Тема 2. СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

2.5. Деревья

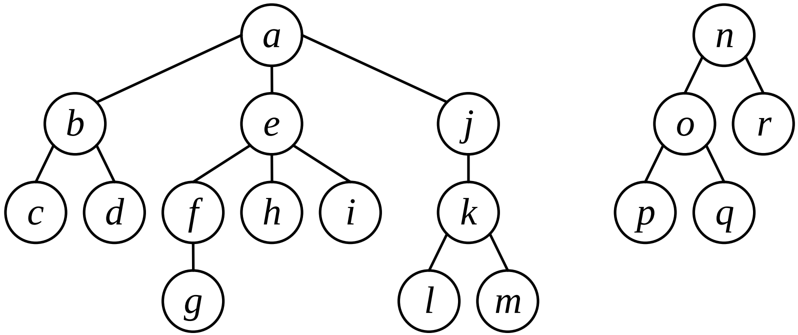
2.5.3. Прохождения деревьев

Во многих приложениях необходимо пройти лес, обрабатывая вершины каким-либо способом (в простейшем случае – печать содержимого узла) в некотором систематическом порядке. Предполагается, что при посещении вершин структура леса не меняется. Рассмотрим четыре основных способа прохождения: в прямом, обратном, горизонтальном и симметричном (обычно определен только для бинарных деревьев) порядках.

При прохождении в *прямом* порядке (известном также как прохождение *в глубину*), вершины леса просматриваются в соответствии со следующей рекурсивной процедурой:

1. Посетить корень первого дерева.
2. Пройти в прямом порядке поддеревья первого дерева, если они есть.
3. Пройти в прямом порядке оставшиеся деревья, если они есть.

Для леса на рис. 2.12 вершины будут проходиться в следующем порядке: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*.



Для бинарных деревьев эта процедура упрощается и выглядит следующим образом (пустое дерево проходится без выполнения каких-либо действий):

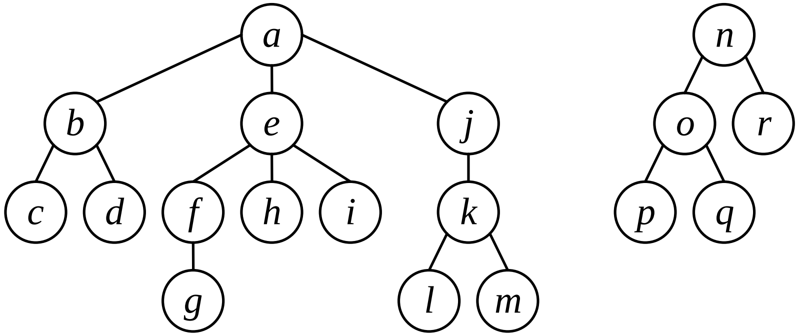
1. Посетить корень.
2. Пройти в прямом порядке левое поддерево.
3. Пройти в прямом порядке правое поддерево.

Следует обратить внимание на то, что прохождение леса в прямом порядке в точности соответствует прямому прохождению бинарного дерева, являющегося его представлением.

При *обратном* прохождении (известном также как прохождение *снизу вверх*) вершины леса проходятся в соответствии со следующей рекурсивной процедурой:

1. Пройти в обратном порядке поддеревья первого дерева, если они есть.
2. Посетить корень первого дерева.
3. Пройти в обратном порядке оставшиеся деревья, если они есть.

Следует обратить внимание на то, что в момент посещения произвольной вершины все ее потомки уже пройдены. Для леса, изображенного на рис. 2.12, вершины проходятся в следующем порядке: *c*, *d*, *b*, *g*, *f*, *h*, *i*, *e*, *l*, *m*, *k*, *j*, *a*, *p*, *q*, *o*, *r*, *n*.



