

Enseignement Supérieur des Techniques Industrielles
COLLECTION

Précis d'électronique

Cours et exercices résolus

J.-L. Azan

Tome 1

BTS Electronique et Electrotechnique
IUT Génie Electrique



*SECTION DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
INSTITUTS UNIVERSITAIRES DE TECHNOLOGIE*

PRÉCIS D'ÉLECTRONIQUE

TOME 1

Jean-Luc AZAN

Ancien élève de l'E.N.S. Cachan

Professeur au Lycée G. Eiffel de Cachan

Professeur à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs
en Electrotechnique et Electronique



1, rue de Rome 93561 Rosny s/Bois Cedex

Avant-propos

Egalement parus aux éditions BREAL :

- Probabilités - statistiques et leurs applications de J. Trignan
- Les intégrales et leurs applications de J. Trignan
- La mécanique des fluides de M. Hanauer
- Précis d'électronique - Tome 2 de J.-L. Azan

© BRÉAL, Rosny

Toute reproduction même partielle interdite

Dépôt légal : mai 1993

ISBN : 2 85394 637 1

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41 d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » [alinéa 1^e de l'article 40].

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

Les droits d'auteur d'usage sont d'ores et déjà réservés en notre comptabilité aux auteurs des œuvres publiées dans cet ouvrage, qui malgré nos efforts, n'auraient pu être joints.

ISBN : 2 85394 845 5

« Le logo ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit tout particulièrement dans le domaine des sciences humaines et sociales [ou de sciences, techniques, médecine ; ou de droit ; ou d'enseignement], le développement massif du photocollage.

Le code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, du présent ouvrage est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 3, rue d'Hauteville, 75006 Paris) ».



Cet ouvrage d'électronique est un outil qui doit aider les étudiants à acquérir les connaissances indispensables pour analyser, comprendre et utiliser les fonctions et les systèmes techniques dans les domaines de l'électronique.

Il s'agit de deux tomes constitués de la façon suivante :

- un résumé de cours clair et synthétique qui reprend les notions de base à maîtriser ;
- des exercices avec leurs solutions détaillées qui facilitent l'assimilation des méthodes de calcul et des modèles théoriques utilisés en électronique ;
- des sujets non corrigés qui permettent à l'étudiant de tester ses connaissances de façon autonome.

Le premier tome couvre le programme de première année des Sections de Techniciens Supérieurs et des IUT d'électronique. Il est tout à fait adapté aux étudiants des BTS et IUT d'électrotechnique, des maîtrises EEA et des écoles d'ingénieurs.

Les quatre premiers chapitres présentent les méthodes et les outils d'analyse des circuits électroniques et des signaux :

- les régimes transitoires sont étudiés à l'aide des équations différentielles et en utilisant la transformée de Laplace ;
- les notions d'impédances complexes et de transmittances sont utilisées pour traiter les circuits en régime sinusoïdal permanent ;
- les séries de Fourier sont présentées de façon détaillée pour permettre l'analyse spectrale des signaux intervenant dans les systèmes électroniques.

Les trois derniers chapitres abordent des fonctions de base utilisées en électronique :

- les oscillateurs sinusoïdaux sont étudiés à travers de nombreux exemples pratiques pour mieux saisir leur fonctionnement et leur caractéristique ;

Sommaire

- le filtrage analogique traite des filtres actifs, passifs et à capacités commutées en ayant le souci de mener les calculs jusqu'aux valeurs des composants ;
- les circuits et fonctions de puissance présentent des exemples d'amplification à transistor, de convertisseurs statiques et d'alimentations à découpage.

Pour permettre aux étudiants d'assimiler ces notions fondamentales, les exercices présentés correspondent toujours à des situations que l'on rencontre dans l'étude des fonctions et des systèmes électroniques.

Certains exercices correspondent à des sujets d'examen du BTS électronique.

L'auteur remercie par avance tous les lecteurs qui lui feront part de leurs critiques et de leurs remarques constructives.

L'auteur.

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

| | |
|--|----|
| 1 – ANALYSE TEMPORELLE DES CIRCUITS ÉLECTRONIQUES ... | 9 |
| I. Dipôles passifs..... | 9 |
| 1. Dipôles passifs linéaires | 9 |
| 2. Dipôles passifs non linéaires | 10 |
| II. Générateurs électriques : composants actifs..... | 11 |
| 1. Sources de tension | 11 |
| 2. Sources de courant..... | 11 |
| 3. Signaux délivrés par les générateurs | 11 |
| <i>Exercices résolus.....</i> | 13 |
| 101 Charge d'un condensateur à l'aide d'une source de tension | 13 |
| 102 Réponse d'un circuit RC à un signal carré | 14 |
| 103 Rupture du courant dans un circuit inductif | 17 |
| 104 Etude d'un oscillateur | 19 |
| 105 Testeur du triac | 21 |
| <i>Exercices à résoudre.....</i> | 26 |
| 106 Réponse à un échelon pour un circuit R, L, C série | 27 |
| 107 Alimentation d'un générateur d'impulsions de courant par une source de tension | 28 |
| 108 Alimentation d'un moteur à courant continu | 29 |
| 109 Dipôle à capacité commutée..... | 29 |
| 110 Etude d'un circuit du second ordre associant deux condensateurs ... | 30 |
| 2 – CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOIDAL | 31 |
| I. Impédances complexes. Loi d'Ohm | 31 |
| II. Transmittances complexes ou isochrones | 32 |
| 1. Fonctions de transfert du premier ordre | 32 |
| 2. Fonctions de transfert du second ordre..... | 34 |
| <i>Exercices résolus.....</i> | 39 |
| 201 Circuit déphaseur ou passe-tout du premier ordre | 39 |
| 202 Circuit retard et avance de phase..... | 40 |
| 203 Filtre réjecteur de bande à double T | 42 |
| 204 Filtre passe-bas du second ordre à structure de Rauch | 46 |
| 205 Filtre en peigne | 48 |
| 206 Dérivateur à A.O. (première approche) | 50 |
| <i>Exercices à résoudre.....</i> | 51 |
| 207 Dérivateur à A.O. (deuxième approche)..... | 51 |
| 208 Filtre universel à A.O. | 53 |
| 209 Amplificateur à transistor : base-commune..... | 55 |
| 210 Filtre correcteur R-L-A.A | 56 |
| 3 – LES SIGNAUX PÉRIODIQUES : LA SÉRIE DE FOURIER | 57 |
| I. Théorème de Fourier | 57 |
| 1. Première expression de la série de Fourier..... | 57 |
| 2. Deuxième expression de la série de Fourier..... | 58 |
| 3. Propriétés pour le calcul pratique des séries de Fourier | 58 |

| | | |
|---|--|-----------|
| 4. | Forme exponentielle de la série de Fourier | 60 |
| 5. | Représentation graphique : spectre d'amplitude | 60 |
| II. | Valeur efficace d'un signal périodique | 61 |
| III. | Taux de distorsion harmonique | 61 |
| IV. | Réponse d'un système linéaire à un signal périodique | 61 |
| V. | Table des développements en série de Fourier des principaux signaux | 62 |
| | <i>Exercices résolus</i> | 64 |
| 301 | Opérations sur les signaux et conséquences sur les spectres | 64 |
| 302 | Circuit R, L alimenté par une tension périodique | 68 |
| 303 | Filtrage d'un signal carré par un circuit RC : obtention de la valeur moyenne | 69 |
| 304 | Spectre d'un signal sinusoïdal modulé en "tout ou rien" | 71 |
| 305 | Génération numérique de signaux | 75 |
| | <i>Exercices à résoudre</i> | 80 |
| 306 | Spectre d'un signal issu d'un conformateur à diodes | 80 |
| 307 | Etude d'une non-linéarité : saturation d'un amplificateur | 81 |
| 308 | Redressement double alternance avec filtrage inductif | 82 |
| 309 | Excitation d'un circuit sélectif par un courant périodique | 83 |
| 310 | Multiplicateur de fréquence à transistor | 84 |
| 4 – LA TRANSFORMATION DE LAPLACE | 87 | |
| I. | Définition | 87 |
| 1. | Transformée de Laplace de l'échelon | 87 |
| 2. | Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac | 87 |
| II. | Propriétés | 88 |
| 1. | Linéarité | 88 |
| 2. | Dérivation | 88 |
| 3. | Intégration | 88 |
| 4. | Théorème du retard | 88 |
| 5. | Translation dans le plan complexe | 89 |
| 6. | Théorème de la valeur finale | 89 |
| 7. | Théorème de la valeur initiale | 89 |
| III. | Table des transformées de Laplace | 89 |
| IV. | La transformée inverse de Laplace | 90 |
| 1. | Décomposition en éléments simples | 90 |
| 2. | Développement de Heaviside | 91 |
| V. | Impédance opérationnelle | 91 |
| 1. | Définition | 91 |
| 2. | Résistance | 92 |
| 3. | Inductance | 92 |
| 4. | Capacité | 92 |
| VI. | Fonctions de transfert : transmittances isomorphes | 93 |
| 1. | Définitions | 93 |
| 2. | Réponse impulsionnelle | 93 |
| 3. | Réponse harmonique : transmittance isochrone | 93 |
| 4. | Stabilité d'une fonction de transfert | 94 |
| | <i>Exercices résolus</i> | 95 |
| 401 | Réponse à un échelon de tension pour un circuit R, C série | 95 |
| 402 | Oscillateur L, C | 97 |

| | | |
|---|---|------------|
| 403 | Réponse à un échelon pour un circuit du second ordre | 99 |
| 404 | Réponse à un créneau bref pour un circuit R, C | 100 |
| 405 | Etude de la charge du diviseur capacitif | 102 |
| | <i>Exercices à résoudre</i> | 104 |
| 406 | La sonde d'oscilloscope | 104 |
| 407 | Etude temporelle d'un régulateur Proportionnelle, Intégrale et Dérivée | 106 |
| 408 | Etude d'un convertisseur tension-courant à A.O. | 107 |
| 409 | Réponse à un signal triangulaire pour un circuit C - R | 109 |
| 410 | Réponse à une rampe pour un circuit du second ordre | 109 |
| 5 – LES OSCILLATEURS SINUSOIDAUX | 111 | |
| I. | Définition | 111 |
| II. | Structure d'un oscillateur sinusoïdal | 111 |
| III. | Condition d'entretien des oscillations | 111 |
| IV. | Démarrage et stabilisation de l'amplitude des oscillations | 112 |
| | <i>Exercices résolus</i> | 114 |
| 501 | Oscillateur à réseau déphaseur | 114 |
| 502 | Oscillateur de type Hartley utilisant un TEC | 115 |
| 503 | Etude d'un oscillateur sinusoïdal de type "Colpitts" | 118 |
| 504 | Oscillateur à circuit résonnant | 122 |
| 505 | Oscillateurs à quartz à cellule en π | 127 |
| | <i>Exercices à résoudre</i> | 130 |
| 506 | Oscillateur à pont de Wien stabilisé en amplitude | 130 |
| 507 | Oscillateurs à varicaps | 132 |
| 508 | Oscillateur à réseau triphasé | 133 |
| 509 | Oscillateur à réseau déphaseur utilisant une CTN | 134 |
| 510 | Oscillateur de type Clapp | 134 |
| 6 – NOTIONS SUR LE FILTRAGE ANALOGIQUE | 137 | |
| I. | Gabarit d'un filtre passe-bas | 137 |
| II. | Normalisation | 137 |
| 1. | Normalisation des fréquences | 138 |
| 2. | Normalisation des composants | 138 |
| 3. | Exemple d'un circuit normalisé | 138 |
| III. | Filtres passe-bas de Butterworth | 139 |
| IV. | Filtres passe-haut | 140 |
| 1. | Gabarit d'un filtre passe-haut | 140 |
| 2. | Transformation passe-haut / passe-bas | 141 |
| V. | Filtres passe-bande | 141 |
| 1. | Gabarit d'un filtre passe-bande symétrique | 141 |
| 2. | Transformation passe-bande / passe-bas | 141 |
| | <i>Exercices résolus</i> | 143 |
| 601 | Filtre passe-bas du troisième ordre | 143 |
| 602 | Filtre passe-bas du second ordre réglable | 145 |
| 603 | Synthèse d'un filtre passe-bas | 148 |
| 604 | Synthèse d'un filtre passe-haut : transformation RC-CR | 149 |
| 605 | Filtre passe-bande élémentaire réglable | 152 |
| 606 | Synthèse d'un filtre passif passe-bande symétrique | 155 |

| | |
|--|------------|
| <i>Exercices à résoudre</i> | 157 |
| 607 Etude d'un filtre sélectif à capacités commutées | 157 |
| 608 Filtre réjecteur de bande | 159 |
| 609 Synthèse d'un filtre passe-bas | 160 |
| 610 Circuit passe-tout du second ordre | 161 |
| 7 - CIRCUITS ET FONCTIONS DE PUISSANCE EN ÉLECTRONIQUE .. | 163 |
| I. Amplificateurs | 163 |
| 1. Caractéristiques | 163 |
| 2. Schéma équivalent d'un amplificateur | 163 |
| 3. Classes de fonctionnement d'un amplificateur | 164 |
| II. Loi d'Ohm thermique | 164 |
| III. Convertisseurs statiques alternatif - continu : redressement | 165 |
| 1. Redressement monophasé simple alternance | 165 |
| 2. Redressement monophasé double alternance | 166 |
| IV. Convertisseurs statiques continu - continu : hacheur | 167 |
| 1. Hacheur série sur charge résistive | 167 |
| 2. Hacheur série sur charge inductive | 167 |
| <i>Exercices résolus</i> | 168 |
| 701 Amplificateur classe A : liaison capacitive | 168 |
| 702 Amplificateur classe B | 173 |
| 703 Redressement double alternance avec filtrage capacitif | 179 |
| 704 Alimentation à découpage élévatrice de tension | 181 |
| 705 Etude d'un circuit de balayage ligne | 184 |
| <i>Exercices à résoudre</i> | 189 |
| 706 Alimentation à découpage abaisseur de tension | 189 |
| 707 Alimentation isolée à découpage : convertisseur "Forward" | 190 |
| 708 Amplificateur classe A : liaison par transformateur | 191 |
| 709 Etude d'un circuit d'aide à la commutation | 191 |

| |
|--|
| I. Dipôles passifs |
| 1. Dipôles passifs linéaires |
| 2. Dipôles passifs non linéaires |
| II. Générateurs électriques : composants actifs |
| 1. Sources de tension |
| 2. Sources de courant |
| 3. Signaux délivrés par les générateurs |

1

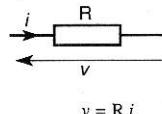
Analyse temporelle des circuits électroniques

Les circuits électroniques sont constitués de deux types de composants : les composants passifs et les composants actifs.

I. DIPOLES PASSIFS

1. Dipôles passifs linéaires

a) Résistance



R s'exprime en ohms (Ω).

La puissance instantanée, $p(t)$, absorbée par une résistance R est égale à :

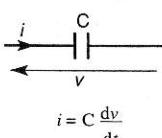
$$p(t) = v \cdot i = R \cdot i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$p(t)$ s'exprime en watts (W).

En régime continu, $i(t) = I = \text{cte}$ et $v(t) = V = \text{cte}$ alors $p(t) = P = \text{cte}$ et :

$$P = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}$$

b) Capacité



C s'exprime en farads (F).

Un condensateur de capacité C se comporte comme un réservoir d'énergie électrique. L'énergie, $w(t)$, emmagasinée par une capacité C est donnée par :

$$w(t) = \frac{1}{2} C \cdot v^2(t)$$

$w(t)$ s'exprime en joules (J).

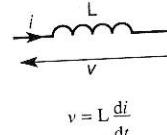
En régime continu, $v(t) = V = \text{cte}$ et $i(t) = 0$ alors :

$$-w(t) = W = \text{cte} : W = \frac{1}{2} C V^2$$

$-i(t) = 0$ donc en régime continu, une capacité se comporte comme un circuit ouvert.

En régime variable, la tension ne peut pas être discontinue aux bornes d'un condensateur car cela nécessiterait un courant, $i(t)$, d'intensité infinie.

c) Inductance



L s'exprime en henrys (H).

Une bobine d'inductance L se comporte comme un réservoir d'énergie électrique. L'énergie, $w(t)$, emmagasinée par une inductance L est donnée par :

$$w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

En régime continu, $i(t) = I = \text{cte}$ et $v(t) = 0$ alors :

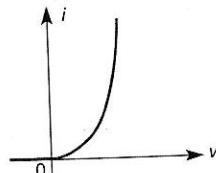
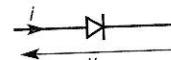
$$-w(t) = W = \text{cte} \text{ et } W = \frac{1}{2} L I^2$$

$-v(t) = 0$, donc en régime continu, une inductance se comporte comme un court-circuit.

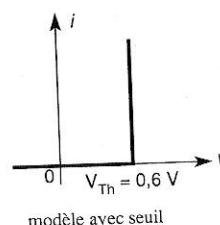
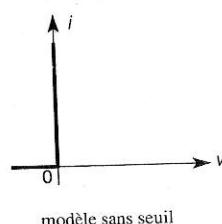
En régime variable, le courant dans une inductance ne peut pas être discontinue car cela nécessiterait une tension, $v(t)$, d'amplitude infinie.

2. Dipôles passifs non linéaires

La diode est un dipôle passif non linéaire car il n'y a pas de relation linéaire entre i et v .

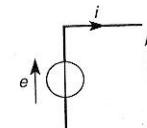


Pour étudier un circuit contenant une diode, on peut, par exemple, remplacer la caractéristique réelle de la diode par un modèle plus ou moins complexe, par exemple :



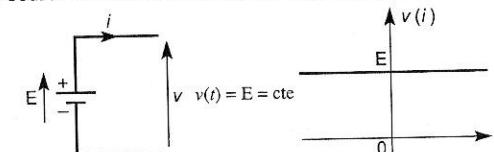
II. GÉNÉRATEURS ÉLECTRIQUES : COMPOSANTS ACTIFS

1. Sources de tension



$v = e$ quel que soit le courant $i(t)$ qui traverse la source de tension.

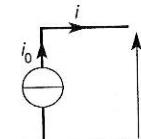
Pour une source de tension continue ou constante, on utilise aussi le symbole suivant :



La puissance instantanée, $p(t)$, fournie par une source de tension est égale à : $p(t) = e i$.
Lorsque $e(t) = E = \text{cte}$ alors $p(t) = E \times i(t)$ et la puissance moyenne P est donnée par :

$$P = E \times I_{\text{moy}}$$

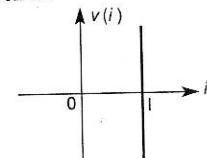
2. Sources de courant



$i = i_0$ quelle que soit la tension $v(t)$ aux bornes de la source de courant.

Pour une source de courant continu ou constant on a :

$$i_0(t) = I = \text{cte} \text{ et la caractéristique } v(i) \text{ est alors :}$$



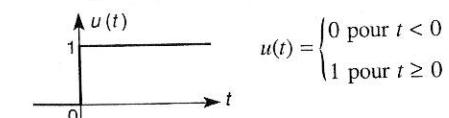
La puissance instantanée, $p(t)$, fournie par une source de courant est égale à : $p(t) = v i_0$.
Lorsque $i_0(t) = I = \text{cte}$ alors $p(t) = I v(t)$ et la puissance moyenne P est donnée par :

$$P = I \times V_{\text{moy}}$$

3. Signaux délivrés par les générateurs

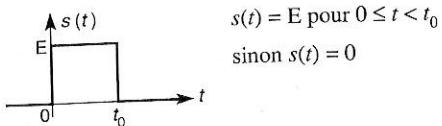
a) Signaux non périodiques

Le signal échelon :



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

- Le signal impulsion :



b) Signaux périodiques

Un signal, $s(t)$, est périodique de période T si :

$$s(t) = s(t + T) \quad \forall t$$

- la fréquence, f , de $s(t)$ est définie par $f = \frac{1}{T}$. f s'exprime en hertz (Hz) : $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

- la valeur moyenne de $s(t)$ est définie par :

$$S_{\text{moy}} = \overline{s(t)} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} s(t) dt$$

- la valeur efficace de $s(t)$ est définie par :

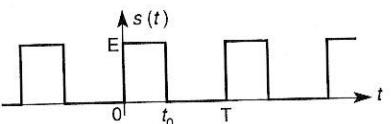
$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{s^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} s^2(t) dt}$$

- le signal sinusoïdal :

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = S_M \cos(\omega t + \varphi) \\ \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \end{array} \right.$$

$$S_{\text{moy}} = 0 \quad \text{et} \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_M}{\sqrt{2}}$$

- le signal rectangulaire :

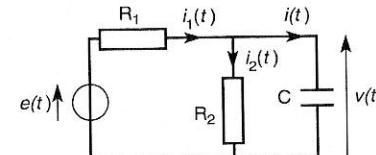


$\theta = \frac{t_0}{T}$ est appelé le rapport cyclique de $s(t)$.

$$S_{\text{moy}} = E \frac{t_0}{T} = E\theta \quad \text{et} \quad S_{\text{eff}} = E\sqrt{\theta}$$

Exercices résolus

101 Charge d'un condensateur à l'aide d'une source de tension



Pour $t < 0$, le circuit est au repos et $e(t)$ est un échelon d'amplitude E .

- 1) On s'intéresse à l'état du circuit juste après l'application de la tension E , déterminer $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i(0^+)$ et $v(0^+)$.
- 2) On s'intéresse au régime permanent, déterminer $i_1(+\infty)$, $i_2(+\infty)$, $i(+\infty)$ et $v(+\infty)$.
- 3) Etablir l'équation différentielle régissant $v(t)$.
- 4) Déterminer l'expression de $v(t)$ et représenter graphiquement l'allure de $v(t)$.
- 5) On appelle temps de réponse à 5 %, $tr_{5\%}$, le temps que met le condensateur pour atteindre 95 % de sa valeur finale, calculer le $tr_{5\%}$.

1) $v(0^+) = v(0^-) = 0$ car la tension ne peut pas être discontinue aux bornes d'un condensateur. D'autre part, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = R_1 i_1(t) + v(t) \\ v(t) = R_2 i_2(t) \\ i_1(t) = i_2(t) + i(t) \end{array} \right.$$

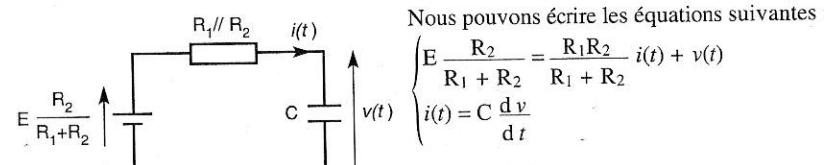
On en déduit : $i_1(0^+) = \frac{E}{R_1}$, $i_2(0^+) = 0$ et $i(0^+) = \frac{E}{R_1}$

2) En régime permanent le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc :

$$i(+\infty) = 0 \quad i_1(+\infty) = i_2(+\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$\text{et } v(+\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

3) Remplaçons E , R_1 , R_2 par le générateur de Thévenin équivalent :



On a donc :

$$v(t) + \tau \frac{dv}{dt} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

constante de temps du circuit.

4) On rappelle que l'équation différentielle du 1er ordre :

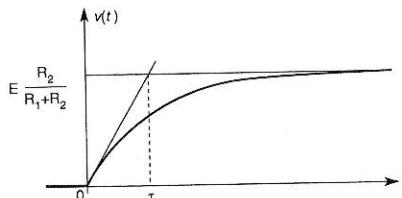
$$v(t) + \tau \frac{dv}{dt} = V_f \quad \text{avec} \quad v(0^+) = V_i$$

valeur finale valeur initiale

a pour solution : $v(t) = V_i e^{-t/\tau} + V_f (1 - e^{-t/\tau})$.

On en déduit :

$$v(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$



5) Soit l'instant t_0 au bout duquel $v(t_0) = 0,95 E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, alors :

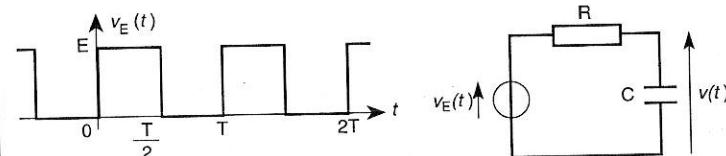
$$0,95 E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t_0/\tau})$$

$$e^{-t_0/\tau} = 0,05 \quad \text{donc} \quad t_0 = -\tau \ln 0,05$$

$$\text{et on en déduit : } t_{95\%} = 3\tau$$

Donc pour un circuit du 1^{er} ordre, le régime permanent est pratiquement atteint au bout de 3τ lors de la réponse à un échelon.

102 Réponse d'un circuit RC à un signal carré



On s'intéresse au régime permanent et au cas où $\tau \gg T$.

1) Charge du condensateur pour $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$.

A $t = 0^-$, le condensateur est chargé et on note $v(0^-) = V_{min}$.

a. Déterminer l'expression de $v(t)$.

b. Exprimer $v\left(\frac{T}{2}\right)$ que l'on notera V_{MAX} et calculer V_{MAX} en utilisant un développement limité sachant que $\tau \gg T$.

On rappelle que $e^{-x} \approx 1 - x$ pour $x \ll 1$.

2) Décharge du condensateur pour $\frac{T}{2} \leq t \leq T$.

a. En prenant $\frac{T}{2}$ comme nouvelle origine des temps, déterminer l'expression de $v(t)$.

b. Sachant qu'en régime permanent $v(t)$ est périodique, en déduire une nouvelle équation entre V_{min} et V_{MAX} en tenant compte du fait que $\tau \gg T$.

3) Exprimer V_{min} et V_{MAX} en fonction de E , T et τ sachant que :

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x \text{ pour } x \ll 1.$$

4) On pose $\Delta V = V_{MAX} - V_{min}$, montrer que l'on peut écrire :

$$V_{min} = V_0 - \frac{\Delta V}{2} \quad \text{et} \quad V_{MAX} = V_0 + \frac{\Delta V}{2}$$

Exprimer V_0 et ΔV puis vérifier que V_0 est égale à la valeur moyenne de $v_E(t)$.

5) Représenter l'allure de $v(t)$.

6) Calculer le taux d'ondulation $\frac{\Delta V}{V_0}$.

7) Application : soit un signal carré, de fréquence 1 kHz, dont on veut extraire la valeur moyenne avec un taux d'ondulation inférieur à 1 %. Calculer les valeurs possibles de τ .

1) a. Pour un circuit RC, on a : $\tau \frac{dv}{dt} + v(t) = v_E(t)$ donc $v(t) = V_i e^{-t/\tau} + V_f (1 - e^{-t/\tau})$

avec pour $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$: $v_i = v(0^+) = V_{min}$ et $v_f = v(+\infty) = E$

soit : $v(t) = V_{min} e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$

$$b. v\left(\frac{T}{2}\right) = V_{min} e^{-\frac{T}{2\tau}} + E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}\right) = V_{MAX}$$

or $\frac{T}{2\tau} \ll 1 \Rightarrow e^{-T/2\tau} \approx 1 - \frac{T}{2\tau}$ développement limité au 1^{er} ordre.

$$\text{donc } V_{MAX} = V_{min} \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) + E \frac{T}{2\tau} \quad (1)$$

2) a. Pour $\frac{T}{2} \leq t \leq T$, le condensateur se décharge et $v_E(t) = 0$, alors $\tau \frac{dv}{dt} + v(t) = 0$

avec $v(0) = V_{MAX}$.

On en déduit : $v(t) = V_{MAX} e^{-t/\tau}$. On a pris $\frac{T}{2}$ comme nouvelle origine des temps.

b. $v(t)$ est périodique en régime permanent donc au bout d'une période la tension $v(t)$ atteint à nouveau la valeur V_{min} .

$$\text{On en déduit : } v\left(\frac{T}{2}\right) = V_{MAX} e^{-\frac{T}{2\tau}} = V_{min}.$$

En faisant à nouveau un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$V_{\min} = V_{\text{MAX}} \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) \quad (2)$$

3) On remplace V_{\min} dans l'équation (1) à l'aide de l'équation (2) :

$$V_{\text{MAX}} = V_{\text{MAX}} \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right)^2 + E \frac{T}{2\tau}$$

$$\text{d'où : } V_{\text{MAX}} \left[1 - \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right)^2\right] = E \frac{T}{2\tau}$$

$$V_{\text{MAX}} \left[1 - \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right)\right] \left[1 + \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right)\right] = ET$$

$$V_{\text{MAX}} \frac{T}{2\tau} \left(2 - \frac{T}{2\tau}\right) = ET$$

$$\text{soit : } V_{\text{MAX}} = \frac{E}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{T}{4\tau}}$$

or $\frac{T}{4\tau} \ll 1$, en faisant un développement limité à l'ordre 1,

$$\text{on obtient : } \frac{1}{1 - \frac{T}{4\tau}} \approx 1 + \frac{T}{4\tau}$$

$$\text{On en déduit : } V_{\text{MAX}} = \frac{E}{2} \left(1 + \frac{T}{4\tau}\right) \quad (3)$$

On obtient pour V_{\min} en utilisant (2) et (3) :

$$V_{\min} = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) \left(1 + \frac{T}{4\tau}\right) = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{T}{2\tau} + \frac{T}{4\tau} - \frac{T^2}{8\tau^2}\right)$$

$$V_{\min} = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{T}{4\tau} - \frac{T^2}{8\tau^2}\right)$$

négligeable devant $1 - \frac{T}{4\tau}$ car $\tau \gg T$.

$$\text{soit : } V_{\min} = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{T}{4\tau}\right) \quad (4)$$

4) D'après (3) et (4), on peut calculer ΔV :

$$\Delta V = V_{\text{MAX}} - V_{\min} = \frac{ET}{4\tau} \quad (5)$$

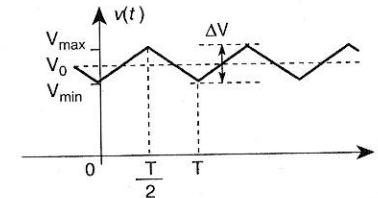
$$\text{et on en déduit que : } V_0 = \frac{E}{2} \quad (6)$$

Calculons la valeur moyenne de $v_E(t)$:

$$\overline{v_E(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T v_E(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E dt = \frac{E}{2} = V_0$$

5) Le filtre RC laisse passer la composante continue de $v_E(t)$, qui est égale à V_0 , auquel se superpose une ondulation d'amplitude crête à crête ΔV d'autant plus faible que $\tau \gg T$.

On obtient le graphe suivant pour $v(t)$:



6) On obtient pour le taux d'ondulation d'après (5) et (6) :

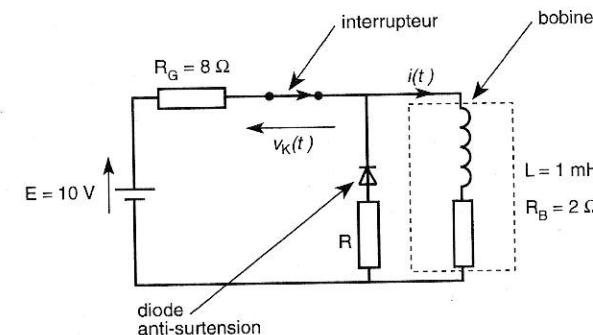
$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{T}{2\tau}$$

7) Application : soit $f = 1 \text{ kHz}$ donc $T = 1 \text{ ms}$.

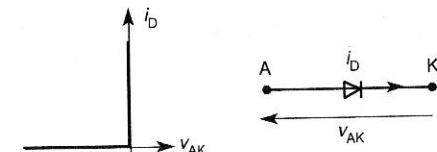
$$\text{On souhaite } \frac{\Delta V}{V_0} < 10^{-2} \text{ donc } \tau_{\min} = \frac{T}{2 \left(\frac{\Delta V}{V_0} \right)} = \frac{10^{-3}}{2 \left(10^{-2} \right)} = 50 \text{ ms}$$

Il faut choisir $\tau > 50 \text{ ms}$.

103 Rupture du courant dans un circuit inductif



On adopte pour la diode le modèle suivant :



1) L'interrupteur est fermé, le circuit est en régime permanent, quelle est la valeur de $i(t)$ notée I_0 ?

A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur.

2) Etablir l'équation différentielle régissant $i(t)$.

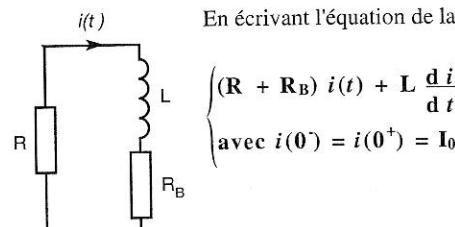
- 3) Déterminer l'expression de $i(t)$.
 4) En déduire la tension aux bornes de l'interrupteur $v_k(t)$.
 5) Représenter graphiquement $i(t)$ et $v_k(t)$.
 6) L'interrupteur est en fait réalisé par un transistor dont la tension maximale $v_k < 100 \text{ V} = V_{CE\text{ MAX}}$. Calculer la valeur de R pour obtenir une décroissance du courant dans la bobine la plus rapide possible.

1) La diode est bloquée car $v_{AK} < 0$, l'inductance se comporte comme un court-circuit, donc :

$$I_0 = \frac{E}{R_G + R_B} \Rightarrow I_0 = 1 \text{ A}$$

2) Lorsque l'on ouvre l'interrupteur, la diode se met à conduire car il apparaît une tension aux bornes de L, $v_L = L \frac{di}{dt}$, qui empêche toute discontinuité de courant dans la bobine.

On obtient le schéma équivalent suivant :



3) La solution de l'équation différentielle est :

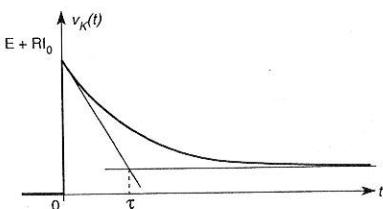
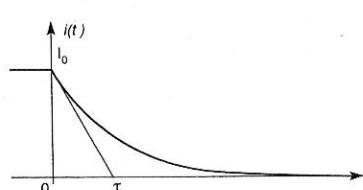
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R + R_B} \text{ pour } t \geq 0.$$

4) D'autre part, nous avons :

$$v_K(t) = E + R i(t)$$

$$\text{donc : } v_k(t) = E + R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5)



EXERCICES

6) Pour que la décroissance de $i(t)$ soit la plus rapide possible, il faut que la constante de temps du circuit soit la plus petite possible :

or $\tau = \frac{L}{R + R_B}$, donc il faut choisir la valeur maximale de R.

D'autre part, nous avons : $v_{k\text{MAX}} = E + R I_0 = V_{CE\text{ MAX}} = 100 \text{ V}$

$$\text{donc : } R_{\text{MAX}} = \frac{V_{CE\text{ MAX}} - E}{I_0}$$

$$R_{\text{MAX}} = 90 \Omega$$

On en déduit $\tau \approx 11 \mu\text{s}$, donc au bout d'environ $3\tau \approx 33 \mu\text{s}$, le courant est nul dans la bobine.

104 Etude d'un oscillateur (Texte d'examen)

Le schéma structurel de l'oscillateur est indiqué à la figure 1. Il comporte un opérateur logique "inverseur - comparateur à hystérésis" dont la caractéristique de transfert à vide est représentée à la figure 2. Cet opérateur a une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie et des temps de commutation supposés négligeables. L'oscillateur est étudié en régime établi.

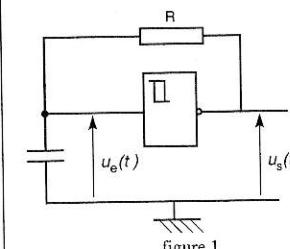


figure 1

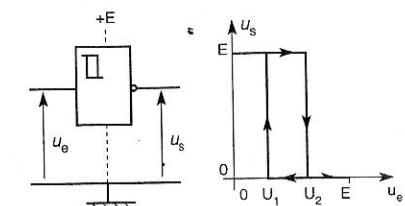


figure 2

1) On prend comme origine des temps, l'instant auquel la sortie de l'opérateur commute du niveau bas vers le niveau haut.

- a. Quelle est, à cet instant origine, la valeur de $u_e(t)$?
 b. Etablir l'expression de $u_e(t)$ valable pour la durée t_1 pendant laquelle $u_s(t)$ est au niveau haut.
 c. Exprimer t_1 en fonction de E, U_1 , U_2 et $\tau = RC$.

2) On prend maintenant comme origine des temps, l'instant auquel la sortie commute du niveau haut vers le niveau bas.

- a. Quelle est, à cet instant origine, la valeur de $u_e(t)$?
 b. Etablir l'expression de $u_e(t)$ valable pour la durée t_2 pendant laquelle $u_s(t)$ est au niveau bas.
 c. Exprimer t_2 en fonction de U_1 , U_2 , et $\tau = RC$.

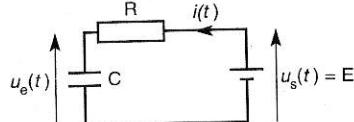
3) a. Donner l'expression de la période d'oscillation : T_H .

- b. A quelle condition simple relative aux tensions E, U_1 et U_2 , le rapport cyclique $m = \frac{t_1}{T_H}$ est-il égal à $\frac{1}{2}$?
 c. On donne : E = 8 V, $U_1 = 3 \text{ V}$, $U_2 = 5 \text{ V}$ et $C = 1 \text{ nF}$.

- Quelle est la valeur de R permettant d'obtenir une fréquence d'oscillation $f_H = 80 \text{ kHz}$?
d. Représenter les signaux $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

- 1) a.** D'après la caractéristique de transfert $u_s(u_e)$, $u_e(0) = U_1$ lorsque $u_s(t)$ commute du niveau bas vers le niveau haut.

- 1) b.** La sortie étant au niveau haut, on en déduit le schéma équivalent suivant :



On peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} E = R i(t) + u_e(t) \\ i(t) = C \frac{d u_e}{d t} \end{cases}$$

On en déduit l'équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$E = RC \frac{d u_e}{d t} + u_e(t)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u_e(t) = V_i e^{-\tau t} + V_f (1 - e^{-\tau t}) \text{ avec } \tau = RC$$

valeur initiale valeur finale

On a : $V_i = u_e(0) = U_1$ et $V_f = u_e(+\infty) = E$

$$\text{donc : } u_e(t) = U_1 e^{-t/\tau} + E (1 - e^{-t/\tau})$$

avec $\tau = RC$

- 1) c.** Lorsque $u_e(t)$ atteint la valeur U_2 alors la sortie commute du niveau haut vers le niveau bas.

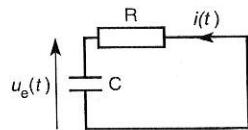
Donc : $u_e(t_1) = U_2$

et : $U_1 e^{-t_1/\tau} + E (1 - e^{-t_1/\tau}) = U_2$

on obtient : $t_1 = \tau \ln\left(\frac{E - U_1}{E - U_2}\right)$

- 2) a.** La sortie commute du niveau haut vers le niveau bas alors : $u_e(0) = U_2$

- 2) b.** Le schéma équivalent est le suivant :



On en déduit l'équation différentielle :

$$RC \frac{d u_e}{d t} + u_e(t) = 0$$

Sa solution est :

$$u_e(t) = U_2 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

- 2) c.** Lorsque $u_e(t)$ atteint la valeur U_1 alors la sortie commute du niveau haut vers le niveau bas.

Donc : $u_e(t_2) = U_1$

$$\text{et } U_2 e^{-t_2/\tau} = U_1$$

$$\text{On obtient : } t_2 = \tau \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$$

- 3) a.** $T_H = t_1 + t_2$

$$T_H = \tau \ln\left(\frac{E - U_1}{E - U_2}\right) + \tau \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$$

- 3) b.** Lorsque le rapport cyclique $m = \frac{1}{2}$ alors $t_1 = t_2$ donc :

$$\frac{E - U_1}{E - U_2} = \frac{U_2}{U_1} \quad \text{soit} \quad (E - U_1) U_1 = (E - U_2) U_2$$

$$E U_1 - U_1^2 = E U_2 - U_2^2 \quad \text{soit} \quad E(U_1 - U_2) = U_1^2 - U_2^2$$

$$\text{et } E(U_1 - U_2) = (U_1 - U_2)(U_1 + U_2)$$

On obtient : $U_1 + U_2 = E$

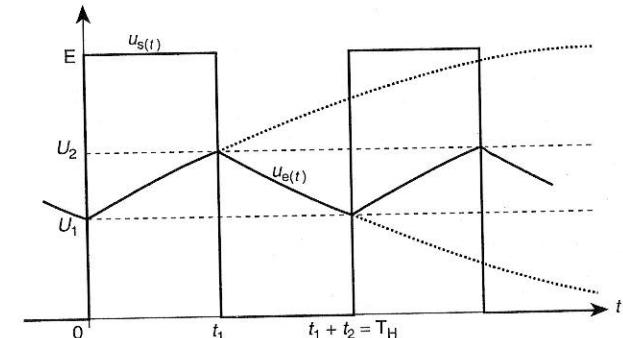
- 3) c.** On a $E = U_1 + U_2$ donc dans ce cas particulier $t_1 = t_2$

$$\text{et } T_H = 2 \tau \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = 2 RC \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = \frac{1}{f_H}$$

alors : $R = \frac{1}{2 C f_H \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right)}$

et on obtient : $R \approx 12 \text{ k}\Omega$

- 3) d.**



105 Testeur de triac (Texte d'examen)

Note aux candidats : Rappels de quelques résultats mathématiques.

Lorsque le nombre x , réel, est très petit devant l'unité, on peut écrire :

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{x}{2}; \text{ et } \frac{1}{1 + kx} \approx 1 - kx.$$

On se propose d'étudier un montage utilisé pour contrôler les caractéristiques des triacs.

Pour cela, on considère le circuit représenté sur la figure 1, comportant un condensateur de capacité C , préalablement chargé par connexion à une source de tension de f.e.m. E , une bobine qu'on modélise par son inductance L et sa résistance r_1 , une résistance de valeur r_2 , et un triac T .

On pose $r = r_1 + r_2$.

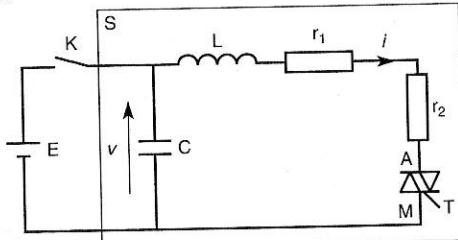


figure 1

Le triac T est amorcé à la date $t = 0$. Un courant d'intensité $i(t)$ s'établit alors : $i(t)$ passe par une valeur maximale I_M , puis décroît et s'annule à la date t_1 .

On s'intéresse à la valeur absolue $\tau = \left| \frac{di}{dt} \right|_{t=t_1}$ du taux de variation de l'intensité $i(t)$, à la date t_1 où le courant s'annule, car, pour certaines valeurs de τ , le triac se maintient de lui-même en conduction après le passage par 0 de l'intensité $i(t)$.

Dans cette première partie on se propose de mettre au point, par approximations successives, un modèle mathématique permettant de pré-déterminer les valeurs de la f.e.m. E de la source de tension utilisée pour charger le condensateur, de l'inductance L de la bobine et de la capacité C du condensateur, de manière à obtenir les valeurs de τ souhaitables.

1) Quelle est, avant l'amorçage du triac, l'énergie électrique W_0 du système S situé à l'intérieur du rectangle de la figure 1 ?

2) En première approximation, on néglige toutes les causes de pertes d'énergie (la conductance du condensateur est supposée nulle, on pose $r_1 = r_2 = 0$, et $v_{AM} = 0$ quand T conduit).

a. Préciser les valeurs de $v(t)$ et de $i(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$.

b. Montrer, par des considérations énergétiques, que lorsque le condensateur est totalement déchargé, l'intensité i est maximale. Calculer sa valeur maximale I_M en fonction de E , C et L .

c. Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait $i(t)$ entre 0 et t_1 .

d. Donner l'expression de $i(t)$ (on posera $LC\omega_0^2 = 1$). Dessiner l'allure de $i(t)$ pour t variant de 0 à t_1 .

e. Etablir les expressions, en fonction de E , C , L , de t_1 , de τ , et de la valeur efficace I de $i(t)$ entre 0 et t_1 .

f. Application numérique : calculer les valeurs de I_M , de τ , et de t_1 pour $E = 30$ V, $C = 100 \mu\text{F}$ et $L = 10 \text{ mH}$.

