Tema 4. Cues amb prioritats

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Transparències d' Antoni Lozano
(amb edicions menors d'altres professors)

Q2 2023 – 24

Arbres binaris perfectes

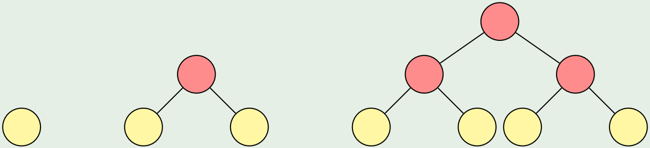
Definició

El nivell d'un node en un arbre és la distància de l'arrel al node.

Definició

Un arbre binari és perfecte si totes les fulles estan al mateix nivell.

Exemples



Definició

L' alçada d'un arbre és el nivell màxim dels nodes.

Arbres binaris perfectes

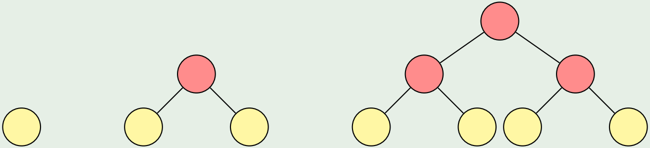
Definició

El nivell d'un node en un arbre és la distància de l'arrel al node.

Definició

Un arbre binari és perfecte si totes les fulles estan al mateix nivell.

Exemples



Definició

L' alçada d'un arbre és el nivell màxim dels nodes.

Arbres binaris perfectes

Proposició

Un arbre binari perfecte d'alçada h té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Farem inducció en l'alçada. Sigui T un arbre binari perfecte d'alçada h.

- Base d'inducció: $h = 0$.
  L'arbre ha de tenir un sol node, però $1 = 2^{0+1} - 1$.
- Pas d'inducció: $h > 0$.
  Els subarbres esquerre i dret tenen alçada $h - 1$ i, per hipòtesi d'inducció, cadascun té $2^h - 1$ nodes. El nombre de nodes de T és la suma d'aquests nodes més un (de l'arrel):

$$\text{nodes de } T = 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1.$$

Arbres binaris perfectes

Proposició

Un arbre binari perfecte d'alçada h té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Farem inducció en l'alçada. Sigui T un arbre binari perfecte d'alçada h.

- Base d'inducció: $h = 0$.
  L'arbre ha de tenir un sol node, però $1 = 2^{0+1} - 1$.
- Pas d'inducció: $h > 0$.
  Els subarbres esquerre i dret tenen alçada $h - 1$ i, per hipòtesi d'inducció, cadascun té $2^h - 1$ nodes. El nombre de nodes de T és la suma d'aquests nodes més un (de l'arrel):

$$\text{nodes de } T = 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1.$$

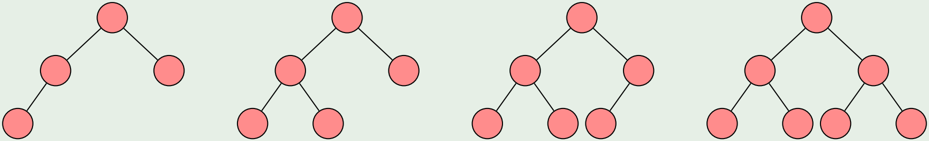
Arbres binaris complets

Definició

Un arbre binari d'alçada h és complet si

1. els $h-1$ primers nivells estan plens
2. el nivell h té les fulles el màxim a l'esquerra.

Exemples



Arbres binaris complets

Proposició

Un arbre binari complet d'alçada h té entre 2^h i $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Sigui T un arbre binari complet d'alçada h:

- El mínim nombre de nodes de T es produeix quan té un sol node a alçada h. Com que fins a alçada $h - 1$, T té $2^h - 1$ nodes, sumant l'únic node a alçada h, s'obtenen 2^h nodes.
- El màxim nombre de nodes de T correspon a un arbre perfecte d'alçada h, que té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Arbres binaris complets

Proposició

Un arbre binari complet d'alçada h té entre 2^h i $2^{h+1} - 1$ nodes.

