Probabilistyczne modele propagacji w grafach.

Bartosz Łabuz

24 listopada 2025

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Motywacja i zastosowania

Propagację wirusów podczas epidemii ludzkość obserwowała już od starożytności. W dzisiejszych czasach, wraz z rozwojem internetu i mediów społecznościowych, mamy możliwość doświadczyć również dynamicznej propagacji informacji. Aby efektywnie rozprzestrzenić informacje, nie można robić tego "na ślepo", lecz trzeba wykorzystać wiedzę teoretyczną. Najbardziej naturalną metodą matematycznej reprezentacji relacji międzyludzkich są grafy: wierzchołkami grafu są ludzie, a krawędzie określają, czy dane osoby mają ze sobą kontakt. Połączenie teorii grafów z rachunkiem prawdopodobieństwa pozwala stworzyć dokładny i praktyczny model propagacji informacji.

1.2 Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest

- teoretyczna analiza procesów losowej propagacji w grafach,
- wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa propagacji na wybranych rodzinach grafów,
- symulacja propagacji w środowisku komputerowym w celu zweryfikowania wyników teoretycznych.

1.3 Zakres pracy

Praca obejmuje:

- wstęp teoretyczny z zakresu teorii grafów i rachunku prawdopodobieństwa,
- opis badanych modeli propagacji: SI, SIR, SIS,
- implementację symulacji w Pythonie,
- analizę wyników i wnioski dotyczące wpływu struktury grafu na propagację.

Rozdział 2

Podstawy matematyczne

2.1 Notacja

Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór $\{0, 1, 2, \dots\}$, a przez $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Moc zbioru A oznaczamy $|A|$. Logarytm naturalny z x oznaczamy $\log(x)$. Dla $n \in \mathbb{N}_+$ przez $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ oznaczamy n'tą liczbę harmoniczną. Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją to przez $f(\pm\infty)$ oznaczamy $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym nieskierowanym. Zbiór sąsiadów $v \in V$ oznaczamy $\mathrm{N}(v)$. Odległość między u i v oznaczamy $\mathrm{d}(u, v)$ dla $u, v \in V$. Ekscentryczność $v \in V$ oznaczamy $\epsilon(v) = \max_{u\in V} \mathrm{d}(u, v)$. Średnicę grafu G oznaczamy $\mathrm{diam}(G) = \max_{v\in V} \epsilon(v)$.

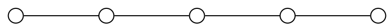
Jeśli $\mathbb{P}$ jest miarą prawdopodobieństwa na przestrzeni Ω to prawdopodobieństwo zdarzenia A oznaczamy $\mathbb{P}[A]$. Dla zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jej wartość oczekiwaną oznaczamy $\mathbb{E}[X]$ a jej wariancje $\mathrm{Var}[X]$. Funkcję masy prawdopodobieństwa oznaczamy $\mathbb{P}[X = t]$ a dystrybuante oznaczamy $F_X(t) = \mathbb{P}[X \le t]$ dla $t \in \mathbb{R}$.

2.2 Rodziny grafów

Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Poniżej znajdują się opisy rodzin grafów na których będziemy rozważać propagację oraz ich wizualizacja dla $n = 5$.

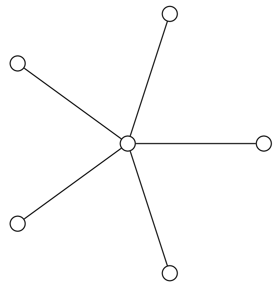
Graf ścieżkowy P_n

Graf ścieżkowy ma zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, \dots, n\}$ oraz zbiór krawędzi $E = \{\{i, i + 1\} : i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}\}$. Oznaczamy go przez P_n.



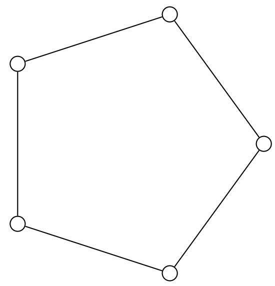
Graf gwiazda S_n

Graf gwiazda ma zbiór wierzchołków $V = \{0, 1, \dots, n\}$ oraz zbiór krawędzi $E = \{\{0, i\} : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Oznaczamy go przez S_n.



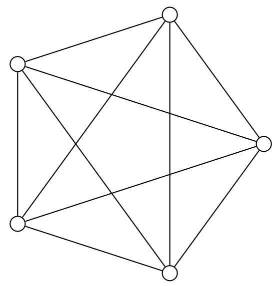
Graf cykliczny C_n

Graf cykliczny ma zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz zbiór krawędzi $E = \{\{i, i+1\} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{\{n, 1\}\}$. Oznaczamy go przez C_n.



Graf pełny K_n

Graf pełny ma zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz zbiór krawędzi $E = \{\{i, j\} : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \wedge i \neq j\}$. Oznaczamy go przez K_n.



2.3 Rozkłady prawdopodobieństwa

Rozkład Bernoulliego $\mathrm{Ber}(p)$

Próba Bernoulliego to doświadczenie losowe, którego wynik może być jednym z dwóch: sukces z prawdopodobieństwem $p \in (0; 1)$ albo porażka z prawdopodobieństwem $1 - p$. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego jeżeli przyjmuje wartość 1 w przypadku sukcesu i 0 w przypadku porażki próby Bernoulliego. Oznaczamy $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

Rozkład dwumianowy $\mathrm{Bin}(n, p)$

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy, jeżeli opisuję liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, a każda próba ma prawdopodobieństwo sukcesu $p \in (0; 1)$. Wtedy:

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad \mathrm{Var}[X] = np(1-p).$$

Oznaczamy $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Rozkład geometryczny $\mathrm{Geo}(p)$

Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny, jeżeli opisuje liczbę prób Bernoulliego potrzebnych do uzyskania pierwszego sukcesu gdzie każda próba ma prawdopodobieństwo sukcesu $p \in (0; 1)$. Wtedy:

$$\mathbb{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

Dystrybuanta jest równa:

$$\mathbb{P}[X \leq t] = 1 - (1-p)^t.$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}.$$

Oznaczamy $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Rozkład ujemny dwumianowy $\mathrm{NegBin}(m, p)$

Zmienna losowa X ma rozkład ujemny dwumianowy, jeżeli opisuje liczbę prób Bernoulliego potrzebnych do uzyskania m sukcesów gdzie $m \in \mathbb{N}_+$, a każda próba ma prawdopodobieństwo sukcesu $p \in (0; 1)$. Wtedy:

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}, \quad k \geq m.$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{m}{p}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{m(1-p)}{p^2}.$$

Oznaczamy $X \sim \mathrm{NegBin}(m, p)$.

Rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Zdefiniujmy funkcje

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \mathbf{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Niech $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma > 0$. Zmienna losowa X ma rozkład normalny, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\Big(\frac{t-\mu}{\sigma}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dystrybuanta jest równa:

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \mathbf{\Phi}\Big(\frac{t-\mu}{\sigma}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2.$$

Oznaczamy $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Jeśli $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$ to mówimy, że X ma rozkład standardowy normalny. φ oraz $\mathbf{\Phi}$ są odpowiednio PDF jak i CDF takiego rozkładu.

Rozkład jednostajny $\mathcal{U}[a; b]$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ przy czym $a < b$. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem:

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}, \quad t \in [a; b].$$

Dystrybuanta jest równa:

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \frac{t-a}{b-a}, \quad t \in [a;b].$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Oznaczamy $X \sim \mathcal{U}[a;b]$.

Rozkład wykładniczy $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Niech $\lambda > 0$. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem:

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Dystrybuanta jest równa:

$$\mathbb{P}[X \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Oznaczamy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

2.4 Fakty, sumy i nierówności

Fakt 1. *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą IID o CDF równej F_X. Zdefiniujmy zmienną losową $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wtedy*

$$F_Y(t) = F_X^n(t).$$

Fakt 2. *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą IID o CDF równej F_X. Zdefiniujmy zmienną losową $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wtedy*

$$F_Y(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n.$$

Fakt 3. *Niech $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ oraz $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wtedy*

$$X + Y \sim \mathrm{Bin}(n+m, p).$$

Fakt 4. *Niech $X_1, \ldots, X_m \sim \mathrm{Geo}(p)$ będą IID. Zdefiniujmy zmienną losową $Y = X_1 + \cdots + X_m$. Wtedy*

$$Y \sim \mathrm{NegBin}(m, p).$$

Fakt 5. *Niech $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ oraz $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wtedy*

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Fakt 6. *Niech $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Oznaczmy $q = 1 - p$. Wtedy*

$$\mathbb{E}[z^X] = (q + pz)^n, \quad \mathbb{E}[X z^X] = npz(q + pz)^{n-1}.$$

Fakt 7. *Niech* $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ *oraz* $Y \sim \mathrm{Bin}(m,r)$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zdefiniujmy zmienną losową* $Z = X + Y$. *Wtedy*

$$\mathbb{P}[Z = k] = \sum_{j=\max\{0,k-m\}}^{\min\{n,k\}} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} p^j (1-p)^{n-j} r^{k-j} (1-r)^{m-(k-j)}.$$

Fakt 8. *Niech* $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}[0;1]$ *będą IID. Zdefiniujmy zmienną losową* $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. *Wtedy*

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{1+n}.$$

Fakt 9. *Niech* $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1), \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$ *będą niezależne. Zdefiniujmy zmienną losową* $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. *Wtedy*

$$Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

Suma 1. *Niech* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x, y \in \mathbb{R}$. *Wtedy*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$

Suma 2. *Niech* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x, y \in \mathbb{R}$. *Wtedy*

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}.$$

Suma 3. *Niech* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Wtedy*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Suma 4. *Niech* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Wtedy*

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot (nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1).$$

Suma 5. *Niech* $x \in (-1;1)$. *Wtedy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Suma 6. *Niech* $x \in (-1;1)$. *Wtedy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Suma 7. *Niech* $m \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in (-1;1)$. *Wtedy*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k = \frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

Suma 8. *Niech* $m \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in (-1; 1)$*. Wtedy*

$$\sum_{k=m}^{\infty} k \cdot \binom{k-1}{m-1} x^k = \frac{mx^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Nierówność 1. *Niech* $a, b \in \mathbb{N}$*,* $a < b$ *oraz* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą i malejąca. Wtedy*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq f(a) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nierówność 2. *Niech* $n \in \mathbb{N}_+$*. Wtedy*

$$H_n \leq 1 + \log(n).$$

Nierówność 3. *Niech* $x \in (0; 1)$*. Wtedy*

$$\frac{1}{\log(\frac{1}{1-x})} \leq \frac{1}{x}.$$

Nierówność 4 (Nierówność między średnimi)**.** *Niech* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$*. Wtedy*

$$\log(x_1 \cdots x_n) \leq n \cdot \log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 = \cdots = x_n$*.*

Nierówność 5 (Nierówność Markova)**.** *Niech* X *będzie zmienną losową taką, że* $X \geq 0$ *oraz* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Wtedy dla dowolnego* $t > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Nierówność 6 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)**.** *Niech* X, Y *będą zmiennymi losowymi takimi, że* $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$*. Wtedy*

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Nierówność 7 (Nierówność Jensena dla wartości oczekiwanej)**.** *Niech* $n \in \mathbb{N}_+$ *oraz* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą zaś* $X_1, \ldots, X_n$ *będą zmiennymi losowymi (niekoniecznie niezależnymi). Wtedy*

$$g(\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_n]) \leq \mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)].$$

Jeśli g *jest wklęsła to nierówność zachodzi w drugą stronę. W szczególności, ponieważ* max *jest funkcją wypukłą, a* min *wklęsłą, mamy:*

$$\max(\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_n]) \leq \mathbb{E}[\max(X_1, \ldots, X_n)],$$

$$\min(\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_n]) \geq \mathbb{E}[\min(X_1, \ldots, X_n)].$$

Rozdział 3

Modele propagacji losowej

Dany jest graf spójny nieskierowany $G = (V, E)$. Propagacja na takim grafie jest procesem stochastycznym. Zakładamy, że czas dla tego procesu jest dyskretny i mierzony w jednostkach naturalnych, zatem za zbiór chwil przyjmujemy $\mathbb{N}$. Niech $\mathcal{Q}$ będzie skończonym zbiorem stanów, jakie mogą przyjmować wierzchołki G. W każdej chwili $t \in \mathbb{N}$ każdy wierzchołek $v \in V$ znajduje się w pewnym stanie $Q \in \mathcal{Q}$. Definiujemy zmienną losową $\mathbf{X} : \mathbb{N} \times V \to \mathcal{Q}$, taką, że $\mathbf{X}_t(v) = Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek v w chwili t znajduje się w stanie Q.

3.1 Model SI

Model **Susceptible—Infected (SI)** opisuje propagację w sieci, w której każdy wierzchołek znajduje się w jednym z dwóch stanów: podatny (S) lub zainfekowany (I). Mamy więc $\mathcal{Q} = \{S, I\}$. Początkowo ustalony wierzchołek $s \in V$ znajduje się w stanie I, natomiast pozostałe wierzchołki są w stanie S. A więc

$$\mathbf{X}_0(v) = \begin{cases} I, & \text{jeśli } v = s, \\ S, & \text{jeśli } v \neq s. \end{cases}$$

W każdej jednostce czasu dowolny zainfekowany wierzchołek może zarazić każdego swojego sąsiada z prawdopodobieństwem p, dla ustalonego $p \in (0; 1)$. Wierzchołek raz zainfekowany pozostaje w tym stanie na zawsze. W modelu **SI** liczba zainfekowanych wierzchołków jest funkcją niemalejącą w czasie. Dla uproszczenia notacji kładziemy

$$q = 1 - p, \quad \mathcal{S}_t = \{v \in V : \mathbf{X}_t(v) = S\}, \quad \mathcal{I}_t = \{v \in V : \mathbf{X}_t(v) = I\}.$$

Rozkład prawdopodobieństwa w tym modelu jest definiowany przez następujące zależności:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = S] &= \prod_{v \in \mathrm{N}(u) \cap \mathcal{I}_t} q, \\ \mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = S] &= 1 - \prod_{v \in \mathrm{N}(u) \cap \mathcal{I}_t} q, \\ \mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = I] &= 0, \\ \mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = I] &= 1. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz zmienne losowe opisujące istotne dla nas własności. Dla każdego $v \in V$ definiujemy zmienną X_v określającą chwilę czasu zarażenia wierzchołka v. Formalnie

$$X_v = \min\{t \in \mathbb{N} : v \in \mathcal{I}_t\}.$$

Jeśli taka chwila nie istnieje (tzn. w danym przebiegu procesu wierzchołek v nigdy się nie zarazi), to przyjmujemy $X_v = \infty$. Później udowodnimy (Twierdzenie 1), że w modelu **SI** mamy $\mathbb{P}[X_v = \infty] = 0$. Wyznaczenie rozkładu X_v jak i $\mathbb{E}[X_v]$ da nam sporo informacji o propagacji na grafie w zależności od jego topologii. Następnie dla każdego $t \in \mathbb{N}$ definiujemy zmienną losową Y_t oznaczającą liczbę zainfekowanych wierzchołków w chwili t. Zatem

$$Y_t = |\mathcal{I}_t|.$$

Interesować nas będzie rozkład prawdopodobieństwa Y_t oraz wartość oczekiwana $\mathbb{E}[Y_t]$. Pokażemy, że $\mathbb{E}[Y_t] \to |V|$ wraz z $t \to \infty$. Dlatego też nie będziemy badać asymptotyki $\mathbb{E}[Y_t]$ względem t. Dodatkowo definiujemy zmienną Z opisującą czas całkowitego zarażenia grafu:

$$Z = \min\{t \in \mathbb{N} : \mathcal{I}_t = V\}.$$

Jeśli ta sytuacją nigdy nie nastąpi to $Z = \infty$. Dla propagacji **SI** zainfekowanie całego grafu jest jednakże zdarzeniem pewnym. Alternatywnie możemy zapisać $Z = \max_{v \in V} X_v$. Wyznacznie rozkładu Z oraz jej wartości oczekiwanej dla konkretnych rodzin grafów będzie głównym celem w tym modelu.