3) On se propose d'évaluer, dans la mesure où elle reste faible devant W_0 , la perte d'énergie W_p du système S au cours de la première alternance du courant ; pour cela, on suppose que la forme précédente de $i(t)$ reste inchangée en présence de pertes.

a. Montrer que l'énergie perdue entre les dates 0 et t_1 dans la résistance totale r peut se mettre sous la forme :

$$W_{p_1} = W_0 \frac{\pi r}{f(L, C)}$$

où $f(L, C)$ est une fonction simple de L et de C .

Application numérique : quelle est la valeur r_{\max} de r qui, pour les valeurs numériques données ci-dessus, correspond à une valeur de W_{p_1} égale à 10 % de l'énergie initiale W_0 ?

b. On suppose que pendant que le triac conduit, la tension v_{AM} à ses bornes est constante et l'on note V_d cette tension. Montrer que, dans ces conditions, l'énergie W_{p_2} perdue entre 0 et t_1 peut s'écrire sous la forme :

$$W_{p_2} = W_0 g\left(\frac{V_d}{E}\right)$$

où g est une fonction simple du rapport (V_d/E) .

Application numérique : Quelle est la valeur E_{\min} de E qui correspond à une valeur de W_{p_2} égale à 10 % de l'énergie initiale W_0 si $V_d = 0,5$ V ?

c. On estime la perte d'énergie du système S entre 0 et t_1 par la quantité $W_p = W_{p_1} + W_{p_2}$ (c'est en cela que réside la modélisation). Montrer que si v_1 désigne la tension aux bornes du condensateur à l'instant t_1 où le courant s'annule, et si on a à la fois $r < r_{\max}$ et $E > E_{\min}$, cette approximation conduit à l'expression :

$$|v_1| = E \left[1 - \frac{\pi r}{2 f(L, C)} - \frac{1}{2} g\left(\frac{V_d}{E}\right) \right].$$

d. Etablir la relation entre $|v_1|$ et τ (et les paramètres L et V_d).

En déduire la nouvelle estimation corrigée τ_0 de τ .

Application numérique : Calculer la valeur de τ_0 pour $E = 30$ V, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$, $r = 0,2 \Omega$, $V_d = 0,5$ V.

1) Avant l'amorçage du triac, $i = 0$ donc l'énergie est stockée par le condensateur qui est chargé telle que $v = E$.

$$\text{Donc : } W_0 = \frac{1}{2} C E^2$$

a. Aux bornes d'un condensateur : $v(0^-) = v(0^+)$

$$\text{alors : } v(0^+) = E$$

Le courant dans une inductance est telle que : $i(0^-) : i(0^+)$

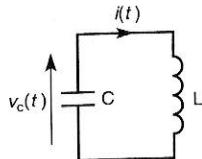
$$\text{alors : } i(0^+) = 0$$

b. On néglige toute les pertes donc lorsque C est déchargé toute l'énergie est stockée dans l'inductance.

$$\text{Or : } W_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{alors} \quad W_0 = \frac{1}{2} L I_M^2 = \frac{1}{2} C E^2$$

$$\text{d'où : } I_M = E \sqrt{\frac{C}{L}}$$

c. Nous avons le schéma équivalent suivant pour $0 \leq t \leq t_1$:



$$v_c = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i = -C \frac{dv_c}{dt}$$

$$\text{donc : } i(t) + LC \frac{d^2i}{dt^2} = 0$$

$$\text{On pose } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{alors : } i(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2i}{dt^2} = 0$$

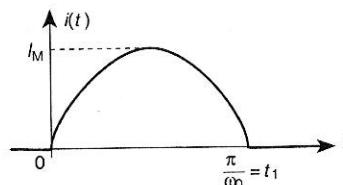
d. La solution de l'équation différentielle est :

$i(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ les deux constantes A et ϕ sont déterminées par les conditions initiales :

$$i(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} A \sin \phi = 0 \\ A \omega_0 \cos \phi = \frac{E}{L} \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} \phi = 0 \\ A = E \sqrt{\frac{C}{L}} = I_M \end{cases}$$

alors $i(t) = I_M \sin \omega_0 t$ pour $0 \leq t \leq t_1$.



$$e. t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{LC}$$

$$\tau = \left| \frac{di}{dt} \right|_{t=t_1} = |I_M \omega_0 \cos \omega_0 t_1| \Rightarrow \tau = I_M \omega_0 = E \sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{soit : } \tau = \frac{E}{L}$$

La valeur efficace, sur l'intervalle $[0, t_1]$ est définie par :

$$I = \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} I_M^2 \sin^2 \omega_0 t dt}$$

Puisque t_1 correspond à une demi-période, on obtient la valeur efficace d'une fonction sinusoïdale donc :

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad \text{alors} \quad I = E \sqrt{\frac{C}{2L}}$$

f. Applications numériques

$$I_M = 3 \text{ A} ; \tau = 3000 \text{ A s}^{-1} ; t_1 = 3,14 \text{ ms.}$$

3) a. L'énergie, W_{p_1} , dissipée par la résistance r au cours de la première alternance est donnée par :

$$W_{p_1} = \int_0^{t_1} r i^2(t) dt$$

en utilisant l'expression du courant efficace, I , alors :

$$W_{p_1} = r I^2 t_1 = r \frac{E^2}{2L} C \pi \sqrt{LC} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} CE^2 \right)}_{W_0} \times \frac{\pi r}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\text{soit : } W_{p_1} = W_0 \times \frac{\pi r}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \text{avec } f(L, C) = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Application numérique :

$$W_{p_1} = 0,1 \text{ W}_0 = W_0 \times \frac{\pi r_{MAX}}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\text{d'où : } r_{MAX} = \frac{0,1}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{soit : } r_{MAX} = 0,32 \Omega$$

b. L'énergie, W_{p_2} , dissipée par le triac au cours de la première alternance est donnée par :

$$W_{p_2} = \int_0^{t_1} V_d i(t) dt = V_d \int_0^{t_1} I_M \sin \omega_0 t dt$$

$$W_{p_2} = V_d I_M \left[-\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right]_0^{t_1} = \frac{2 V_d I_M}{\omega_0} = 2 V_d E \sqrt{\frac{C}{L}} \times \sqrt{LC}$$

$$\text{d'où : } W_{p_2} = 2 V_d EC = \left(\frac{1}{2} CE^2 \right) \times \frac{4V_d}{E}$$

$$\text{soit } W_{p_2} = W_0 \frac{4V_d}{E} \quad \text{avec } g\left(\frac{V_d}{E}\right) = \frac{4V_d}{E}$$

Application numérique : $W_{p_2} = 0,1 \text{ W}_0$ avec $V_d = 0,5 \text{ V}$

$$\text{donc : } 0,1 = \frac{4V_d}{E_{min}} \quad \text{soit } E_{min} = 20 \text{ V}$$

c. La perte d'énergie, W_p , est donnée par : $W_p = W_{p_1} + W_{p_2}$

Le bilan énergétique nous permet d'écrire :

$$W_c + W_L + W_p = W_0 \quad \text{à l'instant } t_1$$

$$\text{avec } W_c = \frac{1}{2} C v_1^2 \quad \text{et } W_L = 0 \quad \text{car } i(t_1) = 0$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{2} C v_1^2 = W_0 - W_p = W_0 - W_0 \frac{\pi r}{f(L, C)} - W_0 g\left(\frac{V_d}{E}\right)$$

$$\text{soit : } |v_1| = E \sqrt{1 - \frac{\pi r}{f(L, C)} - g\left(\frac{V_d}{E}\right)}$$

terme correctif, petit devant 1.

On en déduit : $|v_1| = E \left[1 - \frac{\pi r}{2f(L, C)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_d}{E} \right) \right]$
 car $(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{x}{2}$

d. L'équation différentielle entre $v(t)$ et $i(t)$ est :

$$v(t) = L \frac{di}{dt} + r i(t) + V_d$$

à $t = t_1$ on a : $v_1 = L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_1} + V_d$ car $i(t_1) = 0$

donc : $\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_1} = \frac{v_1 - V_d}{L}$

et $v_1 < 0$ alors $\tau = \left| \frac{di}{dt} \right|_{t=t_1} = \frac{|v_1| + V_d}{L}$

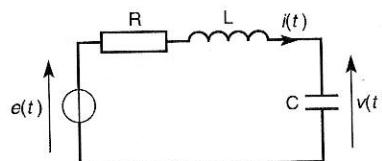
Application numérique :

$$\tau_0 = \frac{E \left[1 - \frac{\pi r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{2V_d}{E} \right] + V_d}{L}$$

On obtient pour la valeur corrigée de τ : $\tau_0 \approx 2860 \text{ A s}^{-1}$

Exercices à résoudre

106 Réponse à un échelon pour un circuit R, L, C série



$e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E.

1) Déterminer $i(0^+)$, $v(0^+)$, $\frac{d v(0^+)}{dt}$ et $i(+\infty)$, $v(+\infty)$.

2) Etablir l'équation différentielle régissant $v(t)$ et la mettre sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v(t) = \omega_0^2 E$$

Exprimer m (coefficent d'amortissement du circuit) et ω_0 (pulsation propre) en fonction de R, L et C.

3) On s'intéresse au cas où $m < 1$.

a. Déterminer la condition sur R pour obtenir $m < 1$.

Conditions initiales :

$$\begin{cases} v(0^-) = 0 \\ i(0^-) = 0 \end{cases}$$

b. Déterminer l'expression de $v(t)$ que l'on mettra sous la forme suivante : $v(t) = E + E_0 e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer E_0 , ω_0 et φ en fonction de m, E et ω_0 .

c. Calculer la valeur maximale, V_{MAX} , de $v(t)$. En déduire l'amplitude du 1er dépassement, D_1 , que l'on définit par : $D_1 = \frac{V_{MAX} - E}{E}$

d. Représenter l'allure de $v(t)$ lorsque $m = 0,1$.

4) On s'intéresse au cas où $m > 1$.

a. Déterminer l'expression de $v(t)$ et la mettre sous la forme suivante : $v(t) = E + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_1 > \tau_2$. Exprimer τ_1 et τ_2 en fonction de m et ω_0 et E_1 et E_2 en fonction de τ_1 , τ_2 et E.

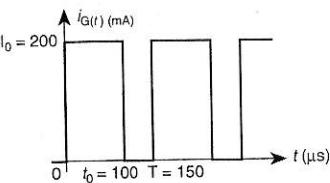
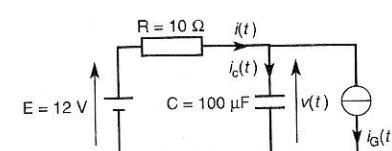
b. Lorsque $m \gg 1$, le circuit est dit très amorti. A l'aide des développements limités, montrer que τ_1 et τ_2 s'expriment simplement en fonction de R, L, C. Calculer les valeurs approchées de E_1 et E_2 . On rappelle que $\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{x}{2}$ pour $x \ll 1$

c. En utilisant le fait que $\tau_1 \gg \tau_2$, montrer que $v(t)$ peut être mis sous la forme suivante :

$$v(t) \approx E (1 - e^{-t/\tau_1})$$

Représenter l'allure de $v(t)$.

107 Alimentation d'un générateur d'impulsions de courant par une source de tension



- 1) Calculer la valeur moyenne, I_{moy} , de $i_G(t)$.
- 2) Calculer la puissance moyenne, P, fournie par la source de tension E.
- 3) Calculer la valeur moyenne, V_{moy} , de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur.
- 4) Sachant que $RC \gg T$, on souhaite calculer l'ondulation en tension : $\Delta V = V_{MAX} - V_{min}$ de $v(t)$.

a. On se place en régime permanent, déterminer l'équation de $v(t)$ et montrer que l'on obtient des équations de droites lorsque $RC \gg T$. On rappelle que pour $x \ll 1$: $e^{-x} \approx 1 - x$. Montrer que l'on obtient une droite décroissante pour $0 \leq t \leq t_0$ et une droite croissante pour $t_0 \leq t \leq T$.

b. Représenter graphiquement $v(t)$ et placer la valeur moyenne V_{moy} .

c. En remarquant que $V_{moy} = \frac{1}{2}(V_{MAX} + V_{min})$, calculer ΔV sachant que

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \text{ lorsque } x \ll 1.$$

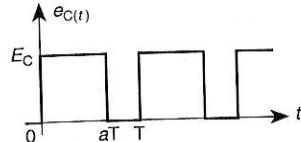
5) En déduire l'ondulation en courant, $\Delta I = I_{MAX} - I_{min}$, dans la résistance R.

108 Alimentation d'un moteur à courant continu (Texte d'examen)

On désire connaître le fonctionnement du bloc d'alimentation du moteur à courant continu qui, en rotation, peut être simulé par le dipôle, r , ℓ , E (figure 1-b).

Dans le montage de la figure 1, la tension $e_c(t)$ est un signal carré périodique de rapport cyclique a variable tel que :

- pour $e_c = 0$ le transistor T est bloqué,
- pour $e_c = E_c$ le transistor est saturé et la tension collecteur-émetteur de saturation est nulle.

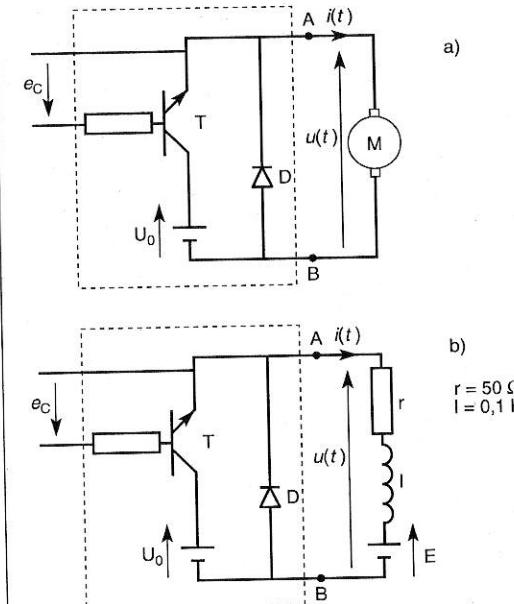


Les conditions de fonctionnement du montage imposent un courant $i(t)$ minterrompu et positif.

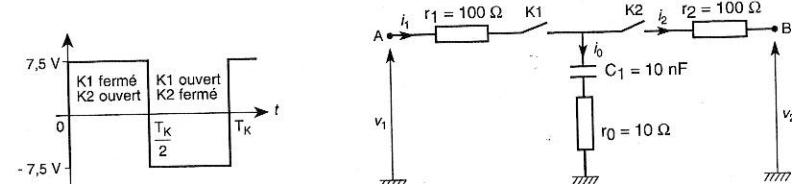
- 1) Montrer que lorsque le transistor T est saturé, la diode D est bloquée.
- 2) Justifier physiquement l'affirmation suivante : lorsque le transistor est bloqué, la diode est passante.
- 3) Trouver deux schémas simples symbolisant les deux modes de fonctionnement du montage suivant l'instant considéré ($0 < t < aT$ ou $aT < t < T$) : on remplacera le transistor T et la diode D par un circuit ouvert ou un court-circuit suivant leurs états.
- 4) Faire la synthèse des deux schémas en remplaçant la partie de schéma située en amont des points A et B par un générateur de tension délivrant un signal dont on donnera la représentation graphique dans le cas suivant : $U_0 = 150 \text{ V}$, $f = 10 \text{ kHz}$, $a = \frac{2}{3}$.
- 5) Calculer la valeur moyenne U_{moy} de $u(t)$ en fonction de a et U_0 . Montrer que, si l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs moyennes des différentes grandeurs, le schéma du montage est équivalent à une maille ne comprenant que trois éléments. Calculer littéralement et numériquement la valeur de E sachant que la valeur moyenne de $i(t)$ est $I_{\text{moy}} = 0,2 \text{ A}$, $r = 50 \Omega$ et le rapport cyclique $a = \frac{2}{3}$.
- 6) a. Ecrire l'équation différentielle de $i(t)$ lorsque le transistor T est saturé.
b. Ecrire l'équation différentielle de $i(t)$ lorsque le transistor T est bloqué.
c. Déterminer l'expression de $i(t)$:
 - pour $0 < t < aT$ en posant $i(t=0) = I_1$
 - pour $aT < t < T$ en posant $i(t=aT) = I_2$
- 7) La fréquence f de découpage étant égale à 10 kHz , établir, en justifiant les approximations, les expressions suivantes :
 - pour $0 < t < aT$: $i(t) \approx I_1 + \frac{U_0 - E}{\ell} t$
 - pour $aT < t < T$: $i(t) \approx I_2 - \frac{E}{\ell} (t - aT)$

(on rappelle que $r = 50 \Omega$ et $\ell = 0,1 \text{ H}$)

Indiquer l'allure de la représentation graphique de $i(t)$ pour $a = \frac{2}{3}$.


109 Dipôle à capacité commutée

Soit le dipôle A et B à commutation capacitive, les deux interrupteurs K1 et K2 ont un fonctionnement complémentaire. Ils sont commandés par le signal d'horloge suivant :



Les deux interrupteurs ont une résistance $R_{\text{on}} = 300 \Omega$ à l'état passant.

Résistance commandée par une fréquence

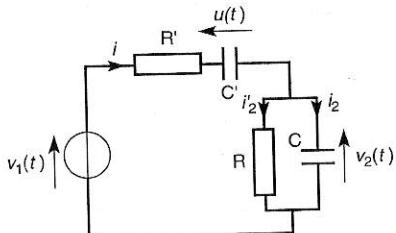
Soit $v_1 = E_1 = 4 \text{ V}$ et $v_2 = 0 \text{ V}$.

- 1) a. C_1 est initialement déchargé, à $t = 0$ on ferme K1. Etablir l'expression de $i_1(t)$ et le représenter graphiquement.
b. On suppose qu'au bout de $T_k/2$, $i_1(t)$ a atteint son régime permanent, établir l'expression de $i_2(t)$ et le représenter graphiquement.
c. En déduire $i_0(t)$ et le représenter graphiquement.
- 2) Les constantes de temps intervenant pour $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont petites par rapport à $T_k/2$, donc $i_1(t)$ et $i_2(t)$ peuvent être considérés comme périodiques, de période T_k .

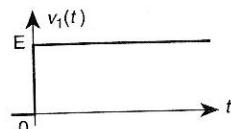
- a. Calculer les valeurs moyennes de $i_1(t)$ et $i_2(t)$, notées $\langle i_1 \rangle$ et $\langle i_2 \rangle$.
 b. Montrer qu'entre A et B, le dipôle se comporte comme une résistance de valeur : $R_{eq} = 1 / (C_1 f_k)$.
 Préciser la fréquence maximale du signal de commande des interrupteurs K1 et K2.

110 Etude d'un circuit du second ordre associant deux condensateurs

On considère le circuit suivant :



- 1) Etablir l'équation différentielle régissant $v_2(t)$ en fonction de $v_1(t)$.
 2) On applique un échelon de tension d'amplitude E.



Les condensateurs C et C' sont initialement déchargés.

- a. Déterminer les valeurs initiales $i(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i'_2(0^+)$, $u(0^+)$ et $v_2(0^+)$.
 b. Déterminer les valeurs finales $i(+\infty)$, $i_2(+\infty)$, $i'_2(+\infty)$, $u(+\infty)$ et $v_2(+\infty)$.
 c. Résoudre l'équation différentielle dans le cas particulier où $R = 2R'$, $C' = 2C$, on posera $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, en déduire l'expression de $v_2(t)$ pour $t > 0$.
 d. Représenter l'allure de $v_2(t)$ et montrer qu'elle présente un maximum dont on déterminera les coordonnées.
 3) Calculer l'énergie W, emmagasinée dans le condensateur C' en régime permanent.

2

Circuits linéaires en régime sinusoïdal

I. Impédances complexes - Loi d'Ohm

II. Transmittances complexes ou isochrones

1. Fonctions de transfert du premier ordre
2. Fonctions de transfert du second ordre

I. IMPÉDANCES COMPLEXES - LOI D'OHM

En régime permanent sinusoïdal, à une grandeur instantanée, on peut associer une grandeur complexe :

$$v(t) = V \sqrt{2} \cos \omega t \rightarrow \underline{V} = V \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{I} = I \sqrt{2} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

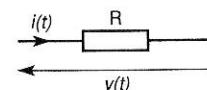
on a donc : $v(t) = \Re[\underline{V}]$ et $i(t) = \Re[\underline{I}]$
 ↑ partie réelle.

Pour l'opération dérivée, nous pouvons écrire :

$$\frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \underline{I}$$

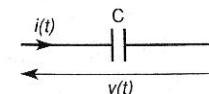
On a alors la règle suivante : une dérivée, par rapport au temps, pour une grandeur instantanée correspond à une multiplication par $j\omega$ pour sa grandeur complexe associée.

Résistance



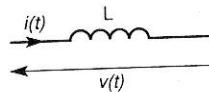
$$v(t) = R i(t) \rightarrow \underline{V} = R \underline{I} = Z_R \underline{I} \text{ avec } Z_R = R$$

Capacité

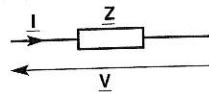


$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \rightarrow \underline{I} = C j\omega \underline{V} \Rightarrow$$

$$\underline{V} = \frac{1}{C j \omega} \underline{I} = Z_C \underline{I} \text{ avec } Z_C = \frac{1}{C j \omega}$$

Inductance

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow \underline{V} = Lj\omega \underline{I} = Z_L \underline{I} \text{ avec } Z_L = Lj\omega$$

Loi d'Ohm

Pour un dipôle d'impédance complexe Z , on peut écrire :

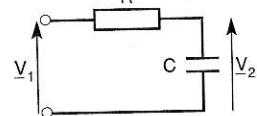
$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$$

Pour calculer \underline{Z} , on utilise les règles d'associations des résistances.

II. TRANSMITTANCES COMPLEXES OU ISOCHRONES

1. Fonctions de transfert du premier ordre

a) Filtre passe-bas



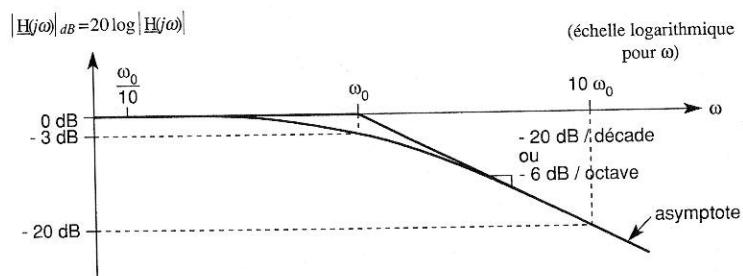
Soit la cellule R, C alimentée par une source de tension sinusoïdale :

On appelle $H(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$ sa fonction de transfert qui est donnée par :

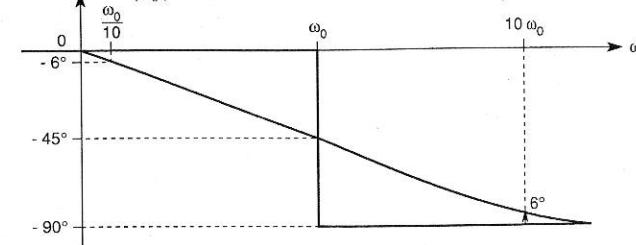
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$: pulsation de coupure du filtre passe-bas à - 3 dB.

Diagramme de Bode



$$\arg[H(j\omega)] = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

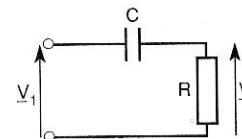


Ce circuit R, C laisse passer les basses fréquences.

$\left(f < f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\right)$ et atténue les hautes fréquences ($f > f_0$), c'est un filtre passe-bas.

Symbole d'un filtre passe-bas :

b) Filtre passe-haut



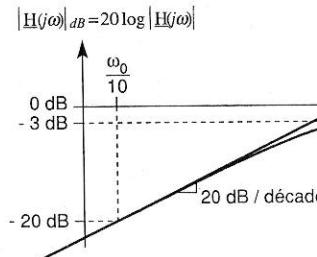
Soit la cellule C, R alimentée par une source de tension sinusoïdale :

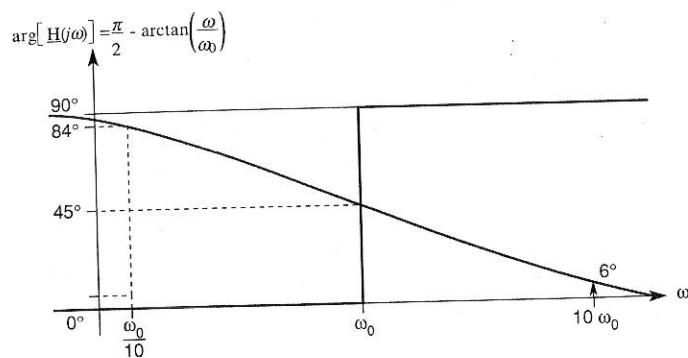
On appelle $H(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$ sa fonction de transfert qui est égale à :

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

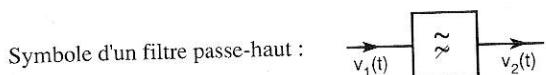
avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$: pulsation de coupure à - 3 dB du filtre passe-haut.

Diagramme de Bode



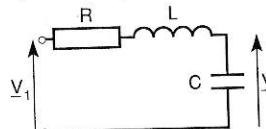


Ce circuit C, R laisse passer les hautes fréquences ($f > f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$) et atténue les basses fréquences ($f < f_0$), c'est un filtre passe-haut.



2. Fonctions de transfert du second ordre

a) Filtre passe-bas



On considère le circuit R, L, C série alimentée par une source de tension sinusoïdale :

Soit la transmittance isochrone $H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$, nous avons :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \frac{1}{1 + 2m \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre du second ordre

avec : $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$: coefficient d'amortissement

Nous devons considérer deux cas :

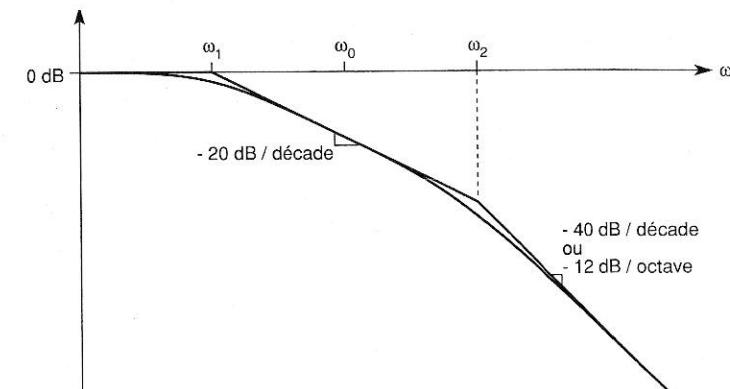
- $m > 1$: le second ordre se décompose alors en deux premiers ordres.

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

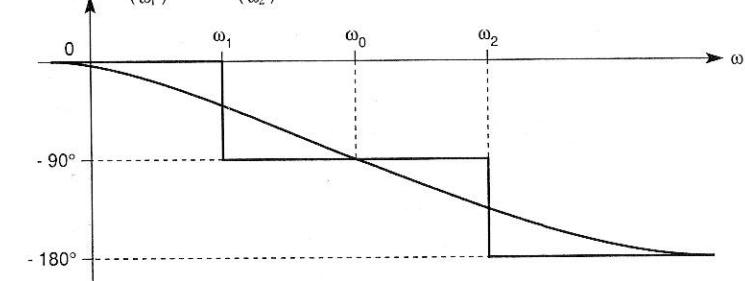
avec : $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 (m - \sqrt{m^2 - 1}) \\ \omega_2 = \omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$

Diagramme de Bode

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$



$$\arg[H(j\omega)] = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$



• $m < 1$: le second ordre n'est plus décomposable en deux premiers ordres.

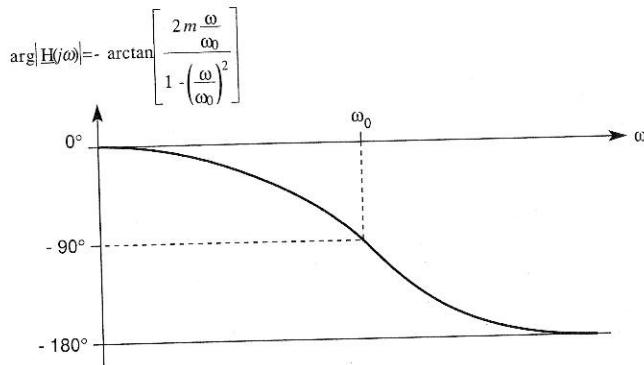
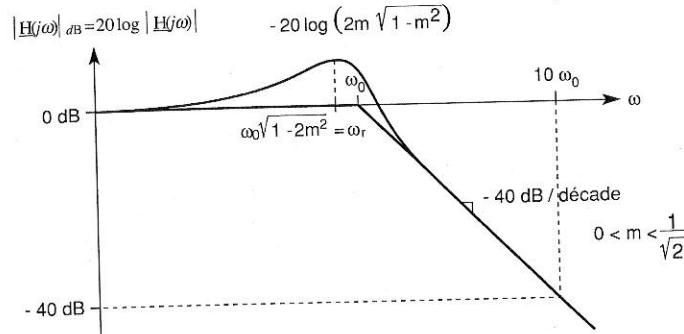
On montre que pour $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $|H(j\omega)|$ présente un maximum à la pulsation

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2} \text{ avec } |H(j\omega_r)| = \frac{1}{2m \sqrt{1 - m^2}}$$

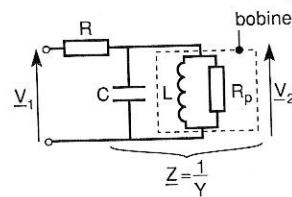
Pour $1 > m > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la courbe de $|H(j\omega)|$ ne présente pas de maximum et reste toujours au-dessous de l'axe des pulsations.

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$: elle est placée au milieu de $[\omega_1 \omega_2]$ car nous avons une échelle logarithmique pour ω .

Diagramme de Bode



b) Filtre passe-bande



On considère par exemple le circuit ci-contre.

La bobine est modélisée par un circuit parallèle, R_p caractérise les pertes de la bobine.

On obtient pour la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$:

$$H(j\omega) = \frac{Z}{R + Z} = \frac{1}{1 + RY} = \frac{1}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R_p} \right)}$$

$$j \frac{L\omega}{R}$$

$$\text{Soit : } H(j\omega) = \frac{j \frac{L\omega}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{(R/R_p)} + (j\omega)^2 LC}$$

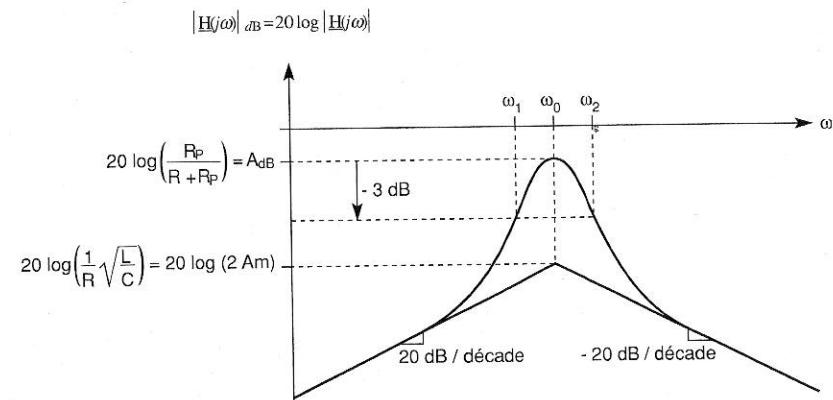
On identifie $H(j\omega)$ à la forme canonique du passe-bande du second ordre :

$$H(j\omega) = A \times \frac{2m j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \text{pulsation propre} \\ m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{R + R_p}{RR_p} : \text{coefficient d'amortissement} \\ H(j\omega_0) = A = \frac{R_p}{R + R_p} \end{cases}$$

Diagramme de Bode pour $m < 1$:

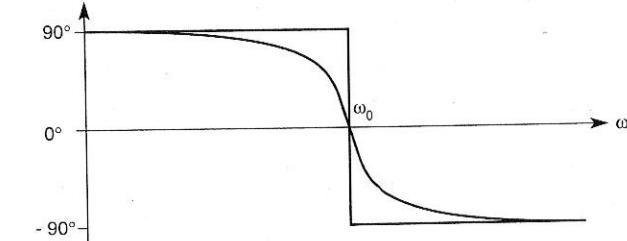


Soit $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, la bande passante à -3 dB du filtre passe-bande, on peut montrer que :

$$\rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{2m}$$

coefficient de qualité

$$\arg H(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]$$



Remarque : on peut exprimer la fonction de transfert d'un filtre passe-bande sous la forme suivante :

$$H(j\omega) = A \times \frac{1}{1 + Q j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{avec } Q = \frac{1}{2m}$$

Symbol d'un filtre passe-bande :

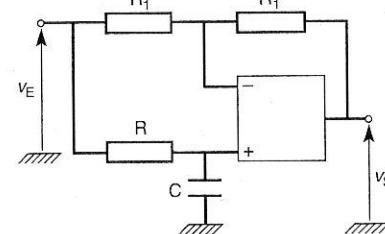


Symbol d'un filtre passe-bande :

Exercices résolus

201 Circuit déphaseur ou passe-tout du premier ordre

On considère le circuit suivant :



L'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

- 1) Calculer la transmittance complexe $T(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$.
- 2) Tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure de la courbe réelle.
- 3) Soit $v_E(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, déterminer l'expression de $v_S(t)$.

1) En appliquant le diviseur de tension pour V_+ :

$$\underline{V}_+ = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{V}_E$$

D'après la loi des nœuds pour l'entrée - :

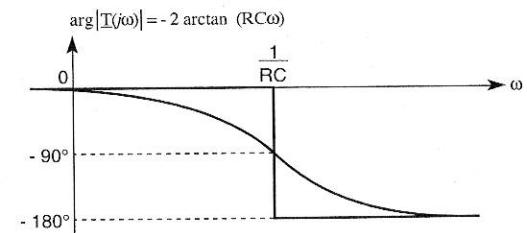
$$\frac{\underline{V}_- - \underline{V}_E}{R_1} + \frac{\underline{V}_- - \underline{V}_S}{R_1} = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{V}_E + \underline{V}_S = 2 \underline{V}_-$$

D'autre part, l'A.O. fonctionne en régime linéaire donc : $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$.
Soit : $\underline{V}_E + \underline{V}_S = \frac{2}{1 + j\omega RC} \underline{V}_E$

$$\underline{V}_E \left[\frac{2}{1 + j\omega RC} - 1 \right] = \underline{V}_S$$

$$\text{D'où : } T(j\omega) = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

2) $|T(j\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} = 1$ donc l'amplitude de $v_S(t)$ reste égale à celle de $v_E(t)$ dans la plage de fréquence où l'A.O. peut être supposé comme parfait.



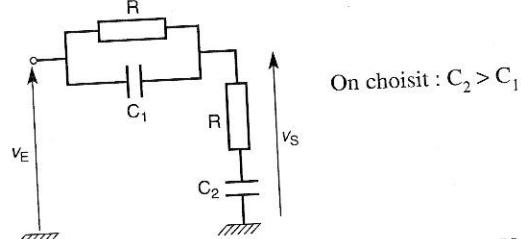
3) Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ alors $\arg[T(j\omega_0)] = -\frac{\pi}{2}$ donc :

$$v_s(t) = V \sqrt{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

soit : $v_s(t) = V \sqrt{2} \sin \omega_0 t$

202 Circuit retard et avance de phase

Soit le montage suivant :



On choisit : $C_2 > C_1$.

1) Calculer la transmittance isochrone $T(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$ et la mettre sous la forme canonique suivante :

$$T(j\omega) = \frac{(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})(1 + j \frac{\omega}{\omega_3})}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad \text{avec } \omega_2 < \omega_3.$$

Exprimer ω_2 , ω_3 , m et ω_0 en fonction des éléments du montage.

2) Dans le cas où $C_2 \gg C_1$, mettre $T(j\omega)$ sous la forme suivante :

$$T(j\omega) = \frac{(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})(1 + j \frac{\omega}{\omega_3})}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{\omega}{\omega_4})} \quad \text{avec } \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4.$$

A l'aide de développements limités, exprimer ω_1 et ω_4 en fonction des éléments du montage. On rappelle que $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ pour $x \ll 1$.

A.N. : Soit $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 10 \text{ nF}$ et $C_2 = 470 \text{ nF}$, en déduire les valeurs des fréquences associées.

3) Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T(j\omega)$ ainsi que l'allure de la courbe réelle.

1) En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$V_S = \frac{R + \frac{1}{jC_2\omega}}{R + \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{R}{1 + j\omega RC_1}} V_E$$

$$\text{Soit : } T(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{(1 + j\omega RC_2)(1 + j\omega RC_1)}{(1 + j\omega RC_2)(1 + j\omega RC_1) + j\omega RC_2}$$

$$T(j\omega) = \frac{(1 + j\omega RC_2)(1 + j\omega RC_1)}{1 + j\omega R(2C_2 + C_1) + (j\omega R)^2 C_1 C_2}$$

En identifiant à la forme canonique, on en déduit :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad m = \frac{C_2 + C_1}{\sqrt{C_1 C_2}} \quad \omega_2 = \frac{1}{RC_2} \quad \omega_3 = \frac{1}{RC_1}$$

2) Lorsque $C_2 \gg C_1$, alors : $m \approx \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ car on peut négliger $\frac{C_1}{C_2}$ par rapport à C_2 .

Or $C_2 \gg C_1$, on en déduit que $m \gg 1$ donc le dénominateur se décompose en deux premiers ordres.

$$\text{Soit : } 1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_4}\right)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \\ \omega_4 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$$

Or $m \gg 1$ donc nous pouvons écrire :

$$\omega_1 = \omega_0 m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{1/2}\right] \approx \omega_0 m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2m^2}\right)\right]$$

$$\omega_4 = \omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1}) \approx 2m \omega_0$$

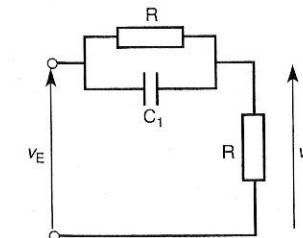
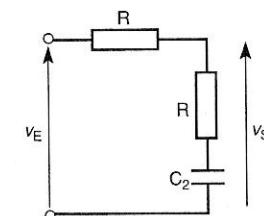
négligeable devant m^2

$$\text{Soit : } \omega_1 \approx \frac{\omega_0}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_4 \approx 2m \omega_0$$

En remplaçant ω_0 et m par leur valeur, on obtient :

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \\ \omega_4 \approx \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} = 2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \omega_1 \approx \frac{1}{2 R C_2} \\ \text{d'où :} \\ \omega_4 \approx \frac{1}{R C_1} \end{matrix}$$

Remarque : Sachant que $C_2 \gg C_1$, nous pouvons faire le raisonnement suivant :



- aux "basses fréquences", c'est C_2 qui intervient, C_1 se comporte comme un circuit ouvert, et le circuit est équivalent à un premier ordre de pulsation propre : $\omega_1 = \frac{1}{2RC_2}$

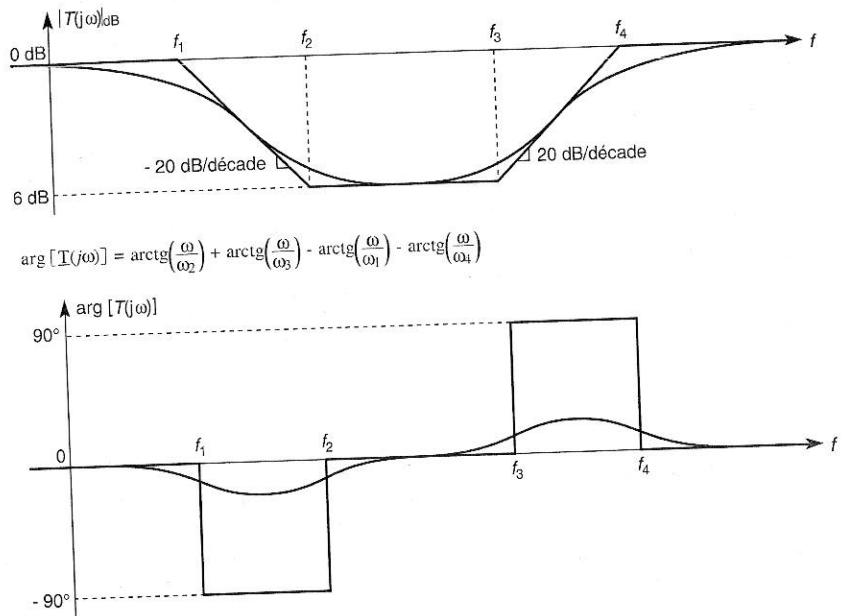
- aux "hautes fréquences", C_2 se comporte comme un court-circuit, c'est C_1 qui intervient et le circuit est équivalent à un premier ordre de pulsation propre : $\omega_4 = \frac{1}{R C_1}$

Donc on retrouve les deux pulsations propres du circuit, il est possible de faire ce rai-sonnement car $\omega_1 \ll \omega_4$ (c-à-d $m \gg 1$). On peut définir une plage de fréquences basses limitée par ω_1 et une plage de fréquences hautes à partir de ω_4 .

Application numérique : $m \approx 6,9$

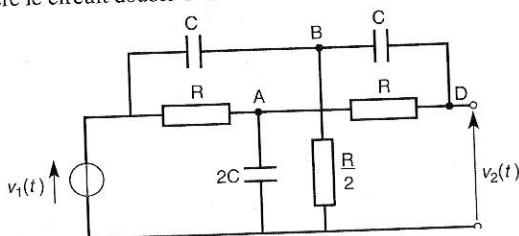
$$\begin{cases} f_1 = 170 \text{ Hz} \\ f_2 = 340 \text{ Hz} \end{cases} \quad \begin{cases} f_3 = 16 \text{ kHz} \\ f_4 = 32 \text{ kHz} \end{cases}$$

3) On obtient le diagramme de Bode suivant :



203 Filtre réjecteur de bande à double T

1) On considère le circuit double T ci-dessous :



Le circuit est alimenté par une source de tension sinusoïdale. Le circuit n'est pas chargé, la sortie est à vide.

En appliquant la loi des nœuds aux points A, B et D, calculer la fonction de transfert $T(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ et la mettre sous la forme canonique du réjecteur de bande :

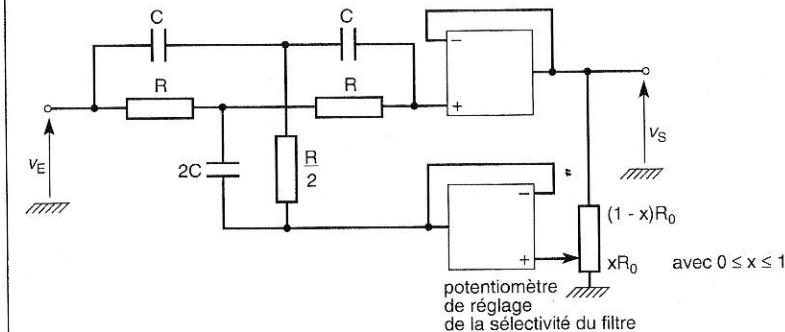
$$T(j\omega) = \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Déterminer l'expression de ω_0 et la valeur de m .

2) Calculer les pulsations ω_a et ω_b avec $\omega_b > \omega_a$ telles que : $|T(j\omega_a)| = |T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en fonction de m et ω_0 ainsi que l'expression de la bande de fréquence réjectée : $B = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\pi}$

3) On choisit $C = 10 \text{ nF}$ et $R = 1,6 \text{ k}\Omega$. Tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure de la courbe réelle. On calculera la valeur de B .

4) Pour améliorer la sélectivité du filtre, on modifie le circuit de la façon suivante :



Les A.O. sont supposés parfaits.

Calculer $H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$ et la mettre sous forme canonique du réjecteur de bande.

