

# 计算流体力学 Project01

陈俊霖

junlin.chen@pku.edu.cn

学号 1901111617

2020年4月15日

**摘要：**程序实现一维对流方程的CIR格式/1阶迎风格式，Lax-Friedrichs格式，和Lax-Wendroff格式。应用上述三种格式实现了两个非守恒形式和两个守恒形式方程的算例。程序语言为MATLAB。

## 1 问题描述

控制方程为一维对流方程(守恒形式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

或特别地取 $f(u) = au$ ，即常系数非守恒形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

初始时刻( $t = 0$ )物理量的分布为 $u_0(x)$ 。需要计算 $t = t_0$ 时刻物理量的分布。

## 2 有限差分法求解

用三种差分格式求解上述问题。

(1) 1阶(显式)迎风格式(守恒形式):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{\lambda |a(u_{j+\frac{1}{2}}^n)|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\lambda |a(u_{j-\frac{1}{2}}^n)|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (2.1)$$

其中 $u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n)$ ,  $a(u) = f'(u)$ .

(2) Lax-Friedrichs格式(守恒形式):

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)). \quad (2.2)$$

(3) Lax-Wendroff格式(守恒形式):

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{\lambda^2 a^2 (u_{j+\frac{1}{2}}^n)}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ & - \frac{\lambda^2 a^2 (u_{j-\frac{1}{2}}^n)}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 3 算例

#### 3.1 Propagation of a wave packet

求解(1.2), 其中 $a = 1$ .  $\lambda = 0.8$ . 初始数据

$$u(x, 0) = e^{-100(x-0.5)^2} \sin(80x).$$

首先,  $t = 2$ 的计算结果如图1所示, 一阶精度的CIR和Lax-Friedrichs格式的数据在该时刻已几乎已耗散为0, 二阶精度的Lax-Wendroff格式较好地保持了初始数据. 进一步计算Lax-Wendroff格式 $t = 4, 8$ 是时刻的分布(图2), 发现该格式依然具有明显的耗散和色散.

#### 3.2 Highly discontinuous data

求解(1.2), 其中 $a = 1$ .  $\lambda = 0.8$ . 初始数据

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\xi \sin(1.5\pi\xi^2), & \text{if } -1 \leq \xi < -1/3 \\ |\sin(2\pi\xi)|, & \text{if } |\xi| < 1/3 \\ 2\xi - 1 - \sin(3\pi\xi)/6, & \text{if } 1/3 < \xi \leq 1 \end{cases}$$

其中 $\xi = x - 0.3$  if  $-0.7 \leq x \leq 1$ ;  $\xi = x - 0.3 + 2$  if  $-1 \leq x \leq -0.7$ .

计算结果如图3所示, Lax-Wendroff在精度上相比另外两种格式有明显的优势, 但不具有非线性稳定性(局部极值和TVD性质).

#### 3.3 守恒型Burgers方程

求解(1.1), 其中 $f = \frac{1}{2}u^2$ . CFL=1, 时间步长由当地最大波速确定. 初始数据

$$u(x, 0) = 0.5 + \sin(x), \quad x \in [0, 2\pi).$$

首先,  $t = 0.9$ 的计算结果如图4所示, 二阶精度的Lax-Wendroff格式体现出高阶精度的优势. 进一步计算 $t = 2$ 时刻的分布(图5), 这时候解已爆破, 精确解求解时出现了不稳定; Lax-Wendroff格式出现了TV增的现象.

### 3.4 sign初值函数

求解(1.1), 其中 $f = \frac{1}{4}(u^2 - 1)(u^2 - 4)$ . CFL=1, 时间步长由当地最大波速确定. 初始数据

$$u(x, 0) = -2\text{sign}(x), \quad x \in R.$$

计算结果如图6所示, Lax-Friedrichs格式表现出耗散, Lax-Wendroff格式在原点附近表现出与前两种格式完全相反的行为.