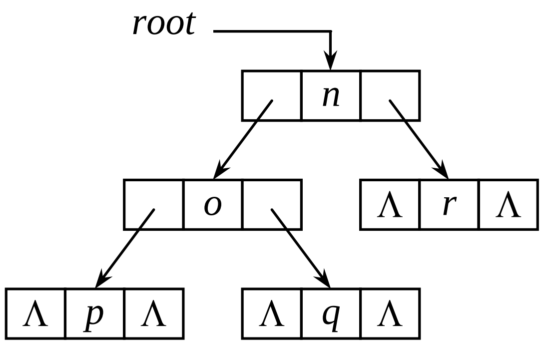
Для бинарных деревьев процедура имеет такой вид:

1. Пройти в обратном порядке левое поддерево.
2. Пройти в обратном порядке правое поддерево.
3. Посетить корень.

Симметричный порядок прохождения бинарных деревьев определяется следующим образом:

1. Пройти в симметричном порядке левое поддерево.
2. Посетить корень.
3. Пройти в симметричном порядке правое поддерево.

Для бинарного дерева на рис. 2.13 вершины будут проходиться в следующем порядке: *p*, *o*, *q*, *n*, *r*. Следует обратить внимание на то, что обратный порядок прохождения леса эквивалентен симметричному порядку прохождения соответствующего этому лесу бинарного дерева.

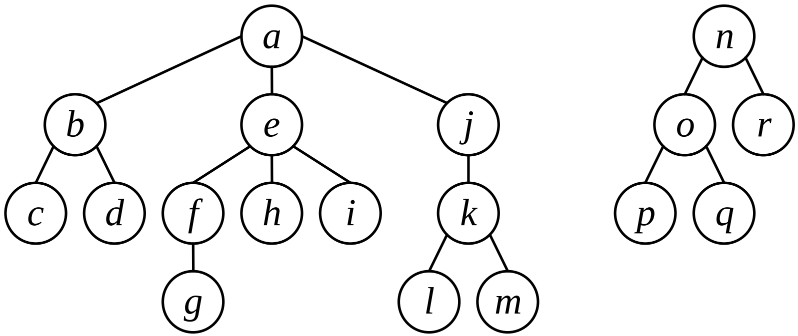


Рекурсивные процедуры прохождения бинарных деревьев очевидным образом можно записать в виде соответствующего псевдокода, например рекурсивная процедура прямого прохождения представлена алгоритмом 2.7.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{procedure } PREORDER(p) \\
\quad \textbf{if } \ p \neq \Lambda \ \textbf{ then} \begin{cases} visit\,(p) \\ PREORDER(p.left) \\ PREORDER(p.right) \end{cases} \\
\textbf{return}
\end{array}
$$

Алгоритм 2.7. Рекурсивная процедура прямого прохождения бинарного дерева

Прохождение леса в *горизонтальном* порядке (известном также как прохождение *в ширину*) заключается в следующем. Вершины леса проходятся слева направо уровень за уровнем от корня вниз. Для леса, показанного на рис. 2.12, вершины проходятся так: a, n, b, e, j, o, r, c, d, f, h, i, k, p, q, g, l, m.



Если все вершины дерева пронумеровать в порядке посещения, то рассмотренные прохождения обладают рядом интересных свойств.

При нумерации в прямом порядке все вершины поддерева с корнем r имеют номера, не меньшие r. Если D_r – множество потомков вершины r (включая и саму вершину r), то v будет номером некоторой вершины из D_r тогда и только тогда, когда $r \le v < r + |D_r|$. Поставив в соответствие каждой вершине v ее номер в прямом порядке и количество ее потомков, легко определить, является ли некоторая вершина w потомком для v, за фиксированное время, не зависящее от размера дерева.

Номера, соответствующие обратному порядку, обладают аналогичным свойством.

Номера вершин бинарного дерева, соответствующие симметричному порядку, обладают тем свойством, что номера вершин в левом поддереве для вершины v меньше v, а в правом поддереве – больше v.