En déduire la nouvelle valeur, B_x , de la bande réjectée. Pour $x = 0,9$, calculer la valeur de B_x .

$$\text{Nœud A : } \frac{V_A - V_1}{R} + V_A 2j\omega C + \frac{V_A - V_2}{R} = 0$$

$$\text{Nœud B : } (V_B - V_1)j\omega C + (V_B - V_2)j\omega C + \frac{2V_B}{R} = 0$$

$$\text{Nœud D : } (V_2 - V_B)j\omega C + \frac{V_2 - V_A}{R} = 0$$

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\underline{V_A} 2(1 + j\omega RC) = \underline{V_1} + \underline{V_2}$$

$$\underline{V_B} 2(1 + j\omega RC) = (\underline{V_1} + \underline{V_2})j\omega RC$$

$$\underline{V_2} (1 + j\omega RC) = \underline{V_A} + \underline{V_B} j\omega RC$$

On élimine $\underline{V_A}$ et $\underline{V_B}$ d'où :

$$\underline{V_2} (1 + j\omega RC) = \frac{\underline{V_1} + \underline{V_2}}{2(1 + j\omega RC)} + \frac{(\underline{V_1} + \underline{V_2})(j\omega RC)^2}{2(1 + j\omega RC)}$$

$$\text{Soit : } \underline{V}_2 2(1 + j\omega RC)^2 = \underline{V}_1 [1 + (j\omega RC)^2] + \underline{V}_2 [1 + (j\omega RC)^2]$$

$$\text{On en déduit : } T(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{1 + (j\omega RC)^2}{1 + 4j\omega RC + (j\omega RC)^2}$$

En identifiant avec la forme canonique, on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad m = 2$$

$$2) \quad |T(j\omega)|^2 = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

Pour calculer ω_a et ω_b , il suffit d'écrire que $|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$. On obtient l'équation suivante :

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 = 2\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2$$

$$\text{d'où : } \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 = 4m^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\text{soit : } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \pm 2m \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega^2 \pm 2m \omega_0 \omega - \omega_0^2 = 0$$

Les deux solutions donnant des valeurs positives sont :

$$\begin{cases} \omega_a = -m \omega_0 + \omega_0 \sqrt{1 + m^2} \\ \omega_b = m \omega_0 + \omega_0 \sqrt{1 + m^2} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } B = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\pi} \quad \text{soit : } B = 2m \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$\text{Pour } m=2 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ alors : } B = \frac{2}{\pi RC}$$

3) Pour tracer le diagramme de Bode de $T(j\omega)$, remarquons que le dénominateur peut se décomposer en deux premiers ordres car $m=2 > 1$.

$$T(j\omega) = \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

avec : $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \\ \omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$

$$\text{pour } m=2, \text{ on obtient : } \begin{cases} \omega_1 = \omega_0(2 - \sqrt{3}) \\ \omega_2 = \omega_0(2 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

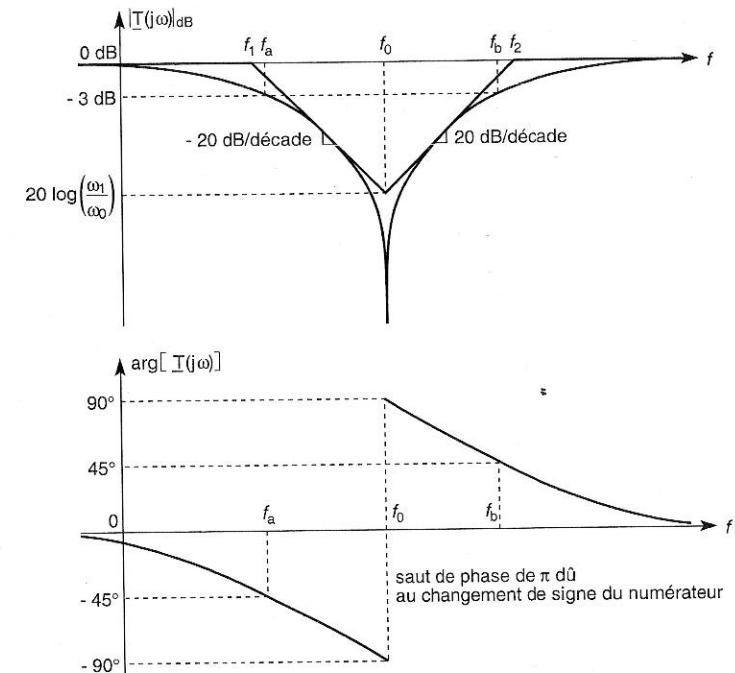
D'autre part, nous avons : $C = 10 \text{ nF}$, $R = 1,6 \text{ k}\Omega$, donc :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 2,7 \text{ kHz} \\ f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 37 \text{ kHz} \end{cases}$$

Pour la bande de fréquence réjectée, on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} = 2,4 \text{ kHz} \\ f_b = \frac{\omega_b}{2\pi} = 42,4 \text{ kHz} \end{cases} \quad \text{soit } B = f_b - f_a = 40 \text{ kHz}$$

On obtient le diagramme suivant :



Pour l'argument, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \omega < \omega_0 : \arg[T(j\omega)] = -\arctg \left[\frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] \\ \omega > \omega_0 : \arg[T(j\omega)] = \pi - \arctg \left[\frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] \end{cases}$$

4) Le circuit double T n'est toujours pas chargé car on a inséré un étage adaptateur d'impédance, montage suivant à A.O., donc nous pouvons écrire :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = T(j\omega) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{V}_E - \underline{V}_R \\ \underline{V}_2 = \underline{V}_S - \underline{V}_R \end{cases}$$

D'autre part, nous avons : $\underline{V}_R = x \underline{V}_S$

$$\text{donc : } \begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{V}_E - x \underline{V}_S \\ \underline{V}_2 = \underline{V}_S (1 - x) \end{cases}$$

On en déduit : $T(j\omega) = \frac{V_S (1 - x)}{V_E - x V_S}$

soit : $\frac{V_S}{V_E} = \frac{T(j\omega)}{1 - x + x T(j\omega)}$

d'où : $H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1 + (j\omega RC)^2}{(1 - x)[1 + 4j\omega RC + (j\omega RC)^2] + x[1 + (j\omega RC)^2]}$

$$H(j\omega) = \frac{1 + (j\omega RC)^2}{1 + 4(1 - x)j\omega RC + (j\omega RC)^2}$$

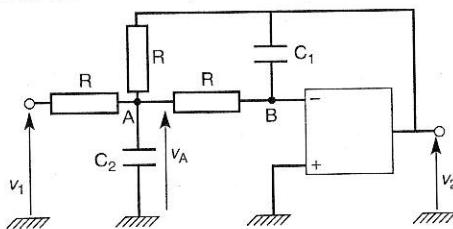
On en déduit : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $2m = 4(1 - x)$.

Or : $B_x = 2m \frac{\omega_0}{2\pi}$ donc : $B_x = \frac{2(1 - x)}{\pi RC}$

Pour $x = 0,9$ et les valeurs numériques précédentes, on obtient :
 $B_x = 4 \text{ kHz}$ La largeur de bande réjectée a été divisée par 10.

204 Filtre passe-bas du second ordre à structure de Rauch

On considère le circuit suivant où l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.



1) On applique une tension constante à l'entrée du circuit $v_1(t) = E = \text{cte}$, calculer $v_2(t)$ en régime permanent.

2) En appliquant la loi des nœuds aux points A et B, calculer la transmittance isochrone $T(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$T(j\omega) = \frac{T_0}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Donner les expressions de m , ω_0 et T_0 .

3) a. On souhaite obtenir $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f_0 = 3,4 \text{ kHz}$ avec $C_2 = 10 \text{ nF}$; calculer les valeurs de R et C_1 .

b. Calculer $|T(j\omega)|$ en fonction de ω_0 lorsque $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Soit $v_1(t) = E \sin \omega_0 t$, déterminer l'expression de la tension de sortie du filtre, $v_2(t)$, sachant que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire.

1) Pour le continu les condensateurs se comportent comme des circuits ouverts, donc on obtient un amplificateur inverseur fonctionnant en régime linéaire. On en déduit : $v_2(t) = -v_1(t) = -E$

2) L'A.O. fonctionne en régime linéaire donc $V_+ = V_- = 0$. D'après la loi des nœuds nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en A : } \frac{V_A - V_1}{R} + \frac{V_A - V_2}{R} + V_A j\omega C_2 + \frac{V_A}{R} = 0 \\ \text{en B : } -\frac{V_2}{R} j\omega C_1 = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$(3 + j\omega RC_2) V - V_2 = V_1$$

$$V = -\frac{V_2 j\omega RC_1}{3 + j\omega RC_2}$$

d'où : $\left[(3 + j\omega RC_2) j\omega RC_1 + 1 \right] V_2 = -V_1$

soit : $T(j\omega) = \frac{-V_1}{1 + 3j\omega RC_1 + (j\omega)^2 R^2 C_1 C_2}$

On retrouve le gain statique égal à -1 lorsque $\omega \rightarrow 0$.

avec : $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$ et $m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ $T_0 = -1$,

3) a. Soit $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f_0 = 3,4 \text{ kHz}$ et $C_2 = 10 \text{ nF}$.

On en déduit : $\frac{C_1}{C_2} = 0,22 \Rightarrow C_1 = 2,2 \text{ nF}$

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{C_1 C_2}} \Rightarrow R = 10 \text{ k}\Omega$$

b. Pour $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $T(j\omega) = \frac{T_0}{1 + \sqrt{2} j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

ou : $T(j\omega) = \frac{T_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0}}$

On en déduit $|T(j\omega)|^2 = \frac{T_0^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{T_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$

Soit : $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$ car $T_0 = -1$

On a obtenu un filtre passe-bas d'ordre 2 de type Butterworth.

c. Pour $\omega = \omega_0$ alors $|T(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'autre part, nous avons : $|T(j\omega_0)| = \frac{T_0}{2mj} = \frac{-1}{j\sqrt{2}} = \frac{j}{\sqrt{2}}$

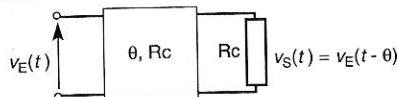
Donc : $\arg[T(j\omega_0)] = \frac{\pi}{2}$

On en déduit : $v_S(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

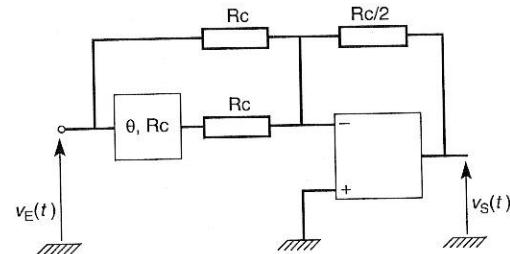
soit : $v_S(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos \omega_0 t$

205 Filtre en peigne

Une ligne à retard est un dispositif caractérisé par la valeur du retard θ qu'elle introduit entre l'entrée et la sortie et par sa résistance caractéristique R_c .



On considère le circuit suivant :



Lorsqu'elle est chargée par sa résistance caractéristique, elle réalise la fonction retard.

L'A.O. est supposé parfait.

- 1) Déterminer l'expression de $v_S(t)$.
- 2) On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent, calculer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$.
- 3) Calculer $|H(jf)|$ et $\arg[H(jf)]$ et les représenter graphiquement en utilisant une échelle linéaire pour f .

- 1) L'A.O. fonctionnant en régime linéaire, nous avons : $v_+ = v_- = 0$ V donc la ligne à retard est chargée par sa résistance caractéristique R_c .

A la sortie de la ligne à retard nous avons : $v_E(t - \theta)$. En appliquant la loi des nœuds à la borne inverseuse de l'A.O., nous pouvons écrire :

$$\frac{v_E(t)}{R_c} + \frac{v_E(t - \theta)}{R_c} = - \frac{2 v_S(t)}{R_c}$$

soit : $v_S(t) = - \frac{1}{2} [v_E(t) + v_E(t - \theta)]$

2) En régime sinusoïdal permanent, nous pouvons écrire :

$$V_S = - \frac{1}{2} [V_E + e^{j\omega\theta} V_E]$$

donc : $H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = - \frac{1}{2} (1 + e^{j\omega\theta})$

soit : $H(j\omega) = - e^{-j\frac{\omega\theta}{2}} (e^{j\frac{\omega\theta}{2}} + e^{-j\frac{\omega\theta}{2}})$

$$H(j\omega) = e^{j(\pi - \frac{\omega\theta}{2})} \cos\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)$$

3) Nous avons : $|H(j\omega)| = \left| \cos\left(\frac{\omega\theta}{2}\right) \right|$ avec $\omega = 2\pi f$

soit : $|H(jf)| = |\cos(\pi f\theta)|$

Pour l'argument, nous pouvons écrire :

$$\arg[H(j\omega)] = \pi - \omega \frac{\theta}{2} \text{ pour } 0 < \omega < \frac{\pi}{\theta}$$

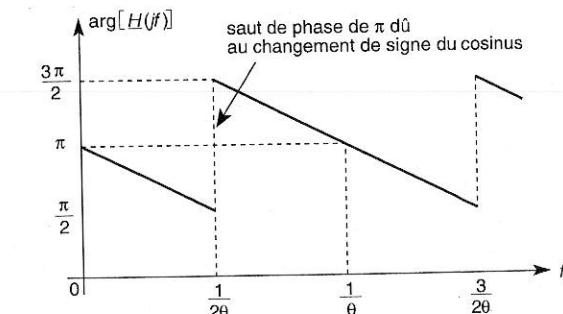
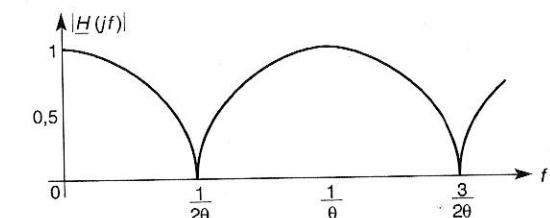
$$\text{et } \arg[H(j\omega)] = - \frac{\omega\theta}{2} \text{ pour } \frac{\pi}{\theta} < \omega < \frac{3\pi}{\theta}$$

soit en utilisant la variable fréquence f :

$$\begin{cases} \arg[H(jf)] = \pi - \pi f \theta & \text{pour } 0 < f < \frac{1}{2\theta} \\ \arg[H(jf)] = 2\pi - \pi f \theta & \text{pour } \frac{1}{2\theta} < f < \frac{3}{2\theta} \end{cases}$$

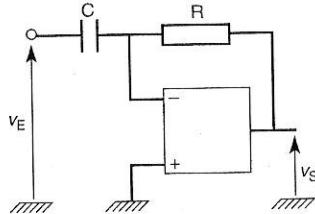
$$\begin{cases} \arg[H(jf)] = 2\pi - \pi f \theta & \text{pour } \frac{1}{2\theta} < f < \frac{3}{2\theta} \end{cases}$$

On peut construire la courbe de l'argument pour $f > \frac{3}{2\theta}$ en utilisant la périodicité de la fonction.



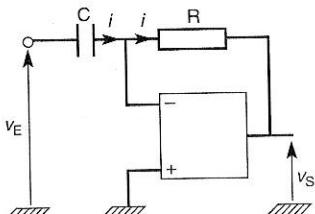
206 Dérivateur à A.O. (première approche)

On considère le circuit suivant :



- 1) L'A.O. est supposé parfait.
Etablir la relation liant $v_E(t)$ et $v_S(t)$, en déduire la fonction réalisée par ce montage.
- 2) $v_E(t)$ est fournie par une source de tension sinusoïdale : $v_E(t) = E \cos \omega t$.
 - a. Sachant que la tension de sortie de l'A.O. est limitée par les tensions de saturation $\pm V_{SAT} = \pm 10$ V, déterminer la relation liant E , ω , RC et V_{SAT} pour rester en fonctionnement linéaire.
 - b. D'autre part, la vitesse maximale de variation de $v_S(t)$ (slew rate) est égale à : $S = 10$ V / μ s. En déduire une deuxième relation entre E , ω , RC et S pour fonctionner en régime linéaire.
 - c. On souhaite que la limite de fonctionnement linéaire corresponde à la fois :
 - à la limite de la saturation en niveau de $v_S(t)$
 - à la limite de la saturation en pente de $v_S(t)$.
 Calculer $f_{MAX} = \frac{\omega_{MAX}}{2\pi}$ et E_{MAX} ; en déduire la valeur de f_{MAX} .
 - d. Déterminer la valeur de la constante de temps RC du déivateur sachant que la tension d'entrée reste inférieure à 0,3 V. En déduire des valeurs possibles de R et C .

- 1) En écrivant la loi des nœuds à l'entrée inverseuse de l'A.O., on obtient :



$$i = C \frac{dv_E}{dt} = - \frac{v_S}{R} \quad \text{car} \quad v_+ = v_- = 0$$

$$\text{d'où } v_S(t) = - RC \frac{dv_E}{dt}$$

Ce montage réalise la fonction dérivation.

- 2) a. Nous avons $v_E(t) = E \cos(\omega t)$ donc : $v_S(t) = RC \omega E \sin(\omega t)$
Pour rester en fonctionnement linéaire, il faut que :
 $|v_S(t)| \leq V_{SAT}$ d'où $RC \omega E \leq V_{SAT}$

b. Calculons $\frac{dv_S}{dt}$; $\frac{dv_S}{dt} = RC \omega^2 E \cos \omega t$

$\frac{dv_S}{dt}$ est maximale à l'origine : $\left. \frac{dv_S}{dt} \right|_{MAX} = RC \omega^2 E$

Donc pour fonctionner en régime linéaire vis-à-vis du "slew rate", il faut que :

$$RC \omega^2 E \leq S$$

c. On souhaite que les deux limites de fonctionnement soient atteintes simultanément donc on peut écrire :

$$\begin{cases} RC \omega E = V_{SAT} \\ RC \omega^2 E = S \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega = \omega_{MAX} \\ E = E_{MAX} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } \omega_{MAX} = \frac{S}{V_{SAT}}$$

$$\text{d'où } f_{MAX} = \frac{S}{2\pi V_{SAT}} \quad \text{AN : } f_{MAX} = 160 \text{ kHz}$$

$$\text{et : } E_{MAX} = \frac{V_{SAT}}{RC \omega_{MAX}} \quad \text{soit : } E_{MAX} = \frac{V_{SAT}^2}{RC S}$$

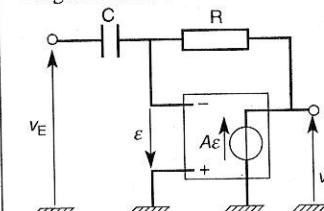
$$\text{d. Nous avons : } E_{MAX} = 0,3 \text{ V d'où : } RC = \frac{V_{SAT}^2}{E_{MAX} S}$$

$$\text{soit : } RC = \frac{10^2 \times 10^{-6}}{0,3 \times 10} \text{ (s) alors } RC = 33 \mu\text{s}$$

On pourra alors choisir : $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 3,3 \text{ nF}$.

Exercices à résoudre
207 Dérivateur à A.O. (deuxième approche)

L'A.O. fonctionne en régime linéaire, mais on tient compte de la bande passante et du gain fini de l'A.O.



$$A = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\text{A.N. : } \begin{cases} A_0 = 2 \times 10^5 \\ \omega_c = 20 \pi \text{ rad/s} \end{cases}$$

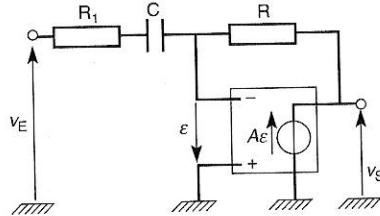
- 1) a. Calculer la fonction de transfert $T(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$, la mettre sous la forme canonique suivante :

$$T(j\omega) = T_0 \times \frac{2 m j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2 m j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Sachant que $A_0 \gg 1$ et $\omega_c \ll \frac{1}{RC}$, en déduire les expressions de ω_0 , m et T_0 .

b. Calculer les valeurs de T_0 , $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et m pour $RC = 33 \mu s$.

2) Pour éliminer la très forte résonance de ce montage, on insère une résistance R_1 en série avec le condensateur.



a. Calculer la fonction de transfert $T_1(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$, la mettre sous la forme canonique d'un passe-bande du 2nd ordre :

$$T_1(j\omega) = T_0 \times \frac{2m j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

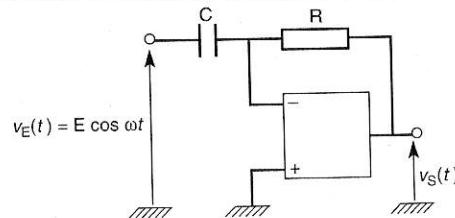
Sachant que $A_0 \gg 1$, $\omega_c \ll \frac{1}{RC}$ mais RC est choisie telle que $A_0 \omega_c \gg \frac{1}{RC}$

dans le cas particulier où $R_1 \ll R$, déterminer les expressions de ω_0 , m et T_0 .

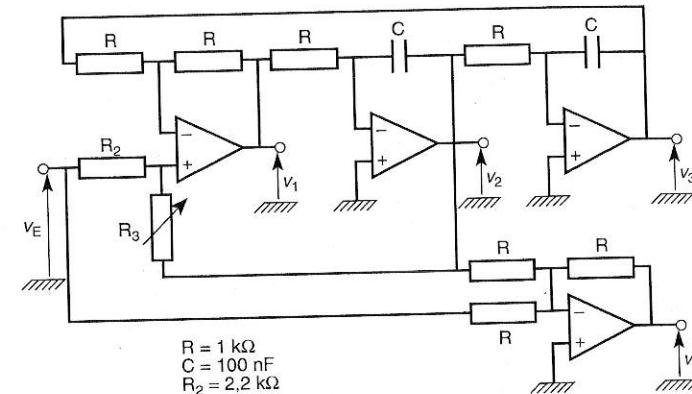
b. On souhaite obtenir $m = 1$, on garde la même valeur que précédemment pour la constante de temps RC , c'est-à-dire $RC = 33 \mu s$, on choisit $R = 10 k\Omega$ et $C = 3,3 nF$. Calculer la valeur de R_1 et vérifier la validité des différentes approximations utilisées.

c. Représenter le diagramme de Bode asymptotique et l'allure de la courbe réelle de $T_1(j\omega)$.

d. Déterminer le domaine de validité en fréquence de ce déivateur sachant que l'on accepte un écart de 10 % de l'argument de $v_S(t)$ par rapport à la valeur théorique que l'on obtiendrait pour le déivateur suivant avec un A.O. supposé parfait.



208 Filtre universel à A.O.



1) Filtre passe-bande

a. Calculer la transmittance $T_2(j\omega) = \frac{V_2}{V_E}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$T_2(j\omega) = T_0 \times \frac{2m j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En déduire les expressions de T_0 , m et ω_0 .

b. Soient ω_1 et ω_2 les pulsations telles que :

$$|T_2(j\omega_1)| = |T_2(j\omega_2)| = \frac{|T_0|}{\sqrt{2}} \quad (\text{atténuation à } -3 \text{ dB}).$$

Déterminer les expressions de ω_1 et ω_2 avec $\omega_2 > \omega_1$.

c. On définit le coefficient de qualité, Q , du filtre passe-bande par : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ avec :

$$\begin{cases} \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 & : \text{bande passante à } -3 \text{ dB} \\ \omega_0 & : \text{pulsation centrale du filtre passe-bande} \end{cases}$$

Montrer que $Q = \frac{1}{2m}$ et l'exprimer en fonction des éléments du circuit.

d. On souhaite un coefficient de qualité $Q = 10$, en déduire la valeur de la résistance R_3 .

e. Pour cette valeur de R_3 , tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T_2(j\omega)$ et l'allure de la courbe réelle.

2) Filtre passe-bas

a. Calculer la transmittance $T_3(j\omega) = \frac{V_3}{V_E}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$T_3(j\omega) = \frac{T_0}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En déduire les expressions de T_0 , m et ω_0 .

b. On souhaite un coefficient d'amortissement $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$; en déduire la valeur de R_3 et la valeur de T_0 .

c. Pour $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donner l'expression de $|T_3(j\omega)|$ et en déduire ω_c la pulsation de

coupure du filtre à - 3 dB.

d. Pour la valeur de R_3 précédente, tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T_3(j\omega)$ et l'allure de la courbe réelle.

3) Filtre passe-haut

a. Calculer la transmittance $T_1(j\omega) = \frac{V_1}{V_E}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$T_1(j\omega) = T_0 \times \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2 m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En déduire les expressions de T_0 , m et ω_0 .

b. On souhaite un coefficient d'amortissement $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$; en déduire la valeur de R_3 et la valeur de T_0 .

c. Pour $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donner l'expression de $|T_1(j\omega)|$ et en déduire ω_c la pulsation de

coupure du filtre à - 3 dB.

d. Pour la valeur de R_3 précédente, tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T_1(j\omega)$ et l'allure de la courbe réelle.

4) Filtre réjecteur de bande

a. Calculer la transmittance $T_4(j\omega) = \frac{V_4}{V_E}$ et déterminer la valeur de R_3 pour

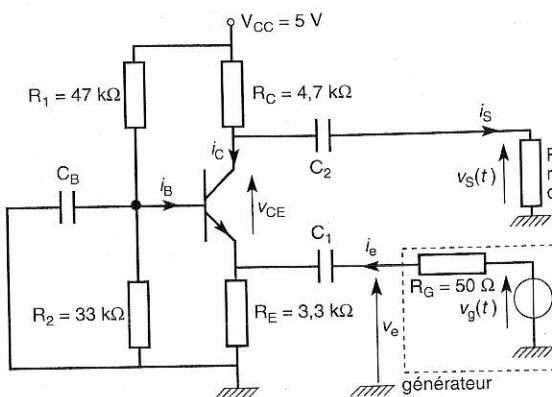
mettre $T_4(j\omega)$ sous la forme suivante :

$$T_4(j\omega) = T_0 \times \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2 m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En déduire les expressions de T_0 , m et ω_0 .

b. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T_4(j\omega)$ et l'allure de la courbe réelle.

209 Amplificateur à transistor : base-commune



$$C_1 = C_2 = 4,7 \mu\text{F}$$

Transistor :

$$100 \leq \beta \leq 200$$

$$V_{BE0} \approx 0,6 \text{ V}$$

$$R_U = 10 \text{ k}\Omega$$

résistance de charge

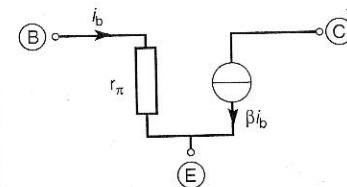
$$v_g(t)$$

générateur

1) Polarisation

Calculer I_{C0} et V_{CE0} pour β_{min} et β_{MAX} . En déduire une condition sur les résistances pour que la polarisation soit peu dépendante des variations du β du transistor. On adopte pour la suite, la valeur de I_{C0} relative à β_{min} .

2) On se place dans la bande passante de l'amplificateur, C_B , C_1 et C_2 sont équivalents à des courts-circuits. On adopte pour le transistor le schéma équivalent suivant :



$$\text{avec } r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_{C0}}$$

et $V_T \approx 25 \text{ mV}$ à $\theta_{jonction} \approx 25^\circ\text{C}$.

a. Représenter le schéma équivalent petits-signaux de l'amplificateur.

$$\text{b. Calculer la résistance d'entrée } R_e = \frac{v_e}{i_e}$$

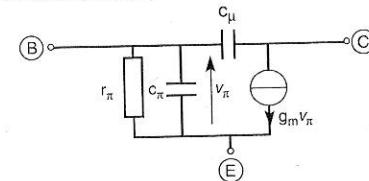
$$\text{c. Calculer la résistance de sortie } R_s$$

$$\text{d. Calculer l'amplification en tension à vide : } A_{v0} = \frac{v_s}{v_e}$$

3) Réponse en fréquence

a. Fréquence de coupure basse : f_{CB} . On suppose que les condensateurs de liaison C_1 et C_2 n'interviennent pas pour la fréquence de coupure basse. Déterminer l'expression de f_{CB} et en déduire la valeur de C_B pour obtenir $f_{CB} = 1,5 \text{ kHz}$.

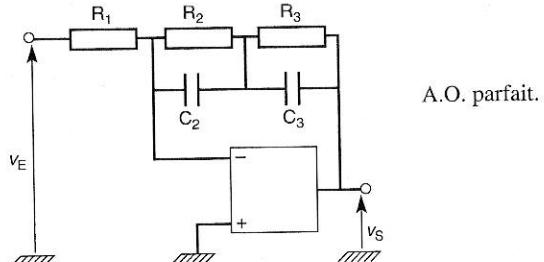
b. Fréquence de coupure haute : f_{CH} . Aux hautes fréquences le transistor est modélisé par le schéma équivalent suivant :



$$\begin{cases} g_m = \frac{I_{C_0}}{V_T} \\ C_\pi = 30 \text{ pF} \\ C_\mu = 3 \text{ pF} \end{cases}$$

Déterminer l'expression de f_{CH} et calculer sa valeur lorsque l'amplificateur est chargé par R_u .

210 Filtre correcteur R.I.A.A.



A.O. parfait.

- 1) Calculer la transmittance $T(j\omega) = \frac{V_s}{V_E}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$T(j\omega) = T_0 \times \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})(1 + j \frac{\omega}{\omega_3})}$$

Déterminer les expressions de T_0 , ω_1 , ω_2 et ω_3 .

- 2) On donne :

$$\begin{cases} R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 10 \text{ k}\Omega \\ R_3 = 820 \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 330 \text{ nF} \\ C_3 = 100 \text{ nF} \end{cases}$$

Calculer la valeur de T_0 et les valeurs des fréquences

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \text{ et } f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi}$$

- 3) Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T(j\omega)$ et l'allure de la courbe réelle.

- I. Théorème de Fourier
- II. Valeur efficace d'un signal périodique
- III. Taux de distorsion harmonique
- IV. Réponse d'un système linéaire à un signal périodique
- V. Table des développements en série de Fourier des principaux signaux

3

Les signaux périodiques : la série de Fourier

I. THÉORÈME DE FOURIER

Un signal périodique, $v(t)$, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquence multiple de $f_0 = \frac{1}{T_0}$ et de sa valeur moyenne.

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$\text{avec : } V_0 = \overline{v(t)} = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} v(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} v(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} v(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Remarque : les coefficients a_n , b_n et V_0 sont réels.

2. Deuxième expression de la série de Fourier

En regroupant les a_n et les b_n deux à deux, on obtient une nouvelle expression de la série de Fourier :

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

avec : $d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
 $\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ (+ π si $a_n < 0$)

les coefficients d_n sont des nombres positifs ou nuls.

La composante sinusoïdale à la fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ s'appelle le fondamental ou l'harmonique de rang 1 du signal $v(t)$.

La composante sinusoïdale à la fréquence multiple de f_0, nf_0 , s'appelle l'harmonique de rang n du signal $v(t)$.

3. Propriétés pour le calcul pratique des séries de Fourier

a) Pour un signal pair

$v(t) = v(-t)$, alors les $b_n = 0$ et :

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad \text{avec : } a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} v(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

b) Pour un signal impair

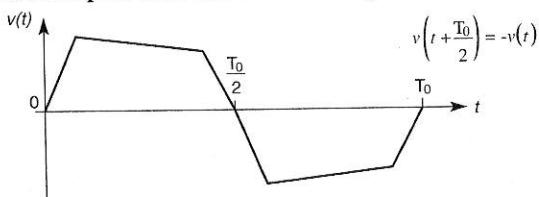
$v(t) = -v(-t)$, alors $V_0 = 0, a_n = 0$ et :

$$v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad \text{avec : } b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} v(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

Pour un signal $v(t)$ ayant une composante continue non nulle et une partie alternative impaire : $v(t) = V_0 + v_o(t)$,

alors : $v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega_0 t$

c) Pour un signal $v(t)$ ayant des alternances positives qui au signe près sont identiques aux alternances négatives :



alors :

– $\overline{v(t)} = V_0 = 0$

– $v(t)$ ne contient pas d'harmonique de rang pair.

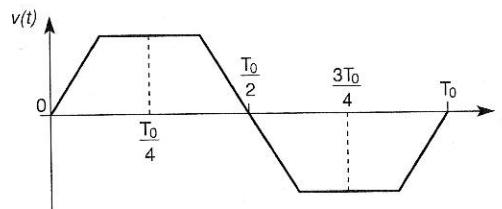
Le calcul des harmoniques impairs est simplifié :

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} v(t) \cos(2k+1)\omega_0 t \, dt \\ b_{2k+1} = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} v(t) \sin(2k+1)\omega_0 t \, dt \end{cases}$$

d) Pour un signal $v(t)$ présentant simultanément plusieurs symétries

- alternances positives identiques, au signe près, aux alternances négatives,
- signal pair ou impair suivant le choix de l'origine des temps.

Exemple :



soit :

$$\begin{cases} v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)\omega_0 t \\ b_{2k+1} = \frac{8}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{4}} v(t) \sin(2k+1)\omega_0 t \, dt \end{cases}$$

on a : $v(t) = -v(-t)$ signal impair.

alors :

– $\overline{v(t)} = V_0 = 0$

– $v(t)$ ne contient pas d'harmonique de rang pair.

– $v(t)$ ne contient que des termes en sinus.

Si on prend comme origine des temps un milieu d'alternance alors $v(t)$ ne contient que des cosinus de rang impair.

Soit :

$$\begin{cases} v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \cos(2k+1)\omega_0 t \\ a_{2k+1} = \frac{8}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{4}} v(t) \cos(2k+1)\omega_0 t \, dt \end{cases}$$

4. Forme exponentielle de la série de Fourier

En introduisant des indices négatifs, le développement en série de Fourier de $v(t)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\text{avec : } c_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Remarque : les coefficients c_n peuvent être des nombres complexes.

On a d'autre part :

$C_0 = V_0$: valeur moyenne du signal $v(t)$

$$2|c_n| = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\arg(c_n) = \varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) (+\pi \text{ si } a_n < 0)$$

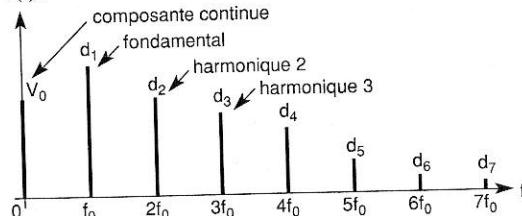
5. Représentation graphique : spectre d'amplitude

a) Représentation monolatérale

Pour un signal $v(t)$ périodique, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, décomposable en série de Fourier tel que :

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Le graphe ci-dessous correspond à une représentation spectrale en amplitude du signal $v(t)$:



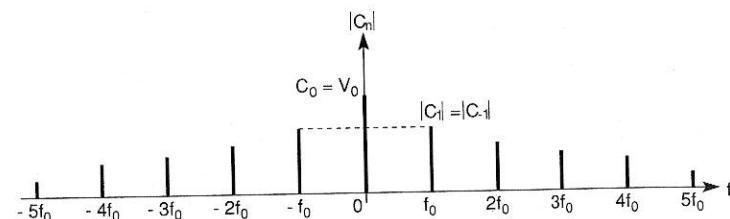
Un signal périodique a un spectre discret composé de raies espacées de f_0 .

b) Représentation bilatérale

En utilisant la forme exponentielle de la série de Fourier alors :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

On peut tracer le graphe suivant qui correspond à un spectre d'amplitude du signal $v(t)$.



On peut montrer que $c_n = c_{-n}$ d'où $|c_n| = |c_{-n}|$ donc on obtient un spectre symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque : on a introduit des fréquences négatives qui évidemment n'ont pas de réalité physique mais cette représentation spectrale bilatérale permet une généralisation de la notion de spectre pour les signaux non périodiques.

II. VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

$$\text{Par définition : } V_{\text{eff}}^2 = \overline{v^2(t)} = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} v^2(t) dt$$

En remplaçant $v(t)$ par sa décomposition en série de Fourier, on obtient :

$$V_{\text{eff}}^2 = V_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

On en déduit que la puissance moyenne dissipée dans une résistance R par un signal périodique $v(t)$ est égale à la somme de la puissance dissipée par sa composante continue et des puissances moyennes de chacun de ses harmoniques.

III. TAUX DE DISTORSION HARMONIQUE

Il est défini par le rapport suivant :

$$D = \frac{\sqrt{d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \dots}}{d_1} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{valeur efficace des harmoniques de rang } \geq 2.} \\ \xrightarrow{\text{valeur efficace du fondamental}} \end{array}$$

La valeur de D permet de caractériser la pureté spectrale d'un signal.

IV. RÉPONSE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE À UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Soit un système linéaire défini par sa transmittance isochrone $H(j\omega)$ et auquel on applique à l'entrée un signal périodique, $v(t)$, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow s(t)$$

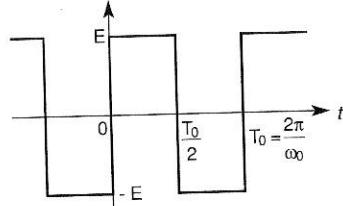
En appliquant la méthode de superposition, on obtient pour le signal de sortie, $s(t)$, l'expression suivante :

$$s(t) = H(0) V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |H(jn\omega_0)| d_n \cos[n\omega_0 t + \varphi_n + \arg(H(jn\omega_0))]$$

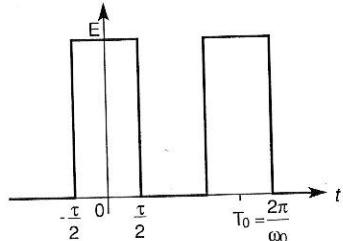
composante continue de $s(t)$ amplitude de l'harmonique n de $s(t)$

V. TABLE DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER DES PRINCIPAUX SIGNAUX

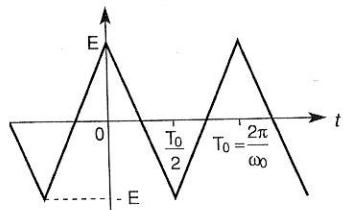
$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$$



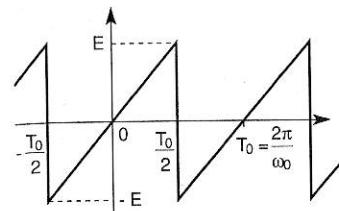
$$v(t) = E \frac{\tau}{T_0} + \frac{2E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi\tau}{T_0}\right) \cos \omega_0 t + \frac{\sin(2\pi\tau)}{2} \cos 2\omega_0 t + \dots \right]$$



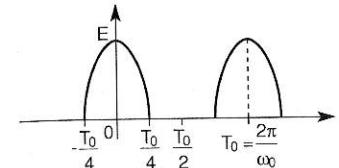
$$v(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right]$$



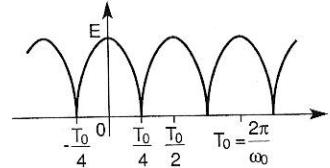
$$v(t) = \frac{2E}{\pi} \left[\sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t - \frac{1}{4} \sin 4\omega_0 t + \dots \right]$$



$$v(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \cos \omega_0 t + \frac{2E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega_0 t + \frac{1}{5 \times 7} \cos 6\omega_0 t + \dots \right]$$



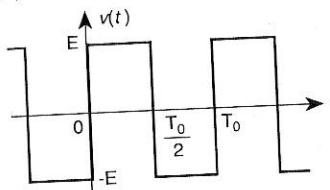
$$v(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega_0 t + \frac{1}{5 \times 7} \cos 6\omega_0 t + \dots \right]$$



Exercices résolus

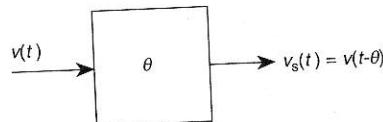
301 Opérations sur les signaux et conséquences sur les spectres

1) On considère le signal carré suivant :



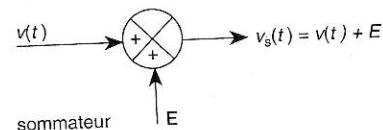
a. Translation temporelle

Le signal $v(t)$ est retardé d'une valeur $\theta = \frac{T_0}{4}$



Représenter $v_s(t)$, exprimer son développement en série de Fourier et tracer son spectre d'amplitude : conclusion.

b. Translation de niveau

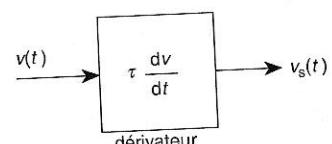
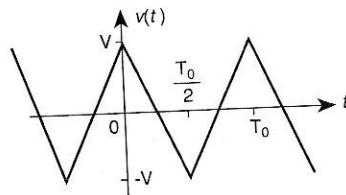


On ajoute au signal $v(t)$ une valeur constante E .

Représenter $v_s(t)$, exprimer son développement en série de Fourier et tracer son spectre d'amplitude : conclusion.

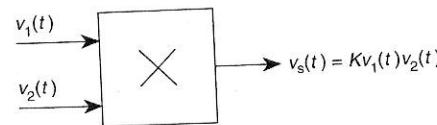
2) Dérivation

On considère le signal triangulaire suivant :



Représenter $v_s(t)$, à l'aide du développement en série de Fourier de $v(t)$ en déduire celui de $v_s(t)$. Montrer qu'en choisissant convenablement la valeur de τ on retrouve un signal carré d'amplitude crête à crête $2E$.

3) Translation fréquentielle



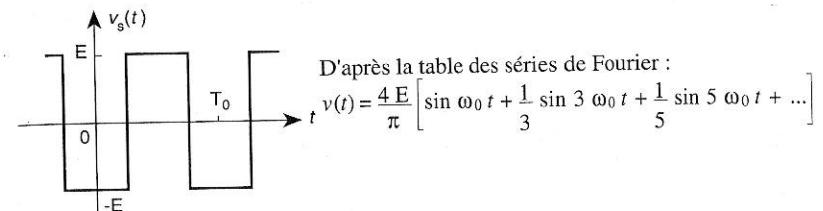
On considère deux signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$ appliqués aux entrées d'un multiplicateur analogique.

a. Pour $v_1(t) = V_1 \cos \omega_1 t$, $v_2(t) = V_2 \cos \omega_2 t$ avec $\omega_2 \gg \omega_1$, représenter l'allure de $v_s(t)$ ainsi que son spectre d'amplitude.

EXERCICES

b. Lorsque $v_1(t)$ est un signal carré d'amplitude E et de pulsation $\omega_0 \ll \omega_2$ avec $v_2(t) = V_2 \cos \omega_2 t$, exprimer $v_s(t)$ sous la forme d'une somme infinie de sinusoïdes et représenter son spectre d'amplitude.

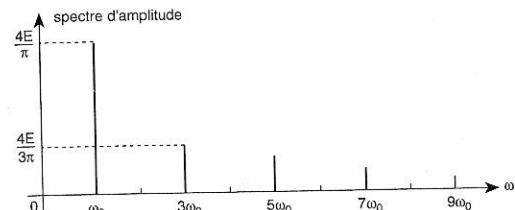
1) a. Translation temporelle



On en déduit le développement en série de Fourier de $v_s(t)$.

$$v_s(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin \left(\omega_0 \left(t - \frac{T_0}{4} \right) \right) + \frac{1}{3} \sin \left(3 \omega_0 \left(t - \frac{T_0}{4} \right) \right) + \frac{1}{5} \sin \left(5 \omega_0 \left(t - \frac{T_0}{4} \right) \right) + \dots \right]$$

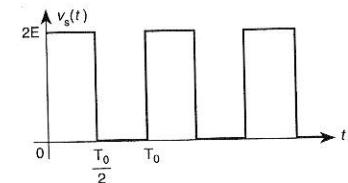
$$\text{Soit : } v_s(t) = \frac{4E}{\pi} \left[-\cos \omega_0 t + \frac{1}{3} \cos 3 \omega_0 t - \frac{1}{5} \cos 5 \omega_0 t + \dots \right]$$



On retrouve le même spectre d'amplitude que pour $v(t)$.

Conclusion : une translation temporelle ne modifie pas le spectre d'amplitude d'un signal.

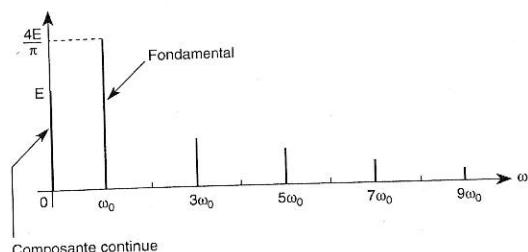
b. Translation de niveau



On obtient pour $v_s(t) = v(t) + E$ l'expression suivante :

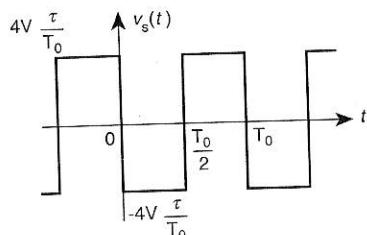
$$v_s(t) = E + \frac{4E}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_0 t + \dots \right]$$

On en déduit le spectre d'amplitude de $v_s(t)$:



Conclusion : une translation de niveau modifie uniquement la composante continue pour le spectre d'amplitude d'un signal.

2) Dérivation : $v_s(t) = \tau \frac{dv}{dt}$



On obtient le développement en série de Fourier de $v_s(t)$ en dérivant celui de $v(t)$.

