计算流体力学 Project02

陈俊霖
junlin.chen@pku.edu.cn
学号 1901111617

2020年4月30日

摘要：程序实一维完全气体Euler方程的Lax-Friedrichs格式，和MacCormack(两步Lax-Wendroff)格式. 应用上述两种格式实现了两个算例. 程序语言为MATLAB. 计算结果表明MacCormack相对Lax-Friedrichs格式有更高的精度，但非线性稳定性差，在极值点和间断点前后存在非物理振荡.

1 问题描述

控制方程为一维完全气体Euler方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix} = 0 \\ p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho u^2\right), \gamma = 1.4 \end{cases} \tag{1.1}$$

初始时刻($t = 0$)物理量的分布为$u_0(x)$. 需要计算$t = t_0$时刻物理量的分布.

2 有限差分法求解

守恒形式的差分格式

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{2.1}$$

本报告中用两种方法计算数值通量.

(1) Lax-Friedrichs格式:

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f\left(\mathbf{U}_j^n\right) + f\left(\mathbf{U}_{j+1}^n\right)\right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\left[\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n\right]. \tag{2.2}$$

(2) MacCormack(两步Lax-Wendroff)格式:

$$\mathbf{U}_j^* = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f\left(\mathbf{U}_{j+1}^n\right) - f\left(\mathbf{U}_j^n\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[f\left(\mathbf{U}_{j+1}^{n}\right)+f\left(\mathbf{U}_{j}^{*}\right)\right] \tag{2.4}$$

3 算例

3.1 一般Riemann问题

求解(1.1)，Neumann边界条件，初始数据

$$U=\begin{cases}(1,0,2.5)^T, & x<0.3\\ (0.125,0,0.25)^T, & x>0.3\end{cases} \tag{3.1}$$

应用Lax-Friedrichs格式计算结果如图(1-2)所示，该格式具有较大数值耗散，甚至抹去了间断，在CFL数减小时表现更明显.

应用MacCormack格式计算结果如图(3-4)所示，该格式相比Lax-Friedrichs格式提高了间断捕捉精度，但具有较大数值振荡，不具有TVD和局部极值性质，在CFL数减小时表现更明显.

3.2 Shu-Osher问题

求解(1.1)，Neumann边界条件，初始数据

$$(\rho,u,p)(x,0)=\begin{cases}(3.857143,2.629369,10.33333), & x<-4\\ (1+0.2\sin(5x),0,1), & x\geq -4\end{cases} \tag{3.2}$$

应用Lax-Friedrichs格式计算结果如图(5)所示，该格式具有较大数值耗散，能识别间断，但几乎抹平了其他区域的结果.

应用MacCormack格式计算结果如图(6)所示，该格式相比Lax-Friedrichs格式提高了精度，但具有较大数值振荡，不具有TVD和局部极值性质.

