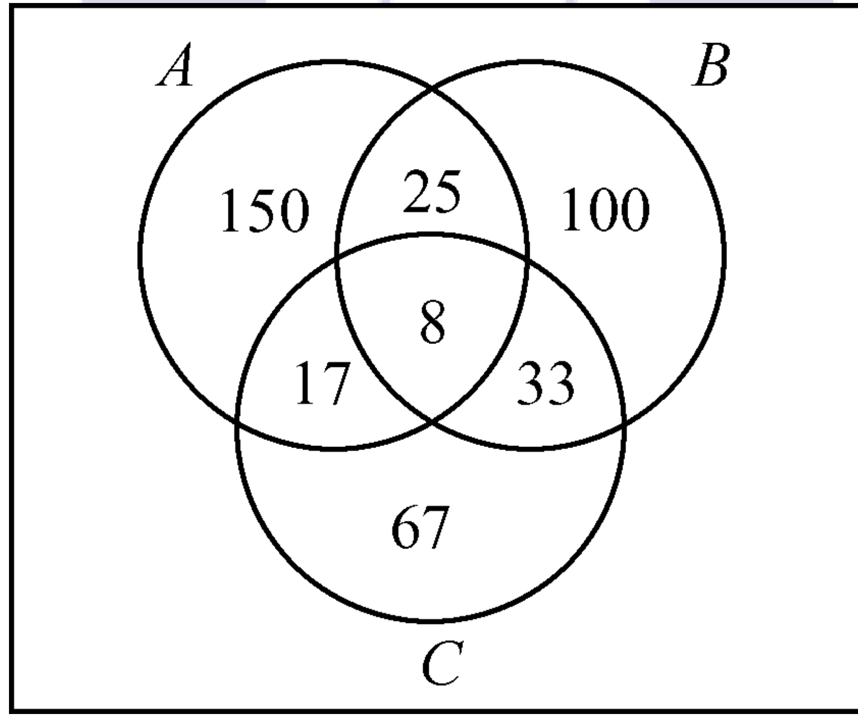
$|C| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$

$|A \cap B| = \lfloor 1000/lcm(5,6) \rfloor = 33$

$|A \cap C| = \lfloor 1000/lcm(5,8) \rfloor = 25$

$|B \cap C| = \lfloor 1000/lcm(6,8) \rfloor = 41$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/lcm(5,6,8) \rfloor = 8$



根据包含排斥原理，所求的元素数为

$$\begin{aligned}
&|\sim A \cap \sim B \cap \sim C| \\
&= |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \\
&= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600
\end{aligned}$$

3.4包含排斥原理

例**3.4.3**：某工厂装配30辆汽车，可供选择的设备是收音机、空气调节器和对讲机。已知其中15辆 汽车有收音机、8辆有空气调节器，6辆有对讲机，而且其中有3辆这三种设备都有。我们希望知道有几辆汽车没有提供任何设备。

解：设A_1，A_2和A_3分别表示配有收音机、空气调节器和对讲机的汽车集合，因此由题设知

$$|A_1|=15, |A_2|=8, |A_3|=6, |A_1\cap A_2\cap A_3|=3$$

因为$|A_1\cap A_2|\geq|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$

$$|A_1\cap A_3|\geq|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$$

$$|A_2\cap A_3|\geq|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$$

得

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=15+8+6-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+3$$
$$\leq 32-3-3-3=23$$

3.4包含排斥原理

把包含排斥原理推广到n个集合。

定理3.4-2：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个有限集合，它们的基数分别为$|A_1|,|A_2|,\cdots,|A_n|$，可得：

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

证明：设**S**为全集，由德-摩根定律可得

$$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n = \sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

因此，

$$|\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n| = |\sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$$

$$= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

由此，原定理可变为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

应用数学归纳法对上式进行证明，

当n=2 时，证明 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

若 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ ，有 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$ ，

则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 成立。

若 $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$，有

$$|A_1| = |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)|$$

$$= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap \sim A_2|$$

于是 $|A_1 \cap \sim A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$，

则

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2| \\
&= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2) \cup A_2| \\
&= |((A_1 \cap A_2) \cup A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\
&= |A_2 \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\
&= |A_2| + |A_1 \cap \sim A_2| \\
&= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|
\end{aligned}
$$