3.2 Model SIR

Model **Susceptible—Infected—Recovered (SIR)** rozszerza model **SI** o dodanie trzeciego stanu. Stanem tym jest R (Recovered). W tym modelu mamy $\mathcal{Q} = \{S, I, R\}$. Stan R jest trwały — wierzchołek, który wyzdrowiał, nie może już ani się zarazić, ani nikogo zakazić. Zarażony wierzchołek może przejść z I do stanu R z prawdopodobieństwem $\alpha \in (0; 1)$. Przyjmujemy, że w każdej rundzie wierzchołki najpierw przekazują infekcję, a potem dopiero mogą wyzdrowieć. Dla uproszczenia notacji kładziemy

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \mathcal{R}_t = \{v \in V : \mathbf{X}_t(v) = R\}.$$

Rozkład prawdopodobieństwa w tym modelu jest definiowany przez następujące zależności:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = S] = \prod_{v \in \mathrm{N}(u) \cap \mathcal{I}_t} q,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = S] = 1 - \prod_{v \in \mathrm{N}(u) \cap \mathcal{I}_t} q,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = R \mid \mathbf{X}_t(u) = S] = 0,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = I] = 0,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = I] = \beta,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = R \mid \mathbf{X}_t(u) = I] = \alpha,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = R] = 0,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = R] = 0,\\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = R \mid \mathbf{X}_t(u) = R] = 1.
\end{aligned}$$

Tak jak poprzednio rozważmy zmienne

$$X_v = \min\{t \in \mathbb{N} : v \in \mathcal{I}_t\}.$$

W kontraście dla modelu **SI** zachodzi $\mathbb{P}[X_v = \infty] > 0$. (patrz Twierdzenie 4). A więc poza rozkładem X_v możemy wyznaczyć $\mathbb{E}[X_v | X_v < \infty]$. Istnienie stanu R narzuca pomysł rozważania podobnej zmiennej na pierwszy czas wyzdrowienia wierzchołka v. Ale transmisja ze stanu I do R na pojedynczym wierzchołku jest rozkładem $\mathrm{Geo}(\alpha)$, a więc zmienna ta była by po prostu sumą rozkładu geometrycznego z X_v. Z tego powodu tego nie będziemy jej rozważać. Zamiast rozważać liczbe tylko zainfekowanych lub tylko wyzdrowiałych wierzchołków będziemy rozważać liczbe nie podatnych wierzchołków po t krokach. Kładziemy więc

$$Y_t = |\mathcal{I}_t \cup \mathcal{R}_t|.$$

Zdarzenie $\mathbb{P}[\mathcal{I}_t = \varnothing] \to 1$ wraz z $t \to \infty$ a więc możemy zdefiniować zmienną Z oznaczającą czas wygaśnięcia infekcji. Dla uproszczenia będziemy rozważać moment w którym żaden nowy wierzchołek nie może być zarażony. A więc

$$Z = \min\{t \in \mathbb{N} : \forall v \in \mathcal{I}_t \quad \mathcal{S}_t \cap \mathrm{N}(v) = \varnothing\}.$$

Dodatkowo definiujemy zmienną W będącą liczba finalnie wyzdrowiałych wierzchołków.

$$W = |\{v \in V : X_v < \infty\}|.$$

Rozkłady Z, W jak i ich wartości oczekiwane będą naszym głównym zainteresowaniem w tym modelu.

3.3 Model SIS

Model **Susceptible—Infected—Susceptible (SIS)** rozszerza model **SI** o powracanie wierzchołków zarażonych do stanu podatnego. Wierzchołek zainfekowany może powrócić do stanu podatnego z prawdopodobieństwem $\alpha \in (0; 1)$. Tutaj mamy również $\mathcal{Q} = \{S, I\}$. W modelu **SIS** liczba zainfekowanych wierzchołków może oscylować w czasie i nie musi osiągnąć stanu pełnego zakażenia. Dla uproszczenia notacji kładziemy $\beta = 1 - \alpha$. Przyjmujemy, że w każdej rundzie wierzchołki najpierw przekazują infekcję, a potem dopiero mogą powrócić w stan podatności. Rozkład prawdopodobieństwa w tym modelu jest definiowany przez następujące zależności:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = S] = \prod_{v \in \mathrm{N}(u) \cap \mathcal{I}_t} q, \\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = S] = 1 - \prod_{v \in \mathrm{N}(u) \cap \mathcal{I}_t} q, \\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = S \mid \mathbf{X}_t(u) = I] = \alpha, \\
&\mathbb{P}[\mathbf{X}_{t+1}(u) = I \mid \mathbf{X}_t(u) = I] = \beta.
\end{aligned}$$

Zmienne losowe opisujące istotne własności są tutaj podobne jak w modelu **SI**. Dla każdego $v \in V$ kładziemy

$$X_v = \min\{t \in \mathbb{N} : v \in \mathcal{I}_t\},$$

oraz dla $t \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$Y_t = |\mathcal{I}_t|.$$

Dodatkowo definiujemy zmienną losową opisującą czas wygaśnięcia infekcji:

$$Z = \min\{t \in \mathbb{N} : \mathcal{I}_t = \varnothing\}.$$

Wygaśnięcie infekcji zachodzi z prawdopodobieństwem 1 (patrz Twierdzenie 5). Mamy $\mathbb{P}[X_v = \infty] > 0$ a więc interesować nas będzie $\mathbb{E}[X_v | X_v < \infty]$. Dalej wykażemy, że $\mathbb{E}[Y_t]$ dążą do 0, a więc także nie będą nas interesować. Skupimy się tylko na rozkładzie Y_t. Jeśli chodzi o zmienną Z to przyjrzyjmy się zarówno jej rozkładowi jak i wartości oczekiwanej.

Rozdział 4

Analiza modelu SI

4.1 Dwa wierzchołki, jedna krawędź

Na samym początku rozważmy najprostszy graf, czyli taki o dwóch wierzchołkach u, v połączonych krawędzią. Za wierzchołek startowy wybierzmy u. Istnieją tylko dwa możliwe stany systemu: $\mathcal{I}_t = \{u\}$ oraz $\mathcal{I}_t = \{u, v\}$. Przejście ze stanu $\mathcal{I}_t = \{u\}$ do $\mathcal{I}_t = \{u, v\}$ następuje z prawdopodobieństwem p w każdej jednostce czasu. Zatem czas zarażenia drugiego wierzchołka X_v ma rozkład geometryczny, $X_v \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Rozważmy teraz rozkład Y_t. Mamy $\mathbb{P}[Y_t = 1] = q^t$, ponieważ próba zarażenia musiałaby nie udać się t razy, oraz $\mathbb{P}[Y_t = 2] = 1 - q^t$. Stąd $\mathbb{E}[Y_t] = 1 \cdot q^t + 2 \cdot (1 - q^t) = 2 - q^t$.

Jeśli chodzi o zmienną Z, to zachodzi $Z = \max\{X_u, X_v\} = X_v$, a więc również $Z \sim \mathrm{Geo}(p)$ oraz $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{p}$.

4.2 Trójkąt

Przyjrzyjmy się teraz nieco większemu grafowi — trójkątowi. Niech jeden z wierzchołków będzie źródłem s, a pozostałe u, v. Aby poinformować u, musimy uzyskać sukces bezpośrednio od s lub zarazić v, a następnie u. Zatem zachodzi $X_u = \min\{A, B\}$, gdzie $A \sim \mathrm{Geo}(p)$ oraz $B \sim \mathrm{NegBin}(2, p)$. Wiemy, że $\mathbb{P}[A \le t] = 1 - q^t$. Z kolei

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[B \le t] &= \sum_{k=2}^{t} (k-1) \cdot p^2 q^{k-2} = \frac{p^2}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} \cdot ((t-1)q^t - tq^{t-1} + 1) \\
&= 1 - q^t - tpq^{t-1}.
\end{aligned}
$$

Dalej, z Faktu 2 mamy

$$
\mathbb{P}[X_u \le t] = 1 - (1 - (1 - q^t)) \cdot (1 - (1 - q^t - tpq^{t-1})) = 1 - q^{2t} - tpq^{2t-1}.
$$

Jeśli chodzi o liczbę zainfekowanych po t krokach, to skoro mamy trzy wartości do policzenia. Oczywiście $\mathbb{P}[Y_t = 1] = q^{2t}$. Aby po t chwilach tylko dwa węzły były zainfekowane, musimy zarazić któryś z wierzchołków po $1 \le k \le t$ rundach z prawdopodobieństwem $2pq \cdot q^{2\cdot(k-1)}$, a następnie uzyskać $t - k$ porażek. Na każdą z nich mamy szansę równą q^2. A zatem

$$
\mathbb{P}[Y_t = 2] = \sum_{k=1}^{t} 2pq \cdot q^{2\cdot(k-1)} \cdot q^{2\cdot(t-k)} = 2tpq^{2t-1}.
$$

Na koniec mamy $\mathbb{P}[Y_t = 3] = 1 - q^{2t} - 2tpq^{2t-1}$. Ponadto:

$$
\mathbb{E}[Y_t] = 1 \cdot q^{2t} + 2 \cdot 2tpq^{2t-1} + 3 \cdot (1 - q^{2t} - 2tpq^{2t-1}) = 3 - 2q^{2t} - 2tpq^{2t-1}.
$$

Propagacja może się zakończyć na dwa sposoby. Pierwszy z nich to sytuacja, w której przez $t-1$ jednostek czasu żadne zakażenie nie zaszło, a w chwili t zarażają się oba wierzchołki. Prawdopodobieństwo tego przypadku wynosi $p^2 q^{2\cdot(t-1)}$. Druga możliwość to taka, w której w k-tym kroku (dla $1 \le k \le t-1$) zaraził się jeden z wierzchołków — z prawdopodobieństwem $2pq \cdot q^{2\cdot(k-1)}$, a potem przez kolejne $t-1-k$ kroków trzeci wierzchołek nie został zainfekowany, na co mamy prawdopodobieństwo $(q^2)^{t-1-k}$, aż do chwili t. To ostatnie przejście ma prawdopodobieństwo $1-q^2$. Podsumowując:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z=t] &= p^2 q^{2t-2} + \sum_{k=1}^{t-1} (2pqq^{2k-2}) \cdot (q^{2t-2k-2}) \cdot (1-q^2) \\ &= p^2 q^{2t-2} + 2pq^{2t-3} \cdot (t-1)(1-q^2).\end{aligned}$$

Mamy też $\mathbb{P}[Z > t] = \mathbb{P}[Y_t \neq 3] = q^{2t} + 2tpq^{2t-1}$. Wartość oczekiwana wynosi więc:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}[Z > t] = \sum_{t=0}^{\infty} q^{2t} + 2tpq^{2t-1} \\ &= \frac{1}{1-q^2} + \frac{2p}{q} \cdot \frac{q^2}{(1-q^2)^2} = \frac{-3q^2+2q+1}{(1-q^2)^2} = \frac{4-3p}{p(2-p)^2}.\end{aligned}$$

Wykonaliśmy dość sporo obliczeń jak na tak mały graf. Możemy więc zauważyć, że istnienie cykli w grafie znacząco komplikuje sytuację, jeśli chodzi o model **SI**.

4.3 Całkowita infekcja pewna

Dość intuicyjny jest fakt, że każdy wierzchołek zostanie kiedyś zarażony z prawdopodobieństwem 1. Co za tym idzie cały graf znajdzie się w stanie I oraz $Z < \infty$. Postaramy się teraz formalnie tego dowieść.

Twierdzenie 1. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, $s \in V$ źródłem infekcji oraz $v \in V \setminus \{s\}$. Wtedy zachodzą następujące tożsamości:*

$$\mathbb{P}[X_v = \infty] = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t] = |V|, \quad \mathbb{P}[Z < \infty] = 1.$$

Dowód. Rozważmy propagacje jako łańcuch Markova. W danej chwili stanem jest $\mathcal{I}_t$. Stan absorbujący wynosi V. Jeśli

$$\ell = \max_{u\in\mathcal{I}_t,\, v\in\mathcal{S}_t} \mathrm{d}(u, v)$$

to po ℓ rundach możemy przejść do stanu całkowitej infekcji grafu z dodatnim prawdopodobieństwem. Zmienna Z to dokładnie czas, w którym propagacja osiągnie ten stan absorbujący. A zatem z własności łańcuchów Markova mamy $\mathbb{P}[Z < \infty] = 1$. Ponadto $\mathbb{P}[\max_{v\in V} X_v = \infty] = \mathbb{P}[Z = \infty] = 0$ a więc dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbb{P}[X_v = \infty] = 0$. Dalej zauważmy, że $0 \le Y_t \le |V|$. Z Twierdzenia Lebesgue o zbieżności ograniczonej mamy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\lim_{t\to\infty} Y_t] = \mathbb{E}\left[\lim_{t\to\infty} \sum_{v\in V} \mathbf{1}_{v\in\mathcal{I}_t}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V} 1\right] = \mathbb{E}[|V|] = |V|.$$

□

4.4 Grafy ścieżkowe

Jako pierwszą rodzinę grafów rozważmy grafy ścieżkowe P_n. Załóżmy, że proces zaczyna się w wierzchołku $s = 1$. Zatem infekcja rozchodzi się po grafie „od lewej do prawej". Zauważmy, że czasy zarażenia kolejnych wierzchołków tworzą ciąg zmiennych losowych:

$$X_1 = 0, \quad X_v = X_{v-1} + U_v, \quad v \in \{2, 3, \dots, n\},$$

gdzie $U_2, U_3, \dots, U_n \sim \mathrm{Geo}(p)$ oraz $U_2, U_3, \dots, U_n$ są niezależne. Widzimy zatem, że $X_v = U_2 + U_3 + \cdots + U_v$, a więc z Faktu 4 X_v ma rozkład ujemny dwumianowy:

$$X_v \sim \mathrm{NegBin}(v-1, p),$$

oraz

$$\mathbb{E}[X_v] = \frac{v-1}{p}.$$

Ustalmy $t \in \mathbb{N}$ i przejdźmy do obliczania rozkładu Y_t. Zauważmy, że liczba dodatkowych zakażeń poza startowym wierzchołkiem do czasu t to po prostu liczba sukcesów w t niezależnych prób Bernoulliego. Musimy jednak pamiętać, że Y_t nie może przekroczyć n. Zatem mamy dokładnie:

$$Y_t = \min\{n, 1 + B_t\}, \qquad B_t \sim \mathrm{Bin}(t, p).$$

Pozwala to na wyznaczenie PMF dla Y_t. Dla $1 \leq k \leq n-1$ mamy:

$$\mathbb{P}[Y_t = k] = \mathbb{P}[B_t = k-1] = \binom{t}{k-1} p^{k-1} q^{t-k+1},$$

oraz dla $k = n$:

$$\mathbb{P}[Y_t = n] = \mathbb{P}[B_t \geq n-1] = \sum_{j=n-1}^{t} \binom{t}{j} p^j q^{t-j}.$$

Przejdźmy teraz do obliczania wartości oczekiwanej Y_t:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t] &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \mathbb{P}[Y_t = k] + n \cdot \mathbb{P}[Y_t = n] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \binom{t}{k-1} p^{k-1} q^{t-k+1} + n \cdot \sum_{j=n-1}^{t} \binom{t}{j} p^j q^{t-j} \\
&= \sum_{j=0}^{t} \min\{n, 1+j\} \cdot \binom{t}{j} p^j q^{t-j}.
\end{aligned}$$

Jeśli $n \geq 1 + t$ to wówczas

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t] &= \sum_{j=0}^{t} (1+j) \binom{t}{j} p^j q^{t-j} = \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} p^j q^{t-j} + \sum_{j=0}^{t} j \binom{t}{j} p^j q^{t-j} \\
&= (p+q)^t + tp(p+q)^{t-1} = 1 + tp.
\end{aligned}$$

Czas całkowitego zainfekowania grafu to $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\} = X_n$. Zatem rozkład zmiennej Z jest już nam znany,

$$Z \sim \mathrm{NegBin}(n-1, p),$$

a wartość oczekiwana wynosi

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n-1}{p}.$$

4.5 Grafy gwiezdne

Następnie rozpatrzmy rodzinę grafów gwiazd S_n. Niech źródłem będzie centralny wierzchołek grafu, czyli $s = 0$. Propagacja rozchodzi się tutaj po każdym ramieniu gwiazdy niezależnie a więc zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne. Stąd dla każdego $v \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy

$$X_v \sim \mathrm{Geo}(p),$$

oraz

$$\mathbb{E}[X_v] = \frac{1}{p}.$$

Kwestia zmiennej Y_t jest również prosta. Ponieważ propagacja działa niezależnie na każdym wierzchołku, Y_t odpowiada liczbie sukcesów w n próbach Bernoulliego. Sukcesem pojedynczej próby jest zdarzenie, że zmienna X_v o rozkładzie geometrycznym osiągnie sukces w czasie co najwyżej t. Skoro $\mathbb{P}[X_v \le t] = 1 - q^t$ to mamy

$$Y_t = 1 + B_t, \quad B_t \sim \mathrm{Bin}(n, 1 - q^t).$$

W konsekwencji:

$$\mathbb{E}[Y_t] = 1 + n \cdot (1 - q^t).$$

Przejdźmy teraz do zmiennej Z. Mamy $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Ponieważ zmienne te są IID, z Faktu 1 otrzymujemy:

$$\mathbb{P}[Z \le t] = (1 - q^t)^n.$$

Policzmy wartość oczekiwaną całkowitego zainfekowania grafu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Z \ge k] = \sum_{k=1}^{\infty} 1 - \mathbb{P}[Z \le k-1] = \sum_{k=1}^{\infty} 1 - (1 - q^{k-1})^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 1 - (1 - q^k)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j q^{kj}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} q^{kj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} (q^j)^k \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{1 - q^j}.
\end{aligned}$$

Nie jest to jednak szczególnie elegancka forma, więc spróbujmy wyznaczyć asymptotykę $\mathbb{E}[Z]$. Zauważmy, że

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 - (1 - q^k)^n.$$

Z Nierówności 1 możemy przybliżyć tę sumę całką. Niech $f(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^n$, gdzie $\lambda = -\log(q)$. Oczywiście $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$, a funkcja f jest malejąca, więc:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \mathbb{E}[Z] \le 1 + \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podstawiamy $u = 1 - e^{-\lambda x}$. Wtedy $\mathrm{d}u = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, a więc $\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u$. Ponadto $u(0) = 0$, $u(\infty) = 1$ (bo $\lambda > 0$). Zatem całka ma postać:

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} = \frac{H_n}{\lambda}.$$

Zauważmy, że $-\log(q) = \log\left(\frac{1}{1-p}\right)$, zatem:

$$\frac{H_n}{\log\left(\frac{1}{1-p}\right)} \le \mathbb{E}[Z] \le \frac{H_n}{\log\left(\frac{1}{1-p}\right)} + 1.$$

Stąd asymptotyczny czas pełnego zarażenia grafu S_n wynosi:

$$\mathbb{E}[Z] \sim \frac{H_n}{\log\left(\frac{1}{1-p}\right)}.$$

4.6 Ograniczenia na czas zarażenia

Po rozważeniu dwóch rodzin grafów dostrzegamy znaczną różnicę w wartościach oczekiwanych zmiennych Y_t oraz Z. Dla grafów ścieżkowych minimalna liczba rund potrzebnych do zainfekowania całego grafu wynosi $t = n - 1$, natomiast dla gwiazd jest to zaledwie $t = 1$. Widzimy więc, że w pewnym sensie najlepszy przypadek sprzyjający szybkiemu rozprzestrzenianiu się infekcji zachodzi wtedy, gdy źródło s jest połączone ze wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu. Z drugiej strony, najgorsza sytuacja ma miejsce, gdy istnieje odległy węzeł z niewielką liczbą ścieżek prowadzących do niego — tak jak w przypadku grafów ścieżkowych. Teraz postaramy się uogólnić tę obserwację.