Demostració

Sigui T un arbre binari complet d'alçada h:

- El mínim nombre de nodes de T es produeix quan té un sol node a alçada h. Com que fins a alçada $h - 1$, T té $2^h - 1$ nodes, sumant l'únic node a alçada h, s'obtenen 2^h nodes.
- El màxim nombre de nodes de T correspon a un arbre perfecte d'alçada h, que té $2^{h+1} - 1$ nodes.

Arbres binaris complets

Corol·lari

L'alçada d'un arbre binari complet de n nodes és $\lfloor \log n \rfloor \in \Theta(\log n)$.

Demostració

Pel resultat anterior, un arbre binari complet d'alçada h i n nodes compleix:

$$2^h \leq n < 2^{h+1}.$$

Si prenem logaritmes en base 2, tenim

$$h \leq \log n < h + 1.$$

I prenent la part baixa del logaritme,

$$h = \lfloor \log n \rfloor.$$

Per tant, $h \in \Theta(\log n)$.

Arbres binaris complets

Corol·lari

L'alçada d'un arbre binari complet de n nodes és $\lfloor \log n \rfloor \in \Theta(\log n)$.

Demostració

Pel resultat anterior, un arbre binari complet d'alçada h i n nodes compleix:

$$2^h \leq n < 2^{h+1}.$$

Si prenem logaritmes en base 2, tenim

$$h \leq \log n < h + 1.$$

I prenent la part baixa del logaritme,

$$h = \lfloor \log n \rfloor.$$

Per tant, $h \in \Theta(\log n)$.

Introducció

Moltes aplicacions requereixen processar les entrades seguint un ordre parcial determinat per prioritats.

- Programació de tasques: s'executen abans les més importants/curtes/...
- Sistemes de simulació: se simulen esdeveniments en ordre cronològic.
- Algorismes voraços: en cada moment es prova la millor opció disponible.

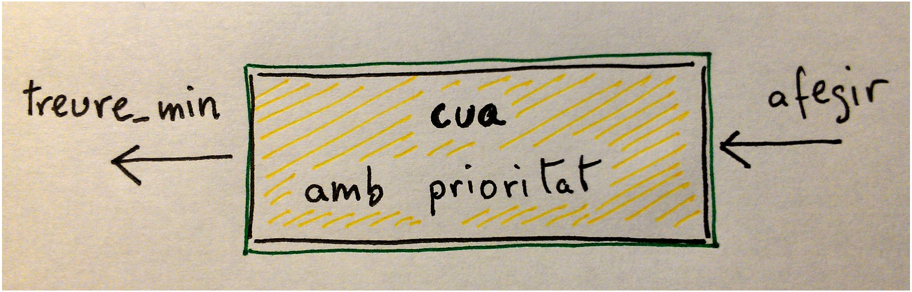
Les cues amb prioritat són una eina bàsica en el disseny d'algorismes.

Operacions

Definició

Una cua amb prioritat és una estructura de dades que disposa de dues operacions bàsiques:

- **afegir**: afegir un element i
- **treure_min**: treure i retornar l'element més petit.



Implementacions senzilles

implementacions	**afegir**	**treure_min**
seqüencial desordenada	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
seqüencial ordenada (creixent)	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
seqüencial ordenada (decreixent)	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
heaps	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

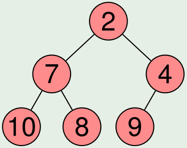
Heaps

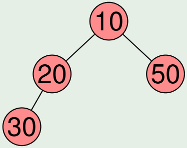
Definició

Un *min-heap* és un arbre binari complet on el valor d'un node és sempre més petit o igual que els valors dels nodes dels seus fills.

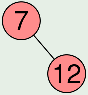
Exemples

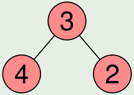
Són min-heaps:





No són min-heaps:





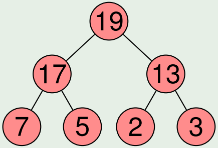
Heaps

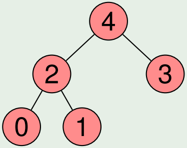
Definició

Un *max-heap* és un arbre binari complet on el valor d'un node és sempre més gran o igual que els valors dels nodes dels seus fills.

