

筆答専門試験科目（午前）  
システム制御系（数学）

2023 大修

時間 9：30～11：30

**注意事項**

1. 問題 1 から問題 4 まで，すべてについて解答せよ。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開かないこと。
3. 解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。  
各答案用紙の裏面も解答に使用してよいが，ひとつの問題は 1 枚に収めること。
4. 解答開始の合図があったら，各答案用紙の受験番号欄に受験番号を，解答欄左上にその  
答案用紙で解答する問題番号を，試験科目名欄に科目名「システム制御系（数学）」を  
記入せよ。なお，答案用紙に氏名は書かないこと。
5. 提出時には，答案用紙を使わなかった分も含め全て提出すること。

(このページは落丁ではありません。問題は次ページ以降に記載されています。)

## 問題 1

問 1 以下の問に答えよ。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log_e(1+x)}{x^2}$$

(2) 実数  $x, y, z$  が  $xy + yz + zx = k^2$  (ただし,  $x > 0, y > 0, z > 0, k > 0$ ) を満たすとき,  $xyz$  の最大値を求めよ。

問 2 次の実関数  $f(t)$  (ただし,  $t > 0$ ) について, 以下の問に答えよ。

$$f(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos \omega \tau d\tau$$

(1)  $f(t)$  のラプラス変換  $F(s)$  を求めよ。ラプラス変換は次式で定義される。ただし,  $\operatorname{Re}(s) > 0$  とする。 $\operatorname{Re}(s)$  は複素数  $s$  の実部を表す。

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

(2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  を求めよ。

問 3 3次元空間に直交座標系  $O\text{-}xyz$  をとる。 $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h(1-x-y)$  で定められる立体  $C$  について, 以下の問に答えよ。ただし,  $h \geq 0$  とする。

(1) 立体  $C$  のうち,  $x \geq 0, y \geq 0$  で定められる領域の体積  $V_1$  を求めよ。

(2) 立体  $C$  の体積  $V_2$  を求めよ。

(問題 1 終わり)

## 問題 2

**問 1** 2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  について、以下の問に答えよ。

- (1)  $A$  の固有値とこれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ。固有ベクトルは大きさが 1 になるように正規化せよ。
- (2)  $A$  について、 $A^n$  ( $n$  は自然数) を求めよ。

**問 2** 図 1 のように、ある点が角速度  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) で 3 次元空間内を等速円運動している。回転軸は原点  $O$  を通るとし、その方向を単位ベクトル  $p$  で表す。この回転する点の時刻  $t$  における位置を  $x(t)$  とおく。 $x(t)$  における点の速度を、3 次正方行列  $C$  を用いて  $dx(t)/dt = Cx(t)$  と表す。 $C$  を  $p = (p_1, p_2, p_3)^T$  の要素  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と角速度  $\omega$  を用いて表せ。ただし、行列  $A$  の転置を  $A^T$  と表す。

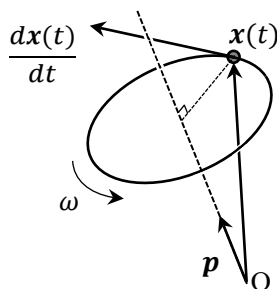


図 1

**問 3**  $X$  は実交代行列であるとする。実交代行列とは実数からなる正方行列で、 $X^T = -X$  を満たすものをいう。 $Y = \exp(X)$  について、以下の問に答えよ。答えだけでなく導出も示すこと。ただし、 $\exp(X)$  は次式で表される。

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

- (1)  $Y$  の行列式  $\det(Y)$  を求めよ。ただし、実交代行列は対角化可能で、その非零の固有値は全て純虚数であり、 $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots$  のようにペアの形で求まることを用いてよい。
- (2)  $YY^T$  および、 $Y^TY$  を求めよ。

(問題 2 終わり)

### 問題 3

- 問 1** 確率密度関数  $p(x)$  をもつ確率変数  $X$  に対して、モーメント母関数  $M(\theta)$  は、変数  $\theta$  を用いて、次式で定義される。

$$M(\theta) = E[\exp(\theta X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\theta x) p(x) dx$$

また、 $N(\mu, \sigma^2)$  は、平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  の正規分布を表し、その確率密度関数  $p_N(x)$  は次式で定義される。以下の問に答えよ。

$$p_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- (1)  $N(\mu, \sigma^2)$  のモーメント母関数を  $M_N(\theta)$  としたとき、次式を導出せよ。

$$M_N(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)$$

- (2)  $X_1, X_2$  はそれぞれ、正規分布  $N(\mu_1, \sigma_0^2), N(\mu_2, \sigma_0^2)$  に従う独立な確率変数である。また、 $Y = X_1 + X_2$ 、 $Z = X_1 - X_2$  のモーメント母関数  $M_Y(\theta)$ 、 $M_Z(\theta)$  は、

$$M_Y(\theta) = \exp(\theta^2), \quad M_Z(\theta) = \exp\left(\frac{4}{3}\theta + \theta^2\right)$$