Twierdzenie 2. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, a $G' = (V, E')$ jego spójnym podgrafem. Załóżmy, że $\mathbf{X}$ opisuje proces stochastyczny w modelu **SI** prowadzony równocześnie na G oraz G' z tym samym źródłem $s \in V$. Jeśli przez X'_v, Y'_t oraz Z' oznaczymy odpowiednie zmienne losowe dla G', to zachodzą nierówności:*

$$X_v \le X'_v, \quad Y_t \ge Y'_t, \quad Z \le Z'.$$

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{I}_t$ zbiór zainfekowanych wierzchołków w grafie G, a przez $\mathcal{I}'_t$ — w grafie G'. Wtedy $\mathcal{I}'_t \subseteq \mathcal{I}_t$ dla każdego $t \in \mathbb{N}$. Ustalmy $v \in V$ i niech $X'_v = a$. Wtedy $v \in \mathcal{I}'_a$, a więc także $v \in \mathcal{I}_a$, co implikuje $X_v \le a = X'_v$. Analogicznie, dla ustalonego $t \in \mathbb{N}$ z faktu, że $\mathcal{I}'_t \subseteq \mathcal{I}_t$, mamy $|\mathcal{I}'_t| \le |\mathcal{I}_t|$, a zatem $Y'_t \le Y_t$. Na koniec, jeśli $Z' = b$, to $\mathcal{I}'_b = V$, a więc $V \subseteq \mathcal{I}_b$, co prowadzi do $Z \le b = Z'$. $\square$

Intuicyjnie, wynik ten jest oczywisty — mając mniej krawędzi w grafie, potrzebujemy więcej czasu, aby informacja (lub infekcja) rozprzestrzeniła się po całym grafie. W praktyce oznacza to, że jeśli znamy średni czas pełnego zainfekowania dowolnego podgrafu G, to otrzymujemy górne ograniczenie dla całego grafu. Spróbujmy teraz oszacować z góry wartość $\mathbb{E}[Z]$ dla dowolnego grafu.

Twierdzenie 3. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o n wierzchołkach oraz $s \in V$ — ustalonym źródłem. Oznaczmy $\lambda = \log\left(\frac{1}{1-p}\right)$ oraz $h = \epsilon(s)$. Wtedy zachodzi:*

$$\mathbb{E}[Z] \le h + \frac{h}{\lambda}\left(\log\left(\frac{n-1}{h}\right) + 1\right).$$

Dowód. Dla $0 \le j \le h$ zdefiniujmy zbiory $A_j = \{v \in V : \mathrm{d}(s, v) = j\}$ oraz połóżmy $a_j = |A_j|$. Mamy oczywiście $a_0 = 1$, a więc $a_1 + \cdots + a_h = n - 1$. Dalej zdefiniujmy zmienne losowe:

$$T_j = \min\{t \in \mathbb{N} : A_j \subseteq \mathcal{I}_t\}.$$

Zmienna T_j określa czas potrzebny na zainfekowanie wszystkich wierzchołków w odległości j od źródła. Udowodnijmy teraz pomocniczy lemat.

Lemat 1. *Niech $U_j = T_j - T_{j-1}$ dla $1 \leq j \leq h$. Wtedy:*

$$\mathbb{E}[U_j] \leq \frac{H_{a_j}}{\lambda} + 1.$$

Dowód. Zmienna U_j opisuje czas potrzebny na zainfekowanie wierzchołków z A_j, zakładając, że wszystkie wierzchołki z A_{j-1} są już zainfekowane. Skonstruujmy podgraf G' w taki sposób, by każdy wierzchołek z A_j był połączony dokładnie jedną krawędzią z pewnym wierzchołkiem ze zbioru A_{j-1}. Wtedy proces propagacji na G' jest izomorficzny z tym na grafie gwiazdy S_{a_j}, gdzie $a_j = |A_j|$. Z Twierdzenia 2 wynika, że zmienna U_j jest ograniczona przez całkowity czas infekcji w S_{a_j}. Zgodnie z wcześniejszymi wynikami, jego wartość oczekiwana wynosi co najwyżej $\frac{H_{a_j}}{\lambda} + 1$, co kończy dowód. □

Wróćmy do dowodu twierdzenia. Mamy $T_h = \sum_{j=1}^{h} U_j$ a więc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[T_h] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{h} U_j\Big] &= \sum_{j=1}^{h} \mathbb{E}[U_j] \leq \sum_{j=1}^{h} \frac{H_{a_j}}{\lambda} + 1 \\
&= h + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{h} H_{a_j} \leq h + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{h} 1 + \log(a_j) \\
&= h + \frac{h}{\lambda}\cdot\Big(1 + \sum_{j=1}^{h}\log(a_j)\Big) = h + \frac{h}{\lambda}\cdot\Big(1 + \log\Big(\prod_{j=1}^{h} a_j\Big)\Big) \\
&\leq h + \frac{h}{\lambda}\cdot\Big(1 + \log\Big(\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{h} a_j\Big)\Big) = h + \frac{h}{\lambda}\cdot\Big(1 + \log\Big(\frac{n-1}{h}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

gdzie w linijce pierwszej wykorzystujemy Lemat 1, w drugiej Nierówność 2 a w piątej nierówność między średnimi (4). □

Porównajmy teraz powyższy wynik z wcześniejszymi obserwacjami. Dla rodziny grafów P_n mamy $h = n - 1$. Korzystając z Nierówności 3, otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[Z] \leq (n-1)\Big(1 + \frac{1}{p}\Big).$$

Faktyczna wartość oczekiwana wynosi $\frac{n-1}{p}$, więc oszacowanie jest dość dokładne. Z kolei dla rodziny grafów S_n mamy $h = 1$ oraz $n + 1$ wierzchołków, stąd:

$$\mathbb{E}[Z] \leq 1 + \frac{\log(n) + 1}{\log\big(\frac{1}{1-p}\big)}.$$

Ponownie otrzymujemy zaskakująco dobre przybliżenie. Należy zwrócić uwagę, że zarówno P_n jak i S_n są grafami rzadkimi. Analizując grafy pełnej przekonamy się, że dla grafów gęstych oszacowanie to nie będzie skuteczne.

4.7 Grafy cykliczne

Przejdźmy teraz do grafów cyklicznych. W rozważaniach dla trójkąta, to jest C_3, mogliśmy zauważyć, że cykl w tym grafie sprawiał trudności. W ogólnym przypadku nie jest lepiej. Rozważmy graf C_n. Niech źródłem będzie wierzchołek n. Ustalmy wierzchołek $v \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Niech $a = \min\{v, n-v\}$ oraz $b = \max\{v, n-v\}$. Oczywiście $a \leq b$.

Od źródła do tego wierzchołka są dwie ścieżki: jedna o długości a, druga o długości b. Propagacja rozchodzi się po nich równolegle i niezależnie. Dla $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ połóżmy $N_j \sim \mathrm{NegBin}(j, p)$. Zmienne te są niezależne. Mamy wtedy

$$X_v \sim \min\{N_a, N_b\}.$$

Niech $F_j(t)$ będzie dystrybuantą zmiennej N_j. Z Faktu 2 mamy

$$\mathbb{P}[X_v \leq t] = 1 - (1 - F_a(t)) \cdot (1 - F_b(t)).$$

Nie ma co liczyć na wyznaczenie eleganckiej postaci na PMF czy CDF dla X_v. Postaramy się więc przybliżyć wartość oczekiwaną dla dużych n. Kładziemy $A \sim \mathcal{N}(\mu_a, \sigma_a^2)$, $B \sim \mathcal{N}(\mu_b, \sigma_b^2)$ gdzie

$$\mu_a = \frac{a}{p}, \quad \sigma_a^2 = \frac{aq}{p^2}, \quad \mu_b = \frac{b}{p}, \quad \sigma_b^2 = \frac{bq}{p^2}.$$

Z centralnego twierdzenia granicznego możemy przybliżyć $N_a \approx A$, $N_b \approx B$. Zatem mamy $\mathbb{E}[X_v] \approx \mathbb{E}[\min\{A, B\}]$ oraz

$$\mathbb{E}[\min\{A, B\}] = \mathbb{E}\Big[\frac{A + B - |A - B|}{2}\Big] = \frac{\mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B] - \mathbb{E}[|A - B|]}{2}.$$

Połóżmy $C = A - B$. Korzystając z Faktu 5 mamy $C \sim \mathcal{N}(\mu_a - \mu_b, \sigma_a^2 + \sigma_b^2)$. Oznaczmy $\eta = \mu_a - \mu_b$ oraz $\xi = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$. Potrzebujemy teraz następującego lematu:

Lemat 2. *Niech $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wtedy*

$$\mathbb{E}[|X|] = 2\sigma \cdot \varphi\Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big) + \mu \cdot (2\mathbf{\Phi}\Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big) - 1).$$

Dowód.

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Oznaczmy $c = \frac{\mu}{\sigma}$ oraz podstawmy $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Zatem $x = \mu + \sigma z$, $\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}z$. Dla $x > 0$ mamy $z > -c$ zaś dla $x < 0$ mamy $z < -c$. Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned}
&\int_{-c}^{\infty} (\mu + \sigma z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{-c} (\mu + \sigma z)\varphi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \mu\int_{-c}^{\infty} \varphi(z)\,\mathrm{d}z + \sigma\int_{-c}^{\infty} z\varphi(z)\,\mathrm{d}z - \mu\int_{-\infty}^{-c} \varphi(z)\,\mathrm{d}z - \sigma\int_{-\infty}^{-c} z\varphi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \mu\Big(\int_{-c}^{\infty} \varphi(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{-c} \varphi(z)\,\mathrm{d}z\Big) + \sigma\Big(\int_{-c}^{\infty} z\varphi(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{-c} z\varphi(z)\,\mathrm{d}z\Big) \\
&= \mu\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,\mathrm{d}z - 2\int_{-\infty}^{-c} \varphi(z)\,\mathrm{d}z\Big) + \sigma\Big(- \varphi(z)\big|_{-c}^{\infty} + \varphi(z)\big|_{-\infty}^{-c}\Big) \\
&= \mu \cdot \Big(1 - 2\mathbf{\Phi}(-c)\Big) + \sigma \cdot \Big(- \varphi(\infty) + \varphi(-c) + \varphi(-c) - \varphi(-\infty)\Big) \\
&= \mu \cdot \Big(2\mathbf{\Phi}(c) - 1\Big) + 2\sigma \cdot \varphi(c).
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości $\mathbf{\Phi}(-x) = 1 - \mathbf{\Phi}(x)$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\varphi(\pm\infty) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ oraz $\int x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(x)$. □

Z Lematu 2 dostajemy $\mathbb{E}[C] = 2\xi \cdot \varphi\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) + \eta \cdot (2\mathbf{\Phi}\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) - 1)$. Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_v] &\approx \frac{1}{2}\Big(\mu_a + \mu_b - 2\xi\,\varphi\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) - \eta\Big(2\mathbf{\Phi}\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) - 1\Big)\Big) \\
&= \frac{\mu_a + \mu_b}{2} - \xi\,\varphi\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) - (\mu_a - \mu_b)\Big(\mathbf{\Phi}\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) - \frac{1}{2}\Big) \\
&= \mu_a\Big(1 - \mathbf{\Phi}\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big)\Big) + \mu_b\,\mathbf{\Phi}\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big) - \eta\,\varphi\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big).
\end{aligned}$$

Przenalizujmy teraz zachowanie asymptotyczne otrzymanego wyrażenia. Skoro $a + b = n$ to niech $a = rn$, $b = (1-r)n$ dla pewnego $r \in (0;1)$. Dalej

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mu_a - \mu_b}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}} = \frac{\frac{a}{p} - \frac{b}{p}}{\sqrt{\frac{aq}{p^2} + \frac{bq}{p^2}}} = \frac{(2r-1)\sqrt{n}}{\sqrt{q}}.$$

Musimy rozważyć dwa przypadki. Jeśli $a < b$, co za tym idzie $r < \frac{1}{2}$ to $\frac{\eta}{\xi} \to -\infty$ wraz z $n \to \infty$. Wtedy też $\varphi(\frac{\eta}{\xi}) \to 0$ oraz $\mathbf{\Phi}(\frac{\eta}{\xi}) \to 0$ a więc $\mathbb{E}[X_v] \to \frac{a}{p}$. Zaś gdy $a = b$ to $r = \frac{1}{2}$ jak i $\frac{\eta}{\xi} = 0$. Wiemy, że $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ oraz $\mathbf{\Phi}(0) = \frac{1}{2}$. Wstawiając otrzymamy $\mathbb{E}[X_v] \to \frac{n}{2p} - \frac{\sqrt{np}}{p\sqrt{2\pi}}$. Podsumowując mamy następujący wynik:

$$\mathbb{E}[X_v] \sim \frac{\min\{v, n-v\}}{p}.$$

Jest to całkowicie zgodne z intuicją. Wierzchołki w grafie C_n zachowują się podobnie jak w grafach P_n.

