# Тема 6. Алгоритмы на графах

## 6.8. Фундаментальное множество циклов

Пусть $T = (V, E_T)$ – остовное дерево неориентированного графа $G = (V, E)$. Если к остовному дереву $T$ добавить произвольное ребро $e \in E - E_T$, то полученный подграф $(V, E_T \cup \{e\})$ содержит точно один цикл. Такой цикл является элементом *фундаментального множества* циклов графа $G$ относительно дерева $T$. Известно, что каждое остовное дерево графа $G$ включает $|V| - 1$ ребер. Следовательно, в фундаментальном множестве циклов относительно любого остовного дерева графа $G$ имеется $|E| - |V| + 1$ циклов. Важной особенностью любого цикла из фундаментального множества является то, что он содержит только одно ребро из множества $E - E_T$ и более это ребро не присутствует ни в одном другом цикле фундаментального множества.

Полезность отыскания фундаментального множества циклов обусловлена тем, что это множество полностью определяет циклическую структуру графа, т. е. любой цикл в графе может быть представлен комбинацией циклов из фундаментального множества. Для этого используется операция *симметрической разности*, которая для произвольных множеств $A$ и $B$ определяется следующим образом:

$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Пусть $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_{|E|-|V|+1}\}$ – фундаментальное множество циклов, где каждый цикл $C_i$ является подмножеством ребер графа $G$, т. е. $C_i \subseteq E$. Тогда произвольный цикл $C$ графа $G$ можно однозначно представить как симметрическую разность некоторого числа циклов фундаментального множества, т. е. $C = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \ldots \oplus C_{i_t}$. Следует обратить внимание на то, что цикл фундаментального множества нельзя выразить через симметрическую разность других циклов множества. На рис. 6.9 показаны граф (*а*), его остовное дерево (*б*) и фундаментальное множество циклов относительно этого дерева (*в*). Например, цикл $(a, f, b, a)$ есть $C_1 \oplus C_2$, а цикл $(b, c, d, g, f, b)$ есть $C_2 \oplus C_3 \oplus C_4$. Следует отметить, что не каждая такая симметрическая разность является циклом. Например, $C_2 \oplus C_4$ состоит из двух не связанных между собой циклов.

Очевидным подходом к нахождению фундаментального множества циклов является использование поиска в глубину, который строит остовное дерево (*DFS*-дерево), и каждое обратное ребро порождает цикл относительно этого дерева. Когда поиск в глубину достигает обратного ребра $(v, w)$, цикл состоит из ребер дерева, идущих от вершины $w$ к вершине $v$, и обратного ребра $(v, w)$. Ясно, что для хранения пути от $w$ к $v$ необходим стек, т. е. стек всегда содержит последовательность вершин из пути, идущего от корня к исследуемой в данный момент вершине. Поэтому, если анализируемое ребро $(v, w)$ является обратным ребром остовного дерева, то цикл будет состоять из ребра $(v, w)$ и ребер, соединяющих вершины из верхней группы элементов стека, начиная с вершины $v$. При этом верхняя группа элементов не должна удаляться из стека, поскольку одно и то же ребро может входить во многие циклы.

Рассмотренный метод построения фундаментального множества циклов $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_{|E|-|V|+1}\}$ неориентированного графа $G = (V, E)$ представлен алгоритмом 6.17. Операции со стеком $S$ используют индексацию элементов стека для реализации доступа к верхней группе элементов без удаления их из стека, т. е. операции детализированы до уровня работы с указателем $t$ вершины стека.

