情報数学 追加6

数理統計

第1章

分布

二項分布　$X \sim B(n,p)$

モデル:
射的に参加した一人、命中率はp、n回打った後、命中した回数はX

X	0	…	k	…	n
P	$(1-p)^n$	…	${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$	…	p^n

$$E[X] = np \qquad Var[X] = np(1-p)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

正規分布　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

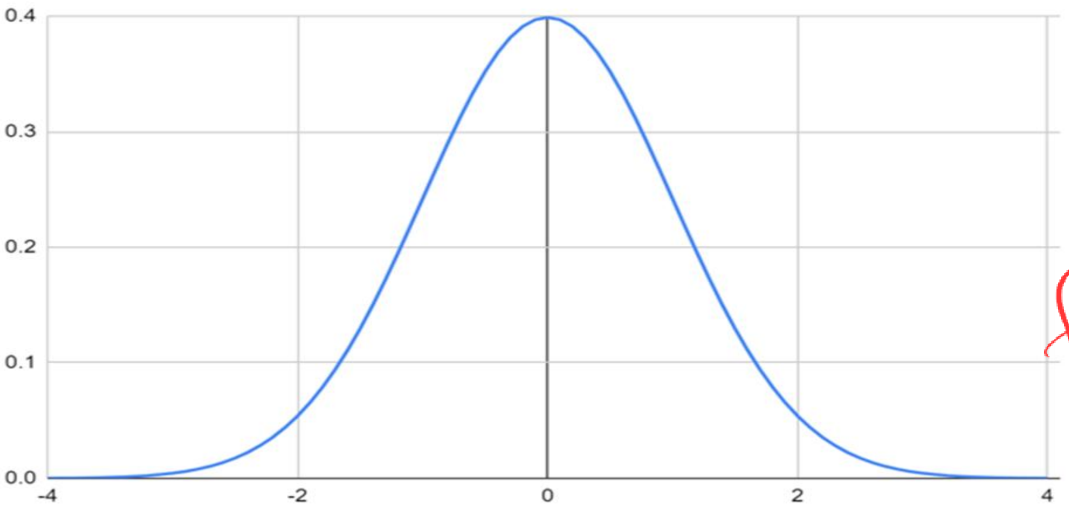
平均値＝最頻値＝中央値

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu \qquad Var[X] = \sigma^2$$

標準正規分布　$X \sim N(0,1)$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

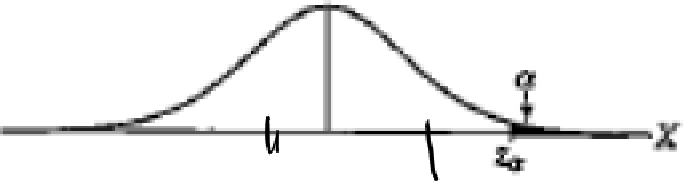
$$E[X] = 0$$

$$Var[X] = 1$$

<u>正規分布の標準化</u>

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ならば、$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

正規分布表： $X \sim N(0,1)$



$$\alpha = \mathrm{P}(X > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379

問題1

正規分布表より、次の確率を求めよ。

$\boldsymbol{P[X > 0.85] =}$

$\boldsymbol{P[X < -0.4] =}$

$\boldsymbol{P[0.15 < X < 0.25] =}$

$\boldsymbol{P[-0.1 < X < 0.15] =}$

$1-0.4602-0.4404$

0.9006

0.0994

カイ二乗分布

標準正規分布に従う独立なk個の確率変数$X_1, X_2, \ldots, X_k$ととる。
$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$が自由度$k$のカイ二乗分布に従う。