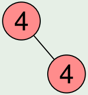
Exemples

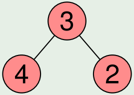
Són max-heaps:





No són max-heaps:





Heaps

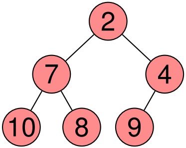
Terminologia

- Quan parlem de heaps sense especificar res més, aquí ens referirem als min-heaps.
- En català, dels heaps en diem munts o monticles.

Heaps

Els heaps es representen de manera compacta mitjançant vectors.

Per exemple, el heap



es representa amb el vector

0	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	7	4	10	8	9		

No calen punters perquè:

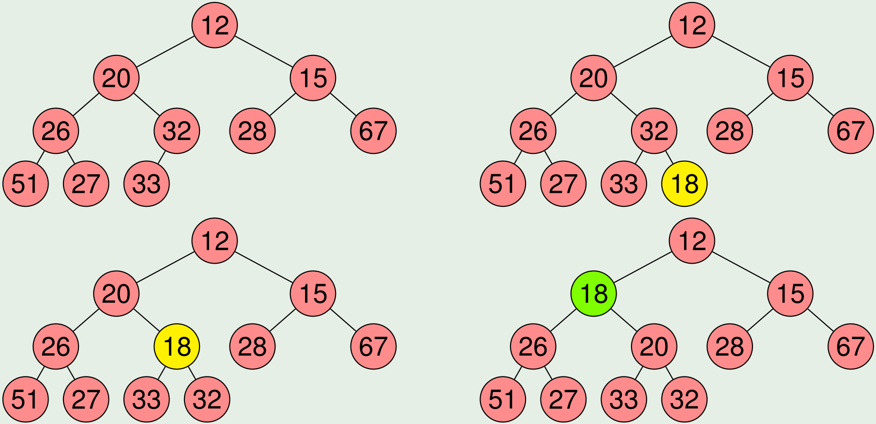
- el pare del node de la posició i és a la posició $\lfloor i/2 \rfloor$
- el fill esquerre del node de la posició i és a la posició $2i$
- el fill dret del node de la posició i és a la posició $2i + 1$

Operacions bàsiques

Operació **afegir**

El més senzill és afegir l'element en la següent posició lliure del vector i fer-lo ascendir fins la posició en què es torna a complir la propietat del heap.

Exemple (afegir la clau 18)

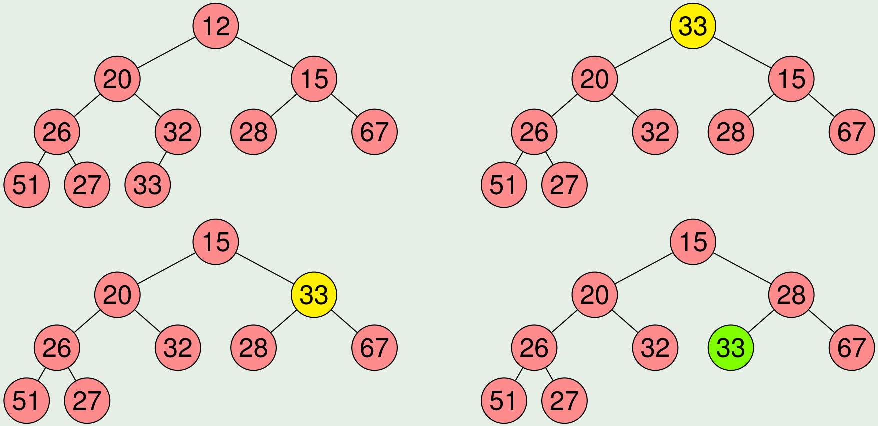


Operacions bàsiques

Operació **treure-min**

L'element en l'última posició del vector es trasllada a la primera i es fa descendir fins que troba la seva posició. Es retorna l'antiga arrel.