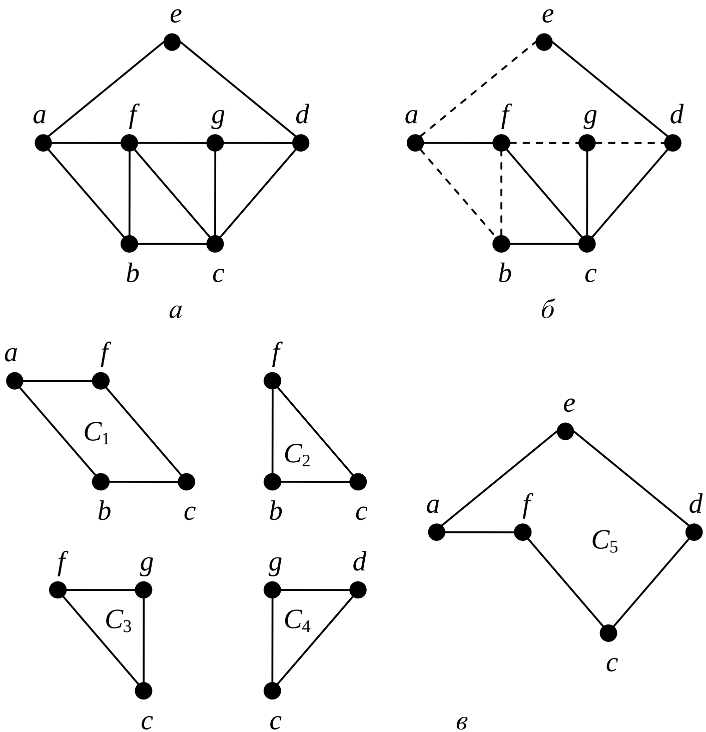
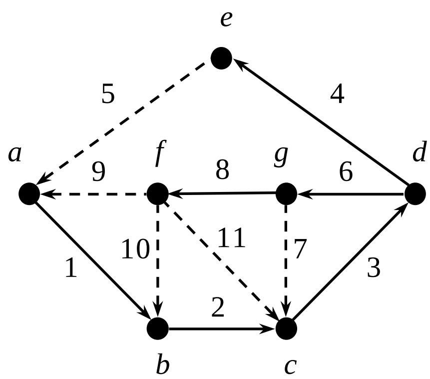



Рис. 6.9. Фундаментальное множество циклов графа:
*а* – неориентированный граф; *б* – остовное дерево графа; *в* – фундаментальные циклы графа

```
i ← j ← t ← 0
// j – номер цикла C_j, t – указатель вершины стека S
S ← ∅    // стек S пуст
for x ∈ V do num(x) ← 0    // инициализация
for x ∈ V do if num(x) = 0 then CYCLE (x, 0)

procedure CYCLE (v, u)
    i ← i + 1
    num(v) ← i
    t ← t + 1
    S_t ← v    // поместить v в вершину стека S
    for w ∈ Adj(v) do
        if num(w) = 0
            then { CYCLE (w, v)
                 { t ← t − 1    // исключить элемент из стека S
            else if num(w) < num(v) and w ≠ u
                  { // (v, w) – обратное ребро
                  { j ← j + 1
              then{ // сохранить полученный цикл в C_j
                  { C_j ← (w, S_t, S_{t−1}, ..., S_k)
                  { // здесь S_k = w, а S_t = v
return
```

Алгоритм 6.17. Нахождение фундаментального множества циклов графа




| $v$ | Adj($v$) |
|---|---|
| $a$ | $b, e, f$ |
| $b$ | $a, c, f$ |
| $c$ | $b, d, f, g$ |
| $d$ | $c, e, g$ |
| $e$ | $a, d$ |
| $f$ | $a, b, c, g$ |
| $g$ | $c, d, f$ |

Сформированные циклы:

$C_1 = (a, e, d, c, b, a)$; $C_2 = (c, g, d, c)$; $C_3 = (a, f, g, d, c, b, a)$; $C_4 = (b, f, g, d, c, b)$; $C_5 = (c, f, g, d, c)$.

Вычислительная сложность алгоритма, не считая операции сохранения циклов $C_j$, как и во всех алгоритмах, основанных на поиске в глубину, равна $O(|V| + |E|)$. Дополнительно необходимо учесть следующее. В цикле **for** каждое ребро $(v, w)$ просматривается дважды, но одно и то же ребро входит во многие циклы $C_j$, т. е. на самом деле просматривается много раз. Таким образом, число операций равно $O(|V| + |E| + l)$, где $l$ – суммарная длина всех порожденных циклов. Величина $l$ зависит от графа и от порядка вершин в списках смежностей. Поскольку каждый цикл имеет длину не более, чем $|V| - 1$, то очевидно, что $l \le (|V| - 1)(|E| - |V| + 1)$, т. е. $l = O(|V||E|)$. Общая сложность алгоритма равна $O(|V||E| + |V| + |E|)$ или $O(|V||E|)$.