$Y \sim \chi^2(k)$と書く。

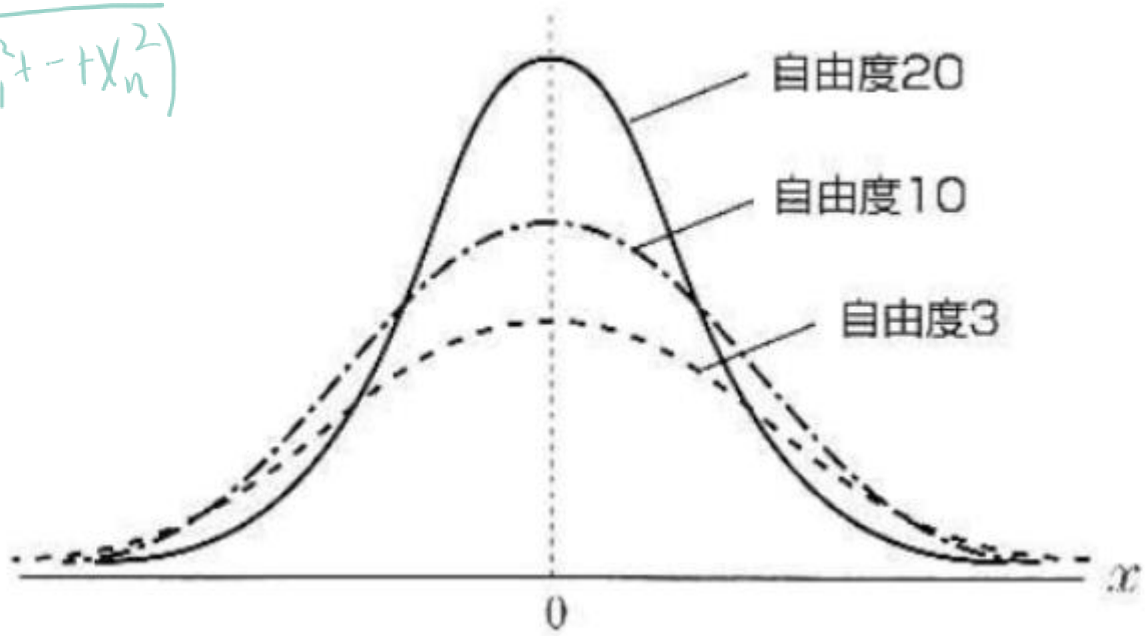
$$\chi^2(k) = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

t分布 小样本

$X \sim N\,(0,1), Y \sim \chi^2(k)$であるとき、$Z = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$が自由度$k$の$t$分布に従う

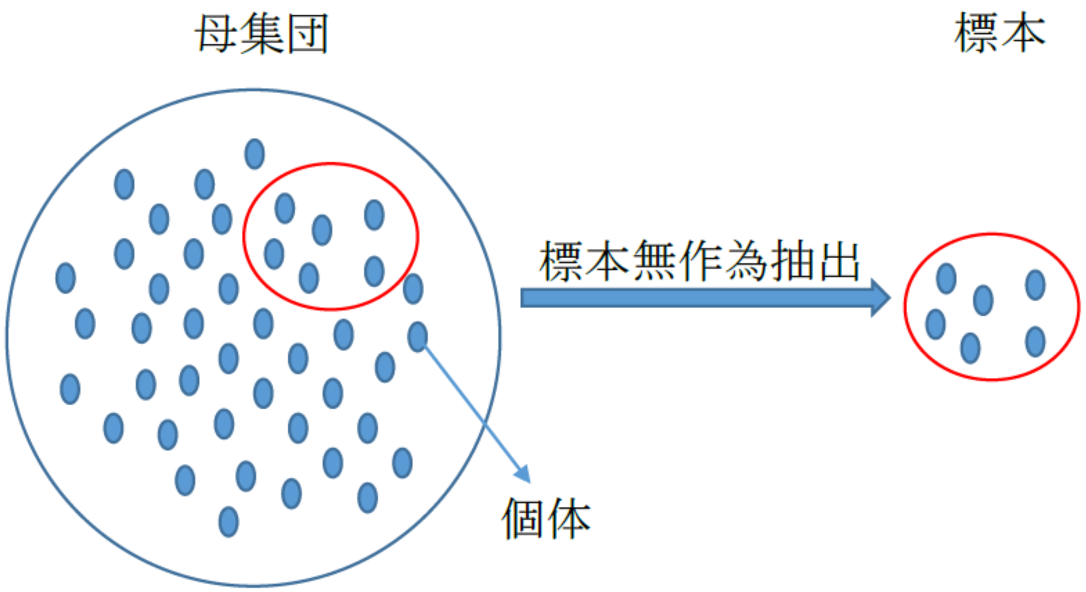
$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}} = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{k}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)}}$$