W celu wyznaczenie rozkładu Y_t dokonajmy obserwacji, że gdy dwie drogi zarażania spotkają się to propagacja dobiega końca. Każda z tych dróg jak w przypadku grafu ścieżkowego ma rozkład dwumianowy. Możemy zapisać zatem

$$Y_t \sim \min\{n, 1 + L_t + R_t\}, \quad L_t, R_t \sim \mathrm{Bin}(t, p).$$

Z Faktu 3 mamy $L_t + R_t \sim \mathrm{Bin}(2t, p)$. Widzimy zatem, że rozkład Y_t dla grafu C_n pokrywa się ze zmienną Y_{2t} dla grafów typu P_n. Z wcześniejszego wyniku dla grafów ścieżek dla $n \geq 1 + 2t$ dostajemy

$$\mathbb{E}[Y_t] = 1 + 2tp.$$

Teraz możemy wyznaczyć rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej Z. Dla n parzystego najdalej oddalony wierzchołek od źródła to $\frac{n}{2}$ a dla n nieparzystego to $\lfloor \frac{n \pm 1}{2} \rfloor$. Asymptotycznie nie ma to znaczenia, możemy przyjąć $v = \frac{n}{2}$. Mamy więc $Z = \max_{v \in V} X_v = X_{\frac{n}{2}}$. Stąd intuicyjny wynik

$$\mathbb{E}[Z] \approx \mathbb{E}[X_{\frac{n}{2}}] \approx \frac{n}{2p} - \frac{\sqrt{np}}{p\sqrt{2\pi}}.$$

4.8 Grafy pełne

Graf pełny K_n intuicyjnie powinien mieć najszybszą propagację bo przecież ma maksymalną liczbę krawędzi. Za źródło możemy przyjąć dowolny wierzchołek $s \in V$ ze względu na symetrie. Początkowo rozkład X_v pokrywa się z rozkładem gwiazdy natomiast w każdej kolejnej rundzie mocno się komplikuje. Nie mamy co liczyć na jakiekolwiek sensowne wyznaczenie rozkładu X_v. Podejdźmy do problemu na razie heurystycznie. Zauważmy, że jeśli $Y_1 = a$ to rozkład zmiennej Y_2 wynosi $Y_2 = a + B$ dla $B \sim \mathrm{Bin}(n-a, 1-q^n)$. Zatem

$$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = a] = n \cdot (1 - q^a) + aq^a.$$

Mamy $Y_1 - 1 \sim \mathrm{Bin}(n-1, p)$ oraz $\mathbb{E}[Y_1] = 1 + (n-1)p$. Możemy również założyć, że również $a \approx \mathbb{E}[Y_1]$ a co za tym idzie

$$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = a] \approx n(1 - q^{1+(n-1)p}) + (1 + (n-1)p)q^{1+(n-1)p}.$$

Jeśli $n \to \infty$ to wyrażenie to jest bliskie n. Spodziewamy się zatem, że zaledwie po dwóch rundach cały graf K_n będzie zainfekowany. Możemy więc wysunąć hipotezę: Dla grafu K_n mamy:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[Z] = 2.$$

Postarajmy się ją teraz udowodnić. Żeby to zrobić najpierw wyznaczmy asymptotyke $\mathbb{E}[Y_2]$. Oznaczamy $U = Y_1 = 1 + W$ gdzie $W \sim \mathrm{Bin}(n-1, p)$. Z prawa całkowitej wartości oczekiwanej mamy

$$\mathbb{E}[Y_2] = n \cdot (1 - \mathbb{E}[q^U]) + \mathbb{E}[Uq^U].$$

Musimy wyznaczyć $\mathbb{E}[q^U]$ jak i $\mathbb{E}[Uq^U]$. Korzystając z Faktu 6 dostajemy

$$\mathbb{E}[q^U] = \mathbb{E}[q^{1+W}] = q \cdot \mathbb{E}[q^W] = q(q + pq)^{n-1} = q^n(1+p)^{n-1}.$$

Dla drugiej wartości mamy zaś

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Uq^U] &= \mathbb{E}[(1+W)q^{1+W}] = q(\mathbb{E}[q^W] + \mathbb{E}[Wq^W]) \\
&= q(q^{n-1}(1+p)^{n-1} + (n-1)pq^{n-1}(1+p)^{n-2}) \\
&= q^n(1+p)^{n-2}(1 + p + (n-1)p) = q^n(1+p)^{n-2}(1+np).
\end{aligned}$$

Podstawiając przed chwilą wyrażenia wzory do wzoru na $\mathbb{E}[Y_2]$ dostaniemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_2] &= n - nq^n(1+p)^{n-1} + q^n(1+p)^{n-2}(1+np) = \\
&= n - (n-1)q^n(1+p)^{n-2} = n - (n-1)(1+p)^{-2}(1-p^2)^n.
\end{aligned}$$

Połóżmy $\varepsilon_n = (n-1)(1+p)^{-2}(1-p^2)^n$. Wtedy $\mathbb{E}[Y_2] = n - \varepsilon_n$. Z nierówności Markova (5) otrzymujemy $\mathbb{P}[Z \geq 3] = \mathbb{P}[n - Y_2 \geq 1] \leq \mathbb{E}[n - Y_2] = \varepsilon_n$. Dalej zauważmy, że $\mathbb{P}[Z = 1] = p^{n-1}$ bo wszystkie próby zarażenia w rundzie pierwszej musiałby by się powieść. Ograniczmy teraz z dwóch stron $\mathbb{E}[Z]$. Z dołu mamy

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Z \geq k] \geq \mathbb{P}[Z \geq 1] + \mathbb{P}[Z \geq 2] = 1 + 1 - p^{n-1} = 2 - p^{n-1}.$$

Zajmijmy się teraz oszacowaniem górnym. Zauważmy, że graf K_n zawiera P_n jako podgraf. Ustalmy jeden z tych podgrafów. Niech Z' będzie zmienną losową czasu całkowitego zarażenia dla tego podgrafu. Z Twierdzenia 2 mamy $Z \leq Z'$ a co za tym idzie $\mathbb{E}[Z^2] \leq \mathbb{E}[(Z')^2]$. Przypomnijmy, że $Z' \sim \mathrm{NegBin}(n-1, p)$ a więc $\mathbb{E}[(Z')^2] = \frac{(n-1)^2 + (n-1)q}{p^2}$. Wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Z \geq k] = \mathbb{P}[Z \geq 1] + \mathbb{P}[Z \geq 2] + \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{P}[Z \geq k] \\
&= 1 + 1 - p^{n-1} + \mathbb{E}[Z \cdot \mathbf{1}_{Z \geq 3}] \leq 2 - p^{n-1} + \sqrt{\mathbb{E}[Z^2]}\sqrt{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Z \geq 3}]} \\
&\leq 2 - p^{n-1} + \sqrt{\mathbb{E}[(Z')^2]}\sqrt{\mathbb{P}[Z \geq 3]} \\
&\leq 2 - p^{n-1} + \sqrt{\frac{(n-1)^2 + (n-1)q}{p^2}}\sqrt{\varepsilon_n}.
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy nierówność Cauchy'ego-Schwarza (6). Ostatecznie dostajemy

$$2 - p^{n-1} \leq \mathbb{E}[Z] \leq 2 - p^{n-1} + \sqrt{\frac{(n-1)^2 + (n-1)q}{p^2}}\sqrt{\varepsilon_n},$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z] = 2.$$

Jeżeli zaledwie po dwóch rundach cały graf jest poinformowany to rozkłady X_v czy Y_t nie są dla nas istotne. Spójrzmy jeszcze na oszacowanie, które otrzymamy stosując Twierdzenie 3 dla grafu pełnego. Wynosi ono

$$1 + \frac{\log(n-1)+1}{\log(\frac{1}{1-p})}.$$

Ograniczenie to zdaje się nie być za dobre czego przyczyną jest zapewne fakt, że K_n jest grafem gęstym.

4.9 Drzewa

Rozważmy drzewo $G = (V, E)$ oraz ustalony wierzchołek początkowy $s \in V$, który traktujemy jako korzeń drzewa. Dla $v \in V$ oznaczmy $d_v = \mathrm{d}(s, v)$. Ustalmy $v \in V$. Skoro G jest drzewem to istnieje dokładnie jedna ścieżka od s do v, powiedzmy $s, v_1, \ldots, v_k, v$. Ponieważ infekcja rozprzestrzenia się od korzenia s wzdłuż krawędzi drzewa, każde zakażenie wymaga sukcesu w niezależnym doświadczeniu Bernoulliego o prawdopodobieństwie p. W konsekwencji, aby infekcja dotarła z s do v, musi wystąpić d_v kolejnych sukcesów. Zatem rozkład X_v pokrywa się z rozkładem tej zmiennej dla grafu P_{d_v+1} na wierzchołkach $\{s, v_1, \ldots, v_k, v\}$. Stąd

$$X_v \sim \mathrm{NegBin}(\mathrm{d}_v, p),$$

oraz

$$\mathbb{E}[X_v] = \frac{\mathrm{d}_v}{p}.$$

Lemat 3. *Dla dowolnego $t \in \mathbb{N}$ wartość oczekiwana zmiennej Y_t wyraża się wzorem*

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{v\in V} \mathbb{P}[X_v \leq t].$$

Dowód. Mamy $Y_t = |\{v \in V : X_v \leq t\}|$ zatem $Y_t = \sum_{v\in V} \mathbf{1}_{\{X_v \leq t\}}$. Nakładając na tą równość operator $\mathbb{E}$ otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}\Big[\sum_{v\in V} \mathbf{1}_{\{X_v\leq t\}}\Big] = \sum_{v\in V} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_v\leq t\}}] = \sum_{v\in V} \mathbb{P}[X_v \leq t].$$

□

Przejdźmy teraz to obliczania średniej liczby zainfekowanych wierzchołków w czasie t. Oznaczmy przez $F(t; m, p)$ dystrybuante zmiennej o rozkładzie $\mathrm{NegBin}(m, p)$. Z Lematu 3 otrzymujemy

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{v\in V} F(t; d_v, p).$$

Połóżmy $a_j = |\{v \in V : d_v = j\}|$ dla $0 \leq j \leq h$. Wtedy

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{j=0}^{h} a_j \cdot F(t; j, p).$$

Ponadto gdy $t < j \leq h$ to $F(t; j, p)$, bo żaden wierzchołek w odległości od korzenia większej niż liczba rund nie może zostać zarażony. Możemy więc zmniejszyć granice sumowania

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{j=0}^{\min\{h,t\}} a_j \cdot F(t; j, p).$$

Oszacujmy teraz średni czas całkowity czas propagacji drzewa. Niech $L = \{u_1, \ldots, u_m\}$ będzie zbiorem liści w G. Wtedy mamy $Z = \max_{u \in L} X_u$. Zauważmy, że $\epsilon(s) = \max_{u \in L} \mathrm{d}_u$ i jest to wysokość drzewa. Oznaczmy ją przez h. Z nierówności Jensena (7) otrzymujemy

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\max_{u \in L} X_u] \geq \max_{u \in L} \mathbb{E}[X_u] = \max_{u \in L} \frac{\mathrm{d}_u}{p} = \frac{h}{p}.$$

Aby ograniczyć $\mathbb{E}[Z]$ z góry skorzystamy z Twierdzenia 3:

$$\mathbb{E}[Z] \leq h + h \cdot \frac{\log(\frac{n-1}{h}) + 1}{\log(\frac{1}{1-p})}.$$

Ograniczenia te są różnych rzędów wielkości. Jednakże nie da się ich poprawić dla ogólnego drzewa znając tylko liczbę jego wierzchołków i wysokość. Ustalmy $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $h \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ i poszukajmy drzew o n wierzchołkach i wysokości h osiągających zarówno dolne jak i górne ograniczenie na $\mathbb{E}[Z]$. Dla dolnej nierówności możemy wziąć drzewo składające się ze ścieżki długości h oraz $n-1-h$ liści bezpośrednio przy korzeniu. Wtedy $\mathbb{E}[Z] \approx \frac{h}{p}$. Aby znaleźć drzewo osiągające górne ograniczenie musimy wrócić do dowodu Twierdzenia 3. Udowadniając granicę na wartość oczekiwaną korzystamy z trzech nierówności. Pierwsza z nich to Nierówność 2. Jest ona bardzo ciasna a ponadto nie zależy od grafu. Druga z nich to nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną (4). Aby uzyskać równość potrzebujemy mieć $a_1 = \cdots = a_h$. Czyli innymi słowy, nasze drzewo ma tyle samo węzłów na każdej głębokości. Połóżmy $a_1 = b$. Wtedy $hb = n-1$ a więc $b = \lfloor \frac{n-1}{h} \rfloor$. Na koniec zostaje nierówność wynikająca z Lematu 1. Sam lemat daje nierówność, której nie da się poprawić, co wiemy poprzez analize dla grafów gwiazd. Lecz dla drzewa będzie ona najmniej luźna, jeżeli każdy wierzchołek w warstwie A_j będzie miał dokładnie jedną krawędź łączącą go z wierzchołkiem w warstwie A_{j+1}, gdzie $0 \leq j \leq h-1$. Zatem drzewo składa się z korzenia oraz b rozłącznych ścieżek, każda o długości h. I taki graf osiąga ograniczenie górne na $\mathbb{E}[Z]$. Widzimy zatem, że nasze ograniczenia nie są do poprawienia bez dodatkowych parametrów grafu. Podsumowując możemy następująco szacować przewidywany czas całkowitego poinformowania drzewa o wysokości h:

$$\frac{h}{p} \leq \mathbb{E}[Z] \leq h + h \cdot \frac{\log(\frac{n-1}{h}) + 1}{\log(\frac{1}{1-p})}.$$

4.10 Eksperymenty

Przeprowadzimy teraz serie symulacji w celu sprawdzenia, czy rzeczywiście wyniki teoretyczne pokrywają się z praktycznymi. Dla wszystkich symulacji ustalmy $p = 0.2$. Rozkłady zmiennej Y_t oraz Z będziemy ustalać dla grafów mających 100 wierzchołków. Dla

Y_t będziemy wybierać t zależne od konkretnej rodziny. Wartość oczekiwaną Z będziemy wyznaczać dla liczby wierzchołków należących do $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Korzystamy z Algorytm 1

Na początku oczywiście analizujemy grafy ścieżkowe. Dla tej rodziny zmienna Y_t zachowuje się inaczej jeśli $t < n$ a inaczej gdy $t \geq n$. Przewidywany czas całkowitej infekcji to $\frac{n}{p}$. Wyznaczmy zatem rozkład dla wartości $t = r \cdot \frac{n}{p}$ dla $r \in \{0.1, 0.5, 0.8, 0.9\}$. Widzimy, że rozkłady są sa coraz bardziej skoncentrowane na lewo, zgodnie z przewidywaniami (patrz Wykres 1). Nie będziemy już wyznaczać wartości oczekiwanej Y_t. Dla Z sprawa jest prosta. Rozkład i wartość oczekiwana przedstawiono na Wykresie 2.

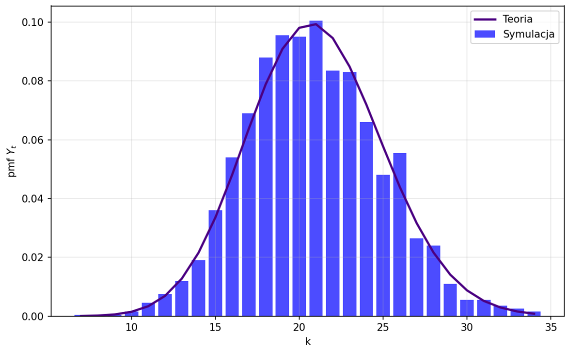
Teraz przyjrzyjmy się grafom S_n. Dla rozkładu Y_t ustalmy $t = \lfloor \frac{\log(n)}{2p} \rfloor$. Widzimy, że wyniki niemal idealnie pokrywają się z oczekiwaniami teoretycznymi dla grafów gwiezdnych. (patrz Wykres 3). Również wartości $\mathbb{E}[Z]$ są zbliżone to teoretycznej asymptotyki, to jest $\frac{H_n}{\lambda}$, $\lambda = \log(\frac{1}{1-p})$ (Wykres 4).

Następnie popatrzmy na grafy cykliczne. Skoro zachowują się one podobnie do grafów ścieżkowych to zasymulujemy jedynie wartości oczekiwane zmiennej Y_t dla $t = 0.4\frac{n}{p}$ oraz Z. Wyniki te przedstawiono na Wykresie 5.

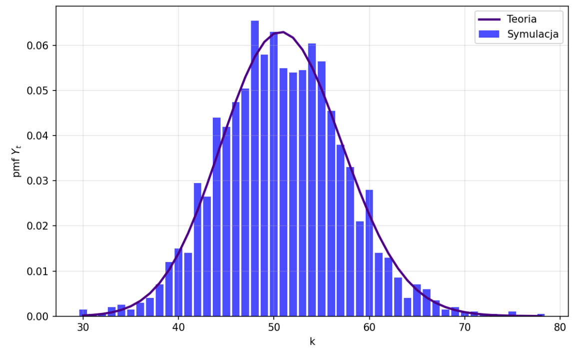
Na sam koniec popatrzmy na grafy pełnie. Wartość $\mathbb{E}[Z]$ powinna wraz z rozmiarem grafu zbiegać do liczby 2. Aby się upewnić, że na pewno tak jest sprawdźmy to dla $p \in \{0.2, 0.1\}$. Jak widać na Wykresie 6 rzeczywiście dla wiekszych n czas całkowitego poinformowania grafu zbiega do 2.