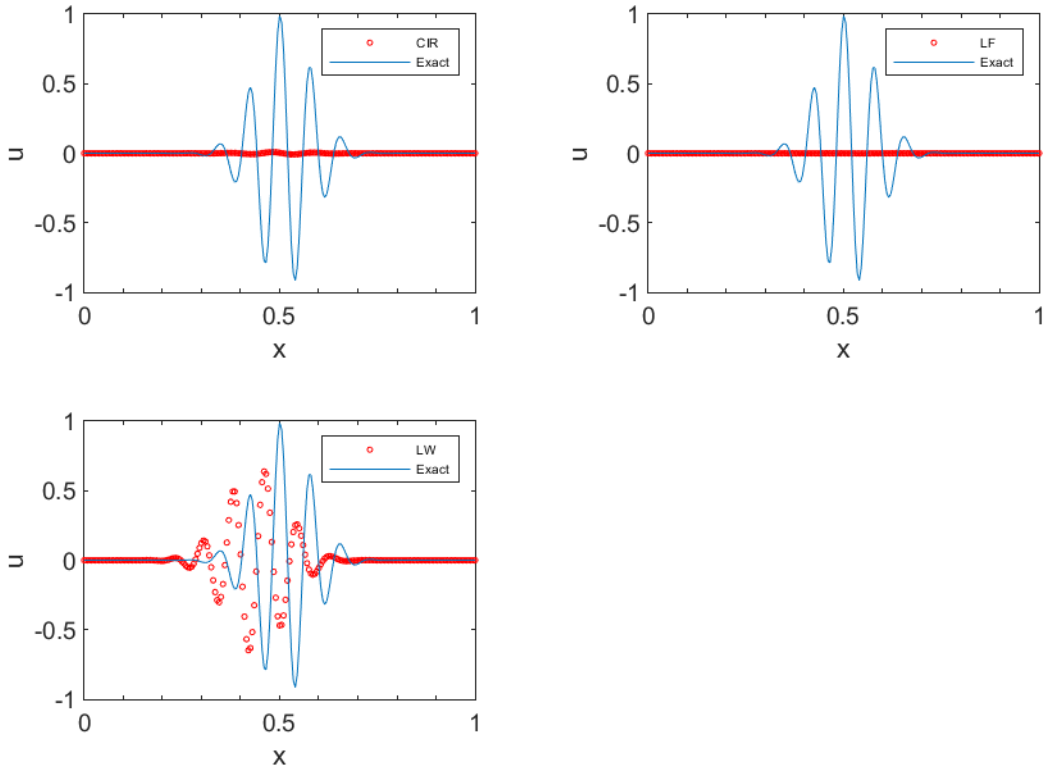


图 1: (Wave packet) $t=2$ 时, CIR,LF,LW格式解的分布. 点数 $N = 200$ . 周期边界.

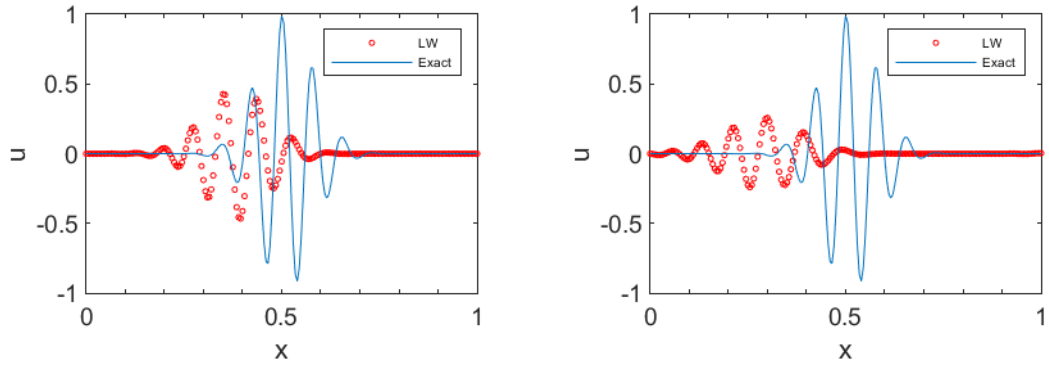


图 2: (Wave packet) $t=4,8$ 时(左,右), LW格式解的分布. 点数 $N = 200$ . 周期边界.