При сравнении рекурсивных процедур прохождения бинарных деревьев обнаруживается значительное их сходство. Это сходство позволяет построить общий нерекурсивный алгоритм, который может быть применен к каждому из этих прохождений. Для этого используется стек S для хранения пар, состоящих из указателя на узел бинарного дерева и целого i, значение которого указывает номер применяемой операции, когда пара достигнет вершины стека. Анализ процедур прохождения позволяет выделить три типа операций: посетить корень ($visit(p)$, где p – указатель на текущий узел), перейти к левому поддереву, что соответствует операции

$$\textbf{if } p.left \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow (p.left, 1),$$

и перейти к правому поддереву, что соответствует операции

$$\textbf{if } p.right \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow (p.right, 1).$$

Тогда общую процедуру прохождения бинарного дерева можно представить алгоритмом 2.8 [21].

$S \leftarrow \varnothing$ // пустой стек

$S \Leftarrow (root, 1)$

$$
\textbf{while } S \neq \varnothing \textbf{ do} \begin{cases} (p, i) \Leftarrow S \\ \textbf{case} \begin{cases} i = 1: \begin{cases} S \Leftarrow (p, 2) \\ \text{операция 1} \end{cases} \\ i = 2: \begin{cases} S \Leftarrow (p, 3) \\ \text{операция 2} \end{cases} \\ i = 3: \ \text{операция 3} \end{cases} \end{cases}
$$

Алгоритм 2.8. Общий нерекурсивный алгоритм прохождения бинарного дерева

Непосредственная конкретизация общего нерекурсивного алгоритма для прохождения бинарного дерева в прямом порядке приведет к алгоритму 2.9.

$$
\begin{array}{l}
S \leftarrow \varnothing \quad \text{// пустой стек} \\
S \Leftarrow (root, 1) \\
\textbf{while } S \neq \varnothing \textbf{ do} \begin{cases}
(p, i) \Leftarrow S \\
\textbf{case} \begin{cases}
i = 1: \begin{cases} S \Leftarrow (p, 2) \\ \text{операция 1} \end{cases} \\
i = 2: \begin{cases} S \Leftarrow (p, 3) \\ \text{операция 2} \end{cases} \\
i = 3: \ \text{операция 3}
\end{cases}
\end{cases}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
S \leftarrow \varnothing \quad \text{// пустой стек} \\
S \Leftarrow (root, 1) \\
\textbf{while } S \neq \varnothing \textbf{ do} \begin{cases}
(p, i) \Leftarrow S \\
\textbf{case} \begin{cases}
i = 1: \begin{cases} S \Leftarrow (p, 2) \\ visit\,(p) \end{cases} \\
i = 2: \begin{cases} S \Leftarrow (p, 3) \\ \textbf{if } \ p.left \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow (p.left, 1) \end{cases} \\
i = 3: \ \textbf{if } \ p.right \neq \Lambda \\
\qquad\qquad \textbf{then } S \Leftarrow (p.right, 1)
\end{cases}
\end{cases}
\end{array}
$$

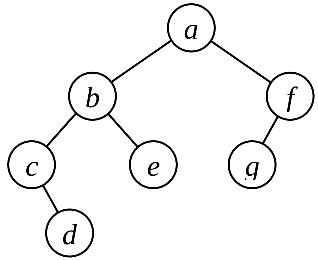
Алгоритм 2.9. Конкретизация общего алгоритма для прямого прохождения

Очевидно, что полученный алгоритм неэффективен. В частности, после прохождения узла p (узла, на который указывает указатель p), когда $(p, 2)$ или $(p, 3)$ попадают в вершину стека, единственное, что происходит, это $(p.left, 1)$ или $(p.right, 1)$ помещаются в стек. Эти шаги можно сделать раньше, когда в первый раз посещается узел p; тогда отпадает необходимость трехкратного включения в стек указателя на каждый узел и, следовательно, сохранения в стеке номера i выполняемой операции. Поэтому этот алгоритм можно существенно упростить (алгоритм 2.10).

$$
\begin{array}{l}
S \leftarrow \varnothing \quad \text{// пустой стек} \\
S \Leftarrow root \\
\textbf{while } S \neq \varnothing \textbf{ do} \begin{cases} p \Leftarrow S \\ visit(p) \\ \textbf{if } p.right \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow p.right \\ \textbf{if } p.left \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow p.left \end{cases}
\end{array}
$$