Algorithm 1 SI Propagation

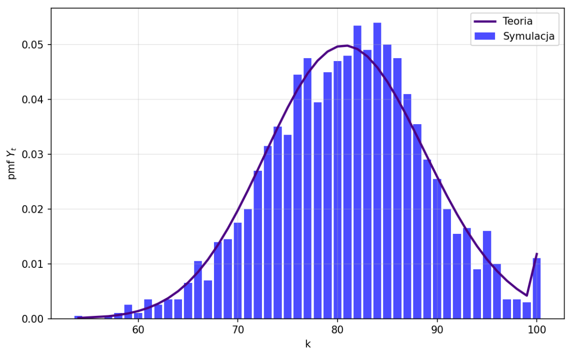
Input: Graph $G = (V, E)$, infection probability p, source $s \in V$
Output: Sets of infected vertices $(\mathcal{I}_t)$ and final time Z
$\mathcal{I}_0 \leftarrow \{s\}$
$t \leftarrow 0$
while $|\mathcal{I}_t| < |V|$ **do**
    $\mathcal{I}_{\text{new}} \leftarrow \varnothing$
    for each $u \in \mathcal{I}_t$ **do**
        for each $v \in N(u)$ **do**
            if $v \notin \mathcal{I}_t$ **and** random() $< p$ **then**
                $\mathcal{I}_{\text{new}} \leftarrow \mathcal{I}_{\text{new}} \cup \{v\}$
            end if
        end for
    end for
    $\mathcal{I}_{t+1} \leftarrow \mathcal{I}_t \cup \mathcal{I}_{\text{new}}$
    $t \leftarrow t + 1$
end while
$Z \leftarrow t$
return $(\mathcal{I}_t)$, Z



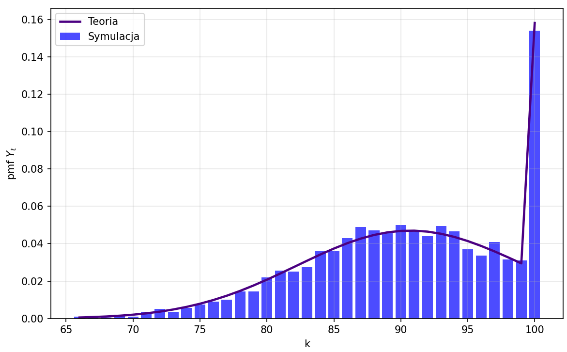
(a) $t = 0.1\frac{n}{p}$.



(b) $t = 0.5\frac{n}{p}$.

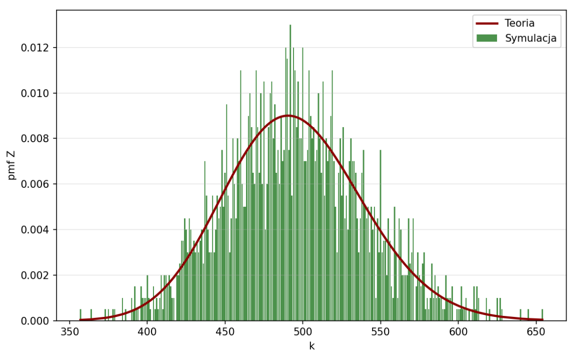


(c) $t = 0.8\frac{n}{p}$.

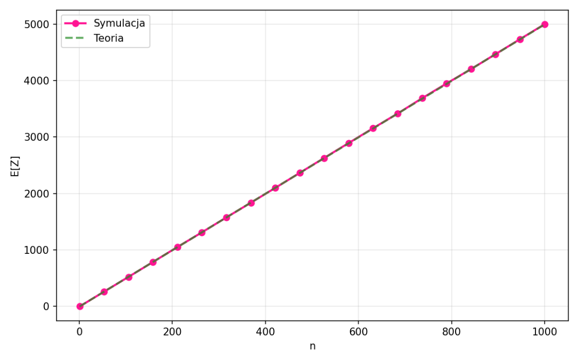


(d) $t = 0.9\frac{n}{p}$.

Rysunek 1: Rozkład zmiennej Y_t dla P_n.

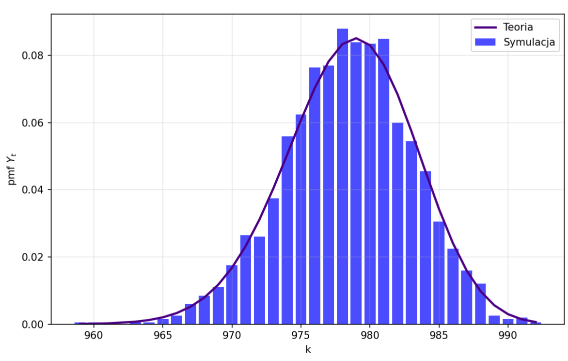


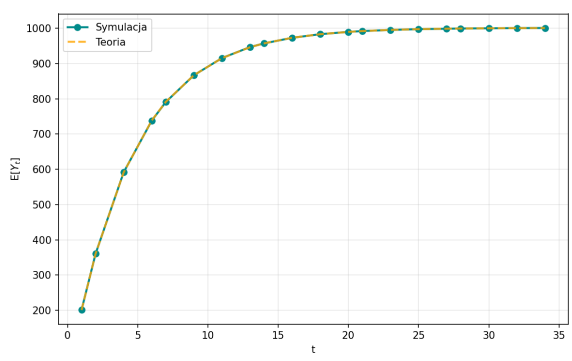
(a) Rozkład zmiennej Z.



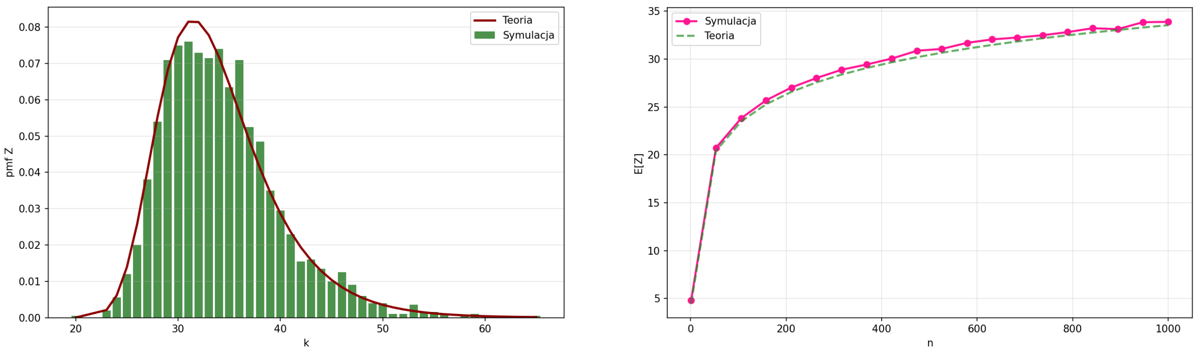
(b) Wartość oczekiwana Z.

Rysunek 2: Rozkład i wartość oczekiwana zmiennej Z dla P_n.

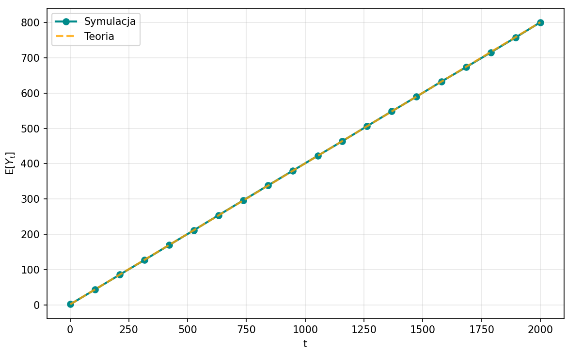




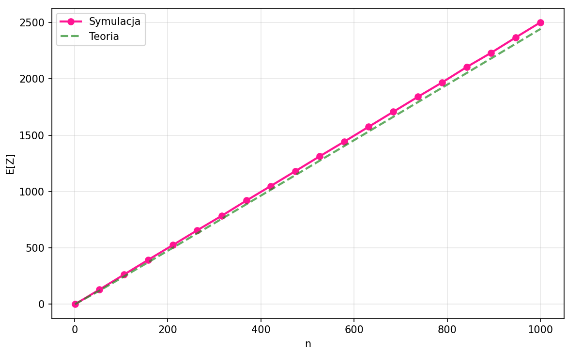
Rysunek 3: Rozkład i wartość oczekiwana zmiennej Y_t dla S_n.



Rysunek 4: Rozkład i wartość oczekiwana zmiennej Z dla S_n.

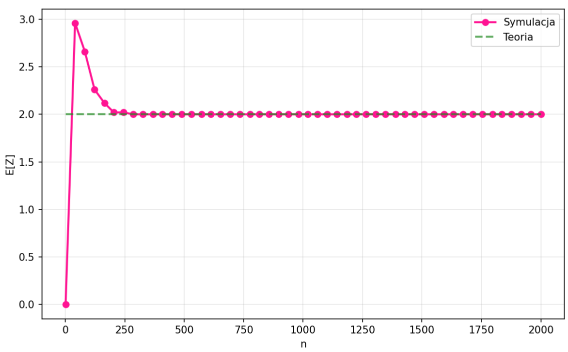


(a) $\mathbb{E}[Y_t]$.

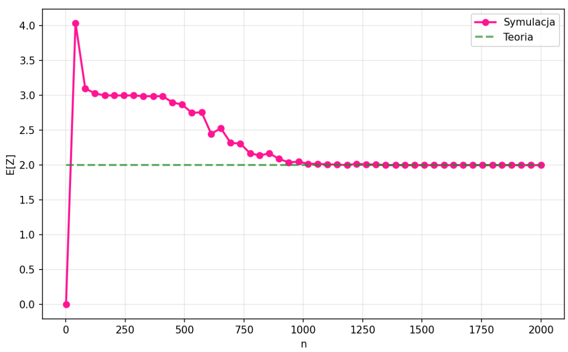


(b) $\mathbb{E}[Z]$.

Rysunek 5: Wartości oczekiwane zmiennych Y_t oraz Z dla C_n.



(a) $p = 0.2$.



(b) $p = 0.1$.

Rysunek 6: Wartości oczekiwane Z dla $\mathrm{K_n}$.

Rozdział 5

Rozkłady wymierające

W celu ułatwienia analizy modeli **SIR** oraz **SIS** wprowadzimy nowe rozkłady prawdopodobieństwa uwzgledniajace możliwość przerwania propagacji. Te zmienne losowe będą przyjmować wartość nieskończoność w sytuacji, w której nastąpi przerwanie przed pożądanym rezultatem. Jako że nastepuje to z dodatnim prawdopodobieństwem, $\mathbb{P}[X = \infty] > 0$, to ich wartości oczekiwane wynosić będą nieskończoność, $\mathbb{E}[X] = \infty$. Interesować nas więc bedzie wartość oczekiwana warunkowa przy warunku, że wartość zmiennej losowej jest skończona a więc $\mathbb{E}[X|X < \infty]$.

5.1 Rozkład umierający geometryczny

Rozkład umierający geometryczny jest wariantem rozkładu geometrycznego, w którym proces może zostać przerwany z prawdopodobieństwem $\alpha \in (0; 1)$ po każdej próbie. Zmienna X ma rozkład umierający geometryczny, jeżeli opisuje liczbę prób Bernoulliego potrzebnych do uzyskania pierwszego sukcesu w przypadku, w którym sukces nastąpi przed przetrwaniem eksperymentu. Jeśli natomiast proces zostanie zabity szybciej niż pierwsza porażka to wtedy $X = \infty$. Dla wygody oznaczmy $q = 1-p$, $\beta = 1-\alpha$. Aby sukces nastąpił po k rundach to potrzebujemy $k-1$ niepowodzeń próby jak i jej przerwania a następnie sukcesu. A zatem

$$\mathbb{P}[X = k] = p(q\beta)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

Dystrybuanta jest więc równa:

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \sum_{k=0}^{t} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{t} p(q\beta)^{k-1} = p\frac{1-(q\beta)^t}{1-q\beta}.$$

Ponadto

$$\mathbb{P}[X < \infty] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{\infty} p(q\beta)^{k-1} = \frac{p}{1-q\beta}.$$

Suma wszystkich prawdopodobieństw wynosi 1. A więc

$$\mathbb{P}[X = \infty] = 1 - \frac{p}{1-q\beta} = \frac{q\alpha}{1-q\beta}.$$

Wartość oczekiwana wynosi nieskończoność. Natomiast

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|X < \infty] &= \frac{1}{\mathbb{P}[X < \infty]} \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \mathbb{P}[X_v = t] = \frac{1-q\beta}{p} \sum_{t=1}^{\infty} t(q\beta)^{t-1}p \\ &= (1-q\beta) \cdot \frac{1}{(1-q\beta)^2} = \frac{1}{1-q\beta}.\end{aligned}$$

Oznaczamy $X \sim \text{KGeo}(p, \alpha)$.

5.2 Rozkład umierający dwumianowy

Rozkład umierający dwumianowy jest wariantem rozkładu dwumianowego, w którym doświadczenia mogą zostać przerwane z prawdopodobieństwem $\alpha \in (0; 1)$ po każdej próbie. Zmienna X ma rozkład umierający dwumianowy, jeżeli opisuje liczbę sukcesów podczas n prób Bernoulliego, gdzie po każdej próbie proces doświadczeń może zostać zabity. Dla wygody oznaczmy $q = 1 - p$, $\beta = 1 - \alpha$. Niech F będzie zmienną określającą czas porażki. Dla $1 \leq j \leq n-1$ mamy $\mathbb{P}[F = j] = \alpha\beta^{j-1}$ oraz $\mathbb{P}[F = n] = \beta^{n-1}$. Jeśli proces zostanie zabity po j rundach to wtedy X ma rozkład $\text{Bin}(j, p)$. A zatem korzystając z prawdopodobieństwa całkowitego dla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = k] &= \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}[X = k | F = j] \cdot \mathbb{P}[F = j] = \\
&= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \beta^{n-1} + \alpha \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k} p^k q^{j-k} \beta^{j-1}.
\end{aligned}$$

Dalej mamy $\mathbb{E}[X|F = j] = jp$ oraz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F] &= \sum_{j=1}^{n} j \cdot \mathbb{P}[F = j] = n\beta^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} j\alpha\beta^{j-1} = \\
&= n\beta^{n-1} + \alpha \frac{1 - n\beta^{n-1} + (n-1)\beta^n}{(1-\beta)^2} = \\
&= \frac{1}{\alpha}(n\alpha\beta^{n-1} + 1 - n\beta^{n-1} + n\beta^n - \beta^n) = \\
&= \frac{1}{\alpha}(1 - \beta^n + n\beta^{n-1}(\alpha + \beta - 1)) = \frac{1 - \beta^n}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Z prawa całkowitej wartości oczekiwanej mamy

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|F]] = p\mathbb{E}[F] = \frac{p}{\alpha}(1 - \beta^n).$$

Oznaczamy $X \sim \text{KBin}(n, p, \alpha)$.

5.3 Rozkład umierający ujemny dwumianowy

Rozkład umierający ujemny dwumianowy jest wariantem rozkładu ujemnego dwumianowego, w którym doświadczenia mogą zostać przerwane z prawdopodobieństwem $\alpha \in (0; 1)$ po każdej próbie. Zmienna X ma rozkład umierający ujemny dwumianowy, jeżeli opisuje liczbę prób Bernoulliego potrzebnych do uzyskania m sukcesów próbach Bernoulliego, gdzie po każdej próbie proces może się zakończyć. Jeśli proces zostanie zabity szybciej niż zajdzie m sukcesów to przyjmujemy $X = \infty$. Dla wygody oznaczmy $q = 1 - p$, $\beta = 1 - \alpha$. Alternatywnie istnieją niezależne zmienne $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \sim \text{KGeo}(p, \alpha)$ takie, że $X = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_m$. Aby wyznaczyć rozkład X ustalmy $k \geq m$ i niech

$K = \{\mathbf{y} \in \mathbb{N}_+^m : y_1 + \cdots + y_m = k\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = k] &= \sum_{\mathbf{y}\in K} \mathbb{P}[Y_1 = y_1, \ldots, Y_m = y_m] = \sum_{\mathbf{y}\in K} \prod_{j=1}^{m} \mathbb{P}[Y_j = y_j] \\
&= \sum_{\mathbf{y}\in K} \prod_{j=1}^{m} p(q\beta)^{y_j - 1} = \sum_{\mathbf{y}\in K} p^m (q\beta)^{y_1+\cdots+y_m - m} \\
&= \sum_{\mathbf{y}\in K} p^m (q\beta)^{k-m} = |K| \cdot p^m (q\beta)^{k-m}.
\end{aligned}$$

Łatwym kombinatorycznym argumentem można pokazać, że $|K| = \binom{k-1}{m-1}$. Zatem

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{m-1} p^m (q\beta)^{k-m}, \quad k \geq m.$$

Dalej mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X < \infty] &= \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} p^m (q\beta)^{k-m} = \\
&= p^m (q\beta)^{-m} \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} (q\beta)^k = p^m (q\beta)^{-m} \frac{(q\beta)^m}{(1-q\beta)^m} \\
&= \frac{p^m}{(1-q\beta)^m}.
\end{aligned}$$

co daje nam

$$\mathbb{P}[X = \infty] = 1 - \frac{p^m}{(1-q\beta)^m}.$$

Jeśli chodzi o wartość oczekiwaną to

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X | X < \infty] &= \frac{1}{\mathbb{P}[X < \infty]} \sum_{k=m}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[X = k] \\
&= \frac{(1-q\beta)^m}{p^m} \sum_{k=m}^{\infty} k \binom{k-1}{m-1} p^m (q\beta)^{k-m} = \\
&= \frac{(1-q\beta)^m}{(q\beta)^m} \sum_{k=m}^{\infty} k \binom{k-1}{m-1} (q\beta)^k = \\
&= \frac{(1-q\beta)^m}{(q\beta)^m} \cdot \frac{m(q\beta)^m}{(1-q\beta)^{m+1}} = \frac{m}{1-q\beta}.
\end{aligned}$$

Oznaczamy $X \sim \mathrm{KNegBin}(m, p, \alpha)$.