Soit : $v_s(t) = -\frac{8V}{\pi^2} \times \tau \omega_0 \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_0 t + \dots \right]$

Pour obtenir un signal carré crête à crête $2E$, il faut que :

$$4V \frac{\tau}{T_0} = E \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{E T_0}{4V}$$

On en déduit pour $v_s(t)$:

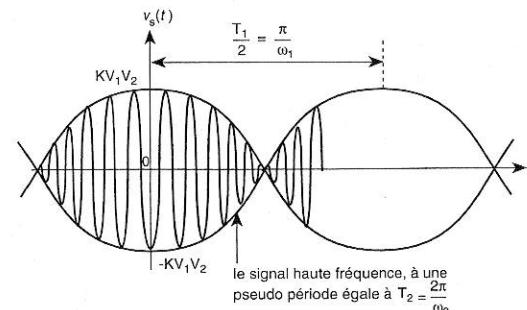
$$v_s(t) = -\frac{8V}{\pi^2} \times \frac{E T_0}{4V} \times \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1) \omega_0 t$$

$$v_s(t) = -\frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1) \omega_0 t$$

On retrouve bien, en multipliant par -1 , le développement en série de Fourier du signal carré.

3) Translation fréquentielle

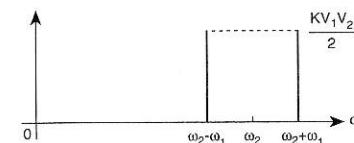
a. $v_s(t) = K v_1(t) v_2(t) = KV_1 V_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$ avec $\omega_2 > \omega_1$.



D'autre part, on peut écrire $v_s(t)$ sous la forme suivante :

$$v_s(t) = \frac{KV_1 V_2}{2} [\cos(\omega_2 - \omega_1)t + \cos(\omega_2 + \omega_1)t]$$

On en déduit le spectre d'amplitude de $v_s(t)$:



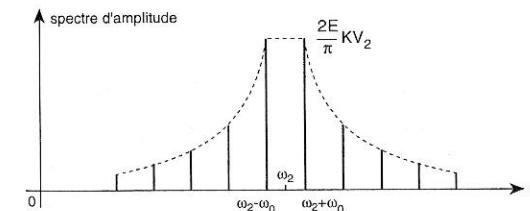
b. D'après la table des développements en série de Fourier, nous avons pour $v_1(t)$:

$$v_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1) \omega_0 t$$

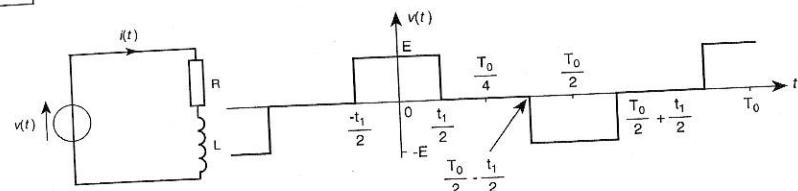
$$\text{et } v_s(t) = K v_1(t) v_2(t)$$

$$\text{d'où : } v_s(t) = \frac{4E}{\pi} \times K V_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1) \omega_0 t \times \cos \omega_2 t$$

$$\text{Soit : } v_s(t) = \frac{2E}{\pi} K V_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} [\sin[\omega_2 + (2n+1)\omega_0]t - \sin[\omega_2 - (2n+1)\omega_0]t]$$



On retrouve de part et d'autre de ω_2 , le spectre d'amplitude du signal carré.

302 Circuit R, L alimenté par une tension périodique


1) Calculer le développement en série de Fourier de $v(t)$.

2) Déterminer la valeur de t_1 qui annule l'harmonique 3.

3) Déterminer le rapport $\frac{V_5}{V_1}$ ← amplitude de l'harmonique 5
← amplitude du fondamental

4) On suppose que $v(t)$ peut être limitée à son fondamental et à l'harmonique 5 soit :

$$v(t) \approx V_1 \cos \omega_0 t - V_5 \cos 5 \omega_0 t$$

a. Exprimer $i(t)$.

b. Calculer le rapport : $\frac{I_5}{I_1}$ ← amplitude de l'harmonique 5
← amplitude du fondamental

En déduire sa valeur lorsque $R \ll L\omega_0$.

1) $v(t)$ est un signal pair et l'alternance positive est identique, au signe près, à l'alternance négative donc $v(t)$ ne contient que des cosinus de rang impair.

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \cos(2k+1) \omega_0 t$$

avec :

$$a_{2k+1} = \frac{8}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{4}} v(t) \cos(2k+1) \omega_0 t \, dt$$

$$a_{2k+1} = \frac{8E}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos(2k+1) \omega_0 t \, dt$$

$$a_{2k+1} = \frac{8E}{T_0 \omega_0} \times \frac{1}{2k+1} \times \sin \left[(2k+1) \frac{\omega_0 t_1}{2} \right]$$

$$\text{soit : } v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin \left(\pi \frac{t_1}{T_0} \right) \cos \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin \left(3 \pi \frac{t_1}{T_0} \right) \cos 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin \left(5 \pi \frac{t_1}{T_0} \right) \cos 5 \omega_0 t + \dots \right]$$

2) Pour annuler l'harmonique 3, il faut : $\sin \left(3 \pi \frac{t_1}{T_0} \right) = \pi$

$$\text{d'où : } 3\pi \frac{t_1}{T_0} = 0$$

$$\text{alors : } t_1 = \frac{T_0}{3} \text{ car } t_1 \text{ doit être inférieur à } \frac{T_0}{2}$$

3) Pour $t_1 = \frac{T_0}{3}$, nous avons :

$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{3} \cos \omega_0 t + \frac{3}{5} \cos 5 \omega_0 t + \frac{3}{7} \cos 7 \omega_0 t + \dots \right]$$

$$v(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} E \left[\cos \omega_0 t - \frac{1}{5} \cos 5 \omega_0 t + \frac{1}{7} \cos 7 \omega_0 t - \frac{1}{11} \cos 11 \omega_0 t \dots \right]$$

$$\text{D'où : } V_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} E \quad \text{et} \quad V_5 = \frac{V_1}{5} \quad \text{alors} \quad \frac{V_5}{V_1} = \frac{1}{5}$$

Cela signifie que l'amplitude du premier harmonique non nul après le fondamental est cinq fois plus petite que celle du fondamental.

4) a. On a $v(t) \approx 1,1 E \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{5} \cos 5 \omega_0 t \right)$

On peut utiliser les grandeurs complexes car nous nous plaçons en régime sinusoïdal permanent.

$$\text{Alors : } \underline{V} = (R + jL\omega) \underline{I} \quad \text{d'où : } \underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + jL\omega}$$

On en déduit en appliquant la méthode de superposition :

$$\begin{cases} i(t) = \frac{1,1 E}{\sqrt{R^2 + (L\omega_0)^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_1) - \frac{1,1 E}{5 \sqrt{R^2 + (5L\omega_0)^2}} \cos(5\omega_0 t + \varphi_5) \\ \text{avec : } \varphi_1 = -\arctan\left(\frac{L\omega_0}{R}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_5 = -\arctan\left(\frac{5L\omega_0}{R}\right) \end{cases}$$

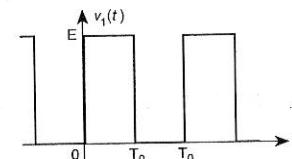
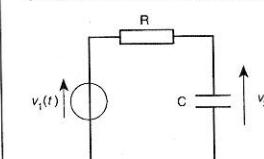
b. On en déduit $\frac{I_5}{I_1}$:

$$\frac{I_5}{I_1} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{R^2 + (L\omega_0)^2}{R^2 + (5L\omega_0)^2}}$$

Pour $R \ll L\omega_0$ alors : $\frac{I_5}{I_1} \approx \frac{1}{25}$ donc $i(t)$ sera pratiquement sinusoïdal car le dipôle R, L a joué le rôle d'un filtre passe-bas en atténuant l'harmonique 5.

303 Filtrage d'un signal carré par un circuit RC : obtention de la valeur moyenne

On considère le circuit suivant :



1) Calculer la fonction de transfert : $H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$.

2) Exprimer le développement en série de Fourier de $v_1(t)$.

3) Montrer que lorsque $\omega_0 \gg \frac{1}{RC}$, on peut exprimer $v_2(t)$ sous la forme suivante :

$$v_2(t) \approx \frac{E}{2} - \frac{ET_0}{\pi^2 RC} \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right]$$

4) On assimile $v_2(t)$ à sa composante continue et à son fondamental, calculer l'ondulation crête à crête $\Delta V = v_2^{\text{MAX}} - v_2^{\text{MIN}}$ et sa valeur moyenne : $\bar{v}_2(t)$.

5) On souhaite obtenir une ondulation relative : $\frac{\Delta V}{v_2(t)} \leq 1\%$, déterminer la condition

sur la constante de temps $\tau = RC$ du filtre passe-bas.

1) En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad \text{soit : } H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

2) D'après la table et les propriétés établies à l'exercice, n°1 on peut écrire :

$$v_1(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\omega_0 t$$

3) En appliquant le principe de superposition, on obtient pour $v_2(t)$:

$$\begin{cases} v_2(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \times \frac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\omega_0^2 R^2 C^2}} \sin[(2n+1)\omega_0 t + \varphi_n] \\ \text{avec } \varphi_n = -\arctan[(2n+1)\omega_0 RC] \end{cases}$$

Dans le cas où $\omega_0 \gg \frac{1}{RC}$ alors $\frac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\omega_0^2 R^2 C^2}} \approx \frac{1}{(2n+1)\omega_0 RC}$

et $\varphi_n \approx -\frac{\pi}{2}$

$$\text{D'où : } v_2(t) \approx \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \times \frac{1}{\omega_0 RC} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)\omega_0 t - \frac{\pi}{2}]$$

soit : $v_2(t) \approx \frac{E}{2} - \frac{E T_0}{\pi^2 RC} \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right]$
 composante continue fondamental

$$4) v_2(t) \approx \frac{E}{2} - \frac{E T_0}{\pi^2 RC} \cos \omega_0 t$$

$$\text{On en déduit : } \Delta V = \frac{2 E T_0}{\pi^2 RC} \quad \text{et} \quad \bar{v}_2(t) = \frac{E}{2}$$

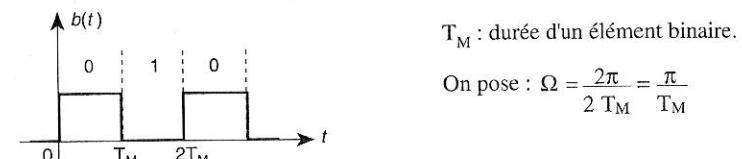
$$5) \frac{\Delta V}{v_2(t)} = \frac{4 T_0}{\pi^2 RC} \quad \text{on souhaite} \quad \frac{\Delta V}{v_2(t)} \leq 1\% = 10^{-2}$$

$$\text{d'où : } \frac{4 T_0}{\pi^2 RC} \leq 10^{-2}$$

$$\text{soit : } \tau \geq \frac{4}{10^{-2} \pi^2} \quad T_0 = 41 T_0$$

304 Spectre d'un signal sinusoïdal modulé en "tout ou rien"

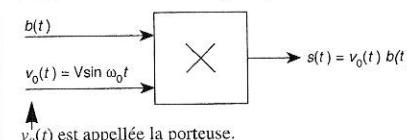
Soit $b(t)$ un signal binaire correspondant à une suite de 0 et de 1.



T_M : durée d'un élément binaire.

$$\text{On pose : } \Omega = \frac{2\pi}{2 T_M} = \frac{\pi}{T_M}$$

Pour transmettre ce signal, on utilise le dispositif suivant :



$v_0(t)$ est appellée la porteuse.

On suppose que l'on a la relation suivante entre les pulsations : $\omega_0 = N\Omega$ avec $N \in \mathbb{N}$.

- 1) Représenter l'allure de $s(t)$ pour $N = 10$ et $N = 5$.
- 2) Calculer le coefficient c_N du développement en série de Fourier de $s(t)$ et en déduire d_N , l'amplitude de l'harmonique de pulsation $N\Omega = \omega_0$.
- 3) Calculer la valeur moyenne de $s(t)$: $s_0 = \bar{s}(t)$.
- 4) Calculer le coefficient c_n avec $n \neq N$ du développement en série de Fourier de $s(t)$ et montrer qu'il s'exprime sous la forme suivante :

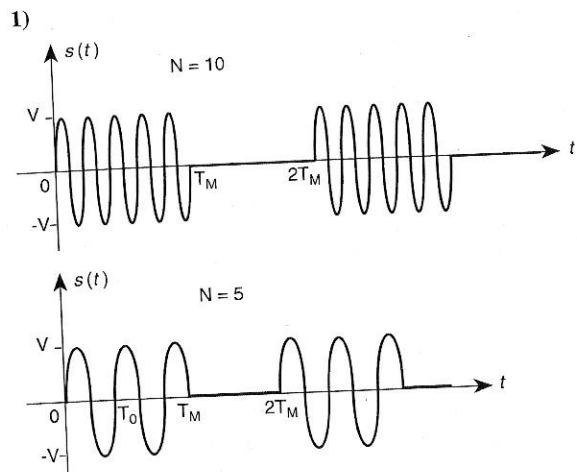
$$c_n = \frac{V}{2\pi} \times \frac{N}{(n-N)(n+N)} [1 - (-1)^{N+n}] \quad \text{avec } n \neq N$$

On rappelle que : $e^{j\pi} = (-1)^k$.

- 5) Représenter le spectre d'amplitude monolatérale de $s(t)$ pour $N = 5$ et $N = 10$. On normalisera les composantes par rapport à d_N et on limitera le spectre aux raies telles que $\frac{d_n}{d_N} \geq 5 \times 10^{-2}$.

6) a. Calculer la valeur efficace de $s(t)$: $S = \sqrt{\bar{s}^2(t)}$.

- b. Calculer la valeur efficace, notée S_3 , du signal constitué par les 3 raies d'amplitude les plus grandes de la décomposition de $s(t)$ pour $N = 5$ et $N = 10$. Calculer le rapport $\frac{S_3}{S}$ pour $N = 5$ et $N = 10$ et en déduire l'encombrement spectral du signal $s(t)$.



$s(t)$ est un signal périodique de période $2 T_M = \frac{2\pi}{\Omega}$.

2)

$$\begin{aligned} C_N &= \frac{1}{2 T_M} \int_0^{T_M} V \sin N\Omega t e^{jN\Omega t} dt \\ C_N &= \frac{V}{2 T_M} \int_0^{T_M} \frac{(e^{j2N\Omega t} - 1)}{2j} dt \\ C_N &= \frac{V}{4j T_M} \left[\frac{1}{j2N\Omega} \underbrace{(e^{j2N\Omega T_M} - 1)}_0 - T_M \right] \end{aligned}$$

$$C_N = j \frac{V}{4} \quad \text{on en déduit : } d_N = 2 |C_n| = \frac{V}{2}$$

Donc l'amplitude de la raie située à la pulsation $N\Omega = \omega_0$ est égale à $\frac{V}{2}$ quelle que soit la valeur de N .

3) Lorsque N est pair, il y a autant d'alternances positives que d'alternances négatives pendant une période donc :

N pair : $s(t) = S_0 = 0$

Lorsque N est impair, il y a une alternance positive de $V \sin \omega_0 t$ qui n'est pas compensée par une alternance négative, donc :

$$S_0 = \overline{s(t)} = \frac{1}{2 T_M} \int_0^{\frac{T_0}{2}} V \sin \omega_0 t dt = \frac{V}{2 T_M} \left[-\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$\text{soit : } S_0 = \frac{V}{\omega_0 T_M} = \frac{V}{N\Omega T_M} \quad \text{alors : } S_0 = \frac{V}{N\pi} \text{ pour } N \text{ impair}$$

4)

$$c_n = \frac{1}{2 T_M} \int_0^{2 T_M} s(t) e^{jn\Omega t} dt = \frac{1}{2 T_M} \int_0^{T_M} V \sin N\Omega t e^{jn\Omega t} dt$$

$$c_n = \frac{V}{4j T_M} \int_0^{T_M} (e^{j(n+N)\Omega t} - e^{j(n+N)\Omega t}) dt$$

Or $n \neq N$, donc :

$$c_n = \frac{V}{4j T_M} \left[\frac{1}{j(n+N)\Omega} (e^{j(n+N)\Omega T_M} - 1) - \frac{1}{j(n-N)\Omega} (e^{j(n-N)\Omega T_M} - 1) \right]$$

$$c_n = \frac{V}{4\pi} \left[\frac{1}{n+N} - \frac{1}{n-N} + e^{jn\pi} \left(\frac{e^{-jN\pi}}{n-N} - \frac{e^{jN\pi}}{n+N} \right) \right]$$

On a : $e^{jn\pi} = (-1)^n$ et $e^{jN\pi} = e^{jN\pi} = (-1)^N$

$$c_n = \frac{V}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{n+N} - \frac{1}{n-N} \right) (1 - (-1)^{N+n}) \right]$$

$$\text{d'où : } c_n = \frac{V}{4\pi} \times \frac{N}{(n-N)(n+N)} [1 - (-1)^{N+n}] \quad \text{avec } n \neq N$$

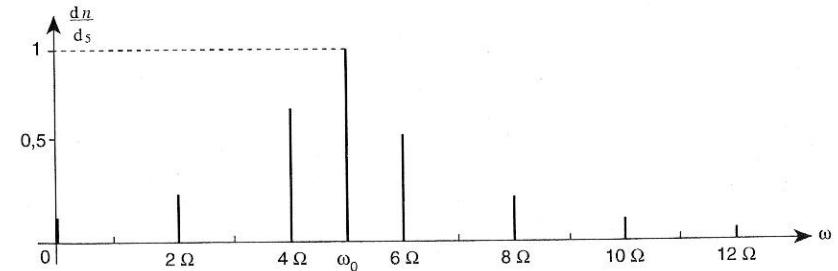
- si N pair alors tous les harmoniques de rang pair sont nuls sauf la raie à $N\Omega = \omega_0$
- si N impair alors tous les harmoniques de rang impair sont nuls sauf la raie à $N\Omega = \omega_0$.

5) Spectre d'amplitude pour $N = 5$

$$\frac{d_n}{d_5} = \frac{4 |C_n|}{V} = \frac{4}{\pi} \times \frac{N}{|n-N|(n+N)}$$

$$\text{soit : } \frac{d_n}{d_5} = \frac{20}{\pi} \times \frac{1}{|n-5|(n+5)} \text{ pour } n \text{ pair et } n \neq 0.$$

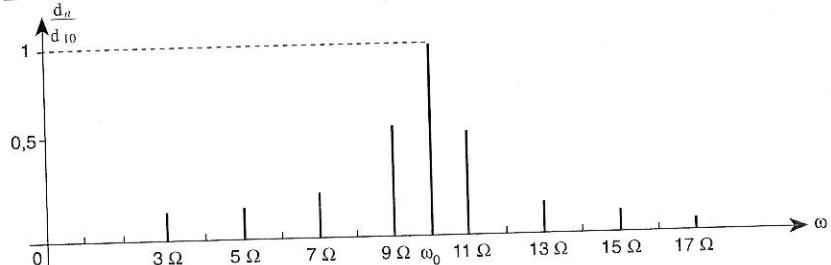
| n | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 | 0 | 10 | 12 |
|-------------------|---|------|------|------|------|--------------------------|---------------------|---------------------|
| $\frac{d_n}{d_5}$ | 1 | 0,71 | 0,58 | 0,30 | 0,16 | $\frac{S_0}{d_5} = 0,13$ | $8,5 \cdot 10^{-2}$ | $5,3 \cdot 10^{-2}$ |



Spectre d'amplitude pour $N = 10$

$$\frac{d_n}{d_{10}} = \frac{40}{\pi} \times \frac{1}{|n - 10|(n + 10)} \text{ pour } n \text{ impair}$$

| n | 10 | 9 | 11 | 7 | 13 | 5 | 15 | 3 | 17 |
|----------------------|----|------|------|------|------|------|------|------|---------------------|
| $\frac{d_n}{d_{10}}$ | 1 | 0,67 | 0,61 | 0,25 | 0,18 | 0,07 | 0,10 | 0,14 | $6,7 \cdot 10^{-2}$ |



6. a.

$$\overline{s^2(t)} = \frac{1}{2 T_M} \int_0^{T_M} V^2 \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{V^2}{4 T_M} \int_0^{T_M} (1 - \cos 2\omega_0 t) dt$$

$$\overline{s^2(t)} = \frac{V^2}{4 T_M} \left[T_M - \frac{1}{2 \omega_0} \underbrace{\sin 2\omega_0 T_M}_0 \right]$$

$$\overline{s^2(t)} = \frac{V^2}{4} \quad \text{alors : } S = \frac{V}{2}$$

b. Les 3 raies d'amplitude les plus grandes sont :

d_N, d_{N-1} et d_{N+1} .

$$\text{Donc : } S_3^2 = \frac{d_N^2}{2} + \frac{d_{N-1}^2}{2} + \frac{d_{N+1}^2}{2}$$

$$\text{soit : } S_3 = \frac{d_N}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{d_{N-1}}{d_N} \right)^2 + \left(\frac{d_{N+1}}{d_N} \right)^2 \right]^{1/2}$$

On en déduit :

- pour $N = 5$

$$S_3 = \frac{V}{2\sqrt{2}} [1 + 0,71^2 + 0,58^2]^{1/2}$$

$$S_3 \approx \frac{V}{2\sqrt{2}} \times 1,35$$

- pour $N = 10$

$$S_3 = \frac{V}{2\sqrt{2}} [1 + 0,67^2 + 0,61^2]^{1/2}$$

$$S_3 \approx \frac{V}{2\sqrt{2}} \times 1,35$$

Pratiquement $S_3 \approx \frac{V}{2\sqrt{2}} \times 1,35$ pour $N = 5$ et $N = 10$

$$\text{D'où : } \frac{S_3}{S} \approx \frac{1,35}{\sqrt{2}} \approx 0,95$$

Donc le signal constitué par les 3 raies les plus grandes contient 95 % de la valeur efficace de $s(t)$, on peut limiter le spectre de $s(t)$ à ces 3 raies.
L'encombrement spectral de $s(t)$ est égal à 2Ω . La modulation a permis de "concentrer" le spectre autour de la porteuse ω_0 .

305 Génération numérique de signaux (Texte d'examen)

Le signal produit par le système numérique est constitué de marches d'escalier de durée constante T_E formant approximativement une sinusoïde (fig. 2).

La fonction "génération numérique d'une sinusoïde" est mathématiquement équivalente à la mise en cascade de 2 fonctions (fig. 1) :

- l'échantillonnage idéal d'une sinusoïde modèle (fictive)
- le filtrage du signal échantillonner par un bloqueur (interpolateur d'ordre zéro).

Cette indication permettra d'obtenir aisément la composition spectrale du signal en marches d'escalier.

Notations :

Soient :

$s(t)$: le signal sinusoïdal modèle, de période T , de fréquence F , d'amplitude 1 :
 $s(t) = \sin 2\pi F t$

T_E : la période d'échantillonnage

F_E : la fréquence correspondante

$s^*(t)$: le signal obtenu après échantillonnage

$s_B(t)$: le signal en marche d'escalier à la sortie du bloqueur.

Du fait du procédé de génération, la fréquence d'échantillonnage est multiple de la fréquence du signal sinusoïdal : $F_E = N \cdot F$ (pour les applications numériques, on prendre $N = 16$).

Quelques éléments mathématiques utiles

Transformée de Laplace :

| Fonction | Transformée |
|-----------------------------|---------------------------|
| $\Gamma(t)$ (échelon unité) | $1/p$ |
| $f(t)$ | $F(p)$ |
| $f(t - \theta)$ | $F(p) \cdot e^{-p\theta}$ |
| $f'(t)$ | $p \cdot F(p) - f(0)$ |

Transformations trigonométriques :

$$\sin a \cdot \cos b = 1/2 [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = 1/2 [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

1) Etude de l'échantillonnage

L'échantillonnage idéal de la sinusoïde parfaite $s^*(t)$ peut être considéré comme la multiplication de ce signal $s(t)$ par un signal $e(t)$ constitué d'une succession infinie d'impulsions unitaires (ou de Dirac), apparaissant périodiquement à la période T_E .

- a. Montrer que la valeur numérique du rapport F_E/F permet un échantillonnage sans perte d'information.
 b. Sachant que la décomposition en série de Fourier de $e(t)$ est :

$$e(t) = F_E + 2 F_E \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k F_E t)$$

Etablir l'expression du signal échantillonné et la mettre sous forme d'une somme de fonctions sinusoïdales dont les arguments seront exprimés en fonction de k , N , F et t .

c. Dans les conditions précédemment définies ($F_E = 16 F$), représenter le spectre en fréquence du signal $s^*(t)$, en se limitant aux 5 premières raies (fondamental et 4 harmoniques). Indiquer l'amplitude et la fréquence de chacune de ces raies.

2) Etude du signal après le bloqueur

Le bloqueur est un système linéaire dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est définie par : $h(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T_E)$ où $\Gamma(t)$ représente l'échelon unitaire.

- a. Dessiner le graphe de $h(t)$. Que représente la transformée de Laplace de $h(t)$?

- b. En déduire la transmittance isomorphe du bloqueur $B(p)$.

c. Etude de la réponse harmonique du bloqueur
Quelle est la transmittance isochrone $B(j\omega)$, en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω ?

Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $B(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_E}{2}\right) \times e^{-j\omega T_E/2}$

Etablir l'expression de l'argument $\Phi(\omega)$ de $B(j\omega)$.

En déduire qu'il existe un retard, que l'on calculera, entre le signal modèle $s(t)$ et le signal $s_B(t)$.

Quel est le module $B(\omega)$ de $B(j\omega)$?

Représenter l'allure du graphe de $B(\omega)$.

3) Spectre de fréquence du signal de sortie du bloqueur

- a. Calculer numériquement l'amplitude du fondamental et des quatre premiers harmoniques de $s_B(t)$.

- b. Rappeler une définition mathématique du taux de distorsion harmonique d'un signal périodique.

Calculer le taux de distorsion du signal $s_B(t)$ en se limitant aux harmoniques précédents.

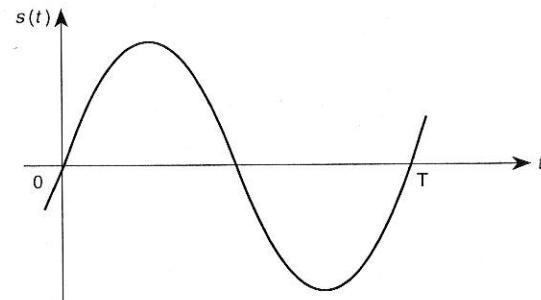
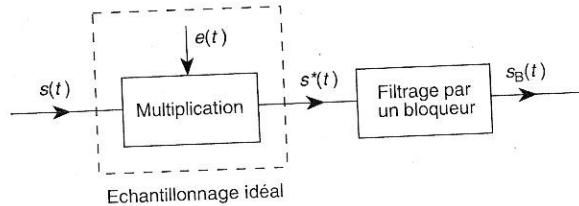


figure 1

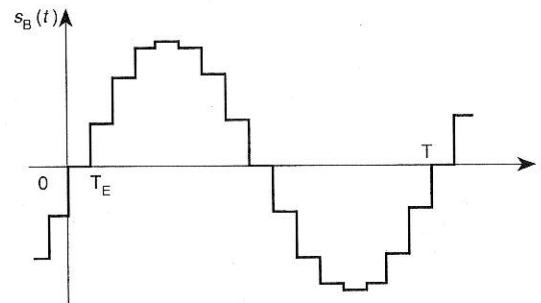
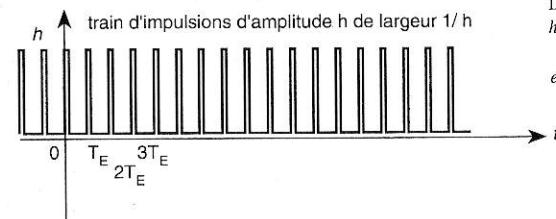


figure 2

- 1) a. Nous avons la relation suivante entre les fréquences :

$F_E = NF$ avec $N = 16$, $\frac{F_E}{F} > 2$ donc l'échantillonnage n'induit aucune perte d'information d'après le théorème de Shannon.

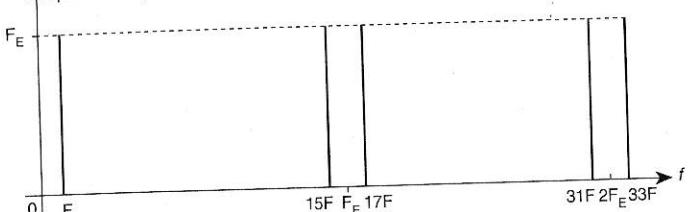
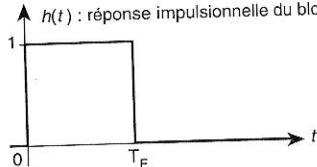
- b. $s^*(t) = s(t) e(t)$

$$s^*(t) = \sin(2\pi F t) \left[F_E + 2 F_E \sum_{k=1}^{+\infty} \cos 2\pi k F_E t \right]$$

$$s^*(t) = F_E \sin(2\pi F t) + F_E \sum_{k=1}^{+\infty} [\sin 2\pi(F + kF_E)t + \sin 2\pi(F - kF_E)t]$$

D'où :

$$s^*(t) = F_E \sin(2\pi F t) + F_E \sum_{k=1}^{+\infty} [\sin 2\pi F(1 + kN)t - \sin 2\pi F(kN - 1)t]$$

c. spectre d'amplitude de $s^*(t)$ 2) a. $h(t)$: réponse impulsionnelle du bloqueur $\mathcal{L}[h(t)] = H(p)$ c'est la transmittance isomorphe du bloqueur.

$$\text{b. } B(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT_E}}{p}$$

$$\text{d'où : } B(p) = \frac{1 - e^{-pT_E}}{p}$$

$$B(j\omega) = B(p)|_{p=j\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega T_E}}{j\omega}$$

$$B(j\omega) = \frac{e^{-j\omega \frac{T_E}{2}}}{j\omega} [e^{j\omega \frac{T_E}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_E}{2}}]$$

$$\text{d'où : } B(j\omega) = \frac{e^{-j\omega \frac{T_E}{2}}}{j\omega} 2j \sin\left(\frac{\omega T_E}{2}\right)$$

On en déduit l'expression demandée :

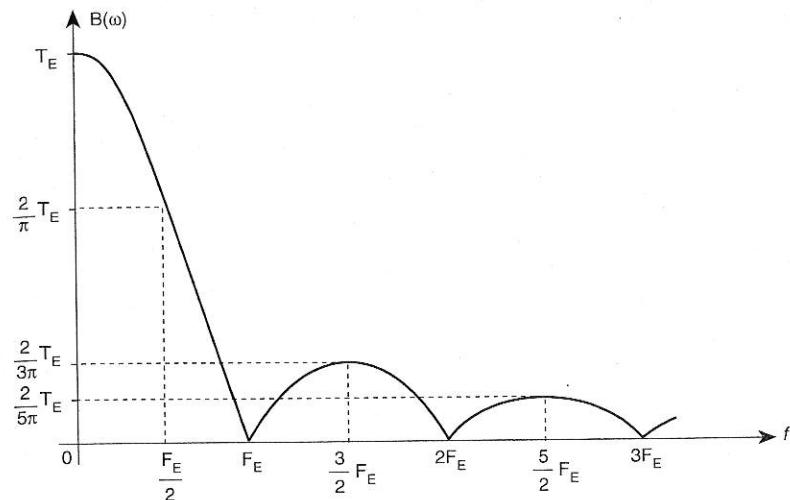
$$B(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_E}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_E}{2}}$$

$$\begin{cases} \phi(\omega) = \arg[B(j\omega)] = -\frac{\omega T_E}{2} & \text{pour } \sin\frac{\omega T_E}{2} > 0 \\ \phi(\omega) = -\frac{\omega T_E}{2} + \pi & \text{pour } \sin\frac{\omega T_E}{2} < 0 \end{cases}$$

Pour le cas qui nous intéresse, on a : $\sin\frac{\omega T_E}{2} > 0$ donc $\phi(\omega) = -\frac{\omega T_E}{2}$ alors le déphasageest de la forme : $\phi(\omega) = -\omega \tau$ avec $\tau = \frac{T_E}{2}$: cette valeur correspond à un retard entre $s(t)$ et $s_B(t)$.

$$B(\omega) = |B(j\omega)| = \frac{2}{\omega} \left| \sin\left(\frac{\omega T_E}{2}\right) \right|$$

$$\text{Soit : } B(\omega) = T_E \frac{\left| \sin\left(\frac{\omega T_E}{2}\right) \right|}{\frac{\omega T_E}{2}}$$

On obtient une courbe classique en $\frac{\sin x}{x}$.3) a. Pour obtenir l'amplitude du fondamental et des quatre premiers harmoniques de $s_B(t)$ il suffit de calculer l'amplitude des raies à la sortie du bloqueur.

$$\text{Fondamental : } \frac{F}{F_E} = \frac{1}{16} \quad A_{F_E} = B \left(\frac{F_E}{16} \right) \times F_E = \frac{\sin \frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{16}} = 99,4 \times 10^{-2}$$

$$\text{Raie à } f = 15F_E = \frac{15}{16} F_E \quad A_{15F_E} = B \left(\frac{15}{16} F_E \right) \times F_E = \frac{\sin \frac{15\pi}{16}}{\frac{15\pi}{16}} = 6,62 \times 10^{-2}$$

$$\text{Raie à } f = 17F_E = \frac{17}{16} F_E \quad A_{17F_E} = B \left(\frac{17}{16} F_E \right) \times F_E = \frac{\left| \sin \frac{17\pi}{16} \right|}{\frac{17\pi}{16}} = 5,84 \times 10^{-2}$$

$$\text{Raie à } f = 31F_E = \frac{31}{16} F_E \quad A_{31F_E} = B \left(\frac{31}{16} F_E \right) \times F_E = \frac{\left| \sin \frac{31\pi}{16} \right|}{\frac{31\pi}{16}} = 3,21 \times 10^{-2}$$

$$\text{Raie à } f = 33F_E = \frac{33}{16} F_E \quad A_{33F_E} = B \left(\frac{33}{16} F_E \right) \times F_E = \frac{\left| \sin \frac{33\pi}{16} \right|}{\frac{33\pi}{16}} = 3,01 \times 10^{-2}$$

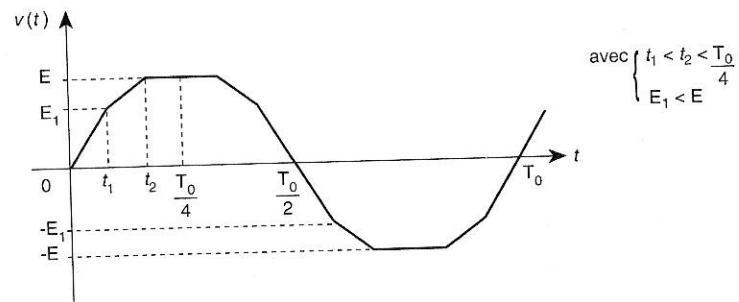
b. Le taux de distorsion harmonique de $s_B(t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$D = \frac{\sqrt{A_{15F}^2 + A_{17F}^2 + A_{31F}^2 + A_{33F}^2}}{A_F}$$

d'où : $D \approx 9,9 \cdot 10^{-2} \approx 9,9 \%$.

Exercices à résoudre

306 Spectre d'un signal issu d'un conformateur à diodes



On considère le signal périodique ci-dessus dont on souhaite calculer le spectre d'amplitude.

1) a. Représenter une demie-période de $\frac{dv}{dt}$ ($0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}$).

b. Calculer le développement en série de Fourier de $\frac{dv}{dt}$.

c. En déduire celui de $v(t)$.

2) a. Déterminer les valeurs de t_1 et t_2 pour annuler l'harmonique 5.

b. Déterminer la valeur de E_1 en fonction E pour annuler l'harmonique 3.

c. Représenter $v(t)$ avec les valeurs calculées ci-dessus.

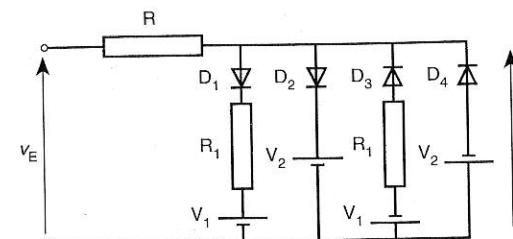
d. Calculer l'amplitude du fondamental de $v(t)$: \hat{V}_1 .

e. Tracer le spectre d'amplitude de $v(t)$ jusqu'à la raie n_{MAX} telle que $\hat{V}_{n_{MAX}} \leq 10^{-3} \hat{V}_1$.

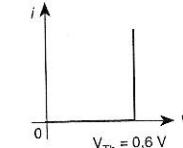
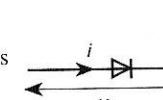
f. En déduire D , le taux de distorsion harmonique du signal $v(t)$ en utilisant le spectre limité du 2) e.

3) Etude du conformateur à diodes

a. On considère le circuit suivant :



avec $V_2 > V_1$

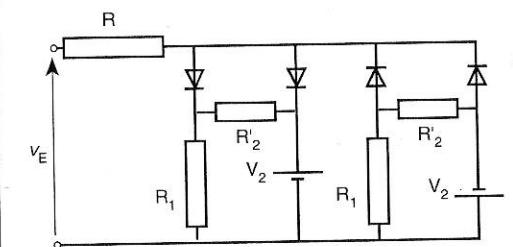


On adopte pour les diodes le modèle avec seuil :

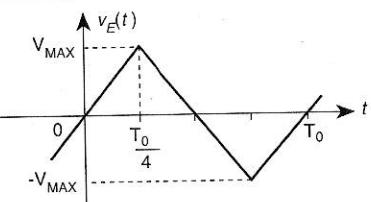
Déterminer et représenter graphiquement la caractéristique de transfert $v_s = f(v_E)$.

b. Le montage pratique n'utilise qu'une alimentation symétrique :

Calculer R'_1 et R'_2 en fonction de V_1 , V_2 et R_1 pour que les deux circuits soient équivalents.

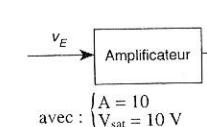


c. On applique à l'entrée du circuit un signal triangulaire. Calculer R'_1 , R'_2 , V_2 et V_{MAX} pour obtenir à la sortie une "sinusoïde" synthétisée d'amplitude $E = 5 \text{ V}$, on choisit $R = 10 \text{ k}\Omega$.

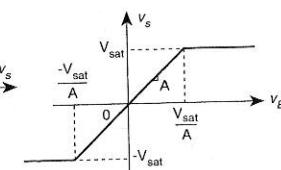


307 Etude d'une non-linéarité : saturation d'un amplificateur

On considère un amplificateur de tension dont la caractéristique de transfert, $v_s = f(v_E)$, dans la bande passante présente une saturation symétrique.



avec : $\begin{cases} A = 10 \\ V_{sat} = 10 \text{ V} \end{cases}$



1) a. Soit $v_E(t) = E \sin \omega_0 t$ avec $E > \frac{V_{\text{sat}}}{A}$, déterminer l'instant t_1 en fonction de T_0 ,

V_{sat} , A et E au bout duquel $v_S(t)$ atteint la tension de saturation V_{sat} .

b. Calculer la valeur de t_1 pour $E = \frac{3}{2} \times \frac{V_{\text{sat}}}{A} = 1,5 \text{ V}$ et représenter l'allure de $v_S(t)$.

2) a. Dans le cas où $E \geq \frac{V_{\text{sat}}}{A}$, calculer l'amplitude V_1 du fondamental de $v_S(t)$ et

montrer qu'il s'exprime sous la forme suivante :

$$V_1 = \frac{2AE}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{V_{\text{sat}}}{AE} \right) + \frac{V_{\text{sat}}}{AE} \sqrt{1 - \left(\frac{V_{\text{sat}}}{AE} \right)^2} \right]$$

b. Calculer V_1 lorsque $E = \frac{V_{\text{sat}}}{A}$; limite de la saturation.

c. Montrer que $V_1 \approx \frac{4V_{\text{sat}}}{\pi}$ lorsque $E \gg \frac{V_{\text{sat}}}{A}$; conclure.

3) A la sortie de l'amplificateur, un filtre passe-bas permet de ne conserver que le premier harmonique de $v_S(t)$. On définit une amplification tenant compte de la non-linéarité par : $N(E) = \frac{V_1}{E}$.

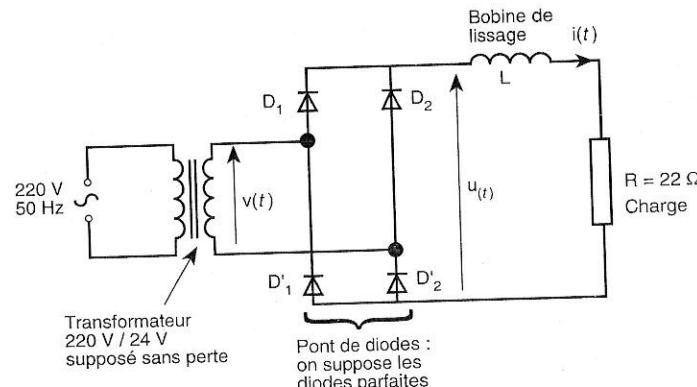
a. Calculer $N(E)$ pour les valeurs suivantes de E :

$$\frac{V_{\text{sat}}}{2A} = 0,5 \text{ V}, \frac{V_{\text{sat}}}{A} = 1 \text{ V}, \frac{2V_{\text{sat}}}{A} = 2 \text{ V} \text{ et } 10 \frac{V_{\text{sat}}}{A} = 10 \text{ V}$$

b. Représenter graphiquement $N(E)$ pour $E \geq 0$.

308 Redressement double alternance avec filtrage inductif

On considère le convertisseur alternatif-continu suivant :



L'inductance a une valeur suffisante pour qu'il y ait conduction continue.

1) Représenter graphiquement $u(t)$.

2) Calculer les valeurs moyennes suivantes : $\overline{v(t)}$, $\overline{u(t)}$ et $\overline{i(t)}$.

3) a. Exprimer le développement en série de Fourier de $u(t)$.

b. Calculer les valeurs de l'amplitude du fondamental et de l'harmonique 2 de $u(t)$.

4) Pour calculer l'ondulation en courant dans la charge : $\Delta i = i_{\text{MAX}} - i_{\text{min}}$, on assimile $i(t)$ à sa valeur moyenne associée à son fondamental. Calculer la valeur de l'inductance L pour obtenir $\frac{\Delta i}{i(t)} = 0,1$.

309 Excitation d'un circuit sélectif par un courant périodique

Un circuit RLC parallèle est excité par la sortie d'un quadripôle imparfaitement linéaire commandé par la tension $e(t) = E \cos(\omega t)$. Vu de ses bornes de sortie, ce quadripôle équivaut à une source de courant $i(t)$ contrôlée par la tension $e(t)$. (fig. 1)

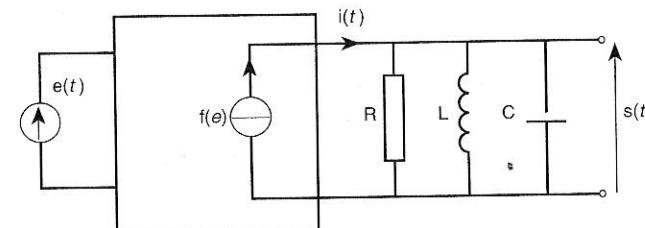


figure 1

On donne la courbe de transfert $i(e)$ qui admet l'origine des coordonnées pour centre de symétrie (fig. 2).

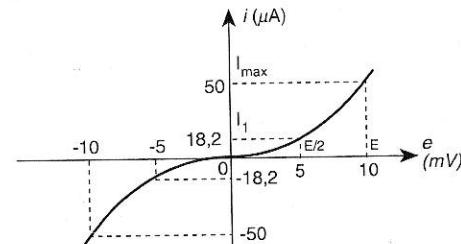


figure 2

1) Justifier que $i(t)$ s'exprime par une série de la forme :

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos((2k+1)\omega t)$$

2) On admet, pour simplifier, que la série peut être limitée au second terme :

$$i(t) = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3 \omega t$$

Afin de déterminer les coefficients a_1 et a_3 , on effectue les lectures de i correspondant aux deux valeurs particulières E et $E/2$ de $e(t)$:

pour $e = E$ c'est-à-dire $\omega t = 0$, on note I_{max}
 pour $e = E/2$ c'est-à-dire $\omega t = \pi/3$, on note I_1 (fig. 2)

a. Montrer que :

$$a_1 = \frac{2}{3} (I_{\text{MAX}} + I_1) \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{1}{3} (I_{\text{MAX}} - 2I_1)$$

b. Application numérique pour $E = 10 \text{ mV}$ (fig. 2). Calculer a_1 , a_3 et le taux de distorsion harmonique de $i(t)$, noté D.