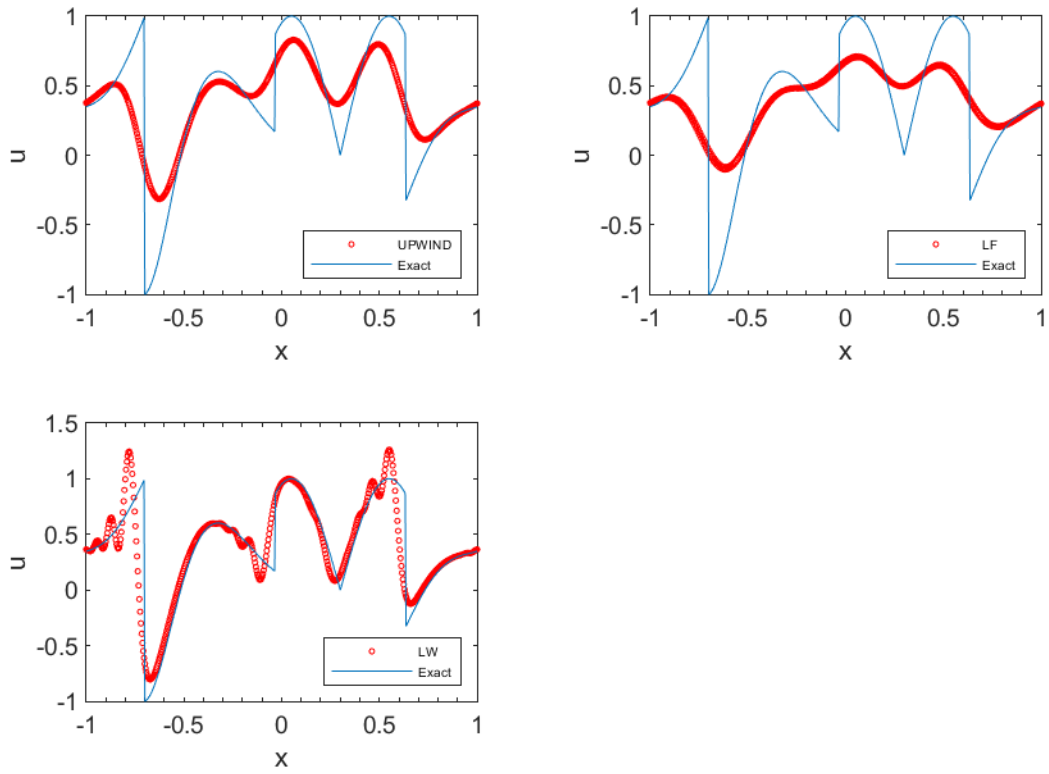


图 3: (Highly discontinuous data) $t=8$ 时, CIR,LF,LW格式解的分布. 点数 $N = 500$ . 周期边界.