Алгоритм 2.10. Упрощенный вариант алгоритма 2.9

p	стек S	$Visit$	Операторы
	a		$S \Leftarrow root$
a		a	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
a	fb	a	$S \Leftarrow p.right$; $S \Leftarrow p.left$
b	f	ab	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
b	fec	ab	$S \Leftarrow p.right$; $S \Leftarrow p.left$
c	fe	abc	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
c	fed	abc	$S \Leftarrow p.right$
d	fe	$abcd$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
e	f	$abcde$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
f		$abcdef$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
f	g	$abcdef$	$S \Leftarrow p.left$
g		$abcdefg$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$



$S \leftarrow \varnothing$ // пустой стек

$S \Leftarrow root$

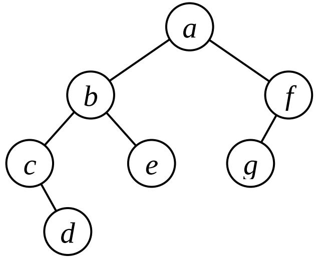
$$\textbf{while } S \neq \varnothing \textbf{ do} \begin{cases} p \Leftarrow S \\ visit(p) \\ \textbf{if } p.right \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow p.right \\ \textbf{if } p.left \neq \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow p.left \end{cases}$$

Для полученного алгоритма можно продолжить процесс улучшений. В алгоритме указатель на каждый узел помещается в стек точно один раз. Однако можно сократить число операций со стеком. Если внимательно проанализировать процедуру прямого прохождения, то можно обнаружить, что в стек достаточно помещать только указатели на правых сыновей (если они есть), а по левым сыновьям продолжать продвижение, используя для этого рабочий указатель *p* (алгоритм 2.11).

$$
\begin{array}{l}
S \Leftarrow \Lambda \quad \text{// занести в стек пустое значение указателя} \\
p \leftarrow root \\
\textbf{while } p \ne \Lambda \textbf{ do} \begin{cases} visit(p) \\ \textbf{if } p.right \ne \Lambda \textbf{ then } S \Leftarrow p.right \\ \textbf{if } p.left \ne \Lambda \textbf{ then } p \leftarrow p.left \textbf{ else } p \Leftarrow S \end{cases}
\end{array}
$$

Алгоритм 2.11. Прямое прохождение бинарного дерева

p	стек S	*Visit*	Операторы
	Λ		$S \Leftarrow \Lambda$
a	Λ	a	$p \leftarrow root$; $visit(p)$
b	Λf	a	$S \Leftarrow p.right$; $p \leftarrow p.left$
b	Λf	ab	$visit(p)$
c	Λfe	ab	$S \Leftarrow p.right$; $p \leftarrow p.left$
c	Λfe	abc	$visit(p)$
c	Λfed	abc	$S \Leftarrow p.right$
d	Λfe	$abcd$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
e	Λf	$abcde$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
f	Λ	$abcdef$	$p \Leftarrow S$; $visit(p)$
g	Λ	$abcdefg$	$p \leftarrow p.left$; $visit(p)$
Λ		$abcdefg$	$p \Leftarrow S$



$S \Leftarrow \Lambda$ // занести в стек пустое значение указателя

$p \leftarrow root$

$$\textbf{while } p \neq \Lambda \textbf{ do} \begin{cases} visit\,(p) \\ \textbf{if } \ p.right \neq \Lambda \ \textbf{then } S \Leftarrow p.right \\ \textbf{if } \ p.left \neq \Lambda \ \textbf{then } p \leftarrow p.left \ \textbf{ else } p \Leftarrow S \end{cases}$$

Конкретизировав соответствующим образом общий алгоритм и упростив его, можно получить нерекурсивный алгоритм симметричного прохождения бинарного дерева (алгоритм 2.12).