第2章

点推定

点推定のやり方



母集団から標本 $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ が抽出される。**母平均**（母集団の平均） μ は？**母分散**（母集団の分散） σ^2 は？

母平均: $\mu = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)$

母分散: $\sigma^2 = \frac{1}{N}\{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_N - \mu)^2\}$

点推定のやり方

標本の平均: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

標本の分散: $r^2 = \frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\}$

計算できるもの: 標本の平均$\bar{x}$と標本の分散r^2

近似

知りたいもの: 母平均μ と 母分散σ^2

標本平均

母平均μに対応する統計量ー**標本平均**Xが次のように定義される:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

ここで、 $X_1, X_2, \ldots, X_n$が確率変数である。

$$E[X_i] = \mu \quad Var[X_i] = \sigma^2$$

標本平均

解釈　（了解即可）

母平均　$\mu = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + ... + x_N)$

母分散　$\sigma^2 = \frac{1}{N}\{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + ... + (x_N - \mu)^2\}$

X_i の確率分布

X_i	x_1	x_2	・・・	x_N
P	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	・・・	$\frac{1}{N}$

$$E[X_i] = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + ... + x_N \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + ... + x_N) = \mu$$

$$Var[X_i] = E[(X_i - (E[X_i])^2]$$

$$= (x_1 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{N} + (x_2 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{N} + ... + (x_N - \mu)^2 \cdot \frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + ... + (x_N - \mu)^2\} = \sigma^2$$

標本平均

結論1

標本平均$\bar{X}$の期待値と分散が次のようになる:

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)^2\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

標本平均

証明:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right] = \frac{1}{n}\{E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]\}$$

$$= \frac{1}{n}\{\mu + \mu + \cdots + \mu\} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$Var[\bar{X}] = Var\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\{Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]\} = \frac{1}{n^2}\{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

不偏推定量

確率変数θはパラメータαの推定量である。$E[\theta]=\alpha$が成り立つとき、θはαの不偏推定量と呼ぶ

結論2: 標本平均$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$は母平均$\mu$の不偏推定量である

証明:

$$E[\bar{X}]=E\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right]=\frac{1}{n}\{E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\mu+\mu+\cdots+\mu\}=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu$$

以上より、標本平均$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$は母平均$\mu$の不偏推定量である。

不偏推定量

結論3:　母分散σ^2の不偏推定量は

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\}$$

ただし、$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$。

このとき、S^2は不偏標本分散と呼び、Sは不偏標準偏差と呼ぶ。

不偏推定量

証明:

$E[X_i]=\mu \quad Var[X_i]=\sigma^2$ より、$E[X_i{}^2]=\{E[X_i]\}^2+Var[X_i]=\mu^2+\sigma^2$

$E[\overline{X}]=\mu \quad Var[\overline{X}]=\dfrac{\sigma^2}{n}$ より、$E[(\overline{X})^2]=\{E[\overline{X}]\}^2+Var[\overline{X}]=\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{n}$