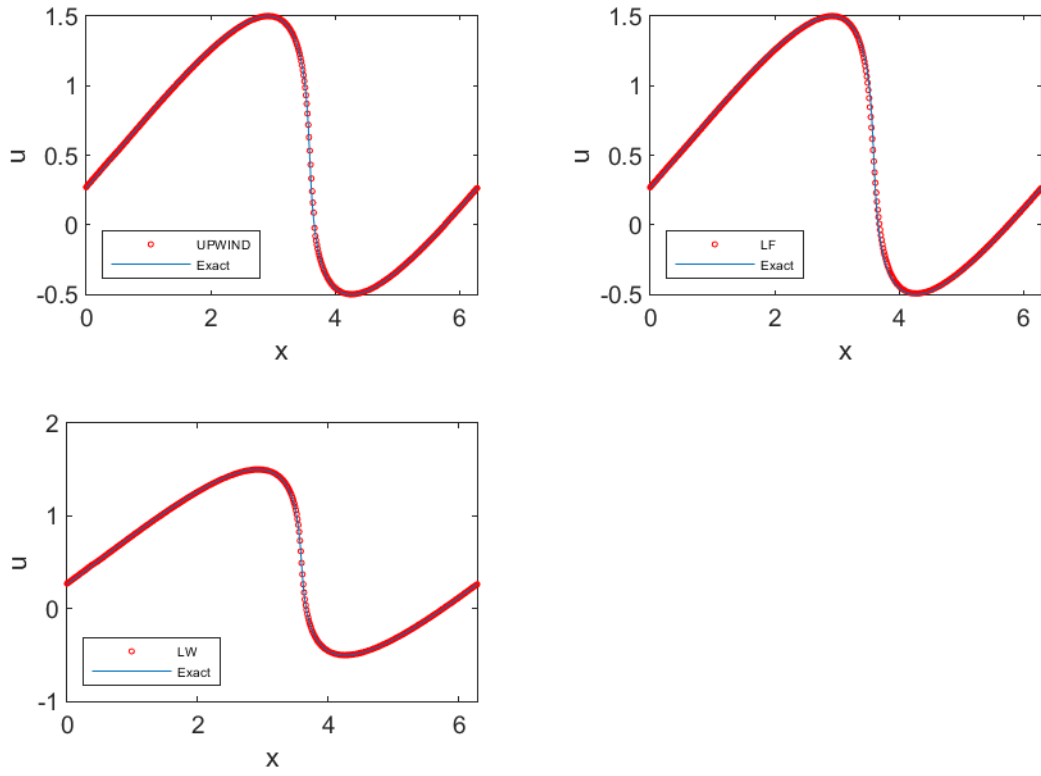


图 4: (Burgers) $t=0.9$ 时, UPWIND,LF,LW格式解的分布. 点数 $N = 500$ . 周期边界.