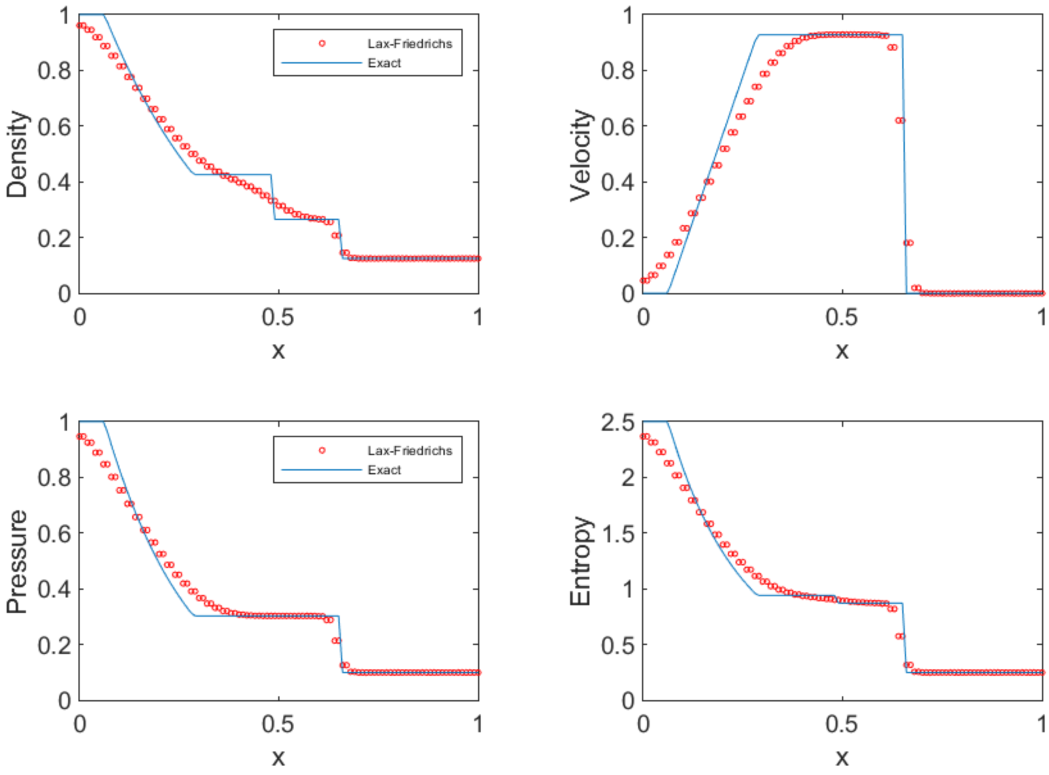

图 1: t=0.2时, CFL数为0.95, 应用Lax-Friedrichs格式解的分布. 点数$N = 100$.

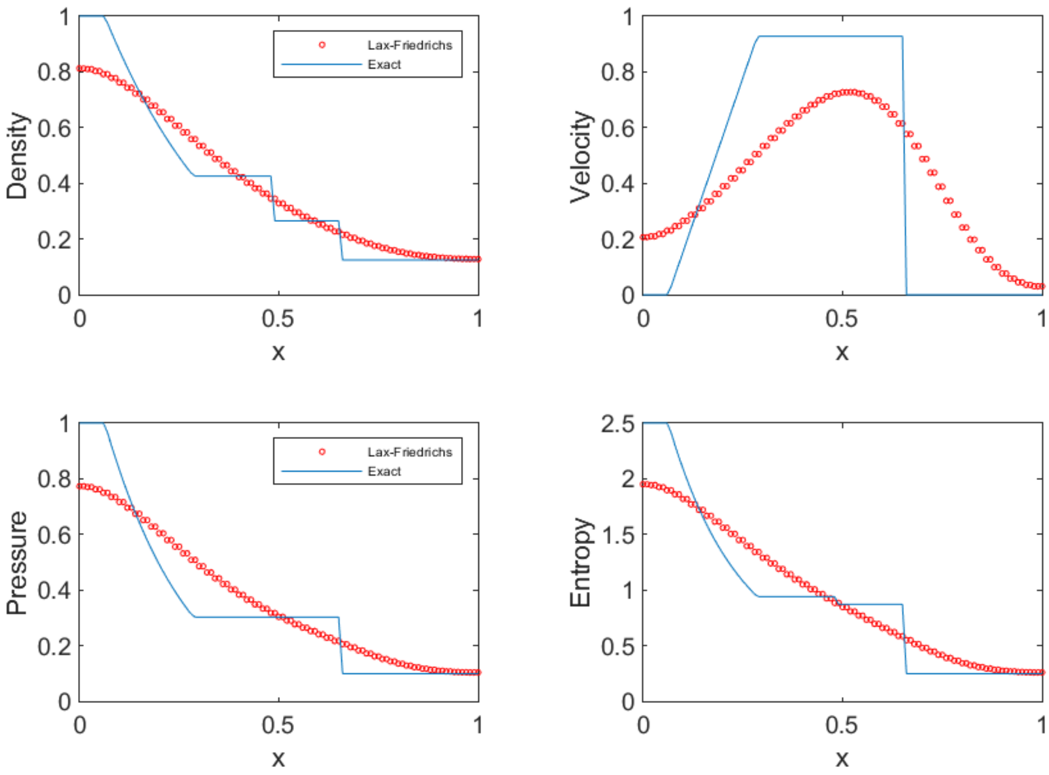

图 2: t=0.2时, CFL数为0.1, 应用Lax-Friedrichs格式解的分布. 点数$N = 100$.