Rozdział 6

Analiza modelu SIR

6.1 Dwa wierzchołki, jedna krawędź

W celu oswojenia się z bardziej skomplikowanym modelem, jakim jest **SIR**, przeanalizujmy graf o jednej krawędzi. Niech $V = \{u, v\}$ oraz niech u będzie wierzchołkiem startowym. Oczywiście $X_u = 0$. Pierwsza runda jest identyczna jak w modelu **SI**, a więc $\mathbb{P}[X_v = 1] = p$. Jeżeli węzeł v nie zostanie poinformowany w rundzie pierwszej, a propagacja nie wygaśnie, to sytuacja się powtórzy. Zachodzi to z prawdopodobieństwem $q\beta$. Aby $X_v = t$, potrzebujemy, by ten cykl nastąpił $t-1$ razy. Widzimy zatem, że X_v ma rozkład umierający geometryczny,

$$X_v \sim \mathrm{KGeo}(p, \alpha),$$

a co za tym idzie

$$\mathbb{E}[X_v | X_v < \infty] = \frac{1}{1 - q\beta}.$$

Z założeń modelu $p, \alpha \in (0; 1)$, a zatem $\mathbb{P}[X_v = \infty] \neq 0$. Jest cecha kontrastująca **SIR** względem **SI**.

Przyjrzyjmy się teraz zmiennej Y_t. Zauważmy, że $\mathbb{P}[Y_t = 2] = \mathbb{P}[X_v \leq t]$ a więc

$$\mathbb{P}[Y_t = 2] = \sum_{k=1}^{t} p(q\beta)^{k-1} = p\frac{1 - q^t\beta^t}{1 - q\beta}, \quad \mathbb{P}[Y_t = 1] = 1 - p\frac{1 - q^t\beta^t}{1 - q\beta}.$$

Stąd

$$\mathbb{E}[Y_t] = 1 + p\frac{1 - q^t\beta^t}{1 - q\beta}.$$

Przechodząc w granicę $t \to \infty$ dostajemy

$$\mathbb{P}[W = 1] = 1 - \frac{p}{1 - q\beta}, \quad \mathbb{P}[W = 2] = \frac{p}{1 - q\beta}.$$

Co oczywiście daje nam natychmiast

$$\mathbb{E}[W] = 1 + \frac{p}{1 - q\beta}.$$

Jeśli chodzi o zmienną Z to propagacja zakończy się gdy wierzchołek v wyzdrowieje lub u zostanie poinformowany. Dzieje się to z prawdopodobieństwem $1 - q\beta$ a więc

$$Z \sim \mathrm{Geo}(1 - q\beta).$$

Mamy

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{1 - q\beta}.$$

6.2 Pewne wygaśnięcie

W modelu **SIR** wygaśnięcie infekcji jest zdarzeniem pewnym. Sformalizujmy ten fakt prostym twierdzeniem.

Twierdzenie 4. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, $s \in V$ źródłem infekcji oraz $v \in V \setminus \{s\}$. Wtedy zachodzą następujące tożsamości:*

$$\mathbb{P}[X_v = \infty] > 0, \quad \mathbb{P}[Z < \infty] = 1.$$

Ponadto dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbb{P}[W = k] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[Y_t = k], \quad \mathbb{E}[W] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t].$$

Dowód. Ustalmy $v \in V \setminus \{s\}$. Jeśli po pierwszej rundzie źródło wyzdrowieje i nie przekaże dalej infekcji to $X_v = \infty$. Zatem $\mathbb{P}[X_v = \infty] \geq \alpha q > 0$. Jeśli rozważamy propagacje jako łańcuch Markova to prawdopodobieństwo przejścia do stanu absorbującego, czyli $\mathcal{I}_t = \varnothing$, w czasie t wynosi

$$\alpha^{|\mathcal{I}_t|} \prod_{u\in\mathcal{I}_t} q^{|\mathrm{N}(u)\cap\mathcal{S}_t|}.$$

Istotne jest to, że jest to dodatnia liczba. A więc z **??** mamy $\mathbb{P}[Z < \infty] = 1$. Zauważmy, że

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{1}_{v\in\mathcal{I}_t\cup\mathcal{R}_t} \xrightarrow{\text{a.s}} \mathbf{1}_{X_v<\infty}.$$

Ponadto $Y_t \leq Y_{t+1}$ oraz $Y_t \leq |V|$. A więc z Twierdzenia Lebesgue dostajemy wzory na rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej W. □

6.3 Grafy ścieżkowe

Przyjrzyjmy się teraz grafom P_n. Oczywiście za źródło propagacji wybieramy wierzchołek $s = 1$. Podobnie jak w modelu **SI** propagacja rozchodzi się miedzy kolejnymi wierzchołkami niezależnie a więc

$$X_1 = 0, \quad X_v = X_{v-1} + U_v, \quad v \in \{2, 3, \dots, n\},$$

gdzie jednak $U_2, U_3, \dots, U_n \sim \mathrm{KGeo}(p, \alpha)$ oraz są niezależne. Stąd $X_v = U_2 + U_3 + \cdots + U_v$ a zatem X_v ma rozkład umierający ujemny dwumianowy:

$$X_v \sim \mathrm{KNegBin}(v - 1, p, \alpha),$$

oraz

$$\mathbb{E}[X_v | X_v < \infty] = \frac{v-1}{1-q\beta}.$$

Jeśli chodzi o zmienną Y_t to zauważmy, że

$$Y_t = \max\{j \in \{1, 2, \dots, n\} : X_j \leq t\}.$$

A więc dla $k > 0$ mamy

$$\mathbb{P}[Y_t \geq k + 1] = \mathbb{P}[X_k \leq t] = \sum_{j=k}^{t} \binom{j-1}{k-1} p^k (q\beta)^{j-k}.$$

Dalej mamy

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[Y_t \geq k+1] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{t} \binom{j-1}{k-1} p^k (q\beta)^{j-k}.$$

Nie ma zbytniej nadziei na zwartą formę tej sumy. Przejdźmy teraz do zmiennej W.

$$\mathbb{P}[W \geq k+1] = \lim_{t\to\infty} \sum_{j=k}^{t} \binom{j-1}{k-1} p^k (q\beta)^{j-k} = \left(\frac{p}{1-q\beta}\right)^k.$$

Oznaczmy $\tau = \frac{p}{1-q\beta}$. Wtedy

$$\mathbb{P}[W = k] = (1-\tau)\tau^{k-1}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad \mathbb{P}[W = n] = \tau^{n-1}.$$

Ponadto

$$\mathbb{E}[W] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[W \geq k+1] = \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k = \frac{1-\tau^n}{1-\tau}.$$

Skoncentrujmy naszą uwagę na zmiennej Z. Niech T_j oznacza czas przejścia ze stanu w którym wierzchołek j został dopiero co zainfekowany do kolejnego stanu, gdzie $j \in V$. Formalnie $T_j = \min\{t \in \mathbb{N} : i = X_j \wedge \neg(j \in \mathcal{I}_{t+i} \wedge j+1 \in \mathcal{S}_{t+i})\}$. Wtedy $T_j \sim \mathrm{Geo}(1-q\beta)$, a ponadto $T_1, T_2, \ldots$ są niezależne. Niech $G_j(z) = \mathbb{E}[z^{T_j}]$. Mamy

$$G_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-q\beta)(q\beta)^{k-1} z^k = \frac{(1-q\beta)z}{1-q\beta z}.$$

Zauważmy, że $Z = T_1 + T_2 + \cdots + T_W$. A zatem

$$\mathbb{E}[z^Z] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}[W = k] \cdot G_k(z).$$

Funkcja generująca prawdopodobieństwo determinuje rozkład Z. Natomiast wartość oczekiwana wynosi

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[W] \cdot \mathbb{E}[T_1] = \frac{1-\tau^n}{1-\tau} \cdot \frac{1}{1-q\beta} = \frac{1-\tau^n}{\frac{q\alpha}{1-q\beta}} \cdot \frac{1}{1-q\beta} = \frac{1-\tau^n}{q\alpha}.$$

6.4 Grafy gwiezdne

Rozpatrzmy propagacje na rodzinie S_n, gdzie źródłem jest wierzchołek 0. Dla $v \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy

$$X_v \sim \mathrm{KGeo}(p, \alpha),$$

a co za tym idzie

$$\mathbb{E}[X_v | X_v < \infty] = \frac{1}{1-q\beta}.$$

Zauważmy natomiast, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sa zależne, bo gdy centralny wierzchołek wyzdrowieje żaden z liści nie może już zostać zainfekowany.

Przyjrzyjmy się teraz zmiennej Y_t. Połóżmy $C = \min\{\tau \in \mathbb{N} : 0 \in \mathcal{R}_\tau\}$. Jeśli centrum zarazi się po j rundach to liście gwiazdy mogą byc zarażane przez $\min\{j, t\}$ rund. Y_t

zachowuje się tak samo jak w modelu **SI** dla grafów gwiezdnych. Przypomnijmy, że rozkład ten wynosi $1 + B_{j,t}$ gdzie $B_{j,t} \sim \mathrm{Bin}(n, 1 - q^{\min\{j,t\}})$. A więc

$$\mathbb{P}[Y_t = k+1 | C = j] = \binom{n}{k}(1 - q^{\min\{j,t\}})(q^{\min\{j,t\}})^{n-k}.$$

Ponadto $C \sim \mathrm{Geo}(\alpha)$ a więc $\mathbb{P}[C = j] = \alpha\beta^{j-1}$. Z prawdopodobieństwa całkowitego dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_t = k+1] &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[Y_t = k+1 | C = j] \cdot \mathbb{P}[C = j] = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \binom{n}{k}(1 - q^{\min\{j,t\}})^k (q^{\min\{j,t\}})^{n-k} \alpha\beta^{j-1} = \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{\infty}(1 - q^{\min\{j,t\}})^k (q^{\min\{j,t\}})^{n-k}\beta^j.\end{aligned}$$

Aby obliczyć wartość oczekiwana skorzystamy z Lematu 3. Mamy $\mathbb{P}[X_0 \le t] = 1$ a dla $v \neq 0$ mamy $\mathbb{P}[X_v \le t] = p\frac{1-(q\beta)^t}{1-q\beta}$. A więc

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{v \in V} \mathbb{P}[X_v \le t] = 1 + np\frac{1 - (q\beta)^t}{1 - q\beta}.$$

Licząc granice tych wyrażeń dla $t \to \infty$ dostajemy

$$\mathbb{P}[W = k+1] = \frac{\alpha}{\beta}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{\infty}(1 - q^j)^k (q^j)^{n-k}\beta^j.$$

oraz

$$\mathbb{E}[W] = 1 + \frac{np}{1 - q\beta}.$$

Propagacja się zakończy gdy centrum wyzdrowieje lub wszystkie liście zostaną zarażone. Stąd mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z > t] &= \mathbb{P}[C > t] \cdot \mathbb{P}[Y_t < n+1 | C > t] = \\ &= \beta^t(1 - \mathbb{P}[Y_t = n+1 | C > t]) = \beta^t(1 - (1 - q^t)^n).\end{aligned}$$

Bezpośrednie liczenie wartości oczekiwanej zmiennej Z nie da nam zwięzłej postaci. Postarajmy się ją za to oszacować korzystając z Nierówności 1. Oznaczmy $a = -\log(q)$, $b = -\log(\beta)$ oraz $g(x) = e^{-bx}(1 - (1 - e^{-ax})^n)$. Wtedy

$$\mathbb{E}[Z] \approx \int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dalej

$$\int_0^{\infty} e^{-bx}(1 - (1 - e^{-ax})^n)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{-bx}\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} e^{-bx}(1 - e^{-ax})^n \mathrm{d}x.$$

Wartość pierwszej całki wynosi $\frac{1}{b}$. Aby policzyć drugą podstawmy $u = 1 - e^{-ax}$. Oczywiście $u(0) = 0$, $u(\infty) = 1$. Wtedy też $x = -\frac{1}{a}\log(1-u)$ oraz $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\mathrm{d}u$. Mamy zatem $e^{-bx} = (1-u)^{\frac{b}{a}}$, $e^{ax} = \frac{1}{1-u}$. A więc całka wynosi

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\int_0^1 u^n(1-u)^{\frac{b}{a}-1}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{a}\mathrm{B}\Big(n+1, \frac{b}{a}\Big) = \frac{1}{a}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{b}{a})}{\Gamma(n+1+\frac{b}{a})} \\ &= \frac{n!}{a} \cdot \frac{\Gamma(\frac{b}{a})}{(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})\dots(\frac{b}{a})\Gamma(\frac{b}{a})} = \frac{n!}{b} \cdot \frac{1}{(\frac{b}{a}+1)_n}.\end{aligned}$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją Gamma, $\mathrm{B}(x,y)$ jest funkcją Beta oraz $(x)_n = x(x+1)\ldots(x+n-1)$ jest symbolem Pochhammer'a. Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbb{E}[Z] \approx \frac{1}{b} \cdot \left(1 - \frac{n!}{(\frac{b}{a}+1)_n}\right) = \frac{1}{\log(\beta)} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{\log(\beta)}{\log(q)}+1\right)_n} - \frac{1}{\log(\beta)}.$$

Rozdział 7

Analiza modelu SIS

7.1 Pewne wygaśnięcie

Analizę modelu **SIS** zacznijmy od formalnego udowodnienia pewności wygaśnięcia infekcji.

Twierdzenie 5. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, $s \in V$ źródłem infekcji oraz $v \in V \setminus \{s\}$. Wtedy zachodzą następujące tożsamości:*

$$\mathbb{P}[X_v = \infty] > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t] = 0, \quad \mathbb{P}[Z < \infty] = 1.$$

Dowód. Dowód $\mathbb{P}[X_v = \infty] > 0$ oraz $\mathbb{P}[Z < \infty] = 1$ wynika z Twierdzenia 4. Skoro infekcja prawie na pewno wymrze to $\mathbf{1}_{Y_t} \xrightarrow{\text{a.s}} 0$ a więc i $Y_t \xrightarrow{\text{a.s}} 0$. Zauważmy, że $0 \le Y_t \le |V|$ dla każdego t. Zatem z Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\lim_{t\to\infty} Y_t] = \mathbb{E}[0] = 0.$$

□

7.2 Dwa wierzchołki, jedna krawędź

Standardowo na pierwszy przykład grafu rozważamy graf o wierzchołkach $V = \{u, v\}$ oraz krawędziach $E = \{\{u, v\}\}$ oraz wierzchołku początkowym u. Istnieją cztery możliwe stany systemu: $\mathcal{I}_t = \varnothing$, $\mathcal{I}_t = \{u\}$, $\mathcal{I}_t = \{v\}$, $\mathcal{I}_t = \{u, v\}$. Stan, w którym żaden wierzchołek nie jest zainfekowany, jest stanem absorbującym. Ponadto, z każdego pozostałego stanu możemy przejść do dowolnego innego. Rozkład X_v będzie tutaj taki sam jak dla modelu **SIR** a więc

$$X_v \sim \mathrm{KGeo}(p, \alpha),$$

oraz

$$\mathbb{E}[X_v | X_v < \infty] = \frac{1}{1 - q\beta}.$$

Następnie spróbujmy wyznaczyć rozkład Y_t. Zauważmy, że $Y_t \in \{0, 1, 2\}$. Prawdopodobieństwa przejść są następujące:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 0 | Y_t = 0] = 1,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 0 | Y_t = 1] = q\alpha,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 0 | Y_t = 2] = \alpha^2,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 1 | Y_t = 0] = 0,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 1 | Y_t = 1] = p\alpha + q\beta,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 1 | Y_t = 2] = 2\alpha\beta,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 2 | Y_t = 0] = 0,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 2 | Y_t = 1] = p\beta,\\
&\mathbb{P}[Y_{t+1} = 2 | Y_t = 2] = \beta^2.
\end{aligned}$$

Z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dla $k \in \{0, 1, 2\}$ mamy:

$$\mathbb{P}[Y_{t+1} = k] = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}[Y_{t+1} = k | Y_t = j] \cdot \mathbb{P}[Y_t = j].$$

Oznaczmy $a_t = \mathbb{P}[Y_t = 0],\ b_t = \mathbb{P}[Y_t = 1],\ c_t = \mathbb{P}[Y_t = 2]$. Oczywiście $a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ c_0 = 0$. Stąd otrzymujemy układ równań rekurencyjnych:

$$\begin{cases} a_{t+1} = a_t + q\alpha \cdot b_t + \alpha^2 \cdot c_t \\ b_{t+1} = (p\alpha + q\beta) \cdot b_t + 2\alpha\beta \cdot c_t \\ c_{t+1} = p\beta \cdot b_t + \beta^2 \cdot c_t. \end{cases}$$