$$
\begin{aligned}
&E[S^2]\\
&=E[\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_n-\overline{X})^2\}]\\
&=\frac{1}{n-1}E[(X_1{}^2-2X_1\overline{X}+\overline{X}^2)+(X_2{}^2-2X_2\overline{X}+\overline{X}^2)+\ldots+(X_n{}^2-2X_n\overline{X}+\overline{X}^2)]\\
&=\frac{1}{n-1}E[(X_1{}^2+X_2{}^2+\ldots+X_n{}^2)-2\overline{X}(X_1+X_2+\ldots+X_n)+n\overline{X}^2]\\
&=\frac{1}{n-1}E[(X_1{}^2+X_2{}^2+\ldots+X_n{}^2)-2\overline{X}\cdot n\overline{X}+n\overline{X}^2]\\
&=\frac{1}{n-1}E[(X_1{}^2+X_2{}^2+\ldots+X_n{}^2)-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2]\\
&=\frac{1}{n-1}E[(X_1{}^2+X_2{}^2+\ldots+X_n{}^2)-n\overline{X}^2]\\
&=\frac{1}{n-1}\{E[X_1{}^2]+E[X_2{}^2]+\ldots+E[X_n{}^2]-nE[\overline{X}^2]\}\\
&=\frac{1}{n-1}\{nE[X_1{}^2]-nE[\overline{X}^2]\}\\
&=\frac{n}{n-1}\{E[X_1{}^2]-E[\overline{X}^2]\}\\
&=\frac{n}{n-1}\{(\mu^2+\sigma^2)-(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n})\}\\
&=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2\\
&=\sigma^2
\end{aligned}
$$

以上より、S^2 は σ^2 の不偏推定量である。

第3章

最尤推定

最尤推定

観察された標本$x_1, x_2, \ldots, x_n$について、αに関する尤度関数が以下のように与えられる:

$$L(\alpha; x_k) = \prod_{k=1}^{n} p(\alpha; x_k)$$

$p(\alpha; x_k)$はx_kの起こる確率である。

最尤推定量α^*が以下の最適化問題の最適解である:

$$\max_{\alpha} L(\alpha; x_k)$$

(解释：用α表示观察到的现象的概率并令其最大化)

例1　田中さんの的中率をpとする。10回のショットを繰り返した結果:
的中　的中　的中　外れ　的中　的中　的中　的中　外れ　外れ
このとき、pの最尤推定値p^*を求めよ。

解:
p^*が以下の最適化問題の最適解である:

$$\max_{p} p^7(1-p)^3$$

$f(p) = p^7(1-p)^3$とする、$f'(p) = 7p^6(1-p)^3 - 3p^7(1-p)^2$

$$f'(p) = 0 \Rightarrow p = \frac{7}{10}$$

P	$0 < p < \frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{10} < p < 1$
$f'(p)$	$+$	0	$-$
$f(p)$		最大	

以上より、pの最尤推定値$p^* = \frac{7}{10}$

第4章

区間推定

区間推定

例2　ある学校で、100点満点のテストを行った正規母集団の標準偏差が$\sigma = 5$である。無作為に選ばれた10人の点数の標本平均の実現値は57である。
問:　母平均が95%の確率でどの区間(信頼係数95%の信頼区間)にあるのか?

区間推定

例2の解:

母平均をμとする。標本平均を$\bar{X}$とする。

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

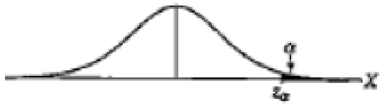
$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{5^2/10}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow -1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{5^2/10}} \leq 1.96$$

$$\Rightarrow 53.9 \leq \mu \leq 60.1$$

μ的选择->观测到的现象概率较大

正規分布表：$X \sim N(0,1)$



$$\alpha = \mathrm{P}(X > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	$\boxed{.0250}$	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143

区間推定

例3　ある学校で、100点満点のテストを行った正規母集団から無作為に選ばれた10人の点数の標本平均の実現値は57であり、不偏標本分散の実現値は440である。
問:　母平均が95%の確率でどの区間(信頼係数95%の信頼区間)にあるのか?

例3の解:
母平均を$\boldsymbol{\mu}$、標本平均を$\bar{X}$、不偏標本分散をS^2とする。

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$$

区間推定

解释（了解即可）

回忆1 $S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2\}$

回忆2 標準正規分布に従う独立なk個の確率変数$X_1, X_2, \ldots, X_k$ととる。
$Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2$が自由度$k$のカイ二乗分布に従う。$Y \sim \chi^2(k)$と書く。

回忆3 $X \sim N\,(0,1), Y \sim \chi^2(k)$であるとき、$Z=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$が自由度$k$の$t$分布に従う。