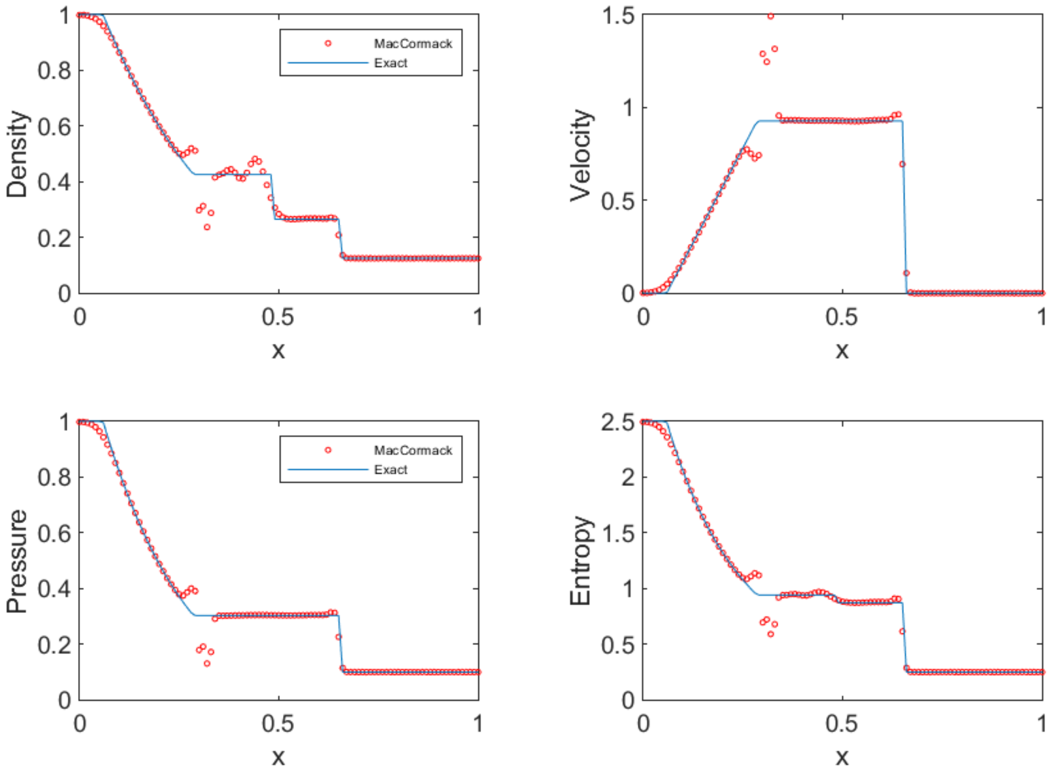

图 3: t=0.2时, CFL数为0.95, 应用MacCormack格式解的分布. 点数$N = 100$.