$$
\begin{array}{l}
S \leftarrow \varnothing \quad \text{// пустой стек} \\
p \leftarrow root \\
\textbf{while}\ \ p \neq \Lambda\ \ \textbf{do} \begin{cases}
\textbf{while}\ \ p.left \neq \Lambda\ \ \textbf{do} \begin{cases} S \Leftarrow p \\ p \leftarrow p.left \end{cases} \\
visit(p) \\
\textbf{while}\ \ p.right = \Lambda\ \textbf{and}\ S \neq \varnothing\ \ \textbf{do} \begin{cases} p \Leftarrow S \\ visit(p) \end{cases} \\
p \leftarrow p.right
\end{cases}
\end{array}
$$

Алгоритм 2.12. Симметричное прохождение бинарного дерева

Для получения нерекурсивного алгоритма обратного прохождения достаточно применить соответствующую прямую конкретизацию общего алгоритма, поскольку существенных улучшений в этом случае добиться трудно.

Для реализации горизонтального прохождения бинарного дерева необходимо использовать очередь. При посещении некоторого узла его сыновья (если они есть) помещаются в очередь: сначала левый сын, а затем – правый. Детали реализации горизонтального прохождения представлены алгоритмом 2.13.

$$
\begin{array}{l}
Q \leftarrow \varnothing \quad \text{// пустая очередь} \\
Q \Leftarrow root \\
\textbf{while } \; Q \neq \varnothing \; \textbf{ do} \begin{cases} p \Leftarrow Q \\ visit(p) \\ \textbf{if} \;\; p\textbf{.}left \neq \Lambda \;\; \textbf{then} \;\; Q \Leftarrow p\textbf{.}left \\ \textbf{if} \;\; p\textbf{.}right \neq \Lambda \;\; \textbf{then} \;\; Q \Leftarrow p\textbf{.}right \end{cases}
\end{array}
$$

Алгоритм 2.13. Горизонтальное прохождение бинарного дерева

2.5.4. Прошитые бинарные деревья

С целью повышения эффективности прохождения бинарных деревьев можно использовать так называемые *прошитые* деревья. В нижней части бинарного дерева с n узлами всегда имеется $n + 1$ полей указателей со значением Λ. Можно воспользоваться этим пространством пустых значений следующим образом. Пустые значения полей *left* заменяются указателями на предшествующий узел при прохождении в симметричном порядке, а пустые значения полей *right* – на последующий узел при прохождении в симметричном порядке. Полученные таким образом связи называются *нитями*, а само бинарное дерево – *симметрично прошитым* бинарным деревом. Ясно, что в узлах должны быть предусмотрены специальные средства, чтобы отличать нити от обычных связей (например, добавить дополнительный разряд к полям *left* и *right*). Пример симметрично прошитого бинарного дерева показан на рис. 2.16 (нити изображены пунктирными линиями).

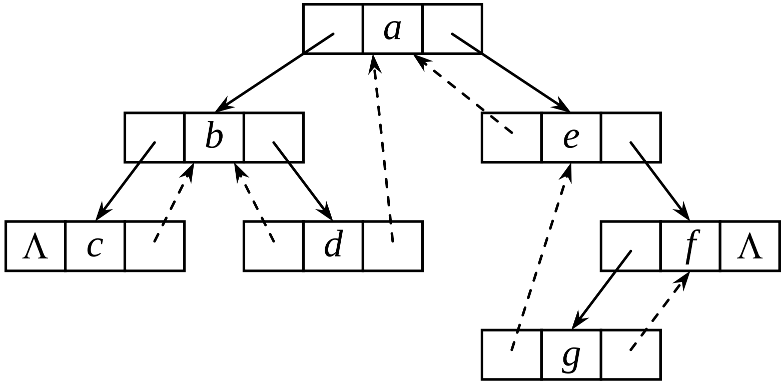


Рис. 2.16. Симметрично прошитое бинарное дерево

Симметричный порядок: *cbdaegf*

Аналогичным образом можно определить *прямопрошитые* бинарные деревья, в которых пустые поля *left* и *right* заменяются указателями соответственно на предшественников и преемников при прямом прохождении.

Наличие нитей в симметрично прошитом дереве позволяет повысить эффективность алгоритмов прохождения в прямом и симметричном порядках за счет исключения операций со стеками, т. е. эти прохождения можно реализовать без использования стека. Построение соответствующих алгоритмов предлагается в качестве упражнений.