3) Etablir l'expression de l'impédance complexe $Z(j\omega)$ du circuit sélectif sous la forme :

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

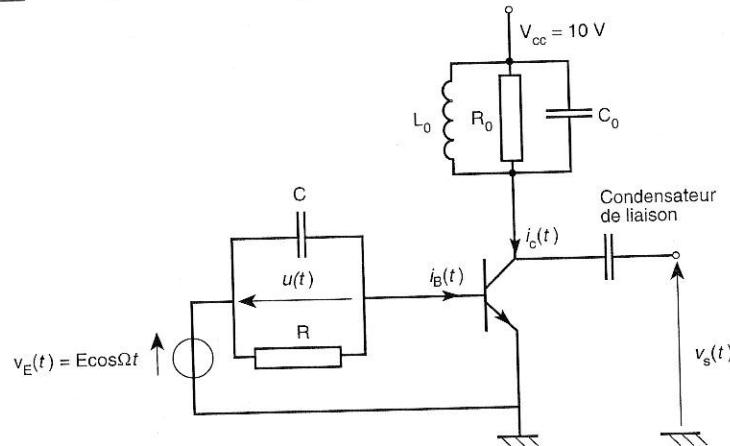
Ω_0 et Q étant deux paramètres à expliciter et à définir.

4) La pulsation propre Ω_0 du circuit sélectif est choisie égale à la pulsation ω de la tension de commande $e(t)$.

a. Déterminer en fonction de R, a_1 , a_3 et Q, l'expression de la tension $s(t)$ aux bornes du circuit.

b. Application numérique : quelle valeur minimale doit-on attribuer au paramètre Q pour que le taux d'harmonique D de $s(t)$ n'excède pas 0,2 % ?

310 Multiplicateur de fréquence à transistor

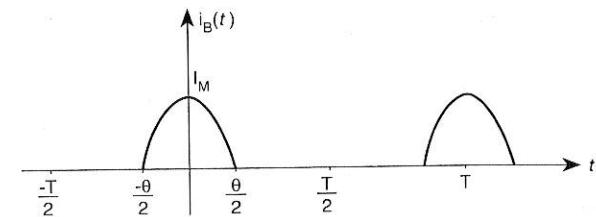


Lorsque $RC \gg T = \frac{2\pi}{\Omega}$, le circuit R, C associé à la jonction base-émetteur se

comporte comme un convertisseur alternatif-continu. Nous avons un redresseur simple alternance associé à un filtrage capacitif. Le courant $i_B(t)$ est impulsional, nous le modéliserons par des calottes de sinusoides.

Sur une période, nous avons :

$$\begin{cases} i_B(t) = I_M \frac{\cos \Omega t - \cos \Omega \theta}{2} & -\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2} \\ 1 - \cos \Omega \theta & 2 \\ i_B(t) = 0 \text{ ailleurs} & \end{cases}$$



1) Pour $RC \gg T$, la durée de conduction de la jonction base-émetteur est donnée par :

$$\frac{\theta}{T} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T}{2RC}}$$

a. Calculer la valeur de $\frac{RC}{T}$ pour obtenir $\frac{\theta}{T} \approx \frac{1}{10}$.

b. On choisit F = 1 kHz et R = 100 kΩ, calculer les valeurs de θ et de C.

2) a. Déterminer l'expression de la valeur moyenne \bar{i}_B .

b. Sachant que pour α petit on a :

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \quad \text{et} \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\text{Montrer que : } \bar{i}_B \approx \frac{2}{3} I_M \frac{\theta}{T}$$

3) a. Donner l'expression du développement en série de Fourier de $i_B(t)$.

b. Calculer l'amplitude I_n de l'harmonique n .

c. Calculer les valeurs de I_4 , I_5 et I_6 en fonction de \bar{i}_B sachant que $\frac{\theta}{T} \approx \frac{1}{10}$.

4) a. Expliquer pourquoi $u(t) \approx \text{constante}$ et déterminer sa valeur.

b. En déduire l'expression de \bar{i}_B et calculer sa valeur sachant que : $E = 5 \text{ V}$ et $V_{BE} \approx 0,6 \text{ V}$.

c. Calculer les valeurs numériques de I_M et I_5 .

5) Le transistor a un gain en courant $\beta = 100$.

a. Représenter graphiquement $i_c(t)$.

b. Calculer l'impédance du dipôle R_0 , L_0 , C_0 et la mettre sous la forme canonique suivante :

$$Z = \frac{R_0}{1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Donner les expressions de Q_0 et ω_0 .

c. Pour sélectionner l'harmonique 5, on choisit $\omega_0 = 5 \Omega$. Donner l'expression de la composante de $v_s(t)$ due à l'harmonique 5 : $v_{S5}(t)$. Calculer son amplitude pour $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$.

d. Pour éliminer efficacement les autres harmoniques, on choisit $Q_0 = 30$; en déduire les valeurs de L_0 et C_0 .

e. Calculer la puissance dissipée par le transistor.

4

La transformation de Laplace

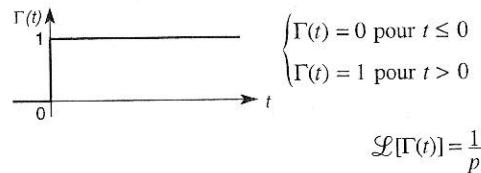
- I. Définition
- II. Propriétés
- III. Table des transformées de Laplace
- IV. La transformée inverse de Laplace
- V. Impédance opérationnelle
- VI. Fonctions de transfert : transmittances isomorphes

I. DÉFINITION

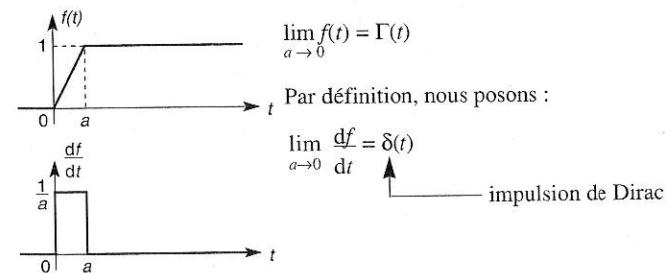
A toute fonction réelle du temps $f(t)$, on associe une fonction $F(p)$ de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$ par :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

1. Transformée de Laplace de l'échelon



2. Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac



Remarques :

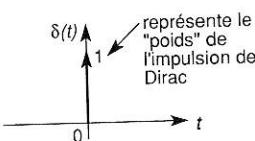
- $\delta(t)$ est nulle partout sauf en 0 ou elle est infinie

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- $\delta(t)$ est en fait une distribution telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0)$$

- l'introduction de $\delta(t)$ nous permet d'étendre la notion de dérivée au sens des distributions avec $\Gamma'(t) = \delta(t)$



On peut en déduire le résultat suivant :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

II. PROPRIÉTÉS

1. Linéarité

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$$

2. Déivation

On considère la dérivée au sens des distributions alors :

$$\mathcal{L}[f'] = pF(p) - f(0^+)$$

Remarques :

- si $f(t)$ est continue à $t = 0$ alors $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ et $\mathcal{L}[f'] = pF(p) - f(0)$

- si $f(t)$ est discontinue à $t = 0$ alors $f(0^-) \neq f(0^+)$ et il existe une impulsion de Dirac de poids $[f(0^+) - f(0^-)]$ à $t = 0$ pour $f'(t)$, dérivée au sens des distributions de $f(t)$.

3. Intégration

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(p)}{p}$$

4. Théorème du retard

Soit une fonction $f(t)$ causale, c'est-à-dire $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Alors :

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p)$$

5. Translation dans le plan complexe

$$F(p + a) = \mathcal{L}[e^{-at} f(t)]$$

6. Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

lorsque cette limite existe

7. Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

III. TABLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE

| | $f(t)$ | $F(p)$ |
|--|-------------------|---------------------------------|
| | $\delta(t)$ | 1 |
| | $\Gamma(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| | at | $\frac{a}{p^2}$ |
| | e^{-at} | $\frac{1}{p + a}$ |
| | $1 - e^{-t/\tau}$ | $\frac{1}{p(1 + \tau p)}$ |
| | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ |

| | $f(t)$ | $F(p)$ |
|--|--|--|
| | $\cos \omega t$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |
| | $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-mt} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t)$ | $\frac{1}{1+2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} m < 1$ |
| | $1 - \frac{e^{-mt}}{\sqrt{1-m^2}} \sin[\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \phi]$ avec $\cos \phi = m$ | $\frac{1}{p \left(1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)} m < 1$ |
| | $\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \quad \tau_1 \neq \tau_2$ | $\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ |
| | $1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}) \quad \tau_1 \neq \tau_2$ | $\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ |
| | $\frac{1}{\tau^n} \times \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/\tau} \quad n \geq 1$ | $\frac{1}{(1+\tau p)^n}$ |
| | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n \geq 1$ | $\frac{1}{p^n}$ |

IV. LA TRANSFORMÉE INVERSE DE LAPLACE

1. Décomposition en éléments simples

Soit $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ telle que :

- $N(p)$: polynôme en p de degré m
- $D(p)$: polynôme en p de degré n avec $n \geq m$

a) $D(p)$ possède n racines distinctes

$$\text{alors : } F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}$$

et les coefficients A_i sont donnés par :

$$A_i = [(p - p_i) F(p)]_{p=p_i}$$

D'après la table on en déduit : $f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}$

Remarque : s'il existe des racines complexes conjuguées, il faut utiliser les fonctions du second ordre présentes dans la table.

b) $D(p)$ possède une racine multiple d'ordre q

alors $F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_0)^q D_1(p)}$ et $D_1(p)$ est un polynôme de degré $(n-q)$.

$F(p)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$F(p) = \frac{B_0}{(p-p_0)^q} + \frac{B_1}{(p-p_0)^{q-1}} + \dots + \frac{B_{q-1}}{p-p_0} + \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

$$\text{avec } B_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [(p-p_0)^q F(p)]}{dp^k} \right]_{p=p_0}$$

On obtient $f(t)$ à l'aide de la table.

$$\text{Cas particulier très fréquent : } F(p) = \frac{1}{(p+a)^2 (p+b)}$$

$D(p)$ possède une racine double $-a$ et une racine simple $-b$.

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)^2} + \frac{\beta}{p+a} + \frac{\gamma}{p+b}$$

$$\alpha = [(p+a)^2 F(p)]_{p=-a} = \frac{1}{b-a} \quad \gamma = [(p+b) F(p)]_{p=-b} = \frac{1}{(a-b)^2}$$

$$\text{Calcul de } \beta : (p+a) F(p) = \frac{1}{(p+a)(a+b)} = \frac{\alpha}{p+a} + \beta + \gamma \frac{p+a}{p+b}$$

$$\text{Calculons la limite suivante : } \lim_{p \rightarrow +\infty} (p+a) F(p) = 0 = \beta + \gamma \text{ soit } \beta = -\gamma$$

2. Développement de Heaviside

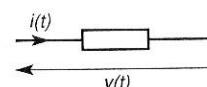
$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ et $D(p)$ possède n racines distinctes.

$$\text{Alors : } f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(pk)}{D'(pk)} e^{pkt} \quad D'(pk) = \frac{dD}{dp} \Big|_{p=pk}$$

V. IMPÉDANCE OPÉRATIONNELLE

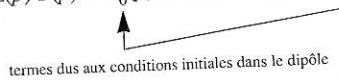
1. Définition

Soit un dipôle linéaire :



$v(t)$ = relation intégrale-différentielle de $i(t)$, en appliquant la transformée de Laplace à cette équation, il vient :

$$V(p) = Z(p) I(p) + V_0(p) \text{ ou } I(p) = Y(p) V(p) + I_0(p)$$

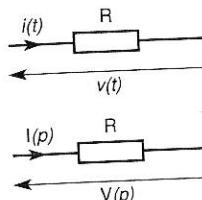


Alors :

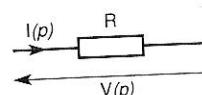
$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \left. \frac{V(p)}{I(p)} \right|_{\text{conditions initiales nulles}}$$

$Z(p)$ est appelée impédance opérationnelle ou symbolique ou isomorphe.

2. Résistance



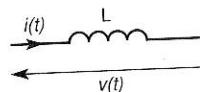
$$v(t) = R i(t)$$



$$V(p) = R I(p)$$

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = R$$

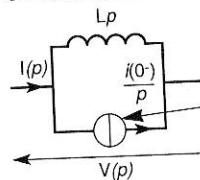
3. Inductance



$$v(t) = L \frac{di}{dt} \Rightarrow V(p) = L \left[p I(p) - i(0^-) \right]$$

$$\text{soit : } I(p) = \frac{V(p)}{Lp} + \frac{i(0^-)}{p}$$

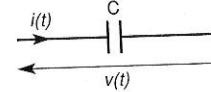
On en déduit le schéma équivalent suivant :



$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = Lp$$

les conditions initiales sont modélisées par un échelon de courant d'amplitude $i(0^-)$.

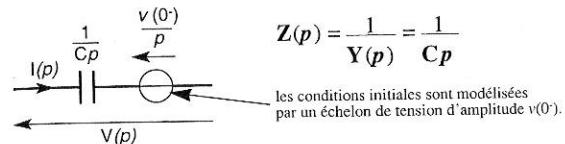
4. Capacité



$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow I(p) = C \left[p V(p) - v(0^-) \right]$$

$$\text{soit : } V(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{v(0^-)}{p}$$

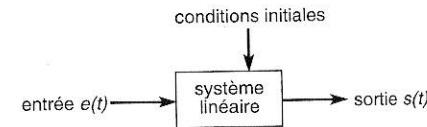
On en déduit le schéma équivalent suivant :



les conditions initiales sont modélisées par un échelon de tension d'amplitude $v(0^-)$.

VI. FONCTIONS DE TRANSFERT : TRANSMITTANCES ISOMORPHES

1. Définitions



Puisque le système est linéaire les grandeurs $e(t)$ et $s(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e$$

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, on obtient une relation de la forme :

$$S(p) = H(p) E(p) + F_0(p)$$

$$\text{avec } H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

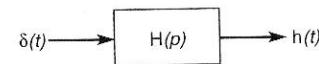
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

conditions initiales nulles

$H(p)$ est la fonction de transfert du système linéaire.

- Les racines de $D(p)$ sont appelées les pôles de $H(p)$.
- Les racines de $N(p)$ sont appelées les zéros de $N(p)$.

2. Réponse impulsionale



L'entrée est une impulsion de Dirac, la sortie, $h(t)$ est appelée la réponse impulsionale du système linéaire.

On montre que : $\mathcal{L}[h(t)] = H(p)$

3. Réponse harmonique : transmittance isochrone

Lorsque l'entrée, $e(t)$, est un signal sinusoïdal et que l'on s'intéresse à la réponse en régime sinusoïdal permanent. Alors la fonction de transfert complexe, $\underline{H}(j\omega)$, du système linéaire peut être obtenue à l'aide de la transformation suivante :

$$\underline{H}(p) \xrightarrow[p=j\omega]{} \underline{H}(j\omega)$$

4. Stabilité d'une fonction de transfert

Définition : Un système linéaire est stable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On obtient alors la condition suivante pour $H(p)$:

Un système linéaire, de transmittance isomorphe $H(p)$, est stable si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

Système du premier ordre : $H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau p}$

$$H(p) \text{ stable} \Leftrightarrow \tau > 0$$

Système du deuxième ordre : $H(p) = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$

$$H(p) \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 > 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

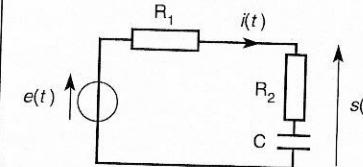
Système du troisième ordre : $H(p) = \frac{H_0}{1 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3}$

$$H(p) \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \alpha \beta > \gamma \end{cases}$$

Exercices résolus

401 Réponse à un échelon de tension pour un circuit R, C série

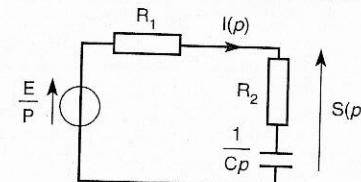
On considère le circuit suivant :



- Pour $t < 0$ le condensateur est déchargé.
- $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E.

- 1) Calculer $S(p)$ et $I(p)$.
- 2) A l'aide de $S(p)$ et $I(p)$ déterminer les valeurs suivantes : $i(0^+)$, $s(0^+)$, $i(+\infty)$ et $s(+\infty)$, retrouver ces résultats par des considérations physiques sur les tensions et les courants dans le circuit.
- 3) Déterminer les expressions de $s(t)$ et $i(t)$, les représenter graphiquement.
- 4) a. Calculer l'énergie finale, W_f , stockée par le condensateur.
b. Calculer l'énergie totale, W_T , fournie par la source de tension.
c. En déduire l'énergie totale, W_J , dissipée par effet Joule dans le circuit.

1) On obtient le schéma équivalent suivant en utilisant les impédances opérationnelles :



En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$S(p) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp} + R_1} \times \frac{E}{p}$$

$$\text{soit : } S(p) = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp} \times \frac{E}{p}$$

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}} \quad \text{d'où : } I(p) = \frac{CE}{1 + (R_1 + R_2) Cp}$$

2) On applique les théorèmes des valeurs initiales et finales.

$$i(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p I(p) = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad s(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$i(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p I(p) = 0 \quad s(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = E$$

A $t = 0^+$, la tension aux bornes du condensateur est toujours nulle ; on en déduit :
 $i(0^+) = \frac{E}{R_1 + R_2}$ et $s(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$, on a un pont diviseur R_1, R_2 .

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert donc $i(+\infty) = 0$ et il est chargé sous la tension E d'où $s(+\infty) = E$.

3) On pose $\tau = (R_1 + R_2)C$, c'est la constante de temps du circuit.

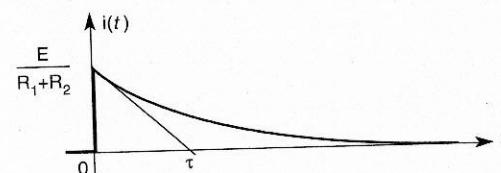
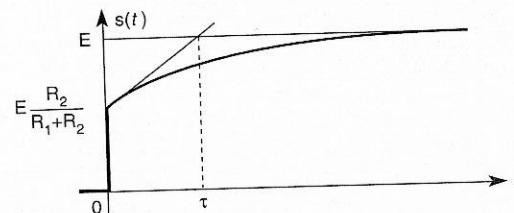
$$S(p) = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + \tau p} \times \frac{E}{p} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + \tau p}$$

$$\alpha = [p S(p)]_{p=0} = E \quad \beta = [(1 + \tau p) S(p)]_{p=\frac{1}{\tau}} = -\tau E \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$S(p) = \frac{E}{p} - E \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \text{ d'après la table on obtient :}$$

$$s(t) = E \left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} \right] \Gamma(t)$$

$$I(p) = \frac{E}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \text{ soit : } i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} \Gamma(t)$$



4) a. $W_f = \frac{1}{2} C v_c(+\infty)$

or $v_c(+\infty) = s(+\infty) = E$

$$\text{d'où : } W_f = \frac{1}{2} C E^2$$

b. L'énergie totale fournie par la source de tension est donnée par :

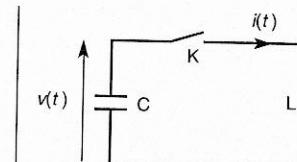
$$W_T = \int_0^{+\infty} E i(t) dt = \frac{E^2}{R_1 + R_2} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} dt$$

$$W_T = \frac{E^2}{R_1 + R_2} \times [-\tau e^{-t/\tau}]_0^{+\infty} = \frac{\tau E^2}{R_1 + R_2}$$

soit : $W_T = CE^2$

c. D'après le principe de conservation de l'énergie dans le circuit alors : $W_T = W_f + W_J$
 d'où : $W_J = \frac{1}{2} CE^2$

402 Oscillateur L, C



- Pour $t < 0$, le condensateur est chargé sous la tension : $v(t) = E$
- A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1) Calculer $I(p)$ et $V(p)$.

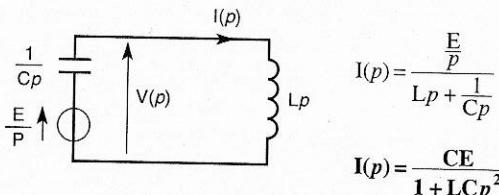
2) Déterminer les expressions de $i(t)$ et $v(t)$, les représenter graphiquement.

3) Etablir les expressions de :

- $w_c(t)$ énergie stockée par le condensateur
- $w_L(t)$ énergie stockée par la bobine

Représenter sur un même graphe $w_c(t)$ et $w_L(t)$.

1) Pour $t > 0$, on a le schéma équivalent suivant :



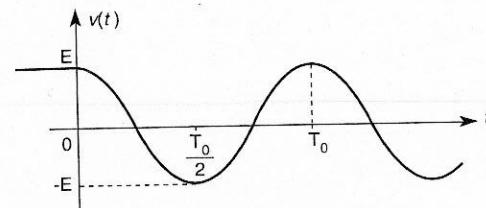
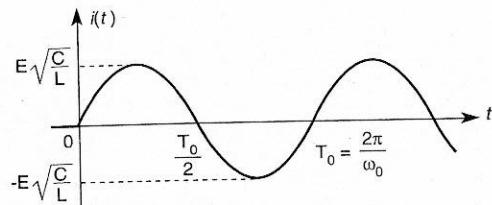
$$V(p) = Lp I(p) \quad V(p) = \frac{LC p E}{1 + LC p^2}$$

$$2) \text{ On pose } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{d'où : } I(p) = \frac{E}{L} \times \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} = E \sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\text{D'après la table, on en déduit : } i(t) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t \text{ pour } t \geq 0.$$

On peut obtenir $v(t)$ en utilisant la relation : $v(t) = L \frac{di}{dt}$

$$\text{soit : } v(t) = LE \sqrt{\frac{C}{L}} \times \omega_0 \cos \omega_0 t \quad v(t) = E \cos \omega_0 t \quad \text{pour } t \geq 0$$

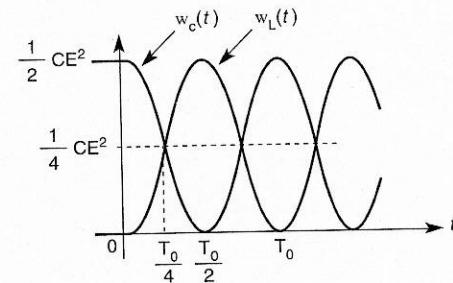


$$3) w_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) = \frac{1}{2} C E^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$w_c(t) = \frac{1}{4} C E^2 (1 + \cos 2 \omega_0 t)$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L E^2 \frac{C}{L} \sin^2 \omega_0 t$$

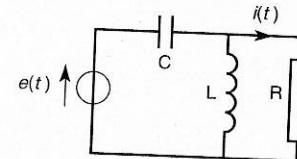
$$w_L(t) = \frac{1}{4} C E^2 (1 - \cos 2 \omega_0 t)$$



L'énergie initiale du condensateur, $\frac{1}{2} C E^2$, va être emmagasinée par la bobine puis être restituée au condensateur.

Comme les pertes du circuit sont supposées nulles, pas d'élément résistif dans le circuit, alors cette oscillation sinusoïdale va se prolonger indéfiniment.

403 Réponse à un échelon pour un circuit du second ordre



- Pour $t < 0$, le circuit est au repos.
- $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E.

1) Par des considérations physiques, donner les valeurs initiale et finale de $i(t)$: $i(0^+)$.

2) Calculer $I(p)$ et le mettre sous la forme canonique suivante :

$$I(p) = I_0 \times \frac{\frac{p}{\omega_0^2}}{1 + 2 m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Déterminer les expressions de I_0 , ω_0 et m .

Calculer leurs valeurs pour $E = 8$ V, $L = 25$ mH, $C = 10$ nF et $R = 4$ kΩ.

a. A l'aide de la table des transformées de Laplace et de la propriété suivante : $L[f(t)] = pF(p) - f(0')$, établir l'expression de $i(t)$.

b. Calculer les valeurs de la pseudo-période T et de la constante d'amortissement τ de $i(t)$.

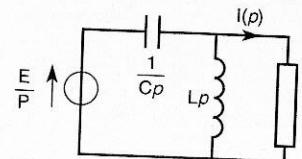
Représenter graphiquement l'allure de $i(t)$.

1) Le condensateur se comporte comme un court-circuit pour le front de tension, donc à $t = 0^+$ la tension E est appliquée aux bornes de la résistance donc :

$$i(0^+) = \frac{E}{R}$$

Pour le régime permanent, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert donc : $i(+\infty) = 0$.

2) A l'aide des impédances opérationnelles, on obtient le schéma équivalent suivant :



On a :

$$R I(p) = \frac{\frac{RLp}{R + Lp}}{\frac{RLp}{R + Lp} + \frac{1}{Cp}} \times \frac{E}{P} = \frac{RLCp E}{RLC p^2 + R + Lp}$$

$$I(p) = \frac{E}{R} \times \frac{LCp}{1 + \frac{Lp}{R} + LC p^2}$$

En identifiant $I(p)$ à la forme canonique, on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad I_0 = \frac{E}{R} \quad \frac{2m}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{soit} \quad m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Pour les applications numériques, on obtient :

$$I_0 = 2 \text{ mA} ; \omega_0 = 6,3 \cdot 10^4 \text{ rad/s et } m \approx 0,2$$

Le coefficient d'amortissement, m , du second ordre étant < 1 , on va obtenir une réponse oscillante amortie.

a. D'après la table pour $m < 1$, nous avons :

$$F(p) = \frac{1}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t)$$

donc $pF(p)$ a pour original $f'(t)$ car $f(0) = 0$

On en déduit pour $i(t)$:

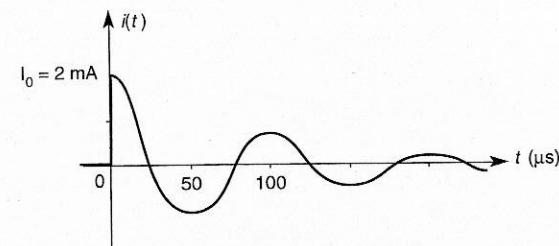
$$i(t) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \times \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} [-m\omega_0 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t) + \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t)]$$

$$\text{soit : } i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \left[\cos \omega t - \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \cos \omega t \right]$$

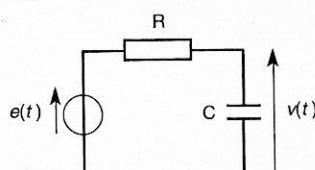
$$\text{avec } \tau = \frac{1}{m \omega_0} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$\text{b. } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}} \quad T \approx 100 \mu\text{s}$$

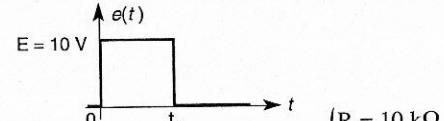
$$\tau = \frac{1}{m \omega_0} \quad \tau = 80 \mu\text{s}$$



404 Réponse à un créneau bref pour un circuit R, C



- Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé

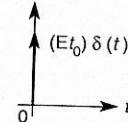


$$\begin{cases} R = 10 \text{ k}\Omega \\ C = 100 \text{ nF} \end{cases}$$

$$\text{On pose } \tau = RC \text{ et on a : } t_0 = \frac{\tau}{10}.$$

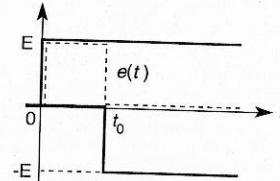
- Calculer $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.
- Calculer $V(p)$.
- Etablir l'expression de $v(t)$.
- Déterminer la valeur maximale de $v(t)$, V_{MAX} , et montrer que $V_{MAX} \approx E \frac{t_0}{\tau}$. On rappelle que : $e^x \approx 1 + x$ pour $x \ll 1$.
- Représenter graphiquement l'allure de $v(t)$.

- 2) On remplace le créneau bref par une impulsion de Dirac de poids $E t_0$.



- Calculer $V(p)$.
- Etablir l'expression de $v(t)$.
- Représenter graphiquement l'allure de $v(t)$, conclure.

- 1) a. $e(t)$ peut être décomposé de la manière suivante :



$$\text{d'où : } e(t) = E\Gamma(t) - E\Gamma(t - t_0)$$

On en déduit :

$$E(p) = \frac{E}{p} - \frac{E}{p} e^{-pt_0}$$

$$\text{soit : } E(p) = \frac{E(1 - e^{-pt_0})}{p}$$

$$\text{b. } V(p) = \frac{1}{Cp} E(p) = \frac{E(p)}{1 + RCp}$$

$$\text{soit } V(p) = \frac{E}{p(1 + RCp)} - \frac{E}{p(1 + RCp)} e^{pt_0}$$

- c. D'après la table et le théorème du retard, on obtient :
 $v(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \Gamma(t) - E(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}) \Gamma(t - t_0)$

- d. Pour $0 \leq t \leq t_0$: $v(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$

Le condensateur se charge.

$$\text{Pour } t_0 \leq t : v(t) = E[e^{-t_0/\tau} - 1] e^{-t/\tau}$$

Le condensateur se décharge.

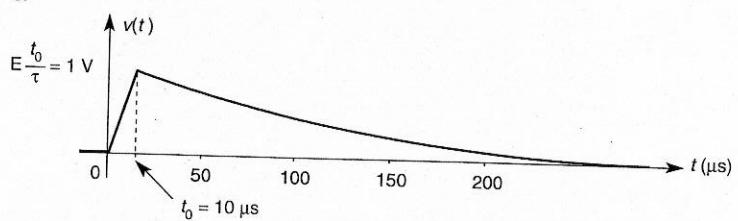
Donc $v(t)$ atteint son maximum à l'instant t_0 d'où :

$$V_{MAX} = v(t_0) = E(1 - e^{-t_0/\tau})$$

$$\text{or } t_0 \ll \tau \text{ d'où } e^{-t_0/\tau} \approx 1 - \frac{t_0}{\tau}$$

$$\text{soit : } V_{MAX} \approx E \frac{t_0}{\tau}$$

e.

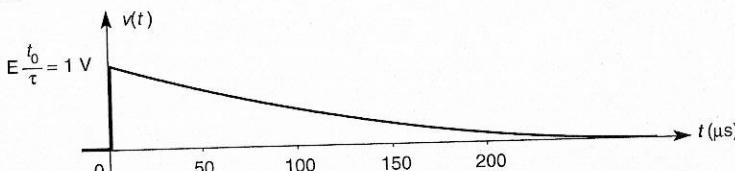


2) a. $e(t) = (Et_0) \delta(t)$ alors $E(p) = Et_0$

$$V(p) = \frac{E t_0}{1 + RCp}$$

b. $V(p) = E \frac{t_0}{\tau} \times \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}$ d'où $v(t) = E \frac{t_0}{\tau} e^{-t/\tau} \Gamma(t)$

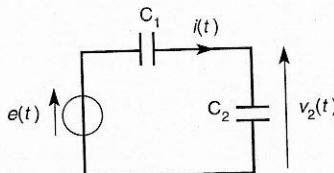
c.



Les valeurs maximales de $v(t)$ sont pratiquement identiques et la décharge du condensateur a lieu dans les deux cas avec la même constante de temps. Donc en pratique, on pourra remplacer un créneau bref, c'est-à-dire de durée petite par rapport aux constantes de temps du circuit, par une impulsion de Dirac de poids Et_0 , le calcul de la réponse en sera alors simplifié.

405 Etude de la charge du diviseur capacitif

On considère le circuit suivant :

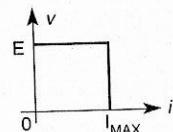
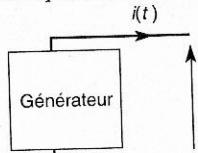


- Pour $t < 0$, le circuit est au repos.
- $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E .

1) a. Calculer $V_2(p)$ et $I(p)$.

b. En déduire $v_2(t)$, $i(t)$ et les représenter graphiquement.

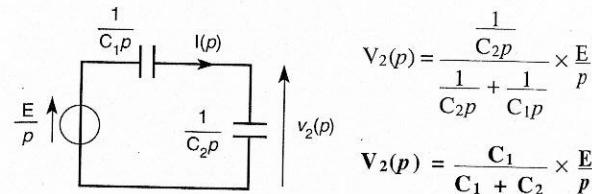
2) En fait, la source de tension est réalisée à partir d'un générateur qui a une caractéristique de sortie tension-courant rectangulaire :



Si le circuit extérieur "demande" un courant d'intensité supérieure à I_{MAX} , alors le générateur ne fonctionne plus en source de tension mais en source de courant débitant un courant I_{MAX} .

- a. Calculer $v_2(t)$ pendant la première phase de fonctionnement du générateur.
- b. Calculer la durée t_1 de cette première phase ainsi que $v_2(t_1)$.
- c. Montrer que la deuxième phase correspond au régime permanent et représenter graphiquement $v_2(t)$ et $i(t)$.

1) a. Soit le schéma équivalent suivant :

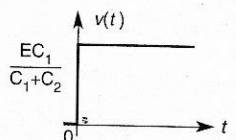
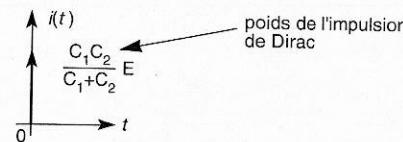


$$V_2(p) = \frac{1}{C_2 p} \times \frac{E}{p}$$

$$V_2(p) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{E}{p}$$

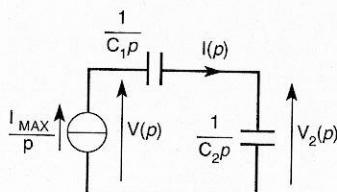
$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{\frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p}} \quad I(p) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E$$

b. $i(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E \delta(t)$ et $v_2(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E \Gamma(t)$



On constate qu'il apparaît une discontinuité de tension aux bornes des condensateurs, cette discontinuité est due à l'impulsion de Dirac en courant, c'est-à-dire courant d'intensité infinie à $t = 0$. Il n'existe pas de générateur capable de fournir un courant infini donc notre modèle de source de tension idéale est insuffisant pour décrire la réalité. Nous allons adopter un modèle plus complexe au 2) qui nous permettra de mieux décrire les résultats que l'on obtiendrait par l'expérience.

2) a. Pendant la première phase le générateur se comporte comme une source de courant débitant un échelon d'amplitude I_{MAX} .



$$V_2(p) = \frac{I_{MAX}}{p} \times \frac{1}{C_2 p} \quad \text{soit} \quad v_2(t) = \frac{I_{MAX}}{C_2} t \Gamma(t)$$

b. La première phase se termine lorsque $v = E$.

$$\text{Or } V(p) = \frac{I_{MAX}}{p} \times \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 p} \quad \text{soit} \quad v(t) = I_{MAX} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t \Gamma(t)$$

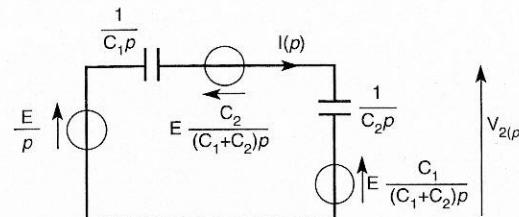
$$\text{d'où } v(t_1) = E = I_{MAX} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t_1$$

$$\text{soit : } t_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \times \frac{E}{I_{MAX}}$$

$$\text{A cet instant, } v_2(t_1) = \frac{I_{\text{MAX}}}{C_2} \times \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \times \frac{E}{I_{\text{MAX}}}$$

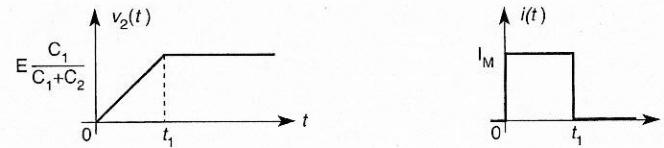
$$\text{d'où : } v_2(t_1) = E \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

c. En prenant t_1 comme nouvelle origine de temps et en tenant compte des conditions initiales, nous avons le schéma équivalent suivant :



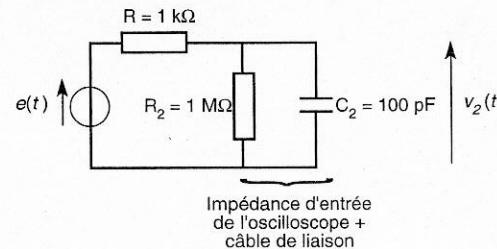
En écrivant la loi des mailles, on obtient $I(p) = 0$ donc les condensateurs sont chargés à leur valeur finale à l'instant t_1 et le régime permanent est atteint.

On en déduit les représentations graphiques suivantes :



Exercices à résoudre

406 La sonde d'oscilloscope

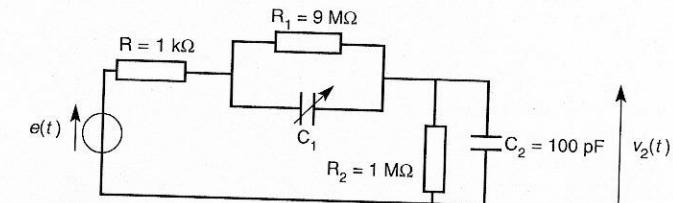


- Pour $t < 0$, le circuit est au repos.
- $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude $E = 10 \text{ V}$.

1. a. Calculer $V_2(p)$ sachant que $R \ll R_2$.
- b. Etablir l'expression de $v_2(t)$ et la représenter graphiquement. Calculer le temps de montée, t_m , de $v_2(t)$.

EXERCICES

- 2) Pour visualiser la tension, on utilise une sonde d'oscilloscope atténuateuse par 10 qui nous donne le schéma suivant :



- Pour $t < 0$, le circuit est au repos.

- $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude $E = 10 \text{ V}$.

- a. Calculer la valeur de C_1 pour obtenir $R_1 C_1 = R_2 C_2$.
- b. C_1 est réglée telle que $R_1 C_1 = R_2 C_2 = \tau_2$, calculer $V_2(p)$ sachant que $R \ll R_1$ et $R \ll R_2$.

Donner l'expression de la constante de temps, τ , du circuit.

- c. En déduire l'expression de $v_2(t)$.

Calculer la valeur du nouveau temps de montée, t'_m , et le comparer à t_m .

- 3) On suppose que la sonde est déréglée, c'est-à-dire $\tau_1 \neq \tau_2$.
- a. Calculer $V_2(p)$ et la mettre sous la forme suivante :

$$V_2(p) = \frac{aE}{p} \times \frac{1 + \tau_1 p}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Exprimer a , m et ω_0 en fonction de R , R_1 , R_2 , τ_1 et τ_2 .

- b. On se place dans le cas où : $\tau_1 = \tau_2(1+x)$ avec $|x| < 1$.

1. Calculer la valeur de m en fonction de x et en déduire que $m \gg 1$.

2. Montrer que $V_2(p)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$V_2(p) = \frac{aE}{p} \times \frac{1 + \tau_2 p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

avec $\tau'' = \tau_2$ et $\tau' = \tau(1+x)$.

3. Décomposer $V_2(p)$ en éléments simples et montrer que l'on obtient l'expression suivante, sachant que $\tau_2 \gg \tau_1$.

$$V_2(p) = aE \left[\frac{1 + x}{p} - \frac{1 + x}{p + \frac{1}{\tau_2}} - \frac{1 + x}{p + \frac{1}{\tau_1(1+x)}} \right]$$

4. En déduire l'expression de $v_2(t)$.

1. Sonde sous compensée : $R_1 C_1 < R_2 C_2$. La sonde est déréglée et $C_1 = 9 \text{ pF}$ au lieu de 11 pF .

1. Calculer la valeur de x .

2. Représenter l'allure de $v_2(t)$.

2. Sonde sur compensée : $R_1 C_1 > R_2 C_2$. La sonde est déréglée et $C_1 = 13 \text{ pF}$ au lieu de 11 pF .

1. Calculer la valeur de x .

2. Représenter l'allure de $v_2(t)$.

407 Etude temporelle d'un régulateur Proportionnelle, Intégrale et Dérivée

On définit le régulateur à trois actions Proportionnelle, Intégrale et Dérivée comme un système d'entrée $v_E(t)$, de sortie $v_S(t)$ correspondant à la relation temporelle :

$$v_S(t) = K \cdot v_E(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t v_E(\mu) d(\mu) + T_d \cdot \frac{dv_E(t)}{dt}$$

On qualifie ce régulateur de parallèle.

On définit $v_S(t) = v_p(t) + v_i(t) + v_d(t)$ où v_p , v_i et v_d correspondent à chaque action.

On utilise la transformée de Laplace monolatérale que l'on note :

$$V(p) = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

où p est la variable complexe.

1) Montrer que la transmittance $C(p)$ du régulateur PID est égale à :

$$C(p) = K + \frac{1}{T_i p} + T_d p$$

2) v_E et v_S étant des tensions, quelles sont les unités des coefficients K , T_i et T_d ?

3) L'excitation $v_E(t)$ est une rampe ($v_E(t) = at$) appliquée à $t = 0$.

a. Déterminer chaque réponse élémentaire.

b. En déduire $v_S(t)$ et l'allure de la courbe temporelle.

4) L'excitation $v_E(t)$ est un échelon d'amplitude E

a. Déterminer chaque réponse élémentaire.

b. En déduire $v_S(t)$ et l'allure de la courbe temporelle.

c. Sachant que $v_S(t)$ est une tension limitée au domaine :

$$-V_{S\text{MAX}} < v_S < V_{S\text{MAX}}$$

Le régulateur PID est-il physiquement réalisable ?

5) On utilise une action dérivée filtrée définie par :

$$\frac{V_d(p)}{V_F(p)} = \frac{T_d p}{1 + \tau p}$$

L'excitation $v_E(t)$ est un échelon d'amplitude E .

a. Déterminer $v_d(t)$.

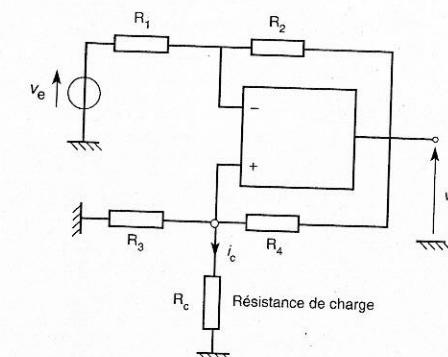
b. Représenter l'allure de la courbe $v_d(t)$.

c. En déduire $v_S(t)$ et l'allure de la courbe temporelle.

d. Conclusion.

408 Etude d'un convertisseur tension-courant à A.O.

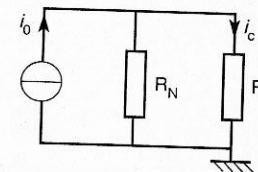
On considère le circuit suivant :



1) a. On suppose que l'A.O. est idéal et qu'il fonctionne en régime linéaire. Calculer i_c en fonction de v_E et des résistances qui composent le circuit.

b. Déterminer la condition entre R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour que i_c soit indépendant de R_c . Donner alors l'expression de i_c .

c. Dans le cas où la condition ci-dessus n'est pas réalisée, déterminer les valeurs du générateur de Norton équivalent vu aux bornes de R_c .

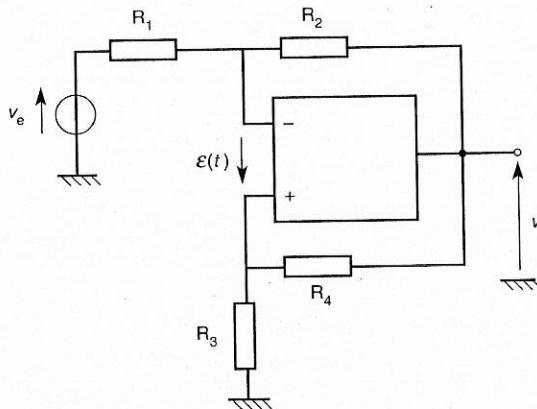


1) d. On choisit pour R_1 , R_2 , R_3 et R_4 des résistances identiques mais où chaque résistance a une valeur comprise dans la plage suivante : $R(1 - x) \leq R \leq R(1 + x)$ avec $0 < x \ll 1$. x représente la tolérance sur la valeur des composants. Calculer $|R_N|$ en fonction de R et x dans le cas le plus défavorable par rapport à la source de courant idéal.

Applications numériques : on choisit $R = 100 \text{ k}\Omega$, calculer la valeur de R_N dans les trois cas suivant : $x = 10\%$, $x = 5\%$ et $x = 1\%$.

2) Pour étudier la stabilité du montage, il faut tenir compte du comportement dynamique de l'A.O.