Exemple



Implementació recursiva

Definició de la classe `CuaPrio`

```
template <typename Elem>
class CuaPrio {

private:
vector<Elem> t; // Taula on es forma el heap
                // (la posició 0 no s'utilitza)
```

Implementació recursiva: funcions públiques

Constructora

Crea una cua amb prioritat buida. Cost: $\Theta(1)$.

```
CuaPrio () {
    t.push_back(Elem());
}
```

Consultar la talla

Retorna la talla de la cua amb prioritat. Cost: $\Theta(1)$.

```
int talla () {
    return t.size()-1;
}
```

Implementació recursiva: funcions públiques

Consultar si és buida

Indica si la cua amb prioritat és buida. Cost: $\Theta(1)$.

```
bool buida () {
    return t.talla()==0;
}
```

Retornar element mínim

Retorna un element amb prioritat mínima. Cost: $\Theta(1)$.

```
Elem minim () {
    if (buida()) throw ErrorPrec("CuaPrio buida");
    return t[1];
}
```

Implementació recursiva: funcions públiques

afegir

Afegeix un nou element. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void afegir (Elem& x) {
    t.push_back(x);
    surar(talla());
}
```

Implementació recursiva: funcions públiques

treure_min

Treu i retorna l'element mínim. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
Elem treure_min () {
    if (buida()) throw ErrorPrec("CuaPrio buida");
    Elem x = t[1];
    t[1] = t.back();
    t.pop_back();
    enfonsar(1);
    return x;
}
```

Implementació recursiva: funcions privades

surar

Fer ascendir un element fins que ocupi una posició compatible amb la condició d'ordenació del heap. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void surar (int i) {
    if (i!=1 and t[i/2]>t[i]) {
        swap(t[i],t[i/2]);
        surar(i/2);
}  }
```

Implementació recursiva: funcions privades

enfonsar

Fer descendir un element fins que ocupi una posició compatible amb la condició d'ordenació del heap. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void enfonsar (int i) {
    int n = talla();
    int c = 2*i;
    if (c<=n) {
        if (c+1<=n and t[c+1]<t[c]) c++;
        if (t[i]>t[c]) {
            swap(t[i],t[c]);
            enfonsar(c);
} } }
```

Implementació iterativa

Les operacions que canvien són **afegir** i **treure_min**, on les antigues **surar** i **enfonsar** estan optimitzades. Els costos asimptòtics són els mateixos que en el cas recursiu: $\Theta(\log n)$.

afegir

```
void afegir (Elem& x) {
    t.push_back(x);
    int i = talla();
    while (i!=1 and t[i/2]>x) {
        t[i] = t[i/2];
        i = i/2;
    }
    t[i] = x;
}
```

Implementació iterativa

treure_min

```
Elem treure_min () {
    if (buida()) throw ErrorPrec("CuaDePrio buida");
    int n = talla();
    Elem e = t[1], x = t[n];
    t.pop_back(); --n;
    int i = 1; c = 2*i;
    while (c<=n) {
        if (c+1<=n and t[c+1]<t[c]) ++c;
        if (x<=t[c]) break;
        t[i] = t[c];
        i = c;
        c = 2*i;
    }
    t[i] = x;
    return e;
}
```

Algorisme bàsic

Les cues amb prioritat es poden fer servir per ordenar en temps $\Theta(n \log n)$.

L'algorisme es diu heapsort i va ser presentat el 1964 per J.W.J. Williams.

Donat un vector de n elements,

1. s'afegeixen els n elements a un *heap*: $\Theta(n \log n)$
2. es fan n operacions **treure_min** per construir un vector ordenat: $\Theta(n \log n)$

El temps total és $\Theta(n \log n)$, que és òptim per a un algorisme d'ordenació.