Połóżmy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & q\alpha & \alpha^2 \\ 0 & p\alpha + q\beta & 2\alpha\beta \\ 0 & p\beta & \beta^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \\ c_t \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{y}_t$, a więc $\mathbf{y}_t = \mathbf{P}^t\mathbf{y}_0$. Jeśli chodzi o wartość oczekiwaną, to mamy $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \cdot a_t + 1 \cdot b_t + 2 \cdot c_t = b_t + 2c_t$. Z Twierdzenia 5 mamy

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[Y_t] = 0.$$

Przyjrzyjmy się teraz zmiennej Z. Mamy $\mathbb{P}[Z > t] = \mathbb{P}[Y_t \neq 0] = b_t + c_t$. Oznaczmy

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p\alpha + q\beta & 2\alpha\beta \\ p\beta & \beta^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} b_t \\ c_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\mathbb{P}[Z > t] = \mathbf{1}^\top \mathbf{z}_t = \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^t \mathbf{z}_0$. Mamy więc

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}[Z > t] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^t \mathbf{z}_0 = \mathbf{1}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{z}_0.$$

Dalej:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - p\alpha - q\beta & -2\alpha\beta \\ -p\beta & 1 - \beta^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ p\beta & 1 - p\alpha - q\beta \end{bmatrix},$$

oraz

$$\mathbf{1}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{z}_0 = \mathbf{1}^\top \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 - \beta^2 \\ p\beta \end{bmatrix} = \frac{1 - \beta^2 + p\beta}{\Delta},$$

gdzie $\Delta = \det(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$. Obliczmy teraz ten wyznacznik:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (1 - p\alpha - q\beta)(1 - \beta^2) - (-2\alpha\beta)(-p\beta) \\
&= 1 - p\alpha - q\beta - \beta^2 + p\alpha\beta^2 + q\beta^3 - 2p\alpha\beta \\
&= (1 - \beta^2)(1 - q\beta) - p\alpha(1 + \beta^2) \\
&= (1 - (1 - \alpha)^2)(1 - (1 - p)(1 - \alpha)) - p\alpha(1 + (1 - \alpha)^2) \\
&= \alpha(2 - \alpha)(p + \alpha - p\alpha) - p\alpha(2 - 2\alpha + \alpha^2) \\
&= \alpha(2p + 2\alpha - 2p\alpha - \alpha p - \alpha^2 + p\alpha^2 - 2p + 2\alpha p - p\alpha^2) \\
&= \alpha^2(2 - p - \alpha) = \alpha^2(q + \beta).
\end{aligned}
$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$
\mathbb{E}[Z] = \frac{1 - \beta^2 + p\beta}{\alpha^2(q + \beta)}.
$$

7.3 Grafy pełne

Po analizie dla K_2 postarajmy się ją uogólnić dla K_n. Ze względu na symetrie dowolny stan z taką samą liczbą zainfekowanych wierzchołków jest izomorficzny. Z Twierdzenia 5 wiemy, że $\mathbb{E}[Y_t] \to 0$. Ustalmy $t \in \mathbb{N}$. Niech A_t będzie zmienną losową oznaczająca liczbę wierzchołków, które przetrwają rundę t oraz B_t liczbę nowo zainfekowanych wierzchołków w tej rundzie. Formalnie

$$
A_t = |\{v \in V : v \in \mathcal{S}_t \cap \mathcal{S}_{t+1}\}|, \quad B_t = |\{v \in V : v \in \mathcal{S}_t \cap \mathcal{I}_{t+1}\}|.
$$

Oznaczmy $i = Y_t$ oraz $j = Y_{t+1}$. Każdy zarażony wierzchołek może przetrwać niezależnie od siebie w formacie próby Bernoulliego. A więc $A_t \sim \mathrm{Bin}(i, \beta)$. Dalej każdy podatny wierzchołek może zostać zarażony niezależnie przez $n - i$ sąsiadów. Szansa, że któremuś z nich się uda wynosi $1 - q^i$. Stąd $B_t \sim \mathrm{Bin}(n - i, 1 - q^i)$. Ponadto $Y_{t+1} = A_t + B_t$. Możemy policzyć warunkową liczbę oczekiwanych zarażeń w $t + 1$ kroku:

$$
\mathbb{E}[Y_{t+1} | Y_t = i] = \mathbb{E}[A_t + B_t] = i\beta + (n - i)(1 - q^i).
$$

Oznaczmy $P_{i \to j} = \mathbb{P}[Y_{t+1} = j | Y_t = i]$ dla $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Wtedy korzystając z Faktu 7 mamy

$$
P_{i \to j} = \sum_{\ell = \max\{0, j - (n - i)\}}^{\min\{i, j\}} \binom{i}{\ell} \binom{n - i}{j - \ell} \beta^\ell \alpha^{i - \ell} (1 - q^i)^{j - \ell} (q^i)^{n - i - (j - \ell)}.
$$

Jest to uogólnienie prawdopodobieństw przejść, które wyznaczyliśmy wcześniej dla $n = 2$. Ponownie z prawdopodobieństwa całkowitego dla $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mamy

$$
\mathbb{P}[Y_{t+1} = j] = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}[Y_{t+1} = j | Y_t = i] \cdot \mathbb{P}[Y_t = i].
$$

Zdefiniujmy wektor

$$
\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \mathbb{P}[Y_t = 0] \\ \mathbb{P}[Y_t = 1] \\ \vdots \\ \mathbb{P}[Y_t = n] \end{bmatrix}
$$

Wtedy $\mathbf{y}_t^{(k)} = \mathbb{P}[Y_t = k]$ dla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. W uproszczonej notacji możemy zapisać

$$\mathbf{y}_{t+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^{n} P_{i \to j} \cdot \mathbf{y}_t^{(i)}.$$

Macierz przejść dla naszego łańcucha Markova dana jest

$$\mathbf{P} = \left[P_{i \to j}\right]_{0 \le i,j \le n}.$$

Mamy $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{y}_t$ jak i $\mathbf{y}_t = \mathbf{P}^t\mathbf{y}_0$. Zbudowanie tej macierzy jest możliwe w czasie $\mathcal{O}(n^3)$. Wartość oczekiwaną zmiennej Y_t możemy obliczyć ze wzoru

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbf{y}_t^{(k)}.$$

Macierz $\mathbf{P}$ jest kolumnowo stochastyczna a więc

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

a co za tym idzie

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^\top.$$

Jeśli chodzi o zmienną Z to mamy $\mathbb{P}[Z > t] = \mathbb{P}[Y_t \neq 0]$. Kładziemy

$$\mathbf{Q} = \left[P_{i \to j}\right]_{1 \le i,j \le n}, \quad \mathbf{z}_t = \left[\mathbb{P}[Y_t] = k\right]_{1 \le k \le n}, \quad \mathbf{1} = \left[1\right]_{1 \le k \le n}.$$

Licząc wartość oczekiwaną dostajemy

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}[Z > t] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{1}^\top \mathbf{z}_t = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{1}^\top \mathbf{Q}^t \mathbf{z}_0 = \mathbf{1}^\top (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{z}_0.$$

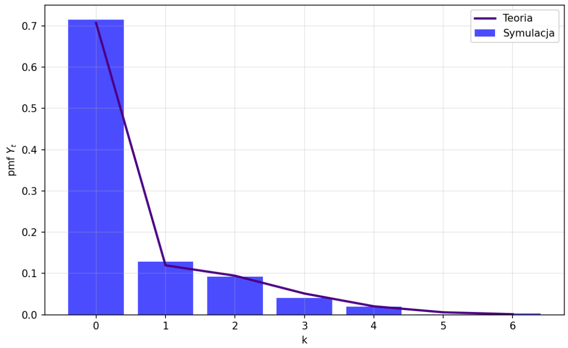
7.4 Eksperymenty

Dla modelu **SIS** przeprowadzimy symulacje na grafie $\mathrm{K_n}$. Na nasze potrzeby wystarczy nam $n = 10$. Aby mieć pewność, że infekcji umrze w sensownym czasie będziemy badać propagacje dla parametrów $p = 0.1,\ \alpha = 0.9$ (Wykresie 1), $p = 0.2,\ \alpha = 0.8$ (Wykresie 2) oraz $p = 0.5,\ \alpha = 0.9$ (Wykresie 3). Połóżmy $\tau = \max\{20, \mathbb{E}[Z]\}$. Dalej wyznaczymy rozkład Y_t dla $t \in \{0.2\tau, 0.4\tau, 0.6\tau, 0.8\tau\}$. Wartość oczekiwaną obliczmy dla $t \in \{1, 2, \dots, \tau\}$ oraz $t \in \{1, 2, \dots, 10\tau\}$. Przeprowadzimy teraz serie symulacji w celu sprawdzenia, czy rzeczywiście wyniki teoretyczne pokrywają się z praktycznymi. Dla wszystkich symulacji ustalmy $p = 0.2$. Rozkłady zmiennej Y_t oraz Z będziemy ustalać dla grafów mających 100 wierzchołków. Dla Y_t będziemy wybierać t zależne od konkretnej rodziny. Wartość oczekiwaną Z będziemy wyznaczać dla liczby wierzchołków należących do $\{1, 2, \dots, 1000\}$. Wreszcie zasymulujemy rozkład Z a potem $\mathbb{E}[Z]$ dla $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Symulacje dokonujemy korzystając z Algorytmu 2.

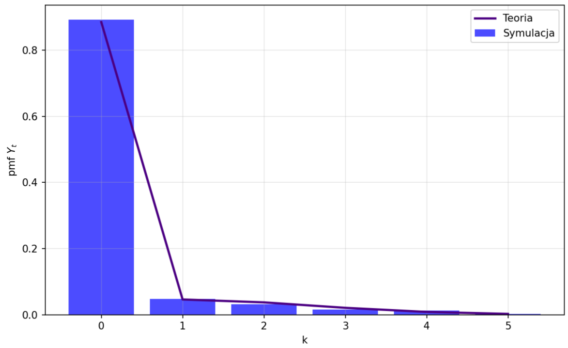
Dla parametrów $p = 0.1,\ \alpha = 0.9$ widzimy, że infekcja dość szybko wymiera, większość masy prawdopodobieństwa Y_t jest w 0. Podobnie zachowuje się rozkład Z. Dalej dla $p = 0.2,\ \alpha = 0.8$ nadal spora część rozkładu jest w 0 ale spora cześć zbiera się w kształt rozkładu normalnego dla dodatnich wartości. Podobnie ma się sytuacja dla $p = 0.5,\ \alpha = 0.9$. Warto również zauważyć, że w tym przypadku $\mathbb{E}[Z]$ jest gigantycznie duża, rzędu kilkudziesięciu tysięcy.

Algorithm 2 SIS Propagation

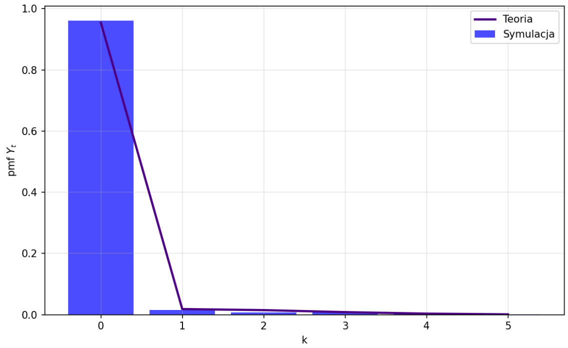
Input: Graph $G = (V, E)$, infection probability p, recovering probability α, source $s \in V$
Output: Sets of infected vertices $(\mathcal{I}_t)$ and extinction time Z
$\mathcal{I}_0 \leftarrow \{s\}$
$t \leftarrow 0$
while $|\mathcal{I}_t| > 0$ **do**
    $\mathcal{I}_{\text{new}} \leftarrow \varnothing$
    for each $u \in \mathcal{I}_t$ **do**
        for each $v \in \mathrm{N}(u)$ **do**
            if $v \notin \mathcal{I}_t$ **and** random() $< p$ **then**
                $\mathcal{I}_{\text{new}} \leftarrow \mathcal{I}_{\text{new}} \cup \{v\}$
            end if
        end for
    end for
    $R \leftarrow \varnothing$
    for each $u \in \mathcal{I}_t$ **do**
        if random() $< \alpha$ **then**
            $R \leftarrow R \cup \{u\}$
        end if
    end for
    $\mathcal{I}_{t+1} \leftarrow (\mathcal{I}_t \cup \mathcal{I}_{\text{new}}) \setminus R$
    $t \leftarrow t + 1$
end while
$Z \leftarrow t$
return $(\mathcal{I}_t)$, Z



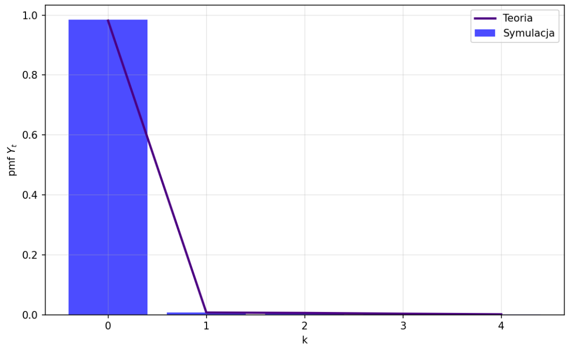
(a) $t = 0.2\tau$.



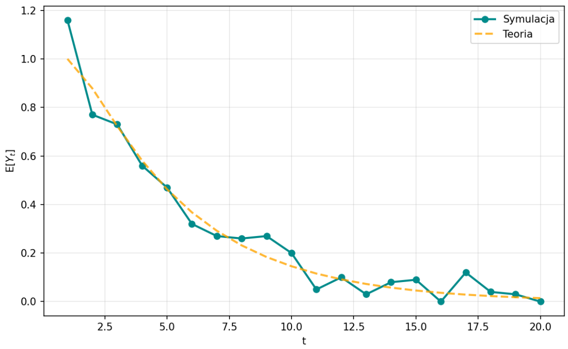
(b) $t = 0.4\tau$.



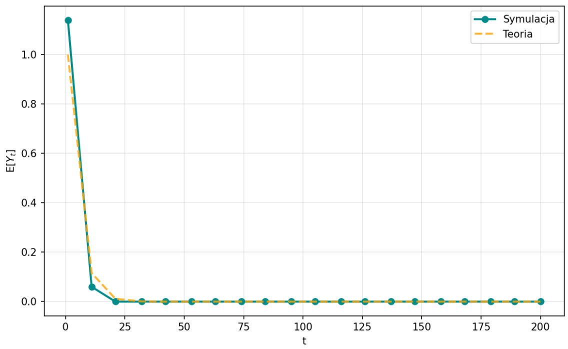
(c) $t = 0.6\tau$.



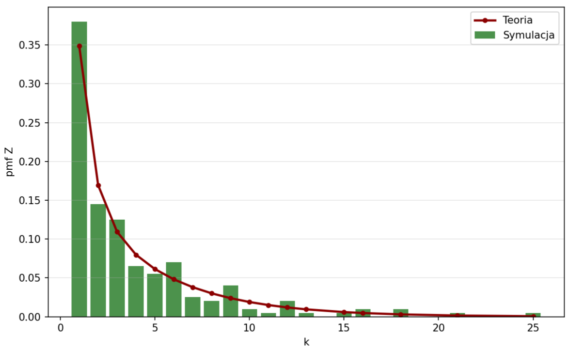
(d) $t = 0.8\tau$.



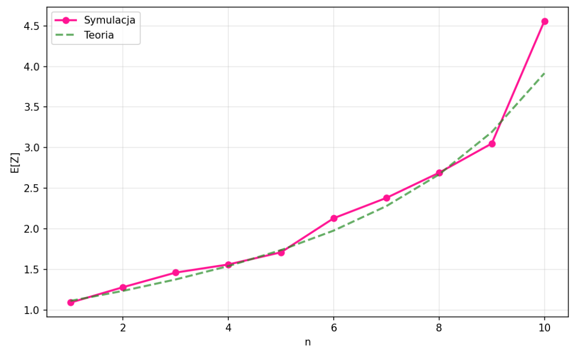
(e) $t \leq \tau$.



(f) $t \leq 10\tau$.

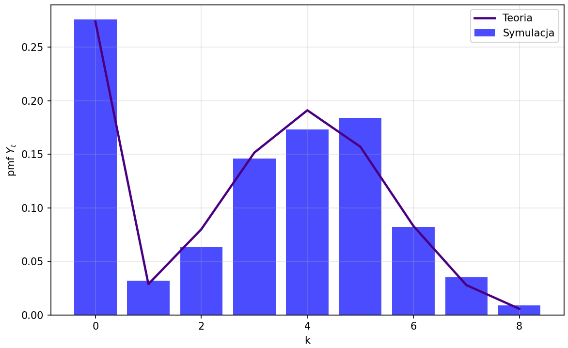


(g) Rozkład Z.