On considère le circuit suivant :



- L'A.O. a une admittance d'entrée et une résistance de sortie nulle.
- Comportement dynamique de l'A.O. : $V_s(p) = A(p) \epsilon(p)$

$$\text{avec } A(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = 10^5 \\ \tau = 1,6 \text{ ms} \end{array} \right.$$

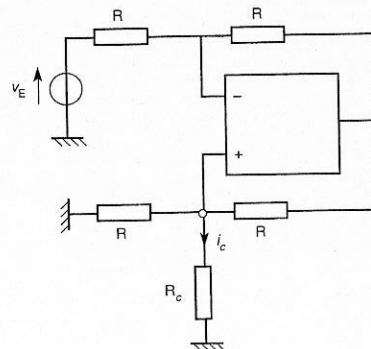
2)a. Calculer la transmittance isomorphe : $\frac{V_s(p)}{V_E(p)} = T(p)$ en fonction de A_0 , τ ,

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ et } \beta = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

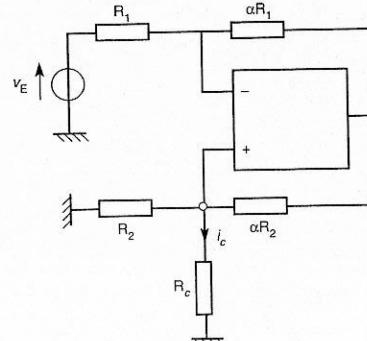
b. Calculer le pôle, p_0 , de $T(p)$ et en déduire la condition de stabilité du circuit.

c. En déduire pour les 2 cas suivants la plage de R_c assurant un fonctionnement stable du circuit :

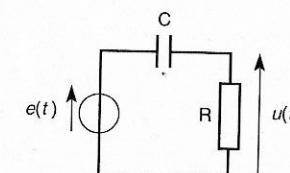
a)



b)

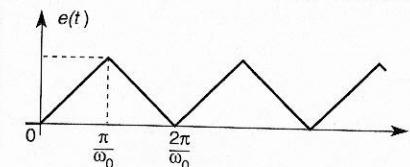


409 Réponse à un signal triangulaire pour un circuit C - R



On pose $\tau = RC$.
A $t = 0^-$; le condensateur est déchargé.

On applique la tension périodique suivante :



$$\text{On pose } \alpha = \frac{E \omega_0}{\pi}$$

- 1) a. Calculer $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$.
- b. Calculer $V(p)$.
- c. Déterminer les pôles et les zéros de $V(p)$ et représenter la "constellation" des pôles et des zéros dans le plan complexe.

- 2) a. Montrer que $V(p)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

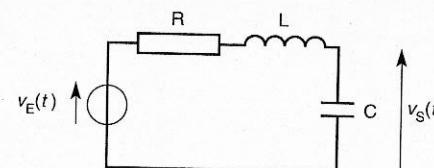
$$V(p) = \frac{a}{p + \frac{1}{\tau}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{p - (2k + 1)j\omega_0}$$

- b. Calculer $v_r(t)$, la réponse transitoire de $v(t)$.

- c. Calculer les coefficients b_k .

- d. En déduire en associant b_k et $b_{-(k+1)}$ que la réponse permanente peut s'exprimer comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales dont on donnera l'expression.

410 Réponse à une rampe pour un circuit du second ordre



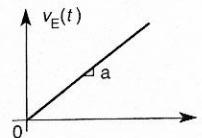
A $t = 0^-$, le circuit est au repos.

- 1) Calculer la transmittance $T(p) = \frac{V_s(p)}{V_E(p)}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$T(p) = \frac{1}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Déterminer les expressions du coefficient d'amortissement m et de la pulsation propre ω_0 .

2) $v_E(t)$ est une rampe de pente $a = 0,1 \text{ V/}\mu\text{s}$.



a. Exprimer $V_S(p)$.

b. Décomposer $V_S(p)$ en éléments simples sous la forme suivante :

$$V_S(p) = a \left[\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma p + \delta}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \right]$$

Déterminer α, β, γ et δ .

c. Calculer l'original de $V_S(p)$ et l'exprimer sous la forme suivante pour $m < 1$:

$$\text{Pour } t \geq 0 : v_S(t) = at - \frac{2m}{\omega_0} a + \frac{a e^{-m\omega_0 t}}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} \sin[\sqrt{1-m^2} \omega_0 t + \varphi]$$

$$\text{avec } \tan \varphi = \frac{2m \sqrt{1-m^2}}{2m^2 - 1}$$

d. Montrer que l'écart entre la rampe d'entrée $v_E(t)$ et l'asymptote est égal à :

$$a \frac{2m}{\omega_0} = a \text{RC.}$$

3) On se place dans le cas particulier où $m \ll 1$.

Montrer que la tension de sortie peut s'exprimer sous la forme approchée suivante :

$$\text{Pour } t \geq 0 : v_S(t) \approx a \left(t - \frac{2m}{\omega_0} \right) + \frac{a}{\omega_0} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Représenter l'allure de $v_S(t)$ pour $a = 0,1 \text{ V/}\mu\text{s}$, $m = 0,1$ et $\omega_0 = 3 \times 10^5 \text{ rad/s}$ pour $0 \leq t \leq 100 \mu\text{s}$.

5

Les oscillateurs sinusoïdaux

I. Définition

II. Structure d'un oscillateur sinusoïdal

III. Condition d'entretien des oscillations

IV. Démarrage et stabilisation de l'amplitude des oscillations

I. DÉFINITION

Un oscillateur sinusoïdal est un dispositif produisant un signal $x(t)$ tel que :

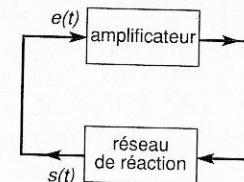
$$x(t) = X \sin \omega_0 t \quad \begin{cases} X : \text{amplitude des oscillations} \\ \omega_0 : \text{pulsation des oscillations} \end{cases}$$

$x(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

II. STRUCTURE D'UN OSCILLATEUR SINUSOÏDAL

Il est constitué d'un amplificateur et d'un réseau de réaction :



Le signal de sortie $s(t)$ est ramené à l'entrée en vue d'assurer l'auto-entretien des oscillations.

III. CONDITION D'ENTRETIEN DES OSCILLATIONS

Soit $H(j\omega)$ la transmittance isochrone de l'amplificateur et $K(j\omega)$ celle de la chaîne de retour ; alors l'égalité $S = E$ impose à la pulsation ω_0 des oscillations :

$$H(j\omega_0) K(j\omega_0) = 1$$

On en déduit les deux conditions suivants :

$$\begin{cases} \arg [\underline{H}(j\omega_0) \underline{K}(j\omega_0)] = 0 \\ |\underline{H}(j\omega_0) \underline{K}(j\omega_0)| = 1 \end{cases}$$

En général, la condition de phase permet de déterminer la valeur de la pulsation ω_0 des oscillations alors que l'équation relative au module impose une condition sur le gain de l'amplificateur.

IV. DÉMARRAGE ET STABILISATION DE L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

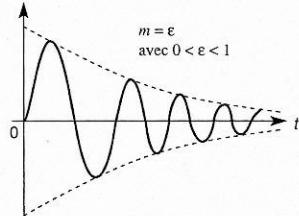
Soit une forme plus générale de l'équation différentielle d'un oscillateur :

$$\ddot{x} + 2m \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

↓
coefficient d'amortissement ↓
pulsation propre

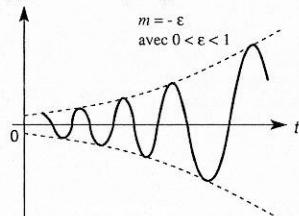
Considérons les trois cas suivants pour les mêmes conditions initiales :

$$x(t) = X e^{\varepsilon \omega_0 t} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$



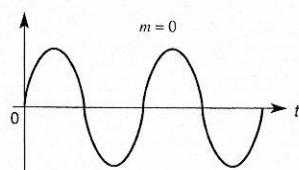
Pour $m = \varepsilon$, les oscillations ont une amplitude décroissante ; cela signifie que $|\underline{H}(j\omega_0) \underline{K}(j\omega_0)| < 1$. Le signal de retour est trop faible pour entretenir les oscillations. L'oscillateur ne démarre pas.

$$x(t) = X \varepsilon^{\omega_0 t} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$



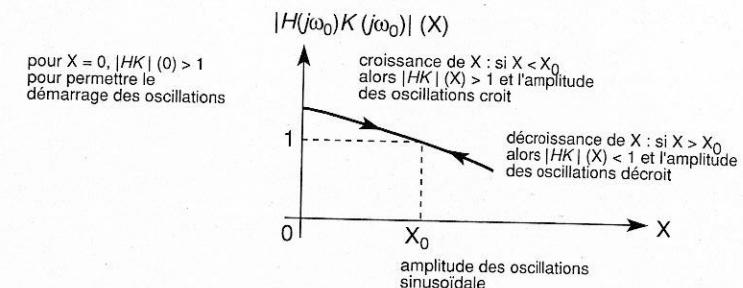
Pour $m = -\varepsilon$, les oscillations ont une amplitude croissante ; cela signifie que $|\underline{H}(j\omega_0) \underline{K}(j\omega_0)| > 1$. L'oscillateur démarre et l'amplitude des oscillations va être déterminée par les non-linéarités de l'amplificateur.

$$x(t) = X \sin(\omega_0 t)$$



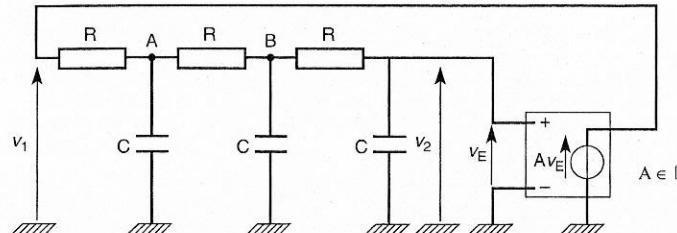
Pour $m = 0$ alors on a $|\underline{H}(j\omega_0) \underline{K}(j\omega_0)| = 1$ et on obtient un oscillateur sinusoïdal.

Pour obtenir un oscillateur sinusoïdal stabilisé en amplitude, le gain de l'amplificateur doit dépendre de l'amplitude de la façon suivante (amplificateur non-linéaire).



Exercices résolus

501 Oscillateur à réseau déphaseur



1) a. Calculer la fonction de transfert : $\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$

b. Calculer la pulsation $\omega_0 \neq 0$ pour laquelle $\underline{K}(j\omega)$ est réelle. En déduire la valeur de $\underline{K}(j\omega_0)$.

c. Déterminer la valeur de l'amplification A pour obtenir un oscillateur sinusoïdal dont on précisera la fréquence.

2) Dans le schéma de l'oscillateur, on remplace R par C et C par R. Mêmes questions qu'au 1).

1) a. Loi des nœuds en A : $\frac{\underline{V}_A - \underline{V}_1}{R} + \underline{V}_A j\omega C + \frac{\underline{V}_A - \underline{V}_B}{R} = 0$

soit : $\underline{V}_A(2 + j\omega RC) = \underline{V}_1 + \underline{V}_B \quad (1)$

Loi des nœuds en B : $\frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{R} + \underline{V}_B j\omega C + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_2}{R} = 0$

soit $\underline{V}_B(2 + j\omega RC) = \underline{V}_A + \underline{V}_2 \quad (2)$

Diviseur de tension : $\underline{V}_2 = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{V}_B \quad \text{soit} \quad \underline{V}_B = (1 + j\omega RC) \underline{V}_2 \quad (3)$

A l'aide de (1), on élimine \underline{V}_A dans (2) soit :

$$\underline{V}_B(2 + j\omega RC) = \frac{\underline{V}_1 + \underline{V}_2}{2 + j\omega RC} + \underline{V}_2$$

d'où : $\underline{V}_B[(2 + j\omega RC)^2 - 1] = \underline{V}_1 + \underline{V}_2(2 + j\omega RC)$

A l'aide de (3) on élimine \underline{V}_B dans l'équation ci-dessus :

$$\underline{V}_2[(1 + j\omega RC)(3 + 4j\omega RC + (j\omega RC)^2) - (2 + j\omega RC)] = \underline{V}_1$$

$$\underline{V}_2[1 + 6j\omega RC + 5(j\omega RC)^2 + (j\omega RC)^3] = \underline{V}_1$$

d'où : $\underline{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + 6j\omega RC + 5(j\omega RC)^2 + (j\omega RC)^3}$

b. $\underline{K}(j\omega) = \frac{1}{(1 - 5\omega^2 R^2 C^2) + j\omega RC(6 - \omega^2 R^2 C^2)}$

$\underline{K}(j\omega) \in \mathbb{R}$ si la partie imaginaire du dénominateur est nulle.

D'où : $6 - \omega^2 R^2 C^2 = 0$ soit : $\omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}$

$$\underline{K}(j\omega_0) = \frac{1}{1 - 5\omega_0^2 R^2 C^2} = \frac{1}{1 - 30} \quad \text{soit} : \underline{K}(j\omega_0) = -\frac{1}{29}$$

EXERCICES

c. Pour obtenir un oscillateur sinusoïdal, il faut que l'amplificateur compense l'atténuation du réseau déphaseur et le déphasage de π . On en déduit : $A = -29$

On obtient un oscillateur sinusoïdal à la fréquence $f_0 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC}$

2) a. Pour obtenir $\underline{K}(j\omega)$, on fait la transformation suivante :

$$\begin{cases} R \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \\ j\omega C \rightarrow \frac{1}{R} \end{cases}$$

On en déduit : $j\omega RC \rightarrow \frac{1}{j\omega RC}$

Alors : $\underline{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{6}{j\omega RC} + \frac{5}{(j\omega RC)^2} + \frac{1}{(j\omega RC)^3}}$

d'où : $\underline{K}(j\omega) = \frac{(j\omega RC)^3}{1 + 5j\omega RC + 6(j\omega RC)^2 + (j\omega RC)^3}$

b. $\underline{K}(j\omega) = \frac{-j(\omega RC)^3}{(1 - 6\omega^2 R^2 C^2) + j\omega RC(5 - \omega^2 R^2 C^2)}$

$\underline{K}(j\omega) \in \mathbb{R}$ si la partie réelle du numérateur est nulle.

D'où : $1 - 6\omega^2 R^2 C^2 = 0$ soit : $\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{6}}$

Alors : $\underline{K}(j\omega_0) = \frac{-(\omega_0 RC)^2}{5 - (\omega_0 RC)^2} \quad \text{or} \quad (\omega_0 RC)^2 = \frac{1}{6}$

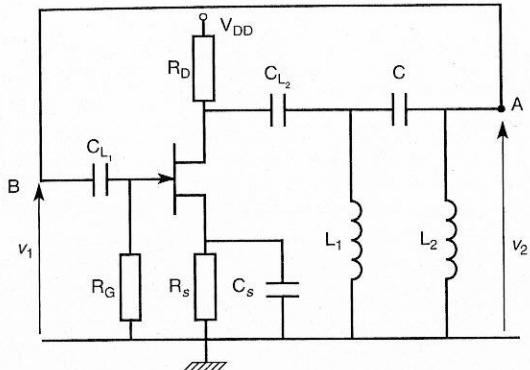
d'où : $\underline{K}(j\omega_0) = \frac{1}{6} = \frac{-1}{30 - 1} \quad \underline{K}(j\omega_0) = -\frac{1}{29}$

c. Pour obtenir un oscillateur sinusoïdal, il faut que l'amplificateur compense l'atténuation du réseau déphaseur et le déphasage de π . On en déduit : $A = -29$

On obtient un oscillateur sinusoïdal à la fréquence : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{6} RC}$

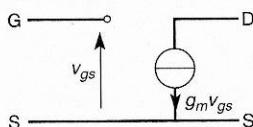
502 Oscillateur de type Hartley utilisant un TEC

Les condensateurs de liaison C_{L1} , C_{L2} et le condensateur de découplage C_S ont une impédance négligeable à la fréquence de travail.



$$\text{On pose } G_D = \frac{1}{R_D}$$

En régime dynamique, le transistor est modélisé par le schéma équivalent petits-signaux suivant :



On suppose que R_G a une valeur suffisamment grande pour pouvoir la remplacer par un circuit ouvert pour les petits-signaux.

1) On ouvre la boucle de réaction AB.

a. Dessiner le schéma équivalent petits-signaux du circuit.

b. Calculer la transmittance : $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$.

2) a. Déterminer la pulsation ω_0 pour laquelle $\underline{T}(j\omega)$ est réelle.

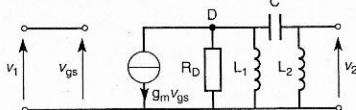
b. En déduire la valeur de $\underline{T}(j\omega_0)$.

c. Déterminer la condition sur g_m pour obtenir un oscillateur sinusoïdal dont on précisera l'expression de la fréquence.

d. On choisit $L_1 = L_2 = L = 100 \mu\text{H}$, on souhaite obtenir une fréquence d'oscillation $f_0 = 200 \text{ kHz}$. Calculer la valeur de C.

On fixe $R_D = 1 \text{ k}\Omega$, en déduire la valeur de la transconductance g_m .

1) a. On obtient le schéma équivalent suivant :



b. On se place en régime sinusoïdal permanent.

Loi des nœuds en D : $g_m \underline{V}_{gs} + G_D \underline{V}_D + \frac{\underline{V}_D}{j\omega L_1} + \frac{\underline{V}_D}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = 0$

avec $G_D = \frac{1}{R_D}$

d'où : $g_m \underline{V}_{gs} = - \frac{\underline{V}_D}{j\omega L_1} \left[\frac{1 + j\omega L_1 G_D}{1 + (j\omega)^2 L_2 C} + \frac{j\omega C}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} \right]$

$$(1) g_m \underline{V}_{gs} = - \frac{\underline{V}_D}{j\omega L_1} \left[\frac{1 + j\omega L_1 G_D + (j\omega)^2 (L_1 + L_2) C + (j\omega)^3 L_1 L_2 C G_D}{j\omega L_1 [1 + (j\omega)^2 L_2 C]} \right]$$

D'autre part, nous avons : $\underline{V}_{gs} = \underline{V}_1$ (2)

et d'après le diviseur de tension : $\underline{V}_2 = \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} \underline{V}_D$

$$\underline{V}_2 = \frac{(j\omega)^2 L_2 C}{1 + (j\omega)^2 L_2 C} \underline{V}_D \quad \text{soit} \quad \underline{V}_D = \frac{1 + (j\omega)^2 L_2 C}{(j\omega)^2 L_2 C} \underline{V}_2 \quad (3)$$

D'après (1), (2) et (3), on en déduit :

$$g_m \underline{V}_1 = \frac{-\underline{V}_2}{(j\omega)^3 L_1 L_2 C} \left[1 + j\omega L_1 G_D + (j\omega)^2 (L_1 + L_2) C + (j\omega)^3 L_1 L_2 C G_D \right]$$

d'où : $\underline{T}(j\omega) = \frac{- (j\omega)^3 L_1 L_2 C g_m}{1 + j\omega L_1 G_D + (j\omega)^2 (L_1 + L_2) C + (j\omega)^3 L_1 L_2 C G_D}$

2) a. $\underline{T}(j\omega) = \frac{j\omega^3 L_1 L_2 C g_m}{[1 - \omega^2 (L_1 + L_2) C] + j\omega L_1 G_D [1 - \omega^2 L_2 C]}$

Pour obtenir $\underline{T}(j\omega) \in \mathbb{R}$, il faut annuler la partie réelle du dénominateur :

$$1 - \omega^2 (L_1 + L_2) C = 0 \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C}}$$

b. On en déduit : $\underline{T}(j\omega_0) = \frac{\omega_0^2 L_2 C g_m}{G_D (1 - \omega_0^2 L_2 C)}$

d'où : $\underline{T}(j\omega_0) = \frac{\frac{L_2}{L_1 + L_2} g_m}{G_D \left[1 - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \right]} = \frac{g_m}{G_D} \times \frac{L_2}{L_1} = \underline{T}(j\omega_0)$

c. On obtient un oscillateur sinusoïdal lorsque $\underline{T}(j\omega) = 1$. Donc, cette condition est obtenue à la pulsation ω_0 , et on en déduit : $\frac{g_m}{G_D} \times \frac{L_2}{L_1} = 1$

soit $g_m = \frac{L_1}{R_D L_2}$ et $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$

fréquence des oscillations sinusoïdales

d. $L_1 = L_2 = 100 \mu\text{H}$ alors $C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 2L}$

soit $C \approx 3,2 \text{ nF}$

On en déduit : $g_m = \frac{1}{R_D}$ soit $g_m = 1 \text{ mA/V}$

503 Etude d'un oscillateur sinusoïdal de type "Colpitts"
(Texte d'examen)

- 1) Un oscillateur à réaction comporte deux quadripôles associés de la manière suivante :

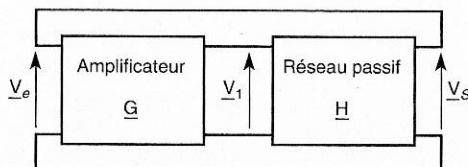


figure 1

Dans la pratique, pour ce type d'oscillateur, l'amplificateur non sélectif fonctionne à la limite du régime non-linéaire et le réseau passif est linéaire.

- a. Précisez le rôle de chacun des quadripôles qui constituent l'oscillateur.

Dire pourquoi le signal à l'entrée de l'oscillateur $v_e(t)$ est sensiblement sinusoïdal, même si l'amplificateur sort quelque peu du régime linéaire.

- b. Ecrire la condition limite d'entretien des oscillations.

- 2) Le schéma de l'oscillateur est le suivant :

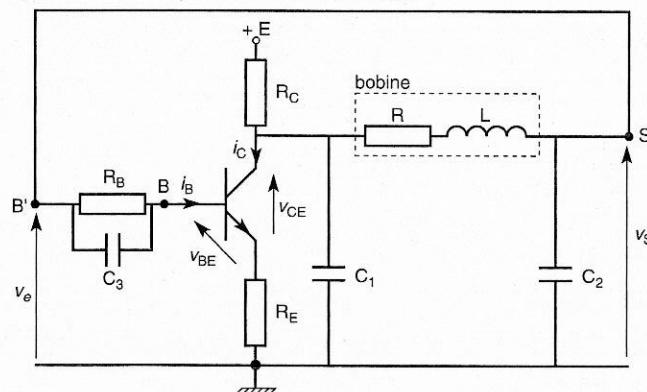
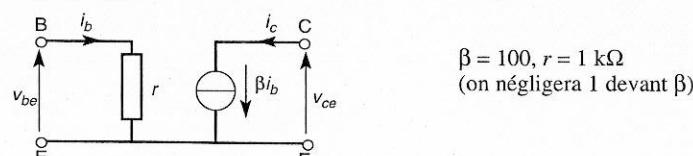


figure 2

$$\text{On donne : } R_c = 3,9 \text{ k}\Omega, R_E = 90 \text{ }\Omega, C_1 = 5,11 \text{ nF}, C_2 = 3,86 \text{ nF}.$$

L'impédance présentée par la capacité C_3 est négligeable à la fréquence de travail.

En régime dynamique, le transistor est décrit par le modèle de la figure 3 dans lequel i_b , v_{be} , i_c et v_{ce} constituent respectivement les variations des grandeurs totales I_B , V_{BE} , I_C , V_{CE} .



$$\beta = 100, r = 1 \text{ k}\Omega$$

(on négligera 1 devant β)

figure 3

EXERCICES

Dessiner un modèle dynamique de l'ensemble du circuit que l'on présentera de manière à faire apparaître à gauche la tension d'entrée v_e et à droite la tension de sortie v_s .

- 3) Afin de déterminer les conditions d'oscillation, on suppose ouverte la boucle de réaction SB' de l'oscillateur.

- a. Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée $Z_e = \frac{V_e}{I_e}$ de la chaîne ouverte.

Ecrire la condition que doit remplir $|Z_e|$ pour que son influence sur la sortie de la chaîne soit négligeable lors de la fermeture de celle-ci.

- b. En supposant que la condition précédente est vérifiée, déterminer la transmittance en chaîne ouverte du système :

$$T(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

- c. Quelles sont, en fonction des éléments du montage, les conditions sur $T(j\omega)$ pour que les oscillations puissent exister.

- 4) On se place dans le cas où nous avons les valeurs numériques suivantes : $L = L_0 = 72 \mu\text{H}$ et $R = R_1 + R_0 = 75 \Omega$.

- a. Déterminer l'expression littérale de la pulsation Ω_0 des oscillations en écrivant que la condition de phase est vérifiée.

Montrer que compte tenu de la valeur des éléments, Ω_0 ne dépend pratiquement que de L_0 , C_1 et C_2 (on conservera cette expression simplifiée pour la suite du problème).

Calculer la valeur numérique de la fréquence F_0 des oscillations.

- b. Montrer que la condition sur l'impédance d'entrée Z_e est vérifiée.

- c. On pose $A_{v_0} = \frac{R_c \beta}{r + \beta R_E}$, soit $A_{v_0} = 39$.

Déterminer en fonction de R , R_c , C_1 , C_2 et L_0 , la valeur minimale de A_{v_0} pour qu'il y ait entretien des oscillations. Commentez brièvement.

- 1) a. Le réseau passif va compenser le déphasage apporté par l'amplificateur, cette condition va déterminer la fréquence des oscillations.

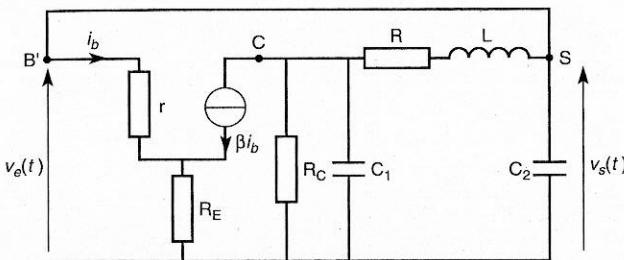
L'amplificateur va compenser l'atténuation apportée par le réseau passif, il fournit l'énergie nécessaire à l'entretien des oscillations.

Ce sont les non-linéarités de l'amplificateur qui vont déterminer l'amplitude des oscillations.

Le signal de sortie de l'amplificateur n'est pas sinusoïdal à cause des non-linéarités de l'amplificateur (saturation par exemple). Le réseau passif, par filtrage, va atténuer les harmoniques de $v_1(t)$ et sélectionner le fondamental donc le signal $v_e(t)$ est pratiquement sinusoïdal.

- b. Condition limite d'entretien des oscillations.
 $V_s = V_E$ d'où $G H = 1$

2) Schéma équivalent petits-signaux du circuit :



3) On ouvre la boucle de réaction SB'.

a. Soit : $Z_e = \frac{V_e}{I_e}$; on a : $I_e = I_b$ et $V_e = r I_b + (\beta + 1) R_E I_b$.

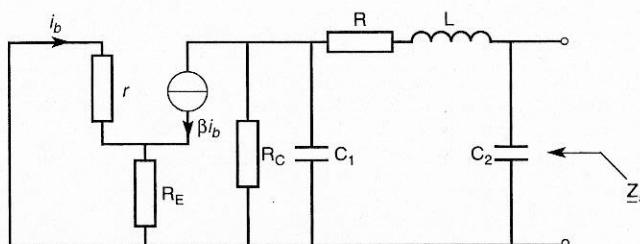
On en déduit : $V_e = [r + (\beta + 1) R_E] I_b$ or $\beta \gg 1$ donc :

$$Z_e \approx r + \beta R_E \quad \text{A.N. : } Z_e \approx 10 \text{ k}\Omega$$

L'influence de Z_e sur la sortie de la chaîne est négligeable si $|Z_e| \gg |Z_s|$ à la fréquence de travail.

impédance de sortie du circuit

Pour calculer Z_s , on suppose que $v_e(t)$ est délivrée par une source de tension donc on court-circuite l'entrée.



L'équation relative à la maille d'entrée nous donne :

$$r I_b + (\beta + 1) R_E I_b = 0 \text{ d'où } I_b = 0$$

donc : $Z_s = \frac{1}{j\omega C_2} // \left[(R + j\omega L) + \frac{R_c}{1 + j\omega R_c C_1} \right]$

$$Z_s = \frac{1}{j\omega C_2} // \left[\frac{(R + j\omega L)(1 + j\omega R_c C_1) + R_c}{1 + j\omega R_c C_1} \right]$$

soit : $Z_s = \frac{[(R + j\omega L)(1 + j\omega R_c C_1) + R_c]}{[(R + j\omega L)(1 + j\omega R_c C_1) + R_c] j\omega C_2 + (1 + j\omega R_c C_1)}$

$$R_c \left(1 + \frac{R}{R_c} - LC_1 \omega^2 \right) + j\omega R_c \left(\frac{L}{R_c} + RC_1 \right)$$

avec : $Z_s = \frac{\left[1 - \omega^2 R_c C_2 \left(\frac{L}{R_c} + RC_1 \right) \right] + j\omega R_c \left[C_1 + C_2 \left(1 + \frac{R}{R_c} - LC_1 \omega^2 \right) \right]}{1 - \omega^2 R_c C_2 \left(\frac{L}{R_c} + RC_1 \right)}$

b. On pose : $Z_1 = R_c // \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{R_c}{1 + j\omega R_c C_1}$

et $Z_2 = R, L, C_2$ en série

soit : $Z_2 = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}$

Alors : $V_c = -\beta I_b \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

et : $V_s = \frac{V_c}{Z_2} \times \frac{1}{j\omega C_2}$

d'où : $V_s = -\beta I_b \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \times \frac{1}{j\omega C_2} = -\beta I_b \times \frac{1}{1 + Y_1 Z_2} \times \frac{1}{j\omega C_2}$

D'autre part $V_e \approx (r + \beta R_E) I_b$.

D'où : $T(j\omega) = \frac{-\beta}{r + \beta R_E} \times \frac{1}{1 + \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \left(\frac{1}{R_c} + j\omega C_1 \right)} j\omega C_2$

$$T(j\omega) = \frac{-\beta}{r + \beta R_E} \times \frac{1}{j\omega C_2 + (1 + j\omega R_c C_2 + (j\omega)^2 L C_2) \left(\frac{1}{R_c} + j\omega C_1 \right)}$$

$$T(j\omega) = \frac{-\beta}{r + \beta R_E} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{R_c} - \omega^2 L C_2 - \omega^2 R_c C_1 C_2 \right) + j\omega \left(C_1 + C_2 + \frac{R}{R_c} C_2 - L C_1 C_2 \omega^2 \right)}$$

$$T(j\omega) = \frac{-\beta R_c}{r + \beta R_E} \times \frac{1}{1 - \omega^2 R_c C_2 \left(\frac{L}{R_c} + R C_1 \right) + j\omega R_c \left[C_1 + C_2 \left(1 + \frac{R}{R_c} - L C_1 \omega^2 \right) \right]}$$

c. $T(j\omega) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \arg T = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 \left(1 + \frac{R}{R_c} - L C_1 \omega^2 \right) = 0 \\ |T| = 1 \Rightarrow \frac{-\beta R_c}{r + \beta R_E} \times \frac{1}{1 - \omega^2 R_c C_2 \left(\frac{L}{R_c} + R C_1 \right)} = 1 \end{cases} \quad (1)$

4) a. D'après (1), on en déduit :

$$L_0 C_1 \Omega_0^2 = 1 + \frac{R}{R_c} + \frac{C_1}{C_2}$$

soit : $\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_1}} \left(1 + \frac{R}{R_c} + \frac{C_1}{C_2} \right)$

D'après les A.N., nous avons : $\frac{R}{R_c} = 1,9 \times 10^{-2} \ll 1$, donc :

$$\Omega_0 \approx \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_0 C_1 C_2}} \quad \text{d'où} \quad F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} \approx 400 \text{ kHz}$$

b. Pour $\omega = \Omega_0$, nous avons l'expression simplifiée suivante pour Z_s :

$$Z_s(j\Omega_0) = \frac{R_c \left(1 + \frac{R}{R_c} - L_0 C_1 \Omega_0^2 \right) + j\Omega_0 R_c \left(\frac{L_0}{R_c} + R C_1 \right)}{1 - \Omega_0^2 R_c C_2 \left(\frac{L_0}{R_c} + R C_1 \right)}$$

$$\text{or } 1 + \frac{R_c}{R_c} \cdot L_0 C_1 \Omega_0^2 = -\frac{C_1}{C_2}$$

et d'après les A.N. : $\frac{L_0}{R_c} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s} \ll RC_1 = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

$$Z_s(j\Omega_0) \approx \frac{-R_c \frac{C_1}{C_2} + j\Omega_0 R_c RC_1}{1 - \Omega_0^2 R_c C_2 RC_1}$$

D'autre part, nous avons aussi : $\Omega_0^2 R_c C_2 RC_1 \approx 36 \gg 1$ donc :

$$Z_s(j\Omega_0) \approx \frac{-R_c \frac{C_1}{C_2} + j\Omega_0 R_c RC_1}{1 - \Omega_0^2 R_c C_2 RC_1} = \frac{-\frac{C_1}{C_2} + j\Omega_0 RC_1}{(j\Omega_0)^2 RC_1 C_2}$$

$$Z_s(j\Omega_0) \approx \frac{1}{j\Omega_0 C_2} - \frac{1}{(j\Omega_0)^2 RC_1 C_2} = \frac{1}{j\Omega_0 C_2} \left[1 - \frac{1}{j\Omega_0 RC_1} \right]$$

$$\text{Alors : } Z_s(j\Omega_0) \approx \frac{1}{j\Omega_0 C_2} \times \left[1 + \frac{j}{RC_1 \Omega_0} \right]$$

$$\text{donc : } |Z_s(j\Omega_0)| \approx \frac{1}{C_2 \Omega_0} \sqrt{1 + \frac{1}{(RC_1 \Omega_0)^2}}$$

D'après les A.N., on en déduit : $|Z_s(j\Omega_0)| \approx 104 \sqrt{1 + \frac{1}{0,72^2}} (\Omega)$

d'où $|Z_s(j\Omega_0)| \approx 180 \Omega \ll 10 \text{ k}\Omega = |Z_e|$ donc la condition sur l'impédance d'entrée est vérifiée.

c. La condition d'oscillation sur $|T|$ permet d'écrire :

$$A_{v_0} = -1 + \Omega_0^2 R_c C_2 \left(\frac{L_0}{R_c} + RC_1 \right)$$

or $\frac{L_0}{R_c} \ll RC_1$ donc on a :

$$A_{v_0} \approx -1 + \frac{C_1 + C_2}{L_0 C_1 C_2} \times R_c C_2 R C_1 = -1 + R R_c \frac{C_1 + C_2}{L_0} = A_{v_{0\min}}$$

D'après les A.N., nous avons : $A_{v_{0\min}} \approx 37,2$.

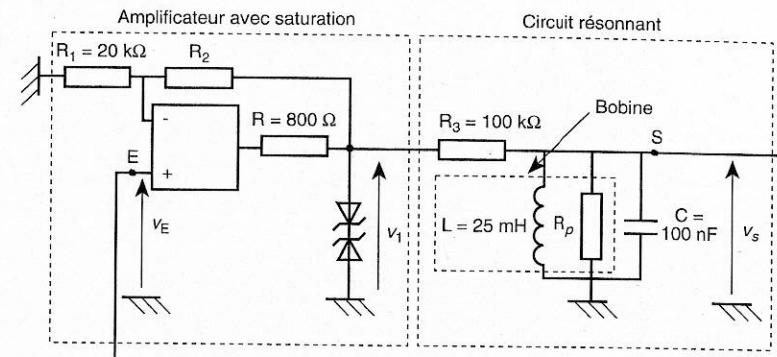
L'amplification $A_{v_0} = 39 > 37,2$ donc il y a démarrage des oscillations qui vont se stabiliser à la fréquence F_0 et dont l'amplitude va être déterminée par les non linéarités de l'amplificateur.

504 Oscillateur à circuit résonnant

On tient compte des pertes de la bobine avec $R_p = 30 \text{ k}\Omega$.

L'A.O. est idéal.

Les diodes Zéner ont une tension $V_Z = 6,4 \text{ V}$ et une tension de seuil en direct $V_{Th} = 0,6 \text{ V}$.



1) Etude en régime linéaire

On suppose que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire.

a. On ouvre la boucle de réaction entre E et S.

Calculer la transmittance $T(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$.

b. On relie E et S. Calculer la fréquence des oscillations, f_0 , ainsi que la valeur minimale de l'amplification, A_0 , permettant le démarrage des oscillations. En déduire la valeur de R_2 correspondante.

2) Etude en régime non-linéaire : détermination de l'amplitude des oscillations

On choisit $R_2 = 180 \text{ k}\Omega$.

On ouvre la boucle de réaction ES. On applique à l'entrée un signal $v_E(t) = E \sin \omega_0 t$ avec $\omega_0 = 2\pi f_0$.

a. Représenter l'allure de $v_1(t)$ pour $E = 2 \text{ V}$.

b. On assimile $v_1(t)$ à un signal carré de pulsation ω_0 et d'amplitude crête à crête $2V_1$.

1. Préciser la valeur de V_1 .

2. Exprimer le développement en série de Fourier de $v_1(t)$.

c. Calculer l'amplitude, S_1 , du fondamental de $v_S(t)$.

d. On suppose que le circuit résonnant a affaibli suffisamment les harmoniques pour que $v_S(t)$ soit assimilée à son fondamental.

1. Donner l'expression de l'amplification équivalente à la pulsation ω_0 :

$$N(E) = \frac{S_1}{E} \quad \text{pour } E \leq \frac{V_1}{A} \quad \text{et } E \gg \frac{V_1}{A}$$

2. Représenter l'allure de $N(E)$.

e. On ferme la boucle de réaction. En déduire l'amplitude des oscillations sinusoïdales à la sortie du circuit résonnant.

3) Une caractéristique essentielle d'un oscillateur sinusoïdal est son taux de distorsion harmonique. Les conditions d'oscillations sont telles que $v_1(t)$ peut être assimilé à un signal carré de pulsation ω_0 et d'amplitude crête à crête $2V_1$.

a. Exprimer la transmittance isochrone $K(j\omega) = \frac{V_S}{V_1}$ et la mettre sous la forme canonique suivante :

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{K}_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Déterminer les expressions de K_0 , Q et ω_0 et calculer leur valeur.

b. A l'aide de la décomposition en série de Fourier de $v_1(t)$, calculer l'amplitude de l'harmonique n , S_n , à la sortie du filtre et montrer que $S_n \approx \frac{S_1}{n^2 Q}$ lorsque $Q \gg 1$.

c. Déterminer le taux de distorsion harmonique, D , de $v_s(t)$ en fonction du coefficient de qualité, Q , du circuit résonnant. On rappelle le résultat suivant :

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

Calculer la valeur de D .

1) a. $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_E} \times \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_1}$

En régime linéaire, nous avons un amplificateur non inverseur soit : $\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A$.

$$\text{On pose } \underline{Y} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{Z}$$

$$\underline{V}_s = \frac{Z}{Z + R_3} \underline{V}_1 = \frac{1}{1 + \underline{Y} R_3} \underline{V}_1$$

$$\text{d'où : } \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) R_3} = \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_p} + j\omega R_3 \left(C - \frac{1}{L\omega^2} \right)}$$

$$\text{On en déduit : } \underline{T}(j\omega) = \frac{A}{1 + \frac{R_3}{R_p} + j\omega R_3 C \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} \right)}$$

b. On obtient des oscillations sinusoïdales pour $\underline{T}(j\omega_0) = 1$, alors :

$$\begin{cases} \arg \underline{T}(j\omega_0) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ |\underline{T}(j\omega_0)| = 1 \Rightarrow A_0 = 1 + \frac{R_3}{R_p} \end{cases}$$

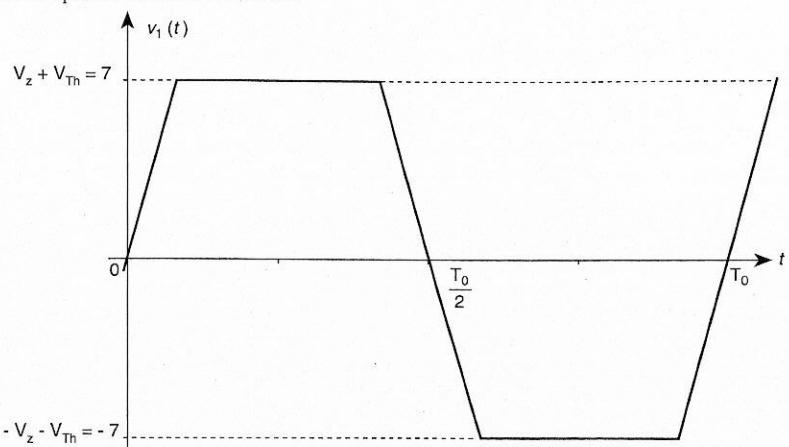
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 3,2 \text{ kHz} \quad A_0 \approx 4,3 \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{R_3 R_1}{R_p} = 67 \text{ k}\Omega$$

2) a. Pour $E = 2 \text{ V}$, en régime linéaire, on obtiendrait :

$$v_1(t) = A E \sin \omega_0 t \quad \text{avec} \quad A = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10 \quad \text{donc} \quad \hat{v}_1 = 20 \text{ V}$$

Mais la tension de sortie de l'amplificateur est limitée par les diodes Zéners entre $\pm (V_Z + V_{Th}) = \pm 7 \text{ V}$.

Donc $v_1(t)$ aura l'allure suivante :



b. 1. $V_1 = V_Z + V_{Th} = 7 \text{ V}$: c'est la tension de saturation de l'amplificateur.

2. D'après la table des développements en série de Fourier :

$$v_1(t) = \frac{4V_1}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$$

c. A la pulsation ω_0 , on a : $\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_1} = \frac{R_p}{R_p + R_3}$

$$\text{d'où } S_1 = \frac{R_p}{R_p + R_3} \times \frac{4V_1}{\pi} \approx 2,1 \text{ V}$$

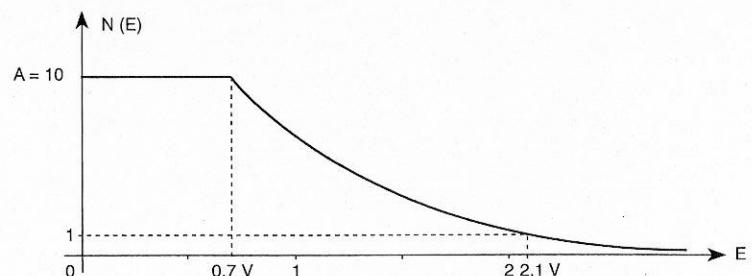
d. 1. Pour $E \leq \frac{V_1}{A}$ alors il n'y a pas de saturation de l'amplificateur et

$$N(E) = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A = 10, \text{ l'amplificateur fonctionne en régime linéaire.}$$

Pour $E > \frac{V_1}{A}$ alors on assimile $v_1(t)$ à un signal carré donc :

$$N(E) = \frac{R_p}{R_p + R_3} \times \frac{4V_1}{\pi E}$$

2. On en déduit l'allure de l'amplification équivalente tenant compte de la non linéarité.



e. On a une amplification $A = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10 > A_0 = 4,3$ donc l'oscillateur sinusoïdal va démarrer lorsque l'on ferme la boucle de réaction.

La pulsation des oscillations est fixée à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'amplitude est déterminée par $N(E) = 1$ car $v_E(t) = v_S(t)$ donc on en déduit :

$$S_1 = E = \frac{R_p}{R_p + R_3} \times \frac{4V_1}{\pi} \approx 2,1 \text{ V} \quad \text{car l'amplification est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler } v_i(t) \text{ à un signal carré.}$$

3) a. D'après la question 1) a., nous avons :

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_p} + \frac{R_3}{j\omega L} + j\omega R_3 C}$$

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{R_p}{R_3 + R_p} \times \frac{1}{1 + \frac{R_{eq}}{j\omega L} + j\omega R_{eq} C} \quad \text{avec } R_{eq} = \frac{R_p R_3}{R_p + R_3}$$

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{R_p}{R_3 + R_p} \times \frac{1}{1 + jR_{eq}C\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - j \frac{R_{eq}}{L\omega_0} \times \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre du circuit résonnant

$$\text{d'où } \underline{K}(j\omega) = \frac{R_p}{R_3 + R_p} \times \frac{1}{1 + jR_{eq}\sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\text{On en déduit } Q = R_{eq} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad K_0 = \frac{R_p}{R_3 + R_p}$$

A.N. : $K_0 = 0,23$; $Q = 46$; $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2 \times 10^4 \text{ rad/s.}$

$$\text{b. } v_1(t) = \frac{4V_1}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$$

On a : $S_1 = \frac{4V_1}{\pi} K_0$ et pour n impair :

$$S_n = \frac{4V_1}{n\pi} \times |\underline{K}(jn\omega_0)| = \frac{4V_1 K_0}{n\pi} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n} \right)^2}}$$

n étant supérieur à 1, on a : $n - \frac{1}{n} \approx n$ et $Q \gg 1$; on a : $Q^2 n^2 \gg 1$ d'où :

$$S_n \approx \frac{4V_1 K_0}{\pi} \times \frac{1}{Qn^2} \quad \text{soit } S_n \approx \frac{S_1}{Qn^2}$$

c. Par définition du taux de distorsion harmonique, nous pouvons écrire :

$$D = \frac{\sqrt{S_3^2 + S_5^2 + \dots}}{S_1}$$

$$\text{soit : } D = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots} \quad \text{d'où } D = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{\pi^4}{96} - 1}$$

Pour $Q = 46$, on obtient : $D \approx 0,26 \%$

505 Oscillateur à quartz à cellule en π

Le quartz est ici associé à un amplificateur et deux condensateurs suivant le schéma de principe de la figure 1. On suppose que, en fonctionnement linéaire, l'amplificateur est décrit par le modèle de la figure 2. Pour simplifier, on néglige les pertes dans le quartz, c'est-à-dire que l'on adopte le modèle de la figure 3 avec $R = 0$.