区間推定

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2\}}{\sigma^2}$$

$$=(\frac{X_1-\bar{X}}{\sigma})^2+(\frac{X_2-\bar{X}}{\sigma})^2+\cdots+\left(\frac{X_n-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\approx(\frac{X_1-\mu}{\sigma})^2+(\frac{X_2-\mu}{\sigma})^2+\cdots+\left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\sim\chi^2(n-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(n-1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}=\frac{(\bar{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{S^2/n}/\sqrt{\sigma^2/n}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}}\approx\frac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(n-1)}{(n-1)}}}$$

$$\sim t\ (n-1)$$

区間推定

例3の解:

母平均をμ、標本平均を$\bar{X}$、不偏標本分散をS^2とする。

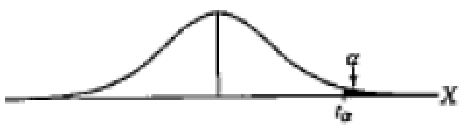
$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/10}} \sim t(9)$$

$$\Rightarrow -2.262 \le \frac{57-\mu}{\sqrt{\frac{440}{10}}} \le 2.262$$

$$\Rightarrow 42 \le \mu \le 72$$

t 分布表：$X \sim t(k)$



$$\alpha = \mathrm{P}(X > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

k (自由度) \ α	.10	.05	.025	.010	.005
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	$\boxed{2.2622}$	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058

問題2　ある町で収穫されたリンゴの重さの母平均μを推定したい。ただし、母分散は50^2であると分かっている。

1.　無作為に抽出した100個の標本の重さの平均は350である。このとき、μの95%の信頼区間を求めなさい。

2.　95%の信頼区間の幅が7以下になるようにμを推定するには、何個以上の標本を抽出する必要があるかを答えよ。

問題3　ある高校からランダムに16人選んだときの化学のテストの結果を聞いたところ、平均値が80、不偏標準偏差が8であることがわかった。このとき、高校全体の化学の点数の平均値の95%信頼区間を求めよ。

第5章

仮説検定

仮説検定

例4　ある機械の寿命の平均は150時間である。今、新型の機械が開発されて、機械の性能が改良されたが、寿命が変化するかどうかについて不明である。機械の寿命は新型も従来のものも分散$\boldsymbol{\sigma^2 = 14^2}$の正規分布に従うと仮定する。新型機械$\boldsymbol{n = 10}$個を無作為に選び、その寿命を計測したところ、平均$\boldsymbol{\bar{x} = 160}$である。有意水準$\boldsymbol{\alpha = 5\%}$で検定せよ。

仮説検定

例4の解:

1. 帰無仮説 $\mu = 150$
   対立仮説 $\mu \neq 150$

2. 検定統計量の実現値を計算する

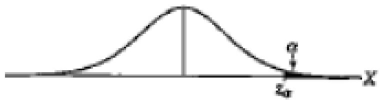
$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{160 - 150}{\sqrt{14^2/10}} \approx 2.26$$

3. 有意水準$\alpha = 5\%$であるため、臨界値1.96

$|z| = 2.26 > 1.96$ 帰無仮説は棄却する。

結論:　新型の寿命が変化すると言える。

正規分布表：$X \sim N(0,1)$



$$\alpha = \mathrm{P}(X > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	$\boxed{.0250}$	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183

検定の手順

1. 帰無仮説と対立仮説を作る
   帰無仮説　$\mu = \mu_0$
   対立仮説　$\mu \neq \mu_0$

2. 検定統計量の実現値を計算する
   $$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

3. 有意水準αによって臨界値を決める。

4. 帰無仮説を棄却するかどうか判断を行う

$|z| >$臨界値ならば、帰無仮説を棄却する
$|z| \leq$臨界値ならば、帰無仮説を棄却しない

第6章

片側検定

片側検定

例5　ある機械の寿命の平均は150時間である。今、新型の機械が開発されて、機械の性能が改良されたが、寿命が<u>長くなる</u>かどうかについて不明である。機械の寿命は新型も従来のものも分散$\boldsymbol{\sigma^2 = 14^2}$の正規分布に従うと仮定する。新型機械$\boldsymbol{n = 10}$個を無作為に選び、その寿命を計測したところ、平均$\boldsymbol{\bar{x} = 160}$である。<u>有意水準$\boldsymbol{\alpha = 1\%}$</u>で検定せよ。