Algorisme bàsic

Heapsort

Amb vectors separats per al *heap* i l'entrada/sortida.
Temps: $\Theta(n \log n)$.
Espai auxiliar: n.

```
template <typename elem>
void heapsort (vector<elem>& T) {
    CuaPrio<elem> h;
    for (int i=0; i<n; ++i)
        h.afegir(T[i]);
    for (int i=0; i<n; ++i)
        T[i] = h.treure_min();
}
```

Algorisme bàsic

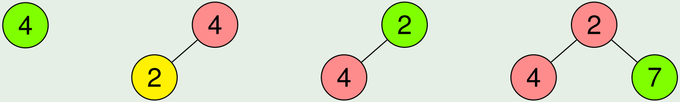
Exemple

Suposem que partim del vector:

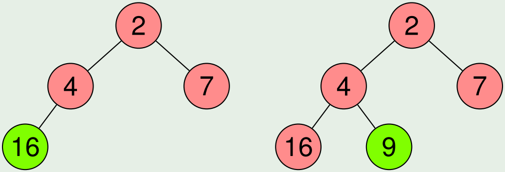
4	2	7	16	9	3	1	5

i afegim els elements a un heap, un per un.

$+4$, $+2$, $+7$:

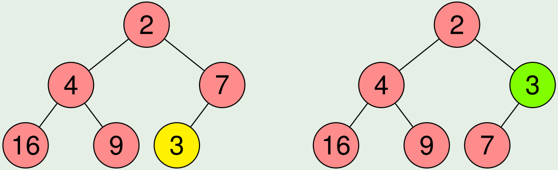


$+16$, $+9$:

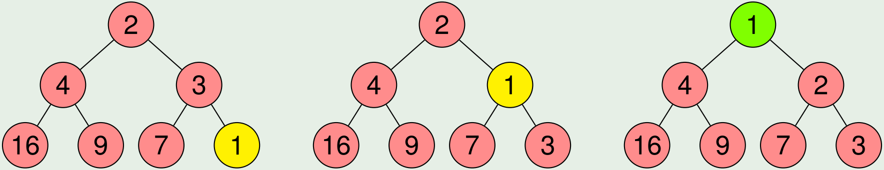


Algorisme bàsic

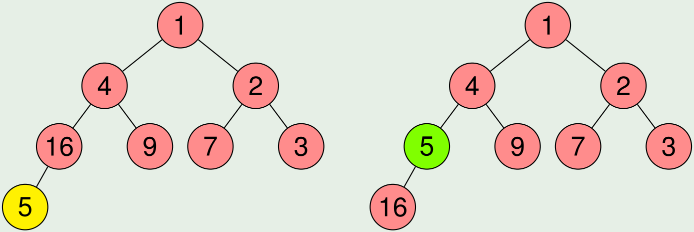
$+3$:



$+1$:



+5:

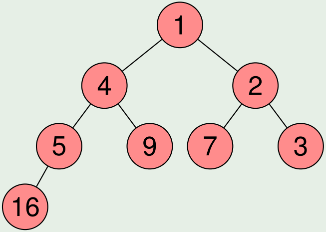


El *heap* resultant s'emmagatzema en el vector:

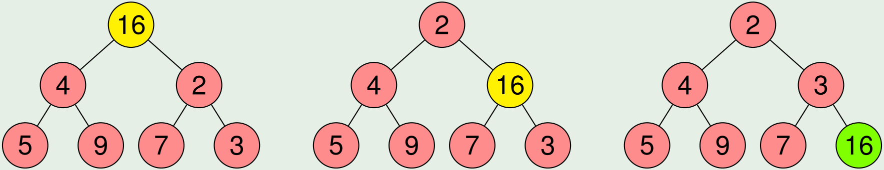
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	2	5	9	7	3	16

Ara traspassem els elements en ordre al vector original.