で与えられる。このとき、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_0^2$  を求めよ。

- 問 2** 事象  $A$ 、 $B$  の事前（周辺）確率  $P(A)$ 、 $P(B)$ 、および条件付確率  $P(B|A)$ 、 $P(A|B)$  が与えられたとき、ベイズの定理を用いれば、これらの関係は次式で表される。以下の問に答えよ。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- (1) ある病気がパンデミックを引き起こし、人口の半数が罹患する状況となった。この病気に対し、検査薬  $X$  が開発された。検査薬  $X$  は罹患者の 60% を陽性と判定できる一方、罹患していない人の 4% は誤って陽性と判定される。検査薬  $X$  で陽性と判定された場合に実際に罹患している確率を求めよ。
- (2) その後、パンデミックがおさまリ、罹患者は人口の 5% に低下した。この場合、検査薬  $X$  を用いて 90% 以上の確率で陽性と判定されるためには、検査薬  $X$  で初回から何回連続して陽性と判定される必要があるかを理由とともに示せ。ただし、各回の検査は独立であると仮定する。

(問題 3 終わり)

#### 問題 4

問 1 次の実関数  $u(t)$  に関する微分方程式の解を求めよ。ただし  $u(0) = 0$  とする。

$$\frac{du}{dt} = 6u - 7e^{2t}$$

問 2 次の実関数  $u_1(t), u_2(t)$  に関する連立微分方程式の解を求めよ。ただし  $u_1(0) = \frac{37}{3}, u_2(0) = \frac{5}{3}$  とする。

$$\frac{du_1}{dt} = 6u_1 + 4u_2 - 7e^{2t}$$

$$\frac{du_2}{dt} = 2u_1 + 4u_2 - 5e^{2t}$$

(問題 4 終わり)

筆答専門試験科目（午前）  
システム制御系（数学）

2023 大修

時間 9：30～11：30

追試験

これ以降は、追試験の問題です。システム制御系では、系の方針により、  
2023年4月入学追試験の過去問題も公開しております。

**注意事項**

1. 問題 1 から問題 4 まで、すべてについて解答せよ。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開かないこと。
3. 解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。  
各答案用紙の裏面も解答に使用してよいが、ひとつの問題は 1 枚に収めること。
4. 解答開始の合図があったら、各答案用紙の受験番号欄に受験番号を、解答欄左上にその  
答案用紙で解答する問題番号を、試験科目名欄に科目名「システム制御系（数学）」を  
記入せよ。なお、答案用紙に氏名は書かないこと。
5. 提出時には、答案用紙を使わなかった分も含め全て提出すること。

(このページは落丁ではありません。問題は次ページ以降に記載されています。)



## 問題 1

問 1 以下の問に答えよ。

- (1) 次の関数  $y(x)$  の導関数  $\frac{d}{dx}y(x)$  を求めよ。

$$y(x) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$$

- (2)  $xy$  平面内で次式で表される曲線の長さを求めよ。ただし、 $a$  は正の定数、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$  とする。

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos \theta)$$

- (3) 複素数  $z$  について、以下の不等式を満たす実数  $a, b, c, d$  の必要十分条件を求めよ。  
ただし、 $|cz + d| \neq 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) > 0$  を満たすものとする。 $\operatorname{Im}(z)$  は  $z$  の虚部を示す。

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) > 0$$

問 2 3次元空間に直交座標系  $O-xyz$  をとる。

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq z$ ,  $x^2 + y^2 \leq c^2$ ,  $z \geq 0$  で定められる領域の体積を求めよ。ただし、  
 $a, b, c$  は正の実定数とする。

(問題 1 終わり)

## 問題 2

問 1  $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  とする。

- (1)  $P^{-1}AP$  を求めよ。ただし,  $P^{-1}$  は  $P$  の逆行列を表す。
- (2)  $A^n$  ( $n$  は自然数) を求めよ。

問 2  $m \times n$  行列  $W$ ,  $n$  次元ベクトル  $x$ ,  $m$  次元ベクトル  $b$  を用いて次式で与えられる連立一次方程式について, 以下の問に答えよ。ただし,  $m, n$  は自然数である。

$$Wx = b$$

- (1)  $a$  を実数として,  $W = \begin{pmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ a^3 & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  とする。 $Wx = b$  が一つ以上の解を持つのは  $a$  がどのような値のときか,  $a$  の条件を述べよ。
- (2) (1)で,  $Wx = b$  の解が一意に定まらない場合について, 解を一般的な形で表せ。
- (3)  $m > n$  の場合, 一般に  $Wx = b$  を満たす解は存在しない。そこで,

$$L(x) = \frac{1}{2} \|Wx - b\|^2$$

を最小にする  $x$  を  $Wx = b$  の近似解として求めたい。ただし,  $\|a\|$  は  $a$  のユークリッドノルムである。今,  $W$  のランクが  $n$  であるとする。 $L(x)$  を最小にする  $x$  を,  $W$  や  $b$  を用いて表せ。