On pose $Z = jX$, $Z_1 = jX_1 = \frac{1}{jC_1\omega}$, $Z_2 = jX_2 = \frac{1}{jC_2\omega}$, impédances respectives du quartz et des condensateurs de capacités C_1 et C_2 .

1) Tracer le schéma équivalent en boucle ouverte du système en prenant v comme entrée et la tension aux bornes de C_1 comme sortie.

2) Exprimer la transmittance en boucle ouverte et montrer que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$T = -sp \frac{X_1 X_2}{X_2(X + X_1) - jp(X + X_1 + X_2)}$$

3) Quelle relation existe-t-il entre X , X_1 et X_2 à la pulsation Ω_0 , des oscillations sinusoïdales possibles ? Quelle relation doit-il exister entre s , p , X_1 et X_2 à la pulsation Ω_0 pour que les oscillations puissent démarer ? Montrer que, à la pulsation Ω_0 , le quartz est inductif.

4) Exprimer Ω_0 en fonction de L , C et $C_e = \Gamma + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Montrer que, compte tenu des valeurs numériques données pour le quartz :

$$C = 310^{-15} \text{ F et } \Gamma = 500 \text{ C alors : } \Omega_0 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{C}{2C_e} \right) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

5) Exprimer la condition de démarrage des oscillations en fonction de s , p , C_1 et C_2 .

6) Exemple de réalisation :

L'amplificateur est réalisé avec une porte inverseuse CMOS associée à une résistance R' comme l'indique la figure 4. R' est choisie suffisamment grande pour que l'on puisse décrire approximativement cet amplificateur par le modèle de la figure 2.

On donne $f_0 = 2^{15} \text{ Hz}$, $C_1 = C_2 = 20 \text{ pF}$.

L'amplificateur a une amplification en tension à vide $A \approx -100$ en fonctionnement linéaire.

- Expliquer le rôle de R' .

- Calculer l'écart $F_0 - f_0 = \frac{\Omega_0 - \omega_0}{2\pi}$.

- Les oscillations peuvent-elles démarer ?

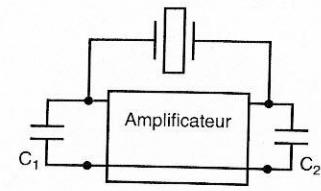


figure 1

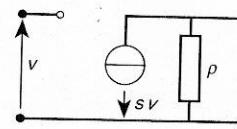


figure 2

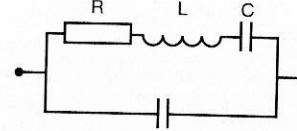


figure 3

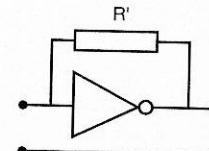
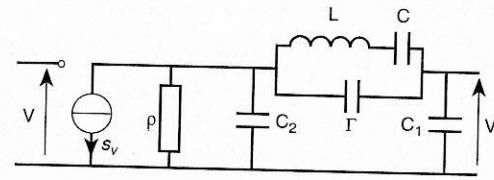
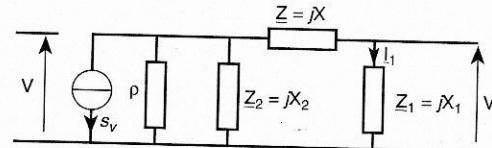


figure 4

1)



Soit en introduisant les impédances :



$$2) \underline{T}(j\omega) = \frac{V_1}{V} \quad \text{avec} \quad \underline{V}_1 = jX_1 I_1$$

On obtient I_1 en appliquant le diviseur de courant :

$$I_1 = -s \underline{V} \times \frac{\frac{1}{Z + Z_1}}{\frac{1}{Z + Z_1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{Z_2}} = -s \underline{V} \times \frac{p Z_2}{p Z_2 + Z_2(Z + Z_1) + p(Z + Z_1)}$$

$$I_1 = -s \underline{V} \times \frac{p j X_2}{-X_2(X + X_1) + j p(X + X_1 + X_2)}$$

$$\text{soit : } \underline{T}(j\omega) = -s p \frac{X_1 X_2}{X_2(X + X_1) - j p(X + X_1 + X_2)}$$

EXERCICES

3) La condition d'entretien des oscillations sinusoïdales impose : $\underline{T}(j\Omega_0) = 1$

$$\text{soit : } \begin{cases} \arg \underline{T}(j\Omega_0) = 0 \Rightarrow X + X_1 + X_2 = 0 & (1) \\ |\underline{T}(j\Omega_0)| = 1 \Rightarrow -s p \frac{X_1 X_2}{X_2(X + X_1)} = 1 \end{cases}$$

d'après (1), on a : $X + X_1 = -X_2$ d'où $\underline{T}(j\Omega_0) = +s p \frac{X_1}{X_2} = 1$

La condition de démarrage des oscillations impose $\underline{T}(j\Omega_0) > 1$, soit : $+s p \frac{X_1}{X_2} > 1$ (2)

$$4) \text{ On a : } X_1 = \frac{-1}{C_1 \omega}, \quad X_2 = \frac{-1}{C_2 \omega}$$

$$\text{et : } \underline{Z} = \frac{(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \frac{1}{j\omega \Gamma}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega \Gamma}} = \frac{1 - LC\omega^2}{(j\omega)^3 L C \Gamma + j\omega(\Gamma + C)}$$

$$\underline{Z} = j \frac{LC\omega^2 - 1}{\omega [(\Gamma + C) - L C \Gamma \omega^2]} = j X$$

A la pulsation Ω_0 , la condition $X + X_1 + X_2 = 0$, nous donne :

$$\frac{LC\Omega_0^2 - 1}{\Omega_0 [(\Gamma + C) - L C \Gamma \Omega_0^2]} - \frac{1}{C_1 \Omega_0} - \frac{1}{C_2 \Omega_0} = 0$$

$$LC\Omega_0^2 - 1 = [(\Gamma + C) - L C \Gamma \Omega_0^2] \times \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$LC\Omega_0^2 \left[1 + \Gamma \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right] = (\Gamma + C) \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} + 1$$

$$LC\Omega_0^2 \left[\Gamma + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right] = \Gamma + C + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

D'après l'énoncé, on pose : $C_e = \Gamma + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ d'où :

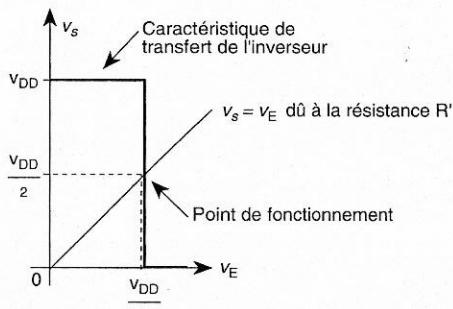
$$LC\Omega_0^2 C_e = C_e + C \quad \text{soit} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{C_e + C}{LC C_e}}$$

Sachant que $C \ll C_e$ avec $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(1 + \frac{C}{C_e} \right)^{1/2}$ et en faisant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$\Omega_0 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{C}{2C_e} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

5) La condition de démarrage des oscillations est obtenue à l'aide de l'équation (2) : $s p \frac{X_1}{X_2} > 1$ d'où $s p \frac{C_2}{C_1} > 1$

6) R' a pour rôle de polariser la porte inverseuse CMOS dans sa zone de fonctionnement linéaire pour que ce circuit logique soit utilisé en amplificateur.



$$F_0 - f_0 = f_0 \left(1 + \frac{C}{2C_e}\right) - f_0 = f_0 \frac{C}{2C_e}$$

avec $f_0 = 2^{15} \text{ Hz}$; $C = 310^{-15} \text{ F}$

$$C_e = \Gamma + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 500 \times 310^{-15} + 10 \times 10^{-12} = 11,5 \text{ pF}$$

$$\text{donc } F_0 - f_0 = 2^{15} \times \frac{3 \times 10^{-15}}{2 \times 11,5 \times 10^{-12}} = 2^{15} \cdot 1,3 \cdot 10^{-4} = 32\,768 \times 1,3 \cdot 10^{-4}$$

$$F_0 - f_0 \approx 4,3 \text{ Hz}$$

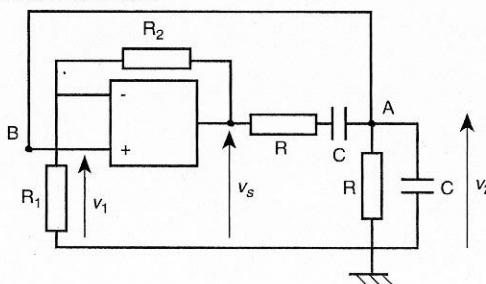
L'amplification en tension à vide est égale à : $-sp = -A$ donc $sp = A$.

La condition de démarrage des oscillations impose : $A = sp > \frac{C_1}{C_2} = 1$ donc $100 > 1$; les oscillations pourront démarrer.

Exercices à résoudre

506 Oscillateur à pont de Wien stabilisé en amplitude

1) On considère le circuit suivant



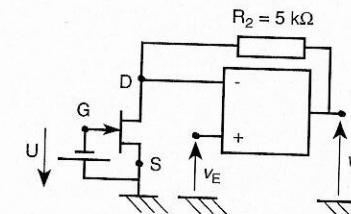
L'A.O est parfait et il fonctionne en régime linéaire.

a. On ouvre la boucle de réaction AB. Calculer la transmittance isochrone $T(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$

b. Indiquer la condition sur $T(j\omega)$ pour obtenir un oscillateur sinusoïdal lorsque la boucle AB est fermée.

c. En déduire la pulsation, ω_0 , des oscillations, la valeur du rapport $\frac{R_2}{R_1}$ ainsi que l'expression de $v_2(t)$ lorsque $v_s(t) = V_{SM} \sin \omega_0 t$.

2) Amplificateur commandé en tension



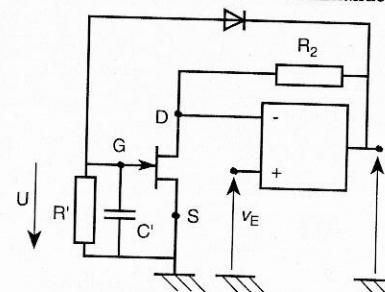
Le TEC fonctionne dans sa zone ohmique, $|v_{DS}| \leq 200 \text{ mV}$, alors :

$$\begin{cases} R_{DS} = \frac{R_0}{1 - \frac{U}{V_p}} \quad \text{pour } U < V_p = 4 \text{ V} \quad R_0 = 100 \Omega \\ R_{DS} \rightarrow +\infty \quad \text{pour } U \geq V_p \end{cases}$$

tension de pincement du TEC

a. Calculer l'amplification $\frac{v_s}{v_E} = A(U)$ et la représenter graphiquement.

b. Pour obtenir la tension de commande U on utilise le circuit redresseur suivant :

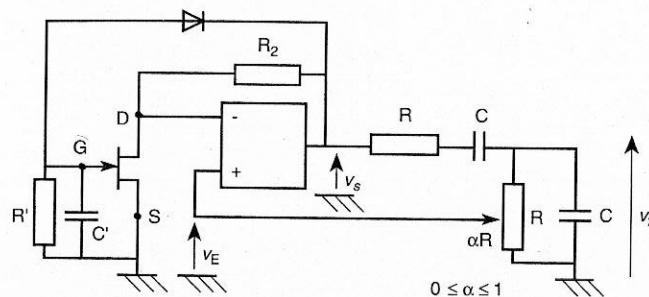


- La diode est parfaite.
- $v_E(t)$ est sinusoïdale telle que $v_E(t) = V_{EM} \sin \omega t$
- $R'C' \gg \frac{2\pi}{\omega}$

1. Expliquer pourquoi $U \approx V_{SM}$.

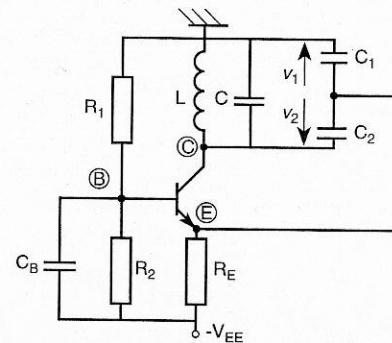
2. Exprimer $V_{SM} = f(V_{EM})$ lorsque le TEC fonctionne dans sa zone ohmique et la représenter graphiquement.
Préciser la valeur maximale de V_{SM} .

3) Schéma général de l'oscillateur sinusoïdal :

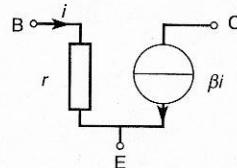


- a. Déterminer la valeur de α pour obtenir des oscillations sinusoïdales, à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, et d'amplitude $V_{SM} = 2$ V.
 b. En déduire l'amplitude de $v_2(t)$ et expliquer pourquoi son taux de distorsion harmonique est plus petit que celui de $v_s(t)$.

507 Oscillateur à varicaps



L'impédance de C_B est négligeable à la fréquence de travail, l'amplificateur est un montage base-commune.



On adopte pour le transistor le schéma équivalent petits-signaux suivant.

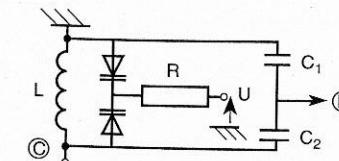
D'autre part on suppose $R_E \gg r$.

1) Tracer le schéma équivalent petits-signaux du circuit.

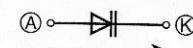
2) On se place en régime sinusoïdal permanent. On appelle V_1 et V_2 , les grandeurs complexes associées aux tensions aux bornes des condensateurs C_1 et C_2 .

- a. Etablir le système d'équations régissant V_1 et V_2 .
 b. En écrivant que le déterminant associé à ce système est nul, en déduire la pulsation Ω_0 des oscillations sinusoïdales ainsi que la condition d'entretien des oscillations.

3) Le condensateur C est remplacé par deux diodes varicaps polarisées par une tension de commande U .



La capacité C_D équivalente à la diode est donnée par la relation suivante :

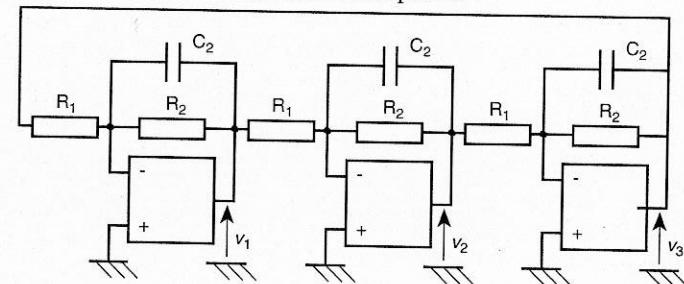


$$C_D = \frac{K}{\sqrt{V_0 + V_R}} \quad \text{avec } \begin{cases} V_0 = 1 \text{ V} \\ K = 10^{-10} \text{ F V}^{1/2} \end{cases}$$

- a. Donner l'expression de la capacité C en parallèle avec l'inductance sachant que les deux diodes varicaps sont identiques (même boîtier). Calculer C pour $U = 1$ V et $U = 20$ V.
 b. Pour $C_1 = C_2 = 100 \text{ pF}$ et $L = 1 \text{ mH}$ calculer la plage de fréquence lorsque U varie de 1 V à 20 V.

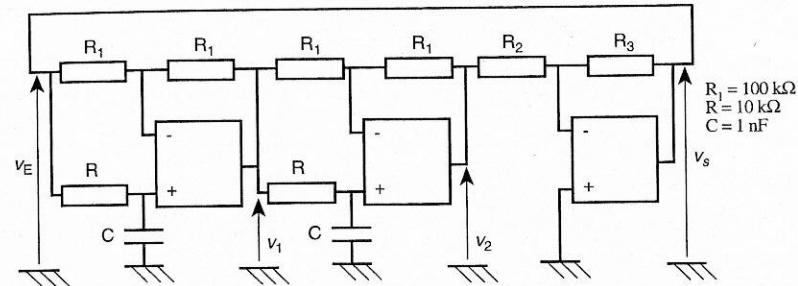
508 Oscillateur à réseau triphasé

On considère le circuit suivant où les A.O sont parfaits :



1) Calculer la fonction de transfert : $\frac{V_2}{V_1}$

2) Déterminer la pulsation des oscillations sinusoïdales ω_0 et la condition d'entretien.

509 Oscillateur à réseau déphaseur utilisant une CTN


Les AO sont parfaits.

1) On ouvre la boucle reliant v_s et v_E , calculer la transmittance $T(j\omega) = \frac{V_s}{V_E}$

2) En déduire la pulsation ω_0 des oscillations et la condition de leur entretien.

3) On choisit pour R_3 une thermistance à coefficient de température négatif (CTN). La loi de variation de R_3 est donnée par :

$$R_3 = R_0 \exp \left[B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

R_0 : résistance à la température T_0 .

T_0 : température ambiante exprimé en Kelvin.

T : température de fonctionnement de la CTN en Kelvin.

La thermistance utilisée présente les paramètres suivants :

$$R_0 = 1,6 \text{ k}\Omega \quad T_0 = 300 \text{ K}$$

$$B = 4000 \text{ K}$$

$R_{Th} = 0,2^\circ\text{C}/\text{mW}$: résistance thermique de la CTN

a. Montrer que lorsque T est voisin de T_0 alors $R_3 \approx R_0 \exp(\alpha P)$ avec P : puissance dissipée par la CTN.

Calculer la valeur de α .

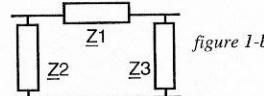
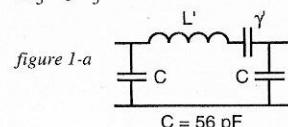
b. Déterminer l'amplitude, \hat{v}_s , des oscillations sinusoïdales lorsque $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

c. Expliquer le mécanisme de naissance et de stabilisation des oscillations.

d. Sachant que $v_s(t) = \hat{v}_s \sin \omega_0 t$, déterminer les expressions de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ et montrer que l'on obtient deux signaux en quadrature.

510 Oscillateur de type Clapp (Texte d'examen)

L'oscillateur est du type "Clapp" : la chaîne de réaction se compose de 3 impédances purement réactives disposées selon la figure 1-a. On pose : $Z_1 = jX_1$; $Z_s = jX_s$; $Z_3 = jX_3$.



La capacité γ' est obtenue par l'association donnée sur la figure 2. Le circuit de polarisation de la diode varicap n'intervient pas.

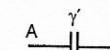


figure 2-a

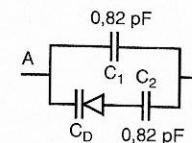


figure 2-b

1) Exprimer γ' en fonction de C_1 , C_2 et C_D .

2) La pulsation d'oscillation ($\omega_L = 2\pi f_L$) est déterminée par la relation entre les 3 réactances : $X_1 + X_2 + X_3 = 0$. Exprimer ω_L en fonction des éléments du circuit. Montrer que $C \gg \gamma'$ et simplifier la relation précédente. C'est cette relation simplifiée qu'on utilisera par la suite.

3) La diode est polarisée par une tension continue V_p variant de 3,0 à 6,0 V, ce qui permet un balayage des canaux de 0 à 255. L'expression de la capacité C_D est :

$$C_D = C_0 / (1 + V_p / 0,7)^y$$

avec : $C_0 = 31 \text{ pF}$: capacité de la diode pour $V_p = 0$,

C_D : capacité de la diode pour une tension V_p ,

y : exposant qui dépend du type de jonction utilisée (ici on prend $y = 0,62$).

Calculer les valeurs de γ' pour $V_p = 3,0 \text{ V}$ et $V_p = 6,0 \text{ V}$.

On admet que la variation de γ' en fonction de la polarisation de la diode varicap est linéaire sur l'intervalle de tension utilisé.

Ainsi, si la tension de polarisation V_p varie de δV_p , la capacité équivalente γ' va varier de $\delta \gamma'$, et on pourra écrire :

$$\delta \gamma' = \alpha \delta V_p$$

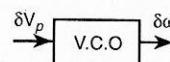
Calculer α et en déduire la variation $\delta \gamma'$ de la capacité équivalente lorsque la tension de polarisation V_p augmente de δV_p lors du passage d'un canal au canal suivant.

4) La variation $\delta \gamma'$ provoque une variation δf_L de la fréquence de résonance de l'oscillateur. Etablir l'expression de δf_L en fonction de f_L , γ' et $\delta \gamma'$ sachant que $f_L = 447,8 \text{ MHz}$ et correspond au canal 128.

Application numérique : Calculer δf_L .

5) Le VCO peut être représenté par le schéma-bloc de la figure 3, avec δV_p comme grandeur d'entrée, et $\delta \omega_L$ comme grandeur de sortie.

Montrer que $\delta \omega_L = K \delta V_p$.



Application numérique : Calculer K.

figure 3

6

Notions sur le filtrage analogique

- I. Gabarit d'un filtre passe-bas
- II. Normalisation
- III. Filtres passe-bas de Butterworth
- IV. Filtres passe-haut
- V. Filtres passe-bande

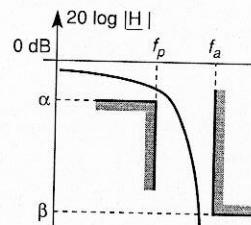
I. GABARIT D'UN FILTRE PASSE-BAS



Un filtre passe-bas est défini par sa transmittance :

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$$

La réponse $|H|$ est représentée par le diagramme suivant :



f_p : fréquence frontière de la bande passante.

f_a : fréquence frontière de la bande atténuee.

Le gabarit d'un filtre passe-bas est défini par les valeurs (f_p, α) et (f_a, β) . Il délimite le domaine où doit s'inscrire la réponse fréquentielle du filtre.

II. NORMALISATION

1. Normalisation des fréquences

On choisit une fréquence de référence f_r et on pose : $f_n = \frac{f}{f_r}$

$\frac{f}{f_r}$
fréquence normalisée

On en déduit :

$$x = \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{\omega}{2\pi f_r} \text{ et } s = \frac{p}{\omega_r}$$

\uparrow pulsation normalisée \uparrow variable de Laplace normalisée

2. Normalisation des composants

La fréquence de référence choisie, on adopte par exemple une résistance de référence R_r , alors :

$$L_r = \frac{R_r}{\omega_r} \text{ alors : } L_n = \frac{L}{L_r}$$

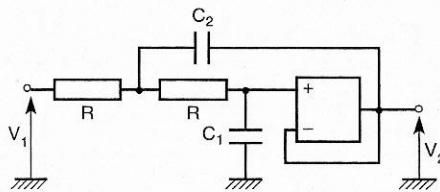
↑
inductance
de référence ↑
inductance
normalisée

$$C_r = \frac{1}{\omega_r R_r} \text{ alors : } C_n = \frac{C}{C_r}$$

↑
capacité
de référence ↑
capacité
normalisée

3. Exemple d'un circuit normalisé

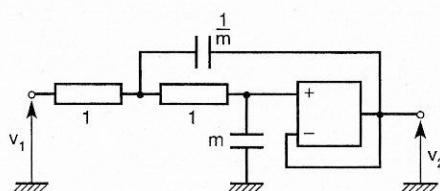
Soit le filtre du second ordre de type Sallen-Key :



$$H(p) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + 2RC_1 p + R^2 C_1 C_2 p^2} = \frac{1}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{avec : } m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

On choisit comme pulsation de référence : $\omega_r = \omega_0$ et comme résistance de référence : $R_r = R$, on en déduit :



$$\text{avec } H(s) = \frac{1}{1 + 2ms + s^2}$$

↑
transmittance normalisée

III. FILTRES PASSE-BAS DE BUTTERWORTH

La réponse normalisée d'un filtre passe-bas du Butterworth est donnée par :

$$|H(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (x)^{2n}}}$$

n est l'ordre du filtre.

Remarques :

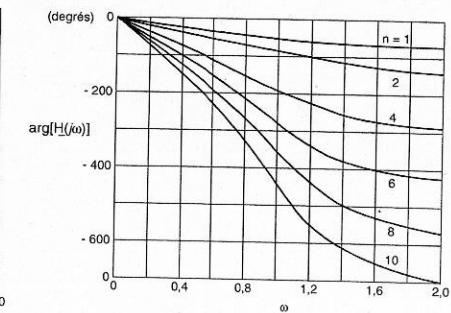
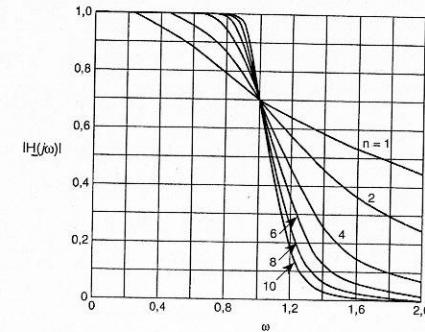
$$- |H(j0)| = 1 \quad \forall n$$

$$- |H(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall n \text{ soit } 20 \log |H(j\omega_r)| = -3 \text{ dB}$$

- Pour $\omega \gg \omega_r$ la pente de l'asymptote est égale à $-20 \times n$ dB/décade = $-6 \times n$ dB/octave

$H(s)$ est donnée par le tableau suivant :

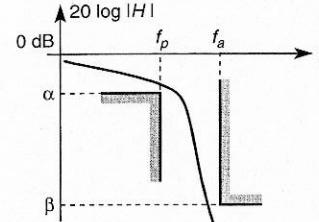
| n | $H^{-1}(s)$: polynôme de Butterworth | coefficient d'amortissement des seconds ordres associés à $H(s)$ |
|-----|---|--|
| 1 | $1 + s$ | |
| 2 | $1 + \sqrt{2}s + s^2$ | 0,707 |
| 3 | $(1 + s)(1 + s + s^2)$ | 0,5 |
| 4 | $(1 + 0,765s + s^2)(1 + 1,848s + s^2)$ | 0,383 - 0,924 |
| 5 | $(1 + s)(1 + 0,618s + s^2)(1 + 1,618s + s^2)$ | 0,309 - 0,809 |
| 6 | $(1 + 0,518s + s^2)(1 + \sqrt{2}s + s^2)(1 + 1,93s + s^2)$ | 0,259 - 0,707 - 0,966 |
| 7 | $(1 + s)(1 + 0,445s + s^2)(1 + 1,25s + s^2)(1 + 1,80s + s^2)$ | 0,222 - 0,623 - 0,901 |
| 8 | $(1 + 0,390s + s^2)(1 + 1,11s + s^2)(1 + 1,67s + s^2)(1 + 1,96s + s^2)$ | 0,195 - 0,555 - 0,835 - 0,98 |



Remarques :

- Tous les seconds ordres ont la même pulsation propre $\omega_0 = \omega_r$.
- Pour n impair, le premier ordre a une pulsation de coupure à - 3 dB égale à ω_r .
- Les pôles de $H(s)$ sont situés sur le cercle de rayon unité.
- La pulsation de coupure à - 3 dB du filtre est égale à la pulsation de référence $\omega_r = \omega_0$.

En écrivant que la réponse de Butterworth s'inscrit dans le gabarit, on obtient :



- L'ordre du filtre n :

$$n \geq \frac{\log[(10^{-0.1\beta} - 1) / (10^{-0.1\alpha} - 1)]}{2 \log(f_p/f_p)} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

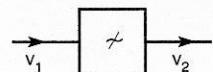
- La pulsation de coupure à - 3 dB, ω_0 , doit satisfaire les inégalités suivantes :

$$\omega_{\min} = \frac{\omega_p}{[10^{-0.1\alpha} - 1]^{1/2n}} < \omega_0 < \frac{\omega_a}{[10^{-0.1\beta} - 1]^{1/2n}} = \omega_{\max}$$

On pourra choisir, par exemple, la moyenne géométrique, c'est-à-dire :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{\min} \cdot \omega_{\max}}$$

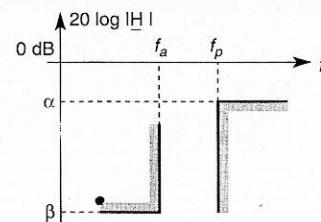
IV. FILTRES PASSE-HAUT



$$\text{avec : } H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$$

symbole d'un filtre passe-haut

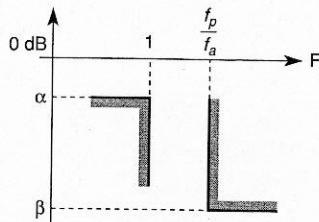
1. Gabarit d'un filtre passe-haut



2. Transformation passe-haut / passe-bas

On choisit par exemple comme fréquence de référence $f_r = f_p$ et on applique la transformation suivante :

$$f_n \rightarrow F_n = \frac{1}{f_n}$$



Le gabarit du passe-haut se transforme en gabarit d'un passe-bas.

Ayant obtenu la transmittance de type passe-bas $H(s)$, qui s'inscrit dans le gabarit, on obtient la transmittance de type passe-haut $H(s)$ par le changement de variable suivant :

$$S = \frac{1}{s}$$

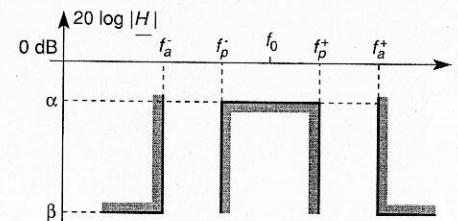
V. FILTRES PASSE-BANDE



$$\text{avec : } H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$$

symbole d'un filtre passe-bande

1. Gabarit d'un filtre passe-bande symétrique

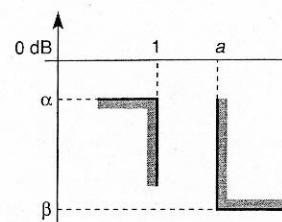


$$B = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_0} : \text{largeur de bande relative}$$

2. Transformation passe-bande / passe-bas

On choisit f_0 comme fréquence de référence et on applique la transformation suivante :

$$\frac{f}{f_0} = f_n \rightarrow F_n = \frac{1}{B} \left(f_n - \frac{1}{f_n} \right)$$



Le gabarit du passe-bande se transforme en gabarit F_n d'un passe-bas avec : $a = \frac{1}{B} \left[\frac{f_a^+}{f_0} - \frac{f_0}{f_a^+} \right]$

A partir de la transmittance de type passe-bas, $H(s)$, qui s'inscrit dans le gabarit, on obtient la transmittance du passe-bande, $H(s)$, par le changement de variable suivant :

$$S = \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

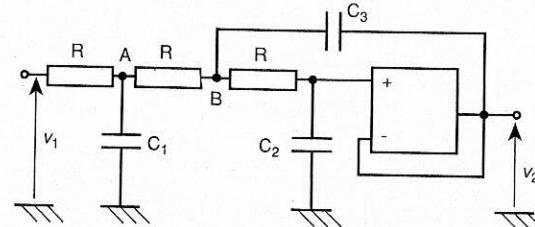
On peut montrer que les éléments du filtre passe-bas normalisés se transforment de la manière suivante :

| Eléments passe-bas | Eléments passe-bande | Eléments passe-haut |
|--------------------|----------------------|---------------------|
| L_n | $\frac{L_n}{B}$ | $\frac{1}{L_n}$ |
| C_n | $\frac{C_n}{B}$ | $\frac{1}{C_n}$ |

Exercices résolus

601 Filtre passe-bas du troisième ordre

A.O. parfait



1) Calculer la transmittance $H(p) = \frac{V_2}{V_1}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{1}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}$$

Déterminer les expressions de a_1 , a_2 et a_3 .

2) On choisit comme résistance de référence $R = R_r$ et une pulsation de référence de valeur ω_r .

- a. Déterminer les expressions des capacités normalisées γ_1 , γ_2 et γ_3 .
- b. Exprimer la transmittance normalisée $H(s)$.

3) On souhaite obtenir un filtre passe-bas du 3ème ordre de Butterworth :

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s)(1 + s + s^2)}$$

a. Calculer les valeurs numériques de γ_1 , γ_2 et γ_3 .

b. On rappelle que $|H|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + x^6}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_r}$: pulsation normalisée.

1. Calculer la valeur de x pour une atténuation de 1 dB.
2. En déduire la fréquence de référence, f_r , sachant que $f_{1dB} = 3$ kHz.
3. Calculer les valeurs des capacités C_1 , C_2 , C_3 pour $R = 22$ k Ω .

4) Pour obtenir un filtre passe-bas du 3ème ordre de type Tchébycheff ayant une atténuation de 1 dB à la pulsation ω_r il faut une transmittance normalisée telle que :

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2,5 s + 2 s^2 + 2 s^3}$$

a. Calculer les valeurs numériques de γ_1 , γ_2 et γ_3 .

b. Calculer les valeurs des capacités C_1 , C_2 , C_3 pour $R = 22$ k Ω et sachant que $f_r = 3$ kHz.

1) En écrivant la loi des nœuds en A et B on obtient :

$$\frac{V_A - V_1}{R} + V_A C_1 p + \frac{V_A - V_B}{R} = 0 \quad \text{soit : } (2 + RC_1 p) V_A - V_B = V_1$$

$$\frac{V_B - V_A}{R} + \frac{V_B - V_2}{R} + (V_B - V_2) C_3 p = 0 \quad \text{soit : } (2 + RC_3 p) V_B - V_A = V_2 (1 + RC_3 p)$$

$$\text{Diviseur de tension aux bornes de } C_2 : V_2 = \frac{V_B}{1 + RC_2 p} \quad \text{soit : } V_B = (1 + RC_2 p) V_2$$

Remarque : l'A.O fonctionne en suiveur de tension.

En éliminant V_B on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (2 + RC_1p)V_A - (1 + RC_2p)V_2 = V_1 \\ V_A = (2 + RC_3p)(1 + RC_2p)V_2 - (1 + RC_3p)V_2 \end{cases}$$

on en déduit :

$$H(p) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + R(C_1 + 3C_2)p + 2R^2C_2(C_1 + C_3)p^2 + R^3C_1C_2C_3p^3}$$

Alors : $a_1 = R(C_1 + 3C_2)$ $a_2 = 2R^2C_2(C_1 + C_3)$ et $a_3 = R^3C_1C_2C_3$

2) a. La capacité normalisée $C_r = \frac{1}{\omega_r R_r}$ donc par définition :

$$\gamma_1 = \frac{C_1}{C_r} \quad \gamma_2 = \frac{C_2}{C_r} \quad \text{et} \quad \gamma_3 = \frac{C_3}{C_r}$$

b. On en déduit : $H(s) = \frac{1}{1 + (\gamma_1 + 3\gamma_2)s + 2\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3)s^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 s^3}$

3) a. $H(s) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$ on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1 \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 = 2 \\ \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3) = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \gamma_2 = \frac{2 - \gamma_1}{3} \\ \gamma_3 = \frac{3 - 2\gamma_1 + \gamma_1^2}{2 - \gamma_1} \\ \gamma_1^3 - 2\gamma_1^2 + 3\gamma_1 - 3 = 0 \end{cases}$$

Par une méthode numérique, on détermine la racine réelle positive de l'équation du 3ème degré :

$$\gamma_1 \approx 1,4 \quad \text{alors} \quad \gamma_2 \approx 0,2 \quad \text{et} \quad \gamma_3 \approx 3,6$$

$$\text{b. } 1. \quad 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + x^6}} = -1 \quad \text{donc} \quad 10 \log(1 + x^6) = 1$$

d'où : $1 + x^6 = 10^{0,1}$ et $x = (10^{0,1} - 1)^{1/6}$
soit : $x \approx 0,80$

$$2. \quad \frac{f_{1dB}}{f_r} \approx 0,80 \quad \text{donc} \quad f_r \approx \frac{3000}{0,80} \approx 3,7 \text{ kHz}$$

$$3. \quad C_r = \frac{1}{\omega_r R_r} \approx 2 \text{ nF}$$

$$\text{d'où :} \quad \begin{aligned} C_1 &= \gamma_1 C_r \approx 2,8 \text{ nF} & C_2 &= \gamma_2 C_r \approx 0,4 \text{ nF} \\ C_3 &= \gamma_3 C_r \approx 7,2 \text{ nF} \end{aligned}$$

4) a. On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 2 \\ \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3) = 1 \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 = 2,5 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \gamma_2 = \frac{2,5 - \gamma_1}{3} \\ \gamma_3 = \frac{3 - 2,5\gamma_1 + \gamma_1^2}{2,5 - \gamma_1} \\ \gamma_1^3 - 2,5\gamma_1^2 + 3\gamma_1 - 6 = 0 \end{cases}$$

Par une méthode numérique, on détermine la racine réelle positive de l'équation du 3ème degré :

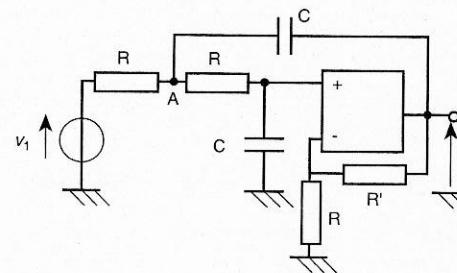
$$\gamma_1 \approx 2,3 \quad \text{alors} \quad \gamma_2 \approx 6,7 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \gamma_3 \approx 13$$

$$\text{b. Puisque } f_r = 3 \text{ kHz alors } C_r = \frac{1}{\omega_r R_r} = 2,4 \text{ nF}$$

$$\text{d'où : } C_1 = \gamma_1 C_r = 5,5 \text{ nF} \quad C_2 = \gamma_2 C_r = 160 \text{ pF} \\ C_3 = \gamma_3 C_r = 31 \text{ nF}$$

602 Filtre passe-bas du second ordre réglable

A.O. parfait



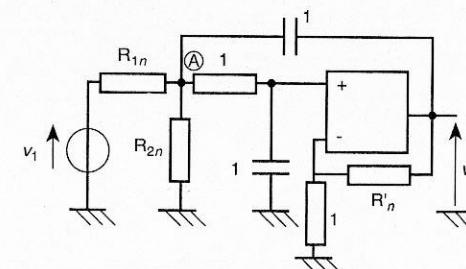
1) On choisit comme éléments de référence : $\begin{cases} R_r = R \\ C_r = C \end{cases}$ et on pose $R'_n = \frac{R'}{R_r}$.

Calculer la transmittance normalisée $H(s)$ et la mettre sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{H_0}{1 + 2m s + s^2}$$

Exprimer m et H_0 en fonction de R'_n .

2) On souhaite une transmittance telle que $H_0 = 1$, pour cela on rajoute un pont diviseur à l'entrée du circuit :



- a. Calculer le générateur de Thévenin vue entre la borne A et la masse.
b. En déduire que l'on obtient $H_0 = 1$ lorsque :

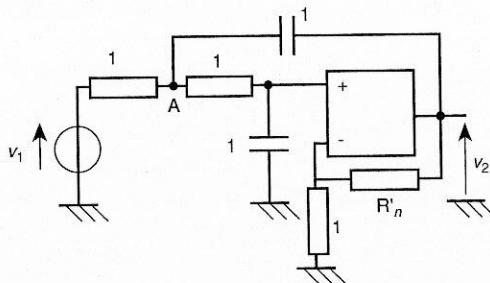
$$R_{1n} // R_{2n} = 1$$

$$\frac{R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} = \frac{1}{1 + R'n}$$

c. Calculer les valeurs des résistances normalisées R'_n , R_{1n} et R_{2n} en fonction du coefficient d'amortissement, m , du second ordre.

- 3) a. 1. Représenter le schéma du circuit avec les valeurs normalisées pour $m = 0,5$ et $m = 0,2$.
 2. On choisit $f_r = f_0 = 50$ kHz et $C_r = 220$ pF, calculer les valeurs des composants pour $m = 0,5$ et $m = 0,2$.

1) Schéma avec les éléments normalisés



Loi des nœuds en A : $V_A - V_1 + (V_A - V_2)s + V_A - V_+ = 0 \quad (1)$
 A-0 non inverseur : $V_2 = (1 + R'n) V_+$ (2)

Diviseur de tension : $V_+ = \frac{1}{1+s} V_A$ soit $V_A = \frac{1+s}{1+R'n} V_2$

d'après (1) et (2) : $V_A(2+s) - V_2 \left(\frac{1}{1+R'n} + s \right) = V_1$

et en remplaçant V_A en fonction de V_2 on obtient :

$$\frac{(1+s)(2+s)}{1+R'n} - \left(\frac{1}{1+R'n} + s \right) = \frac{V_1}{V_2}$$

Soit : $H(s) = \frac{1 + R'n}{1 + 2 \left(1 - \frac{R'n}{2} \right) s + s^2}$

On en déduit : $H_0 = 1 + R'n \quad m = 1 - \frac{R'n}{2} \quad (3)$

2) a. $E_{Th} = \frac{R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} V_1$

$$R_{Th} = R_{1n} // R_{2n} = \frac{R_{1n} R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}}$$

b. Pour obtenir : $\frac{V_2}{E_{Th}} = H(s)$ il faut imposer :

$$R_{Th} = 1 = R_{1n} // R_{2n}$$

D'autre part on en déduit pour le continu que :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} \times (1 + R'n) \text{ comme nous souhaitons une amplification statique égale}$$

à 1 on peut écrire :

$$\frac{R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} = \frac{1}{1 + R'n}$$

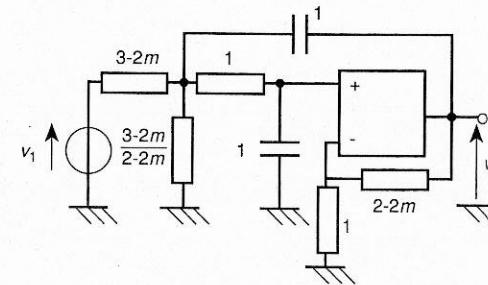
c. D'après (3) on en déduit : $R'n = 2 - 2m$

Nous avons aussi : $\frac{R_{1n} R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} = 1 \quad \frac{R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{3 - 2m} \quad (4)$

En multipliant (4) pour R_{1n} on obtient $\frac{R_{1n}}{3 - 2m} = 1$
 d'où : $R_{1n} = 3 - 2m$

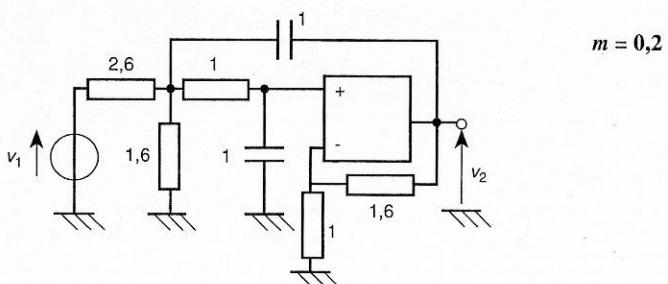
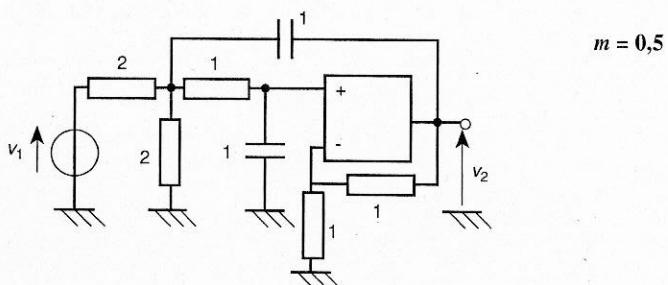
et $R_{2n} = \frac{3 - 2m}{2 - 2m}$

On obtient le schéma suivant :



Remarque : le réglage de m est possible en gardant les mêmes valeurs de capacités.

3) a. 1.