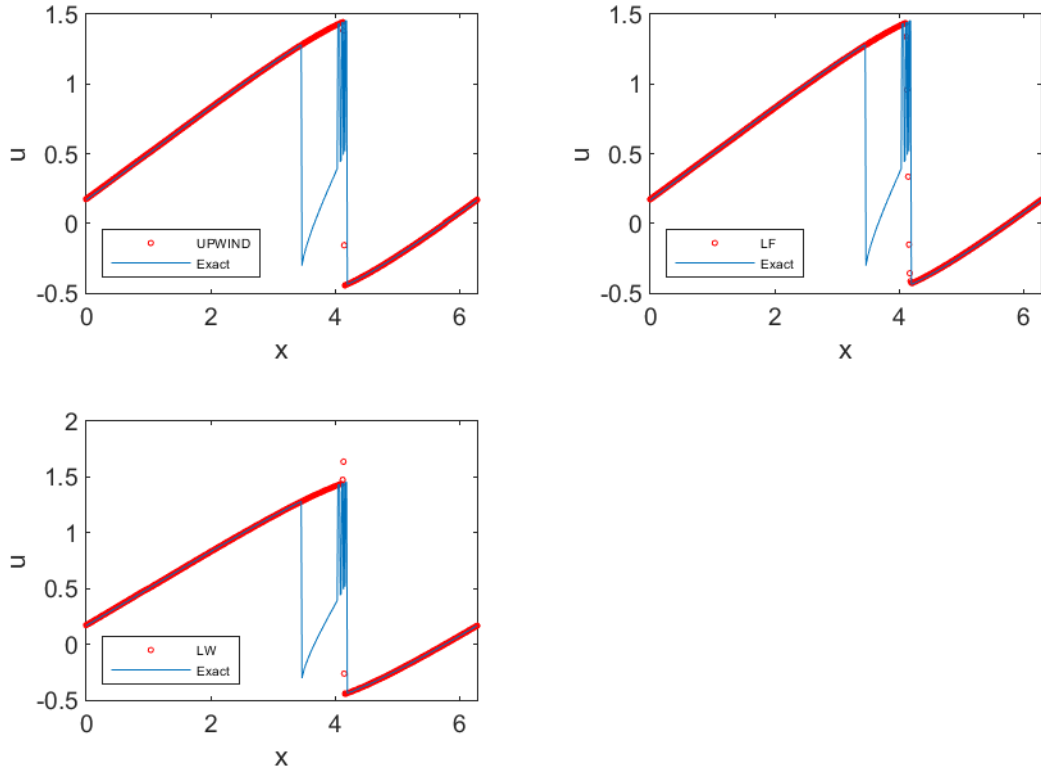


图 5: (Burgers) $t=2$ 时, UPWIND,LF,LW格式解的分布. 点数 $N = 500$ . 周期边界.

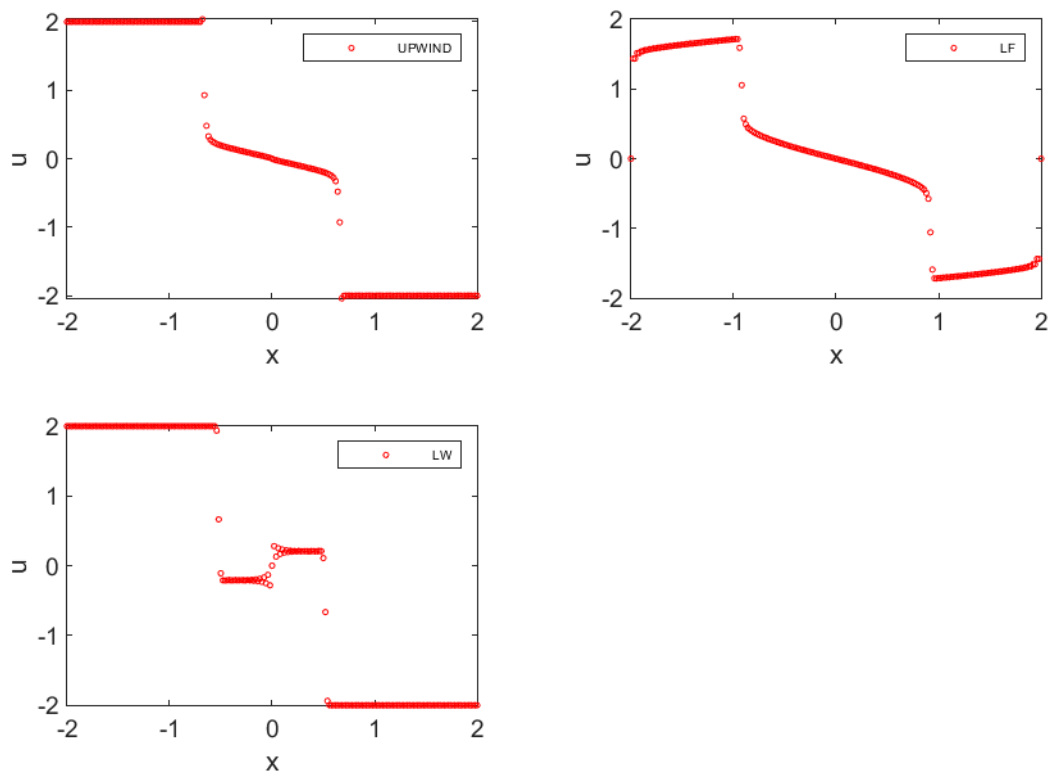


图 6: (Sign data) $t=1.2$ 时, UPWIND,LF,LW格式解的分布. 点数 $N = 200$ . 周期边界.