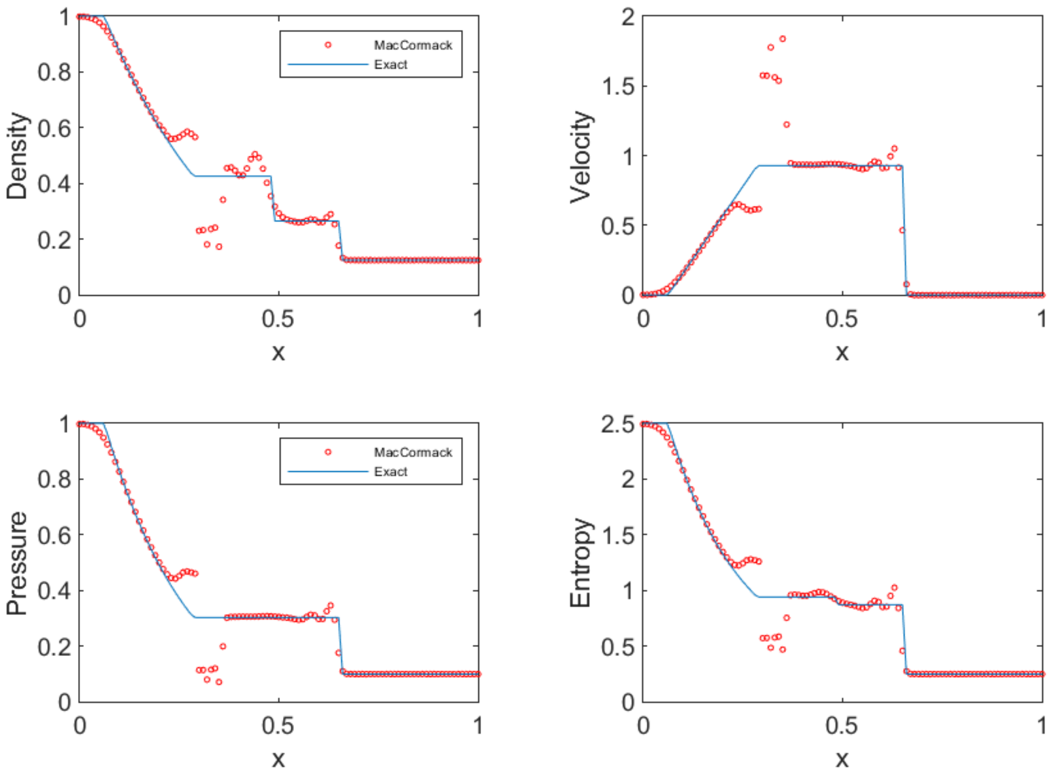

图 4: t=0.2时, CFL数为0.7, 应用MacCormack格式解的分布. 点数$N = 100$.