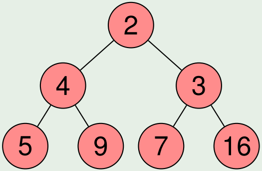
Algorisme bàsic



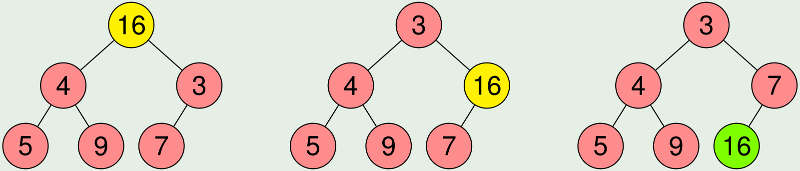
-1:



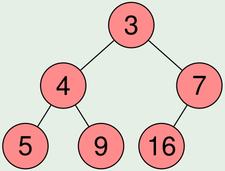
Algorisme bàsic



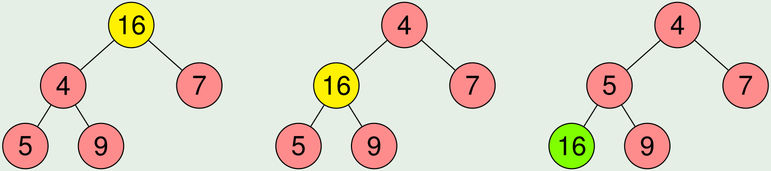
-2:



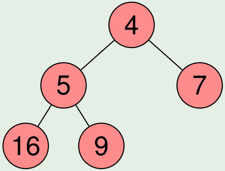
Algorisme bàsic



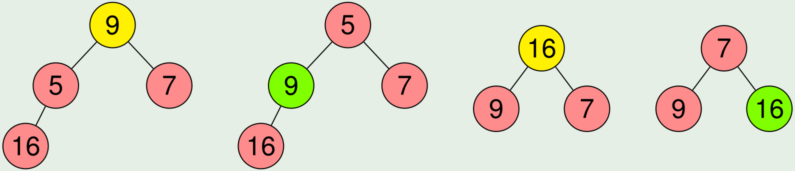
-3:



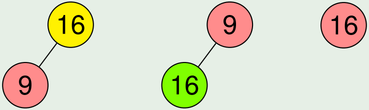
Algorisme bàsic



$-4, -5$:



$-7, -9, -16$:



Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

4	2	7	16	9	3	1	5
1	2	3	4	5	6	7	8

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	6	7	8
	2	7	16	9	3	1	5
4							

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

		7	16	9	3	1	5
1	2	3	4	5	6	7	8

2	4						

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

			16	9	3	1	5
1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	7					

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

				9	3	1	5
1	2	3	4	5	6	7	8

2	4	7	16				

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

					3	1	5
1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	7	16	9			

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

						1	5
1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	3	16	9	7		

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

							5

1 2 3 4 5 6 7 8

1	4	2	16	9	7	3	

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	2	5	9	7	3	16

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	6	7	8

1	4	2	5	9	7	3	16

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1							
1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	3	5	9	7	16	

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2						
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	7	5	9	16		

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3					
1	2	3	4	5	6	7	8
4	5	7	16	9			

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

entrada/sortida	1	2	3	4				
	1	2	3	4	5	6	7	8
heap	5	9	7	16				

heap

Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)

entrada/sortida

1	2	3	4	5			

1 2 3 4 5 6 7 8

7	9	16					

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	7		

9	16						

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	7	9	

16							

heap

Algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	7	9	16

1	2	3	4	5	6	7	8

heap

Millores de l’algorisme bàsic

Primera millora

Implementar l’algorisme sobre un únic vector fent una divisió en:

- una part esquerra per mantenir el *heap*
- una part dreta per a l’entrada/sortida

Cada cop que es fa una operació de **treure_min**,
s’escriu el mínim com a primer element de la part dreta.
Els elements queden ordenats de manera descendent.

Si es volen en ordre ascendent, es pot fer servir un max-heap.

Exemple: evolució dels vectors (operació afegir)

$\varnothing$

4	2	7	16	9	3	1	5

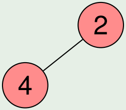
Millores de l’algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

4	2	7	16	9	3	1	5

Millores de l'algorisme bàsic

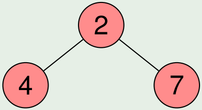
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5

Millores de l'algorisme bàsic

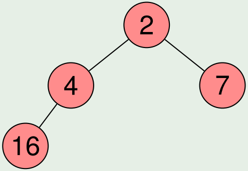
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5