仮説検定

例5の解:

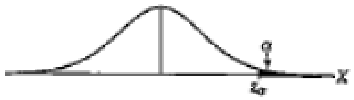
1.　　帰無仮説　$\mu = 150$
**　　　対立仮説　$\mu > 150$**

2.　検定統計量の実現値を計算する

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{160 - 150}{\sqrt{14^2/10}} \approx 2.26$$

3.　有意水準$\alpha = 1\%$であるため、臨界値2.33
$|z| = 2.26 \leq 2.33$ 帰無仮説は棄却しない。
結論:　新型の寿命が長くなると言えない

正規分布表：$X \sim N(0,1)$



$$\alpha = \mathrm{P}(X > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	$\boxed{.0099}$	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064

問題4　新生児について中国人の身長の平均μが日本人の身長の平均50.2cmと異なるかどうかを調べるために、中国人新生児10人を無作為に抽出し身長を測定したところ、測定値の平均が51.8cmである。母分散が既知で6.4であり、有意水準が5%である。以上の数値より検定せよ。

第7章

正規分布による検定の発展問題

正規分布による検定の発展問題

发展问题的思路: 检定的目标是 「…」 这个假说是否成立:在这个假说下，根据题目提示构造一个随机变量$\boldsymbol{U}$并且分别计算$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{U}]$和$\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{U}]$，此时$\frac{\boldsymbol{U}-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{U}]}{\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{U}]}\sim\boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})$，确认$\frac{\boldsymbol{U}-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{U}]}{\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{U}]}$实现值是否在相对中间的区域

問題5　サイコロを360回投げ、1の目が73回出た。このサイコロは1の目が出やすいかどうか、有意水準5%で正規分布により検定せよ。ただし、$\sqrt{50} \approx 7$とする。

第8章

t検定

t検定

例6　ある機械の寿命の平均は150時間である。今、新型の機械が開発されて、機械の性能が改良されたが、寿命が変化するかどうかについて不明である。新型機械$n = 10$個を無作為に選び、その寿命を計測したところ、平均$\bar{x} = 160$、不偏標本分散$s^2 = 12^2$である。有意水準$\alpha = 5\%$で検定せよ。

t検定

例6の解:

1. 帰無仮説　$\mu = 150$
   対立仮説　$\mu \neq 150$

t分布表：$X \sim t(k)$

$$\alpha = P(X > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

k (自由度) \ α	.10	.05	.025	.010	.005
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	$\boxed{2.2622}$	2.8214	3.2498

2. 検定統計量の実現値を計算する

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{160 - 150}{\sqrt{12^2/10}} \approx 2.64$$

3. 有意水準$\alpha = 5\%$で、自由度が9であるため、臨界値2.26

4. $|t| = 2.64 > 2.26$ より、帰無仮説は棄却する。

結論:　新型の寿命が変化すると言える。

片側t検定

例7　ある機械の寿命の平均は150時間である。今、新型の機械が開発されて、機械の性能が改良されたが、寿命が<u>長くなる</u>かどうかについて不明である。新型機械$n=10$個を無作為に選び、その寿命を計測したところ、平均$\overline{x}=160$、不偏標本分散$s^2=12^2$である。有意水準$\alpha=1\%$で検定せよ。

問題6　ある企業は新タイプの電池を開発した。そこで、無作為に21個の電池を選んで、電池の寿命に関するデータ$x_1, x_2, \ldots, x_{21}$を集めたところ、結果は下記の通りであった。

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{21} = 2310$$

$$(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_{21} - \overline{x})^2 = 10500$$

ただし、$\overline{x} = \frac{1}{21}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{21})$

旧タイプの電池の寿命が100時間である。このとき、新タイプの電池の寿命が延びたかどうかについて検定せよ。ただし、有意水準を5%とする。