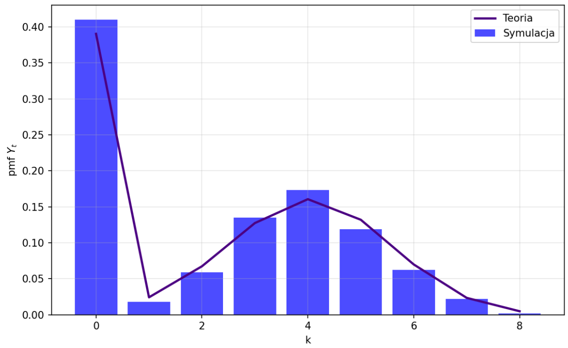


(h) Wartość oczekiwana Z.

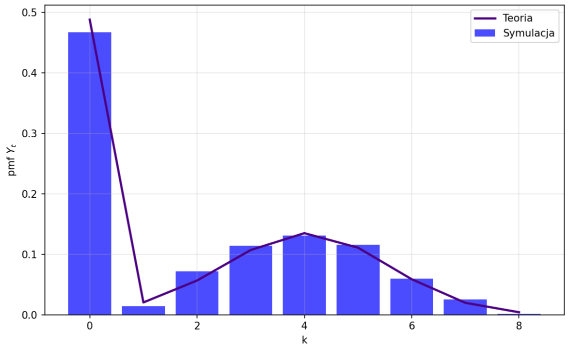
Rysunek 1: Rozkłady dla $p = 0.1,\ \alpha = 0.9$.



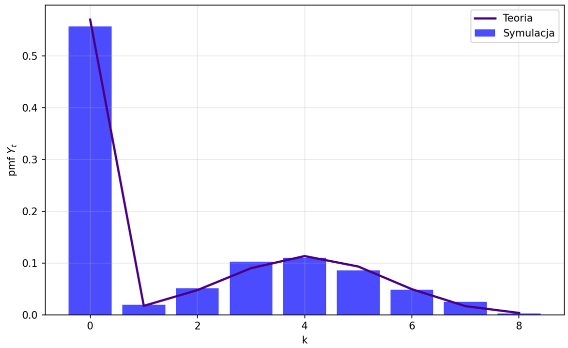
(a) $t = 0.2\tau$.



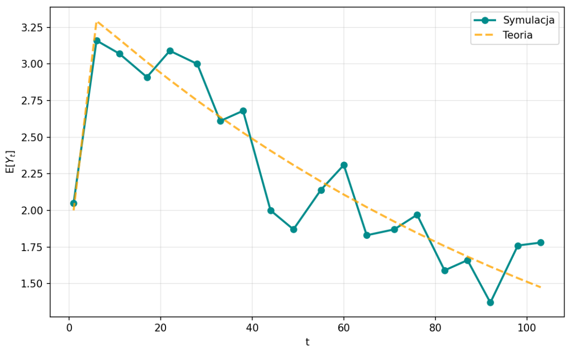
(b) $t = 0.4\tau$.



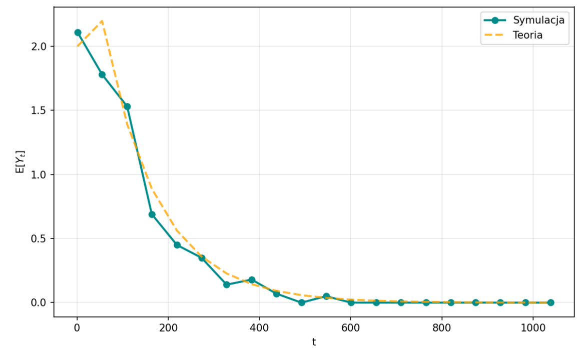
(c) $t = 0.6\tau$.



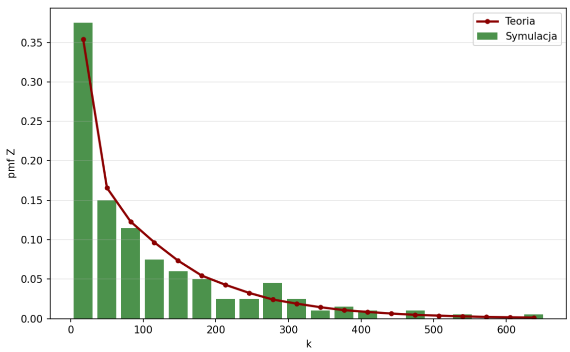
(d) $t = 0.8\tau$.



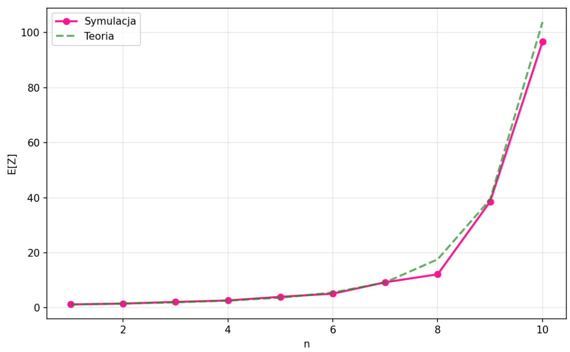
(e) $t \leq \tau$.



(f) $t \leq 10\tau$.

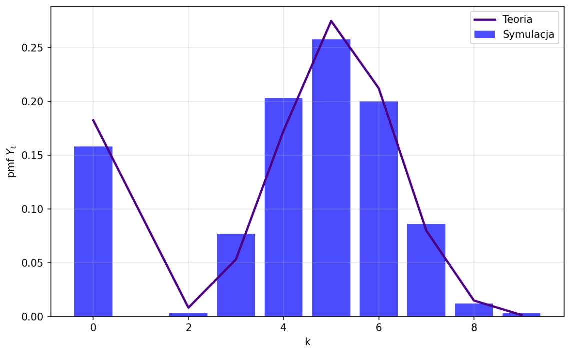


(g) Rozkład Z.

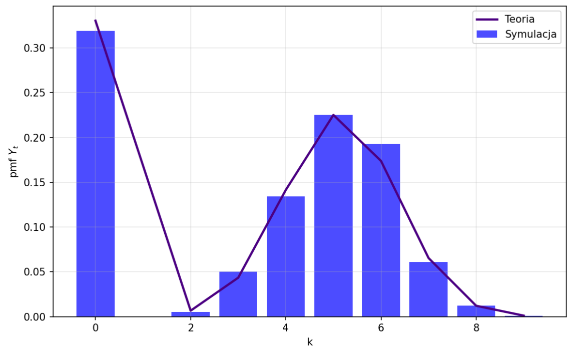


(h) Wartość oczekiwana Z.

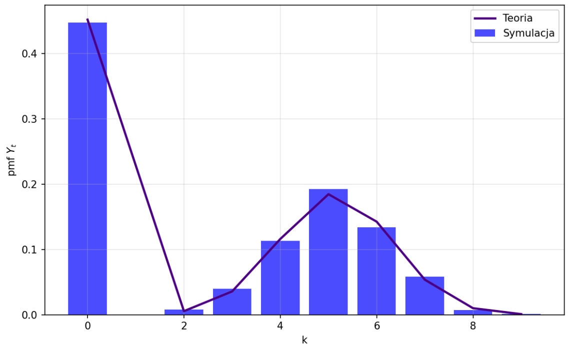
Rysunek 2: Rozkłady dla $p = 0.2, \ \alpha = 0.8$.



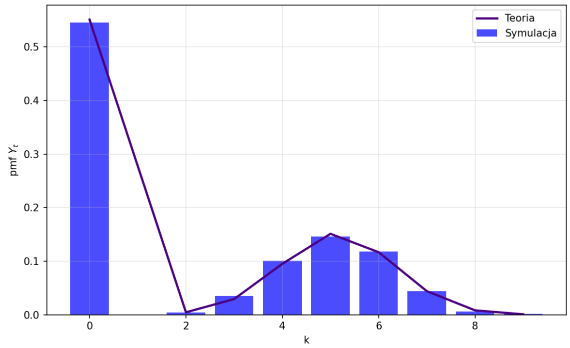
(a) $t = 0.2\tau$.



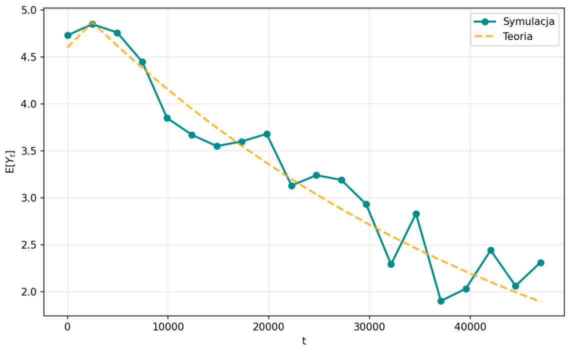
(b) $t = 0.4\tau$.



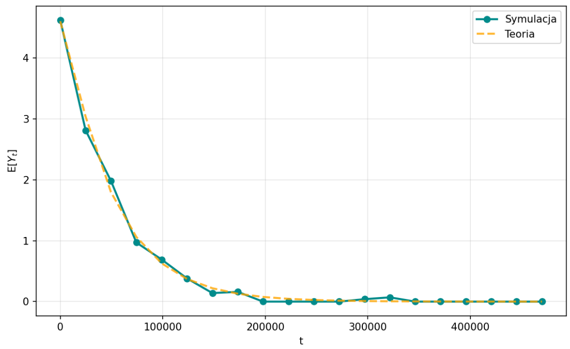
(c) $t = 0.6\tau$.



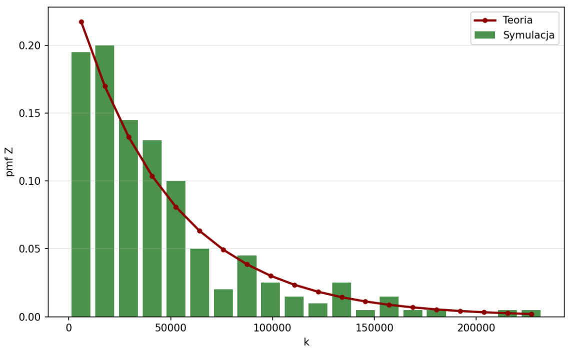
(d) $t = 0.8\tau$.



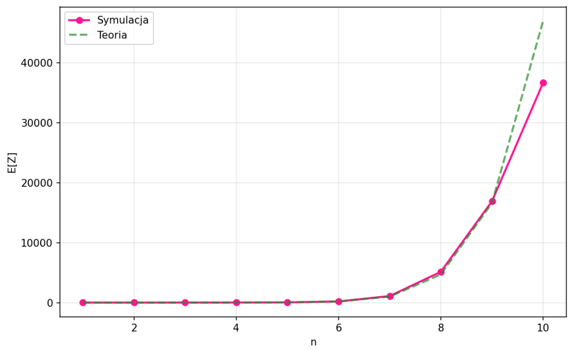
(e) $t \leq \tau$.



(f) $t \leq 10\tau$.



(g) Rozkład Z.



(h) Wartość oczekiwana Z.

Rysunek 3: Rozkłady dla $p = 0.5,\ \alpha = 0.9$.

Rozdział 8

Zastosowania praktyczne

8.1 Basic Extrema Propagation

Wyniki i ustalenia modelu **SI** możemy wykorzystać dla analizy teoretycznej różnych metod propagacji. Skoncentrujmy naszą uwagę na algorytmie Basic Extrema Propagation, **BEP** (3).

Algorithm 3 Basic Extrema Propagation

Input: Graph $G = (V, E)$, random function Rand
Output: Values $(\mathcal{X}_v)_{v \in V}$
for $v \in V$ **do**
    $\mathcal{X}_v \leftarrow \mathrm{Rand}()$
end for
changed $\leftarrow$ true
while changed **do**
    changed $\leftarrow$ false
    for $v \in V$ **do**
        $\mathcal{X}_{\mathrm{new}} \leftarrow \mathcal{X}_v$
        send $\mathcal{X}_v$ to every $u \in \mathrm{N}(v)$
        receive $\mathcal{X}_u$ from every $u \in \mathrm{N}(v)$
        $\mathcal{X}_{\mathrm{new}} \leftarrow \min\{x_{\mathrm{new}}, \{\mathcal{X}_u : u \in \mathrm{N}(v)\}\}$
        if $\mathcal{X}_{\mathrm{new}} < \mathcal{X}_v$ **then**
            $\mathcal{X}_v \leftarrow \mathcal{X}_{\mathrm{new}}$
            changed $\leftarrow$ true
        end if
    end for
end while
return $(\mathcal{X}_v)_{v \in V}$

Jest to algorytm rozproszony zaprojektowany do obliczania wartości ekstremalnych (np. minimalnych lub maksymalnych) w sieciach przy użyciu wyłącznie lokalnych interakcji wierzchołków. Algorytm ten działa następująco: Każdy wierzchołek ustala wartość początkową losowo, korzystając z funkcji Rand. Następnie w synchronicznych rundach węzły przesyłają aktualnie przechowywaną wartość do swoich sąsiadów. Potem odbierają wszystkie wysłane im wartości i obliczają minimum z nich oraz już posiadanej wartości. Proces ten po pewnym czasie stabilizuje się, to jest każdy wierzchołek posiada tą samą wartość i dalsza propagacja nie ma sensu. Wtedy algorytm kończy działanie. Jeśli wierzchołki mają początkowo wartości $(\mathcal{X}_v)_{v \in V}$ to zwrócona wartość wynosi $\mathcal{X} = \min_{v \in V} \mathcal{X}_v$.

Możemy założyć, że $(\mathcal{X}_v)_{v\in V}$ są niezależne i mają taki sam rozkład. Dobierając odpowiedni rozkład początkowy wierzchołków możemy w wyniku algorytmu uzyskać różne interesujące wartości. Przykładowo dla $\mathcal{X}_v \sim \mathcal{U}[0;1]$ mamy $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{1+|V|}$ (Fakt 8). Daje nam to możliwość łatwego oszacowania na wielkości sieci. Gdy zaś $\mathcal{X}_v \sim \mathrm{Exp}(\lambda_v)$ to wtedy $\mathcal{X} \sim \mathrm{Exp}(\Lambda)$ przy czym $\Lambda = \sum_{v\in V} \lambda_v$ (Fakt 9). Ponadto $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\Lambda}$. Tego rozkładu startowego możemy użyć jeśli chcemy wyłuskać sumę pewnych parametrów przechowywanych w węzłach sieci. Interesuje nas też oczywiście czas działania algorytmu **BEP**. Można pokazać [2], że w dowolnym grafie średnia liczba wiadomości wysłanych przez dowolny wierzchołek podczas całego procesu jest rzędu $\mathcal{O}(\log(|V|))$. W teorii każde poinformowanie zawsze sie powiedzie. Stabilizacja wartości przechowywanej w $u \in V$ nastąpi, kiedy u prześle informacje do najdalej oddalonego od niego wierzchołka, to jest po $\epsilon(u)$ rundach. Oczywiście cały proces zakończy się po najdłuższym z tych czasów. A zatem algorytm po co najwyżej $\mathrm{diam}(G)$ rundach kończy działanie. W praktyce natomiast ze względu na szumy i zakłócenia komunikacji przesłanie wiadomości nie zawsze się udaje. Możemy założyć, że prawdopodobieństwo przesłania informacji w pojedynczej rundzie wynosi p. Krok aktualizacji wartości jest analogiczny do rozprzestrzeniania się infekcji w modelu **SI**. Dla ustalonego $s \in V$ zmienne losowe, które zdefiniowaliśmy dostarczają nam sporo informacji o przebiegu algorytmu **BEP**. Najistotniejsza jest zmienna Z, która jest górnym ograniczeniem na czas zakończenia propagacji.

Bibliografia

[1] Carlos Baquero i in. „Extrema Propagation: Fast Distributed Estimation of Sums and Network Sizes". W: *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 23.4 (2012), s. 668–675. DOI: 10.1109/TPDS.2011.209.

[2] Jacek Cichoń, Dawid Dworzański i Karol Gotfryd. „On Reliability of the Extrema Propagation Technique in Random Environment". W: *28th International Conference on Principles of Distributed Systems (OPODIS 2024)*. Red. Silvia Bonomi i in. T. 324. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025, 29:1–29:16. ISBN: 978-3-95977-360-7. DOI: 10.4230/LIPIcs.OPODIS.2024.29. URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.OPODIS.2024.29.

[3] Jacek Cichoń, Dawid Dworzański i Karol Gotfryd. „On Reliability of the Extrema Propagation Technique in Random Environment". W: *28th International Conference on Principles of Distributed Systems (OPODIS 2024)*. Red. Silvia Bonomi i in. T. 324. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025, 29:1–29:16. ISBN: 978-3-95977-360-7. DOI: 10.4230/LIPIcs.OPODIS.2024.29. URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.OPODIS.2024.29.