Millores de l'algorisme bàsic

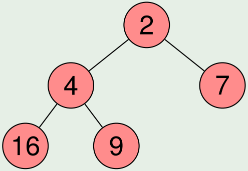
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5

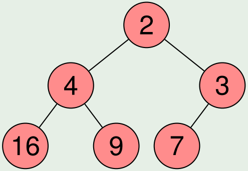
Millores de l’algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	7	16	9	3	1	5

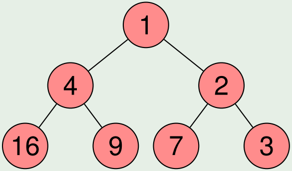
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



2	4	3	16	9	7	1	5

Millores de l'algorisme bàsic

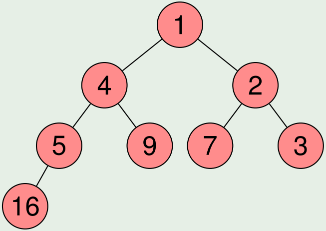
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



1	4	2	16	9	7	3	5

Millores de l'algorisme bàsic

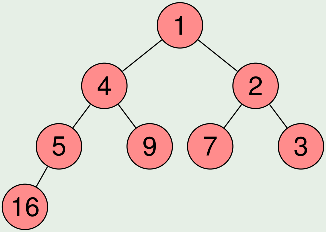
Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)



1	4	2	5	9	7	3	16

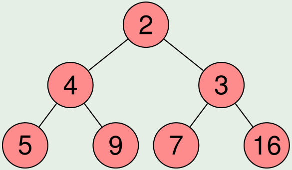
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



1	4	2	5	9	7	3	16

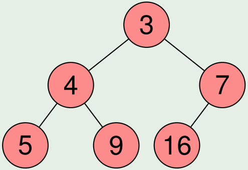
Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



2	4	3	5	9	7	16	1

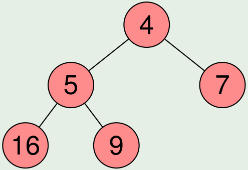
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



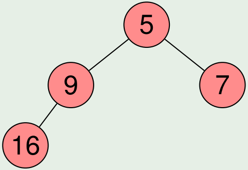
3	4	7	5	9	16	2	1

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



4	5	7	16	9	3	2	1

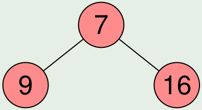
Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)



5	9	7	16	4	3	2	1

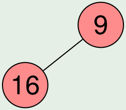
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



7	9	16	5	4	3	2	1

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)



9	16	7	5	4	3	2	1

Millores de l'algorisme bàsic

Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

16

16	9	7	5	4	3	2	1

Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)

$\varnothing$

16	9	7	5	4	3	2	1

Millores de l'algorisme bàsic

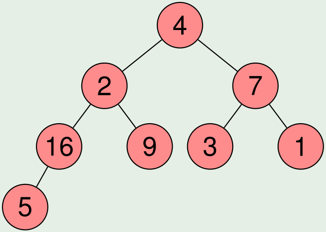
Segona millora

Construir el heap en temps $\Theta(n)$ en lloc de $\Theta(n \log n)$ seguint els passos següents:

1. Introduir els elements en el heap en qualsevol ordre (i temps lineal).
2. Per cada node x que no sigui una fulla, en ordre decreixent de posició **enfonsar** x

(De tota manera, el cost de l'algorisme continua sent $\Theta(n \log n)$.)

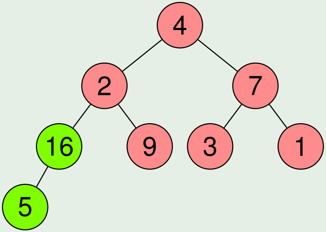
Exemple



4	2	7	16	9	3	1	5

Millores de l’algorisme bàsic

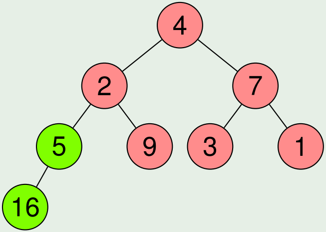
Exemple



4	2	7	16	9	3	1	5

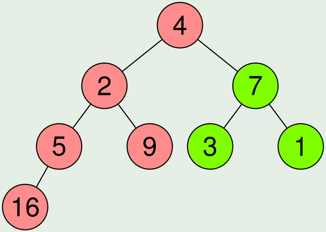
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple



4	2	7	5	9	3	1	16

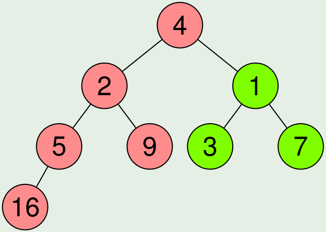
Exemple



4	2	7	5	9	3	1	16

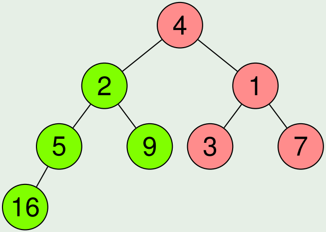
Millores de l'algorisme bàsic

Exemple



4	2	1	5	9	3	7	16

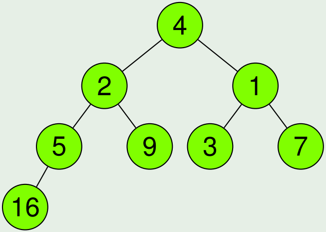
Exemple



4	2	1	5	9	3	7	16

Millores de l'algorisme bàsic

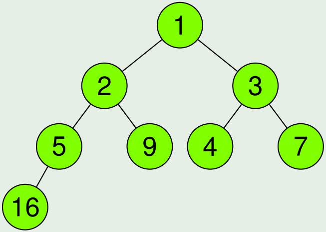
Exemple



4	2	1	5	9	3	7	16

Millores de l'algorisme bàsic

Exemple



1	2	3	5	9	4	7	16

Millores de l'algorisme bàsic

Com que molts dels subheaps són petits, **enfonsar** fa $\Theta(n)$ intercanvis

Exemple

Per a un heap de 127 nodes, hi ha:

- 1 heap de mida 127 i alçada 6
- 2 heaps de mida 63 i alçada 5
- ...
- 32 heaps de mida 3 i alçada 1

Intercanvis en arbres perfectes

Un arbre perfecte d'alçada h té 2^i nodes a nivell i per cada $0 \leq i \leq h-1$. Cada node a nivell i és arrel d'un subheap amb alçada $h-i$.

Com a molt es fan $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq h-1} 2^i \cdot (h-i) = 2^{h+1} - h - 2 < n$ intercanvis

ja que un arbre perfecte d'alçada h té $2^{h+1} - 1$ nodes.

(Per arbres complets, es demostra la mateixa fita.)

El problema de selecció

Problema de selecció

Donat un vector S de naturals i un $k \in \mathbb{N}$,
determinar el k-èsim element més petit de S.

Fent servir els heaps, podem trobar un nou algorisme:

1. Construir un min-heap a partir de S. $\Theta(n)$
2. Efectuar k operacions **treure_min** del min-heap. $\Theta(k \log n)$
3. Retornar l'últim element extret. $\Theta(1)$

Cost total: $\Theta(n + k \log n)$.

La mediana correspon a $k = n/2$. Cost: $\Theta(n \log n)$.
En el cas $k = O(n/\log n)$, el cost és $\Theta(n)$.

El problema de selecció

Problema de selecció

Donat un vector S de naturals i un $k \in \mathbb{N}$,
determinar el k-èsim element més petit de S.

Fent servir els heaps, podem trobar un nou algorisme:

1. Construir un min-heap a partir de S. $\Theta(n)$
2. Efectuar k operacions **treure_min** del min-heap. $\Theta(k \log n)$
3. Retornar l'últim element extret. $\Theta(1)$

Cost total: $\Theta(n + k \log n)$.

La mediana correspon a $k = n/2$. Cost: $\Theta(n \log n)$.
En el cas $k = O(n/\log n)$, el cost és $\Theta(n)$.