(問題 2 終わり)

### 問題 3

T 工業大学のエヌ氏は、個人の幸福度を計測できる 2 種類のセンサ H と  $\Omega$  を開発した。センサ H は、1000 回を 1 セットとした幸福度計測を、計測対象者の幸福度が変化しないとみなせる短時間で、かつ非接触で実施できる。この際、各回の計測は正規分布に従う誤差を伴うことが分かっている。一方、センサ  $\Omega$  は接触型センサではあるが、1 回で幸福度の正確な計測が可能である。エヌ氏は、研究室の学生 1 名に対し、これら 2 種類のセンサを用いて、同時に幸福度を計測する実験を行った。この実験について、以下の間に答えよ。なお、幸福度はスカラーの実数値として計測され、その単位は Bh とする。

**問 1** センサ H の計測結果 1 セット分から無作為抽出した 5 回分の標本 (ID: 1~5) を表 1 に示す。

(1) 標本平均、および不偏分散（標本不偏分散）を求めよ。

(2) 母平均、および母分散の最尤推定値を求めよ。

いずれも、必要に応じて四捨五入して、小数点以下第 1 位までの値で答えよ。

**問 2** センサ  $\Omega$  の計測結果は 24.0 [Bh] であった。センサ  $\Omega$  は真値を出力すると仮定し、センサ H が正しく幸福度を計測しているといえるか、適切な検定方法を用いて、有意水準  $\alpha = 0.05$  で検定せよ。必要に応じて、表 A~C に記載の標準正規分布、 $t$  分布、 $\chi^2$  分布のパーセント点表を用いよ。

表 1 無作為抽出標本

ID	幸福度 [Bh]
1	14.0
2	17.0
3	3.0
4	25.0
5	1.0

表 B 自由度  $n$  の  $t$  分布パーセント点

$n$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$
1	12.706	6.314
2	4.303	2.920
3	3.182	2.353
4	2.776	2.132
5	2.571	2.015

表 A 標準正規分布パーセント点

$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$
1.96	1.64

表 C 自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布パーセント点

$n$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$
1	5.024	3.841
2	7.378	5.991
3	9.348	7.815
4	11.143	9.488
5	12.833	11.071

(問題 3 終わり)

## 問題 4

2つの独立変数  $x, y$  の関数  $u(x, y)$  が以下の偏微分方程式および境界条件を満たすとする。

偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3) \quad (1)$$

境界条件

$$u(0, y) = u(2, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq 3)$$

$$u(x, 3) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq 2)$$

ここで  $f(x)$  は  $x$  の関数である。 $u(x, y)$  を求めたい。以下の問に答えよ。なお  $u(x, y)$  は恒等的に 0 ではない。

**問 1**  $x$  のみの関数  $g(x)$  および  $y$  のみの関数  $h(y)$  を考え、 $u = g(x)h(y)$  を仮定し、式(1)に代入すると

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)}$$

となるが、この左辺および右辺はそれぞれ  $x$  のみおよび  $y$  のみの関数であるので、この左辺および右辺は定数となる。この定数を  $\lambda$  としたとき、 $\lambda$  が負になることを証明せよ。

**問 2** 以下は  $u(x, y)$  を求める手順を述べたものである。①～③の空欄に当てはまる数式を答えよ。

偏微分方程式(1)の解は、

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n g_n(x) h_n(y) \quad (2)$$

の形で書けるとする。ただし  $n$  は整数である。 $g_n(x)$  は、問 1 の結果と、境界条件  $g(0) = g(2) = 0$  から、 $g_n(x) = \boxed{\text{①}}$  と求まる (ただし全体にかかる任意係数は省略)。 $h_n(y)$  については、同じく全体にかかる任意係数は省略した形で、 $h_n(y) = \sinh(\boxed{\text{②}})$  と求まる。さらに、式(2)の係数  $C_n$  を求めるためには、境界条件の  $f(x)$  を式(2)のような形に置き換えればよい。そこで、 $f(x)$  を区間  $[-2, 2]$  で 1 周期として  $(-\infty, \infty)$  まで接続し、境界条件も考慮してフーリエ級数展開すると、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{2} \int_0^2 f(\tau) \sin \frac{n\pi \tau}{2} d\tau \quad (3)$$

を得る。式(2)と式(3)を見比べれば、 $C_n = \boxed{\text{③}}$  と求まり、 $u(x, y)$  が求まる。

(問題 4 終わり)