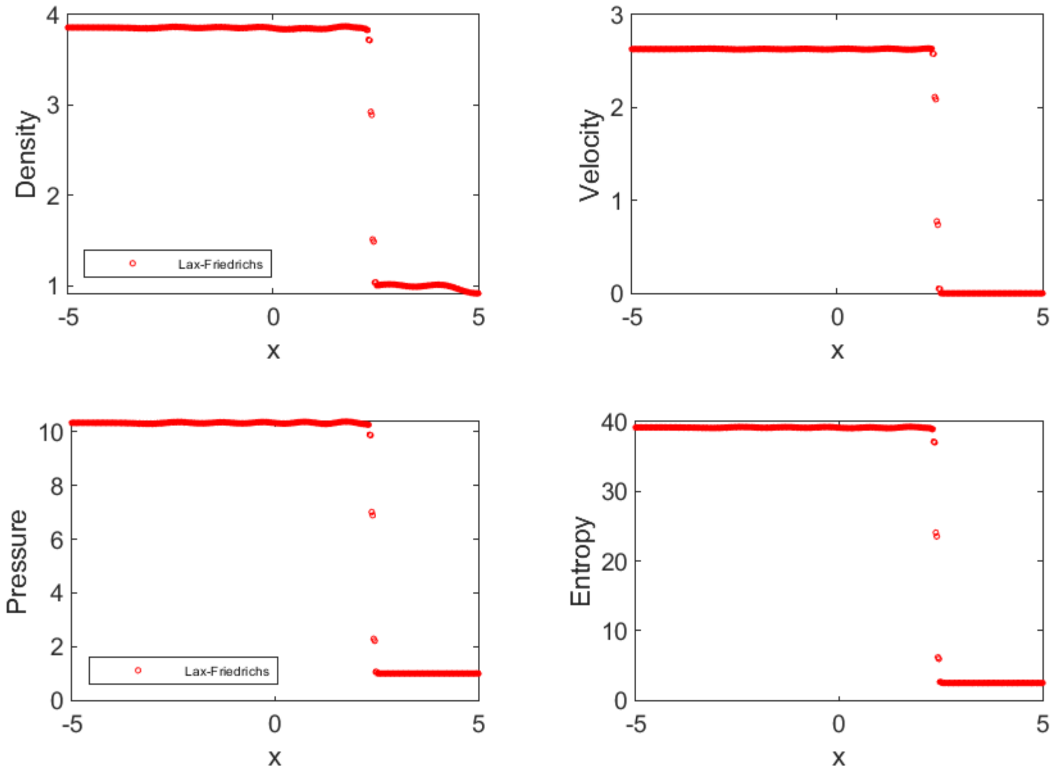

图 5: t=1.8时, CFL数为0.95, 应用Lax-Friedrichs格式解的分布. 点数$N = 400$.

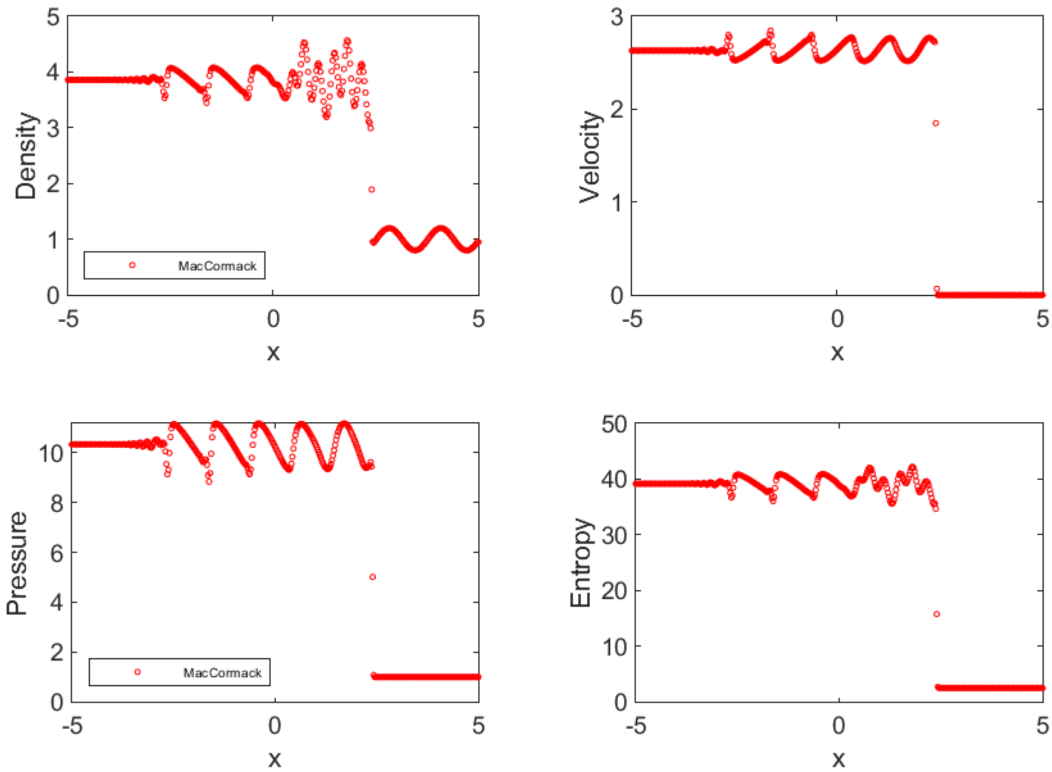

图 6: t=1.8时, CFL数为0.95, 应用MacCormack格式解的分布. 点数$N = 400$.