因此当n=2 时，$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$成立。

假设

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

成立，则，

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}|$$

$$= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$= \left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| + \left|A_{n+1}\right| - \left|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \left|A_i \cap A_j\right|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

$$+ \left|A_{n+1}\right| - \left(\sum_{i=1}^{n} \left|A_i \cap A_{n+1}\right| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \left|A_i \cap A_j \cap A_{n+1}\right|\right.$$

$$\left. + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}\right| + \cdots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}\right|\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \left|A_i\right| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1} \left|A_i \cap A_j\right|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n+1} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^{n}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}\right|$$

因此定理得证。

3.4包含排斥原理

例**3.4.4**：求1到250之间能被2，3，5和7中任何一个整除的整数个数。

解：设A_1表示1到250之间能被2整除的整数集合，A_2表示能被3整除的整数集合，A_3表示能被5整除的整数集合，A_4表示能被7整除的整数集合。$|x|$表示小于或等于x的最大整数。

$$|A_1|=\left|\frac{250}{2}\right|=125 \qquad |A_2|=\left|\frac{250}{3}\right|=83 \qquad |A_3|=\left|\frac{250}{5}\right|=50$$

$$|A_4|=\left|\frac{250}{7}\right|=35 \qquad |A_1\cap A_2|=\left|\frac{250}{2\times 3}\right|=41$$

$$|A_1\cap A_3|=\left|\frac{250}{2\times 5}\right|=25 \qquad |A_1\cap A_4|=\left|\frac{250}{2\times 7}\right|=17$$

3.4包含排斥原理

$$|A_2 \cap A_3| = \left| \frac{250}{3\times 5} \right| = 16 \qquad |A_2 \cap A_4| = \left| \frac{250}{3\times 7} \right| = 11$$

$$|A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{5\times 7} \right| = 7 \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left| \frac{250}{2\times 3\times 5} \right| = 8$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{2\times 5\times 7} \right| = 3 \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{3\times 5\times 7} \right| = 2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{2\times 3\times 5\times 7} \right| = 1 \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left| \frac{250}{2\times 3\times 7} \right| = 5$$

于是有

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 125+83+50+35-41-25-17-16-11$$
$$-7+8+5+3+2-1=193$$

例3.4.5: 某系有 100 个学生至少要学法、德、英三种语言中的一种。现在这 100 个学生中有42人学法语，45人学德语，65人学英语，15人学法语和德语，20人学法语和英语，25 人学德语和英语。问同时学三种语言的有多少? 仅学英语的有多少?

解:令A,B,C分别表示学法语、德语、英语学生的集合。则

$|A|=42, |B|=45, |C|=65, |A\cap B|=15, |A\cap C|=20, |B\cap C|=25, |A\cup B\cup C|=100$。

由容斥原理得:

$|A\cup B\cup C| =(|A|+|B|+|C|)-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$

所以$|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)=8$

仅学英语的人数为:

$|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=28$

例3.4.6 求欧拉函数的值。欧拉函数 $\phi(n)$ 表示 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 中与 n 互素的数的个数。例如 $\phi(12)=4$，因为与**12**互素的数有**1,5,7,11**。下面利用包含排斥原理给出欧拉函数的计算公式。

解： 给定正整数 n，$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ 为 n 的素因子分解式，令

$$A_i=\{x \mid 0\leqslant x<n-1 \wedge p_i\text{整除}x\}$$

那么 $\phi(n)=\left|\sim A_1\cap\sim A_2\cap\cdots\cap\sim A_k\right|$

下面计算等式右边的各项，

$$\left|A_i\right| = \frac{n}{p_i}, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{n}{p_i p_j}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$$

…

根据包含排斥原理

$$\phi(n) = \left|\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_k\right|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

例如，

$$\phi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4$$

作业

- P,63：
- 10,11，14（2），15，16(1,3),17(2,4),18(1,3,5,7,9),19,20(2,4,6,8,10),21-24