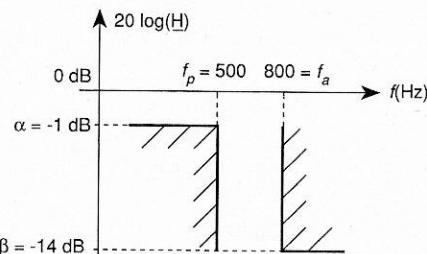


3) a. 1. $f_r = 50 \text{ kHz}$ $C_r = 220 \text{ pF}$ donc $R_r = \frac{1}{\omega_r C_r} = 14,5 \text{ k}\Omega$

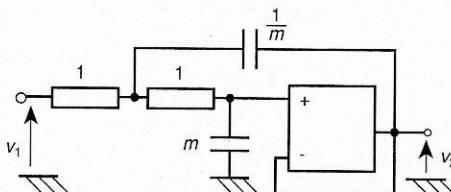
$$\begin{array}{ll} m = 0,5 & R' = 14,5 \text{ k}\Omega \\ R_1 = 29 \text{ k}\Omega & R_2 = 29 \text{ k}\Omega \\ m = 0,2 & R' = 23,2 \text{ k}\Omega \\ R_1 = 37,7 \text{ k}\Omega & R_2 = 23,2 \text{ k}\Omega \end{array}$$

603 Synthèse d'un filtre passe-bas

On désire réaliser, à l'aide des fonctions polynomes de Butterworth, un filtre passe-bas dont la réponse en fréquence s'inscrit dans le gabarit suivant :



- 1) Calculer l'ordre du filtre et la fréquence de coupure à -3 dB ; f_0 .
- 2) A l'aide de la table, déterminer les paramètres des cellules du premier et du second ordre réalisant la fonction de transfert souhaitée.
- 3) On utilise une cellule du 2nd ordre de type Salen-Key :



$$\text{avec } H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + 2m s + s^2}$$

On choisit $R_r = 100 \text{ k}\Omega$, calculer les valeurs des composants permettant de réaliser ce filtre.

- 1) L'ordre du filtre, n , est donné par la formule suivante :

$$n \geq \frac{\log \left[\left(10^{-0,1\beta} - 1 \right) / \left(10^{-0,1\alpha} - 1 \right) \right]}{2 \log (f_a / f_p)}$$

Pour le gabarit ci-dessus nous obtenons $n \geq 4,82$, on choisit $n = 5$

Calculons les fréquences $f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi}$ et $f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi}$

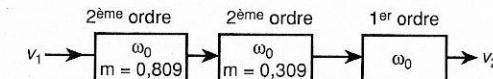
$$f_{\min} = \frac{f_p}{\left[10^{-0,1\alpha} - 1 \right]^{1/2n}} = 572 \text{ Hz}$$

EXERCICES

$$f_{\max} = \frac{f_a}{\left[10^{-0,1\beta} - 1 \right]^{1/2n}} = 582 \text{ Hz}$$

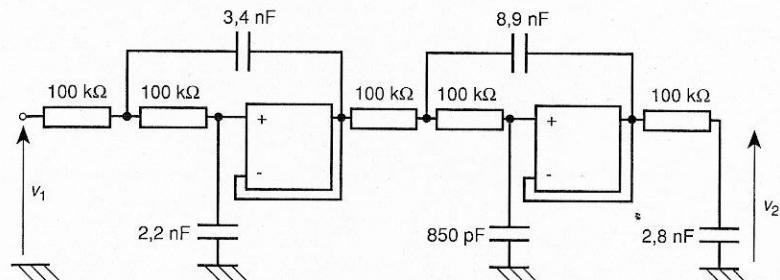
On choisit par exemple : $f_0 = \sqrt{f_{\min} \times f_{\max}}$ soit $f_0 = 577 \text{ Hz}$

- 2) D'après la table, on obtient pour un filtre de Butterworth du cinquième ordre :



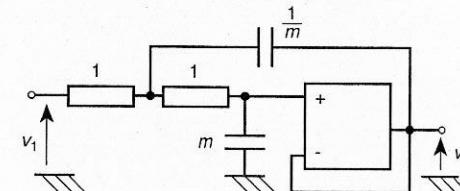
avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = 3625 \text{ rad/s}$.

- 3) On en déduit le schéma suivant :



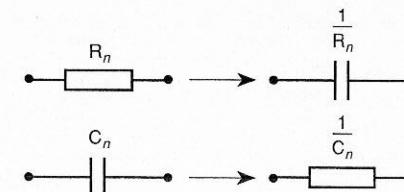
604 Synthèse d'un filtre passe-haut : transformateur RC-CR

- 1) Soit le filtre passe-bas du 2nd ordre de type Salen-Key



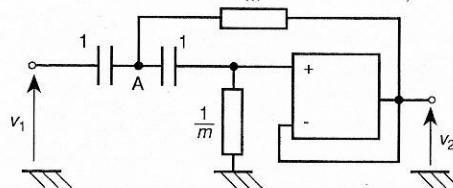
$$\text{avec : } H(s) = \frac{1}{1 + 2m s + s^2} = \frac{V_2}{V_1}$$

On réalise la transformation suivante RC - CR :



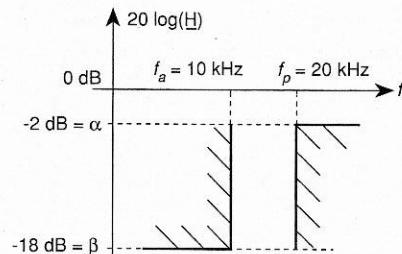
composants normalisés

On obtient alors le circuit normalisé suivant :



Calculer la transmittance normalisée $H(s) = \frac{V_2}{V_1}$

2) On considère le gabarit suivant :



a. On choisit f_p comme fréquence de référence, dessiner le gabarit obtenu à l'aide de la transformation :

$$f_n = \frac{f}{f_p} \rightarrow F_n = \frac{1}{F_n}$$

b. Calculer l'ordre du filtre de Butterworth s'inscrivant dans le gabarit passe-bas ainsi que la fréquence de coupure à -3 dB, F_{0n} .

c. A l'aide de la transformation inverse $F_n \rightarrow f_n = \frac{1}{F_n}$ calculer la valeur de la fréquence de coupure à -3 dB, f_0 , du filtre passe-haut.

d. Représenter le schéma du filtre passe-haut en indiquant la valeur des composants sachant que l'on choisit $C_r = 1 \text{ nF}$.

1) Loi des nœuds en A :

$$(V_A - V_1)s + \frac{V_A - V_2}{m} + (V_A - V_2)s = 0$$

$$\text{soit } V_A(2s + \frac{1}{m}) - V_2(s + \frac{1}{m}) = V_1s \quad (1)$$

$$\text{Diviseur de tension : } V_2 = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{s}} V_A \quad V_A = \frac{s}{s+m} V_A$$

$$\text{d'où } V_A = \frac{s+m}{s} V_2 \quad (2)$$

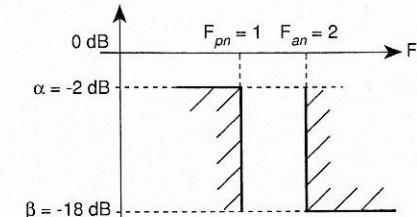
D'après (1) et (2) on en déduit :

$$\frac{(2sm+1)}{m} \times \frac{s+m}{s} - \frac{s}{m} = s \frac{V_1}{V_2}$$

$$\text{soit : } H_2(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{s^2}{1 + 2m s + s^2}$$

On obtient le second ordre passe-haut de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement m .

2) a.



b.

$$n \geq \frac{\log [(10^{-0,1\beta} - 1) / (10^{-0,1\alpha} - 1)]}{2 \log \left(\frac{F_{an}}{F_{pn}} \right)} \approx 3,37$$

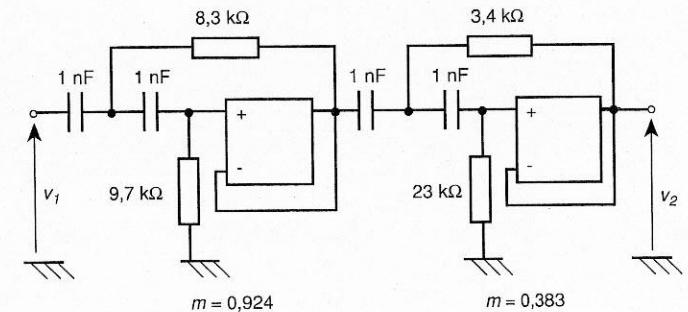
on choisit $n = 4$

$$F_{n \min} = \frac{F_{pn}}{\left[10^{-0,1\alpha} - 1 \right]^{1/2n}} = 1,07 \quad F_{MAX} = \frac{F_{an}}{\left[10^{-0,1\beta} - 1 \right]^{1/2n}} = 1,19$$

$$\text{On choisit : } F_{0n} = \sqrt{F_{n \min} \times F_{n MAX}} = 1,13$$

$$\text{c. } f_{0n} = \frac{1}{F_{0n}} = 0,885 \quad \text{soit } f_0 = f_{0n} \times f_r \\ f_0 = 17,7 \text{ kHz}$$

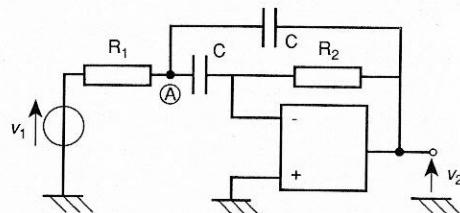
d.



$$R_r = \frac{1}{\omega_r C_r} \approx 9 \text{ k}\Omega$$

$$m = 0,924$$

$$m = 0,383$$

605 Filtre passe-bande élémentaire réglable


A.O. parfait

- 1) Calculer la transmittance $H(p) = \frac{V_2}{V_1}$ et la mettre sous la forme canonique suivante :

$$H(p) = H_0 \times \frac{\frac{2m}{\omega_0} p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Déterminer m , ω_0 et H_0 en fonction des éléments du circuit.

- 2) Calculer les pulsations ω_a , ω_b , avec $\omega_b > \omega_a$ telles que :

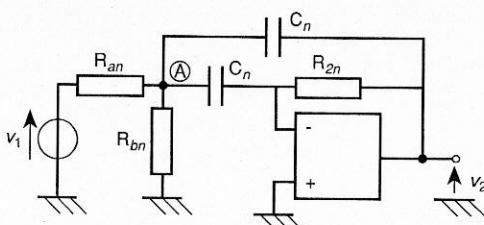
$$|\underline{H}(j\omega_a)| = |\underline{H}(j\omega_b)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$$

en fonction de m et ω_0 ainsi que la bande passante du filtre : $B = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\pi}$.

- 3) Calculer le coefficient de qualité du filtre, Q , défini par : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_b - \omega_a}$ ainsi que B en fonction des éléments du circuits.

- 4) On choisit R_1 comme résistance de référence et ω_0 comme pulsation de référence. Calculer les valeurs normalisées R_{2n} et C_n en fonction de Q .

- 5) On souhaite une transmittance telle que $H_0 = -1$, pour cela on rajoute une pont diviseur à l'entrée du circuit normalisé :



- a. Calculer le générateur de Thévenin vue entre la borne A et la masse.
b. En déduire que l'on obtient $H_0 = -1$ lorsque :

$$R_{an} // R_{bn} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{R_{bn}}{R_{bn} + R_{an}} = \frac{2}{R_{2n}}$$

- c. Calculer les valeurs des résistances normalisées R_{an} et R_{bn} en fonction du coefficient de qualité Q du circuit.

- d. On veut concevoir un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_0 = 10$ kHz et de coefficient de qualité $Q = 10$.

On choisit $C = 1$ nF. Calculer les valeurs de R_2 , R_a et R_b .

- 1) Loi des nœuds en A :

$$\frac{V_A - V_1}{R_1} + V_A Cp + (V_A - V_2) Cp = 0$$

$$\text{soit} : V_A (1 + 2R_1 Cp) - V_2 R_1 Cp = V_1 \quad (1)$$

L'AO fonctionne en "amplificateur inverseur" pour l'entrée V_A :

$$\text{donc} : \frac{V_2}{V_A} = - R_2 Cp \quad \text{soit} \quad V_A = - \frac{V_2}{R_2 Cp}$$

En remplaçant V_A dans l'équation (1) on obtient :

$$- V_2 \left[\frac{1 + 2R_1 Cp}{R_2 Cp} + R_1 Cp \right] = V_1$$

$$\text{d'où} : \frac{V_2}{V_1} = - \frac{R_2 Cp}{1 + 2R_1 Cp + R_1 R_2 C^2 p^2} = H(p)$$

$$\text{On en déduit} : \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} \quad \text{et} \quad m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

Pour le numérateur, on peut écrire :

$$- R_2 C = H_0 \times \frac{2m}{\omega_0} = H_0 \times 2R_1 C \quad \text{d'où} \quad H_0 = - \frac{R_2}{2R_1}$$

$$2) |\underline{H}(j\omega)| = |H_0| \frac{\frac{2m}{\omega_0}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\text{or} |\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{|H_0|^2}{2} \quad \text{donc} : 8m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\text{soit} : 4m^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2$$

$$\text{on en déduit} : 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \pm 2m \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{donc} : \omega^2 \pm 2m \omega_0 \omega - \omega_0^2 = 0$$

On obtient les racines positives suivantes :

$$\begin{cases} \omega_a = \omega_0 \left[\sqrt{m^2 + 1} - m \right] \\ \omega_b = \omega_0 \left[\sqrt{m^2 + 1} + m \right] \end{cases}$$

$$\text{Soit pour la bande passante} : B = 2m f_0 \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$3) Q = \frac{\omega_0}{\omega_b - \omega_a} = \frac{1}{2m} \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

$$B = 2m \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{\pi C \sqrt{R_1 R_2}} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{1}{\pi C R_2}$$

4) Par définition : $R_{2n} = \frac{R_2}{R_1}$ d'où $R_{2n} = 4Q^2$

$$C_n = \frac{C}{C_r} \text{ avec } C_r = \frac{1}{\omega_0 R_1}$$

résistance de référence
capacité de référence

donc : $C_n = C R_1 \omega_0 = C R_1 \times \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$

d'où $C_n = \frac{1}{2Q}$

5) a. $\begin{cases} R_{Th} = R_{an} // R_{bn} \\ E_{Th} = \frac{R_{bn}}{R_{an} + R_{bn}} V_1 \end{cases}$

b. Pour obtenir $\frac{V_2}{E_{Th}} = H(s)$ il faut $R_{Th} = 1$, d'autre part on souhaite obtenir

$\frac{V_1}{V_2} = -1$ à la pulsation ω_0 on en déduit :

$$\frac{R_{bn}}{R_{an} + R_{bn}} \times \frac{R_{2n}}{2} = 1 \text{ soit } \frac{R_{bn}}{R_{an} + R_{bn}} = \frac{2}{R_{2n}}$$

c. Nous avons donc : $\frac{R_{an} R_{bn}}{R_a + R_{bn}} = 1$ et $\frac{R_{bn}}{R_{an} + R_{bn}} = \frac{2}{R_{2n}}$

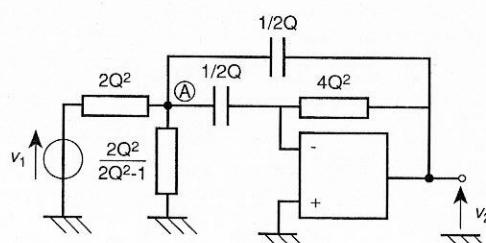
On multiplie la deuxième équation par R_{an} , on obtient :

$$1 = \frac{2 R_{an}}{R_{2n}} \text{ soit } R_{an} = \frac{R_{2n}}{2} \text{ d'où } R_{an} = 2Q^2$$

Nous pouvons écrire : $\frac{1}{R_{an}} + \frac{1}{R_{bn}} = 1$ d'où $\frac{1}{R_{bn}} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

soit : $R_{bn} = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}$

On obtient le schéma normalisé suivant :



d. Calculons d'abord R_r et C_r .

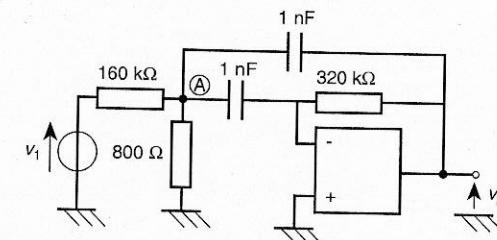
$$C_n = \frac{1}{2Q} = \frac{C}{C_r} \text{ d'où } C_r = 2QC = 20 \text{ nF}$$

$$R_r = \frac{1}{\omega_0 C_r} \approx 800 \Omega$$

On en déduit : $R_2 = 4Q^2 R_r = 320 \text{ k}\Omega$

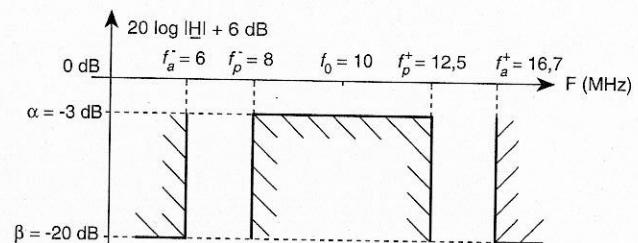
$$R_a = 2Q^2 R_r = 160 \text{ k}\Omega \text{ et } R_b = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1} R_r \approx R_r \text{ car } Q \gg 1$$

On obtient le schéma pratique suivant :



606 Synthèse d'un filtre passif passe-bande symétrique

On souhaite concevoir un filtre dont la réponse en fréquence s'inscrit dans le gabarit suivant :



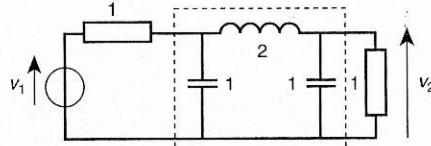
- 1) On choisit $f_0 = 10 \text{ MHz}$ comme fréquence de référence.
A l'aide de la transformation passe-bande → passe-bas :

$$f_n = \frac{f}{f_0} \rightarrow F_n = \frac{1}{B} \left(f_n - \frac{1}{f_n} \right) \text{ avec } B = \frac{f_0^+ - f_p^-}{f_0}$$

représenter le gabarit du filtre passe-bas normalisé équivalent.

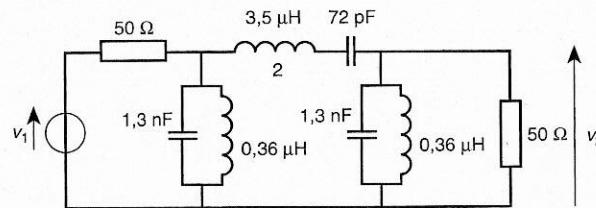
- 2) Montrer qu'une réponse de Butterworth d'ordre 3 s'inscrit dans le gabarit du passe-bas normalisé.

- 3) On peut montrer que le quadripôle suivant réalise un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3.
Les valeurs des éléments sont normalisées.

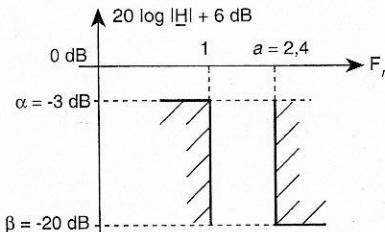


a. En utilisant la transformation passe-bas → passe-bande relative aux éléments normalisés, représenter le schéma du filtre passe-bande en indiquant la valeur des différents éléments.

b. Sachant que la résistance de référence est égale à $R_c = 50 \Omega$, montrer que le filtre définitif correspond au schéma suivant :



1) En appliquant la transformation passe-bande-passe-bas on obtient le gabarit suivant :



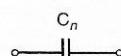
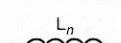
$$\alpha = \frac{1}{B} \left[\frac{f_a^+}{f_0} - \frac{f_0}{f_a^+} \right] = 2,4 \text{ avec } B = 0,45$$

2) Pour déterminer l'ordre du filtre du Butterworth on utilise l'expression suivante :

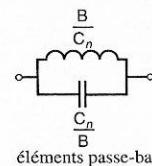
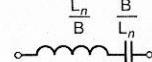
$$n \geq \frac{\log [(10^{-0,1\beta} - 1) / (10^{-0,1\alpha} - 1)]}{2 \log \alpha} = 2,6$$

on choisit $n = 3$

3) a. On rappelle les transformations suivantes

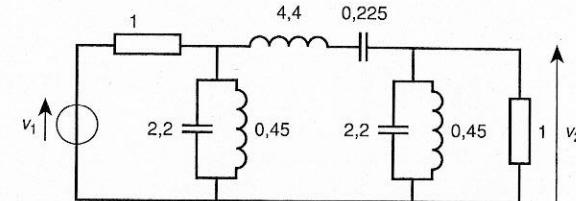


éléments passe-bas



éléments passe-bande

On en déduit le schéma normalisé suivant :

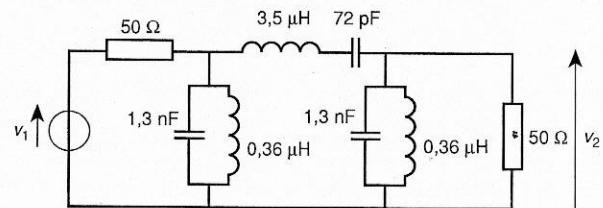


b. Pour dénormaliser le schéma on calcule :

$$C_r = \frac{1}{\omega_0 R_c} = 320 \text{ pF} : \text{capacité de référence}$$

$$L_r = \frac{R_c}{\omega_0} = 0,80 \mu\text{H} : \text{inductance de référence}$$

On obtient alors le schéma suivant :



Exercices à résoudre

607 Etude d'un filtre sélectif à capacités commutées

Le schéma d'un tel filtre est représenté à la figure 1.
Toutes les capacités ont la même valeur C.

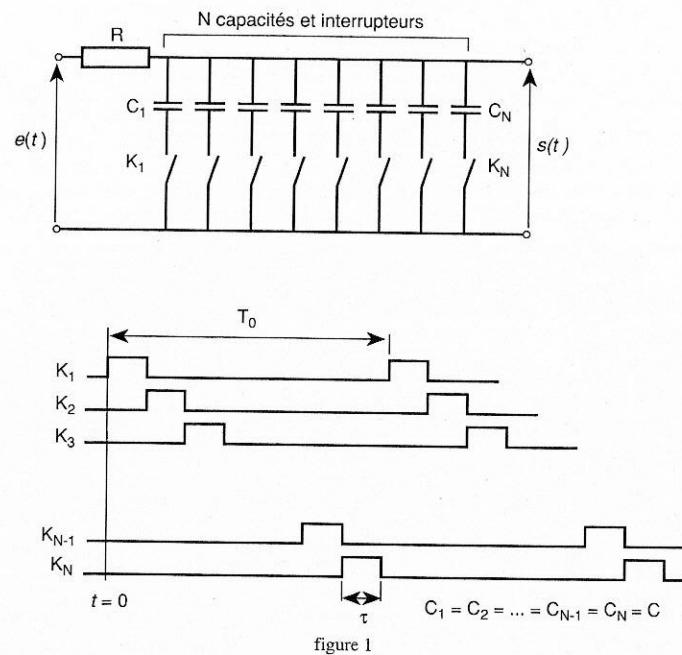
On note :

$e(t)$ la tension d'entrée du circuit ;
 $s(t)$ la tension de sortie.

On note :

N le nombre d'interrupteurs ;
 T_0 la période du signal de commande de chaque interrupteur et $f_0 = 1/T_0$;
 τ la durée de fermeture d'un interrupteur pendant T_0 : $T_0 = N \times \tau$;
 f la fréquence du signal d'entrée $e(t)$.

Les interrupteurs $K_1, K_2, K_3 \dots K_N$ sont fermés séquentiellement pendant un temps τ , avec une période T_0 , comme indiqué sur le diagramme des temps (figure 1).
Dans tout le problème, le signal d'entrée $e(t)$ est sinusoïdal :
 $e(t) = E \cos (2 \pi f t + \phi)$.



On s'intéresse au signal $s(t)$ en régime permanent, après le temps d'établissement. Dans tout le problème, on considère que le nombre N de cellules "capacité-interrupteur" est suffisamment grand pour que le signal d'entrée $e(t)$ soit pratiquement constant pendant un intervalle de temps τ , c'est-à-dire : $\tau \ll 1/f$ soit encore : $N \gg f/f_0$

1) a. On se place dans le cas où la fréquence f du signal sinusoïdal $e(t)$ est égale à la fréquence f_0 . On suppose de plus que $RC \gg \tau$.

Montrer alors sans calcul que la tension de sortie $s(t)$ est sinusoïdale, en phase et de même amplitude que $e(t)$. (En fait $s(t)$ est formée de paliers successifs, mais si N est assez grand, on pourra considérer $s(t)$ sinusoïdale).

b. On se place dans le cas où $f = f_0/2$. On suppose toujours $RC \gg \tau$.

Montrer, sans calcul, que la tension $s(t)$ reste alors très faible.

c. Plus généralement, montrer que lorsque $RC \gg \tau$:

si $f = kf_0$ (k entier) alors $s(t) = e(t)$,

si $f = kf_0 + f_0/2$ alors $s(t) = 0$.

2) a. On se place maintenant dans le cas général où la fréquence de $e(t)$ est quelconque.

Les évolutions des charges des différentes capacités sont indépendantes. On s'intéresse à la première capacité, qui est mise en circuit par K_1 , pendant l'intervalle de temps $[nT_0, nT_0 + \tau]$.

On note $e_n = e(nT_0)$

et $s_n = s(nT_0)$ pour n entier.

Ecrire l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$ pendant cet intervalle de temps.

Puis résoudre cette équation pour obtenir l'évolution de $s(t)$ dans cet intervalle et montrer que : $s_{n+1} = (1 - a) \cdot s_n + a \cdot e_n$ avec $a = 1 - \exp(-\tau/RC)$

b. On définit les amplitudes complexes \underline{E} de $\{e_n\}$ et \underline{s} de $\{s_n\}$ par :

e_n = partie réelle de : $\underline{E}_n = \underline{E} \cdot \exp(2\pi j f n T_0)$ avec $\underline{E} = E \cdot \exp(j\varphi)$

s_n = partie réelle de : $\underline{s}_n = \underline{s} \cdot \exp(2\pi j f n T_0)$

Montrer alors que la fonction de transfert $T(f) = \underline{s}/\underline{E}$ est de la forme :

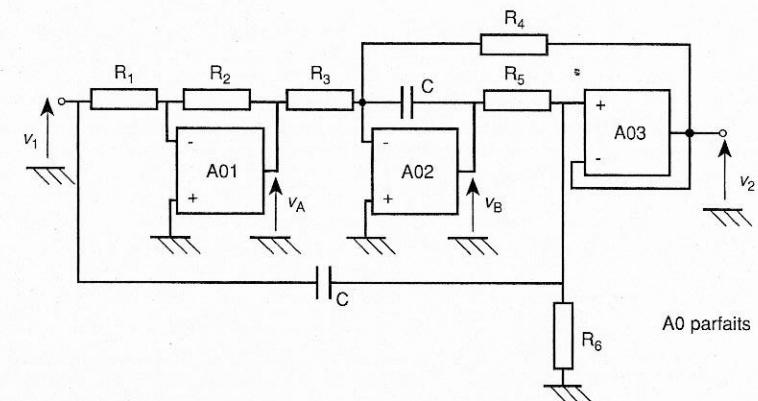
$$T(f) = a/(a - 1 + \exp(2\pi j f T_0))$$

$$\text{c. } R = 150 \text{ k}\Omega; \quad C = 10 \text{ nF}; \quad T_0 = 1 \text{ mS}; \quad N = 64.$$

Avec ces valeurs numériques, représenter $G = 20 \log |T(f)|$ pour $0 \leq f \leq f_0$. On utilisera une graduation linéaire pour représenter f .

d. En utilisant un développement limité, donnez l'expression du coefficient de qualité Q au voisinage de $f = f_0$ en fonction de R , C , N , f_0 . Quelle est la valeur numérique de Q avec les valeurs numériques de la question précédente ?

608 Filtre réjecteur de bande



1) Calculer la transmittance $H(p) = \frac{V_2}{V_1}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{\left(\frac{\omega_z}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Exprimer ω_z , ω_0 et Q .

2) En déduire la relation entre R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour obtenir $\omega_z = \omega_0$.

3) On s'impose la fréquence réjectée, f_0 , et le coefficient de qualité Q . D'autre part on choisit les valeurs de R_1 , C , l'amplification $K = \frac{R_2}{R_1}$ et on fixe $R_5 = R_6$.

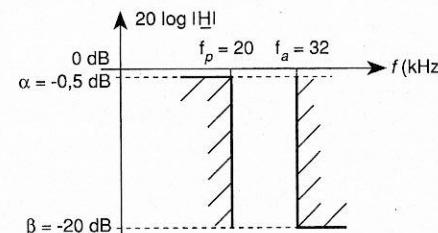
Déterminer les expressions de R_2 , R_3 , R_4 et R_5 en fonction de K , Q , ω_0 , C et R_1 .

4) Concevoir un filtre réjecteur de bande tel que :

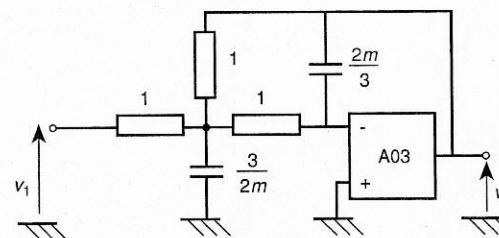
$$f_0 = 50 \text{ Hz}, Q = 20, K = 10 \text{ avec } C = 150 \text{ nF et } R_1 = 22 \text{ k}\Omega \text{ et } R_5 = R_6.$$

609 Synthèse d'un filtre passe-bas

On désire réaliser, à l'aide des fonctions polynomes de Butterworth, un filtre passe-bas dont la réponse en fréquence s'inscrit dans le gabarit suivant :



- 1) Calculer l'ordre du filtre et la fréquence de coupure à - 3 dB ; f_0 .
- 2) A l'aide de la table, déterminer les paramètres des cellules du 1 et du 2ème ordre réalisant la fonction de transfert souhaitée.
- 3) On utilise une cellule du 2nd ordre ayant une structure de Rauch avec les valeurs normalisées suivantes :

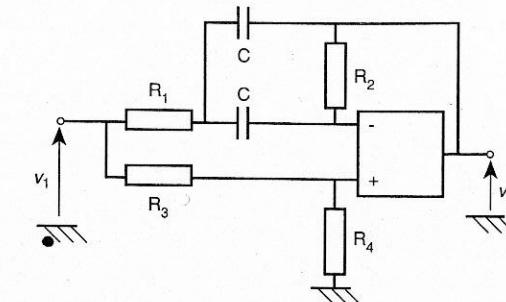


- a. Calculer la transmittance normalisée $H(s)$ et montrer qu'elle s'exprime sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{-1}{1 + 2m s + s^2}$$

- b. On choisit comme résistance de référence $R_r = 10 \text{ k}\Omega$, calculer les valeurs des composants permettant de réaliser ce filtre.

610 Circuit passe-tout du second ordre



- 1) Calculer la transmittance $H(p) = \frac{V_2}{V_1}$ et la mettre sous la forme suivante (on posera $k = R_4/(R_3 + R_4)$) :

$$H(p) = H_0 \times \frac{1 - 2\alpha \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Exprimer H_0 , ω_0 , m et α .

- 2) Pour obtenir un circuit passe-tout du second ordre il faut $\alpha = m$. En déduire une relation liant R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

Exprimer H_0 et $\frac{R_3}{R_4}$ en fonction de m .

- 3) Concevoir un circuit tel que $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10 \text{ kHz}$ et $m = 1$.

On choisit $C = 1 \text{ nF}$ et on s'impose $R_4 = R_1$.

- a. Calculer les valeurs de R_1 , R_2 et R_3 .

- b. Représenter le diagramme de Bode asymptotique de $H(j\omega)$ (module et argument) et tracer l'allure de la courbe réelle.

7

Circuits et fonctions de puissance en électronique

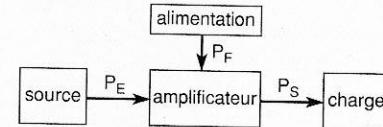
I. Amplificateurs

II. Loi d'Ohm thermique

III. Convertisseurs statiques alternatif - continu : redressement

IV. Convertisseurs statiques continu - continu : hacheur

I. AMPLIFICATEURS



1. Caractéristiques

Amplification en puissance :

$$A_p = \frac{P_S}{P_E}$$

puissance de sortie
puissance d'entrée

Gain en puissance : $G_p = 10 \log A_p$ (dB)

$$\text{Rendement : } \eta = \frac{P_S}{P_F}$$

puissance fournie par l'alimentation

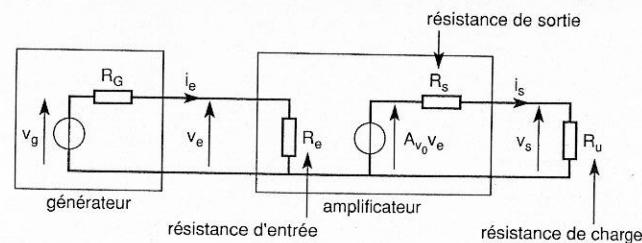
Distorsion harmonique :

$$d = \sqrt{S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_k^2 + \dots}$$

S_1

S_k : valeur efficace de l'harmonique de rang k du signal de sortie de l'amplificateur.
Le signal d'entrée étant un signal sinusoïdal.

2. Schéma équivalent d'un amplificateur



A_{v0} : amplification en tension à vide.

Remarque : la puissance reçue par la charge est maximale lorsque $R_u = R_s$.

3. Classes de fonctionnement d'un amplificateur

| | | Rendement maximal théorique | Bandé passante |
|----------|---|---|----------------|
| classe A | un seul transistor qui conduit pendant toute une période | liaison directe : 25 % liaison transfo. : 50 % | large bande |
| classe B | deux transistors conduisant chacun pendant une demi période | $\frac{\pi}{4} = 78,5\%$ | large bande |
| classe C | un transistor qui conduit pendant une durée inférieure à une demi période | 100 % | sélectif |

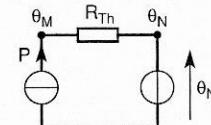
II. LOI D'OHM THERMIQUE

En régime permanent, le flux de chaleur P qui passe d'un point M à un point N est proportionnel à la différence de température $\theta_M - \theta_N$ existant entre ces deux points :

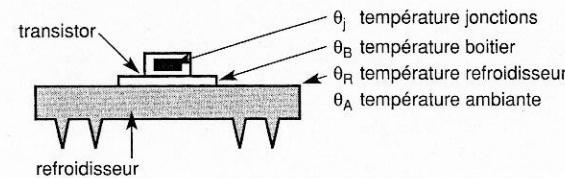
$$\theta_M - \theta_N = P \times R_{Th} \quad P \text{ s'exprime en Watt}$$

R_{Th} : résistance thermique ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)

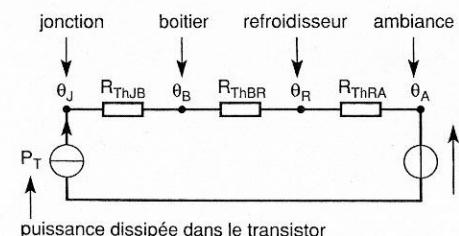
Schéma thermique équivalent :



Transistor associé à un refroidisseur :



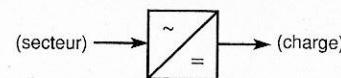
On a le schéma équivalent thermique suivant :



D'après la loi d'Ohm thermique, nous avons :

$$\theta_J - \theta_A = P_T [R_{ThJB} + R_{ThBR} + R_{ThRA}]$$

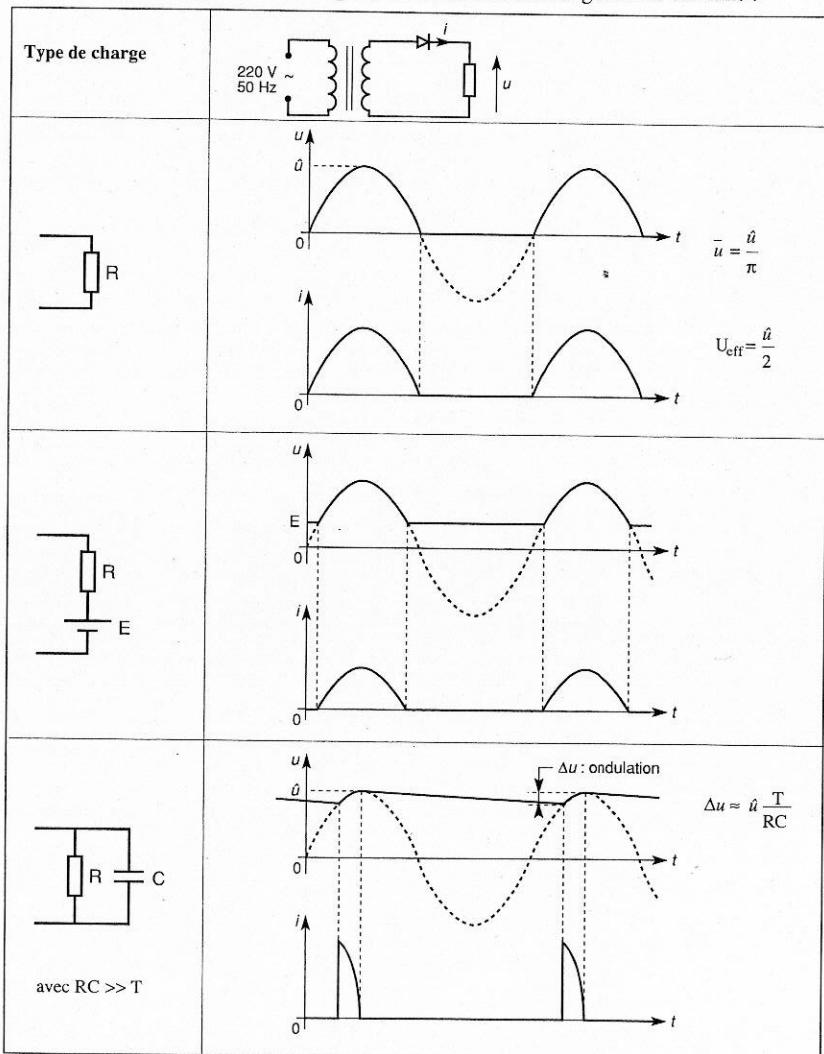
III. CONVERTISSEURS STATIQUES ALTERNATIF / CONTINU : REDRESSEMENT



Symbole d'un convertisseur alternatif / continu.

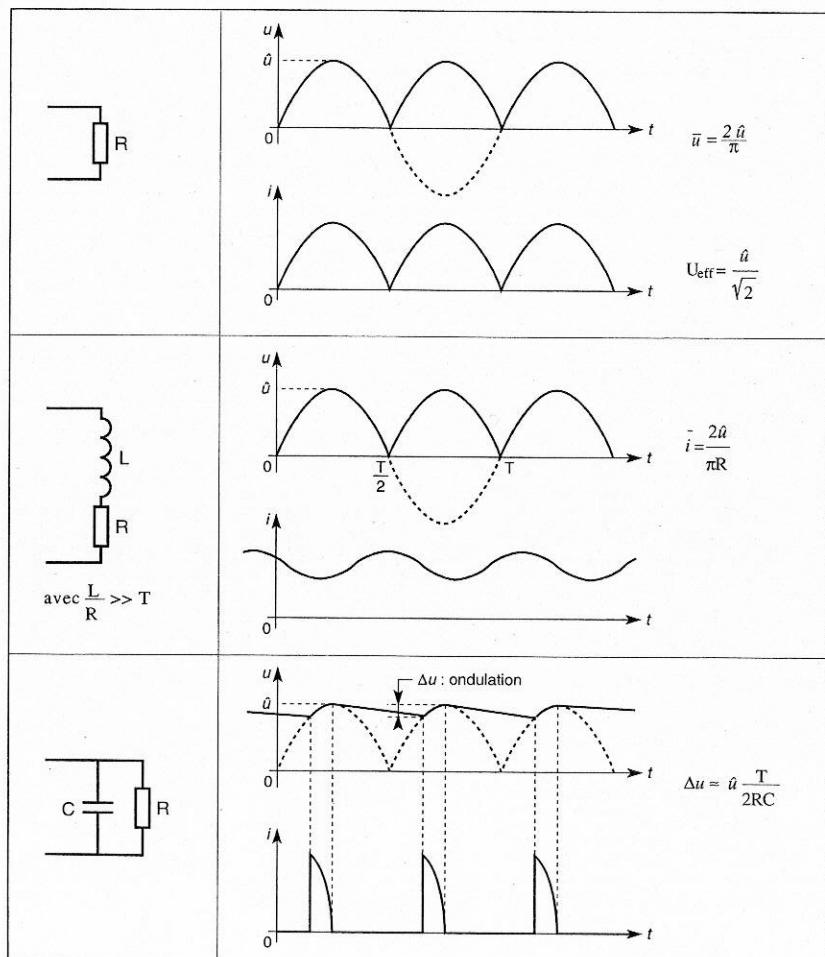
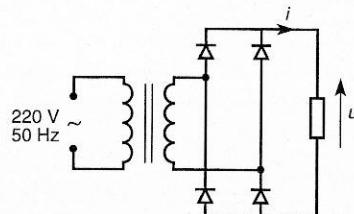
1. Redressement monophasé simple alternance

Pour certaines charges caractéristiques, on obtient les chronogrammes suivants :

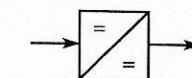


2. Redressement monophasé double alternance

Pour obtenir un redressement double alternance, on utilise par exemple un pont de diodes :

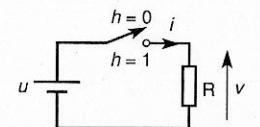


IV. CONVERTISSEURS STATIQUES CONTINU - CONTINU : HACHEUR

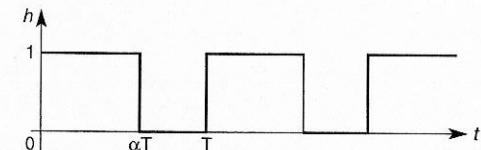


Symbol d'un hacheur

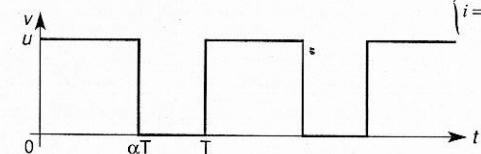
1. Hacheur série sur charge résistive



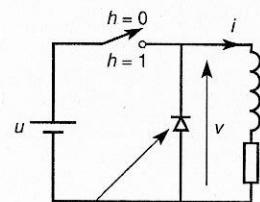
α : rapport cyclique du hacheur :
 $0 < \alpha < 1$



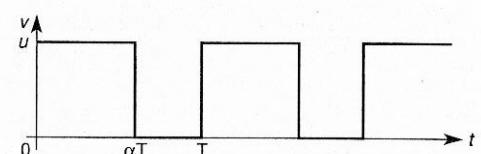
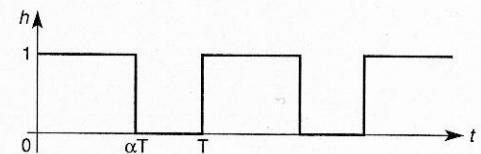
$$\begin{cases} v = \alpha U \\ i = \frac{\alpha U}{R} \end{cases}$$



2. Hacheur série sur charge inductive



diode de roue libre
assurant la continuité
du courant i

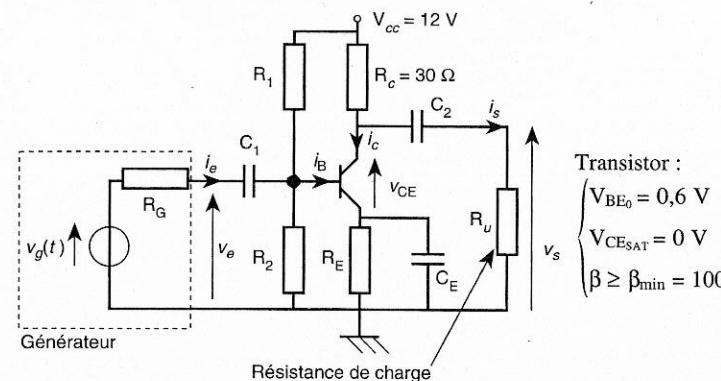


$$\begin{cases} v = \alpha U \\ i = \frac{\alpha U}{R} \end{cases}$$

On se place dans le cas où
 $L \gg T$.

Exercices résolus

701 Amplificateur classe A : liaison capacitive



1) Polarisation

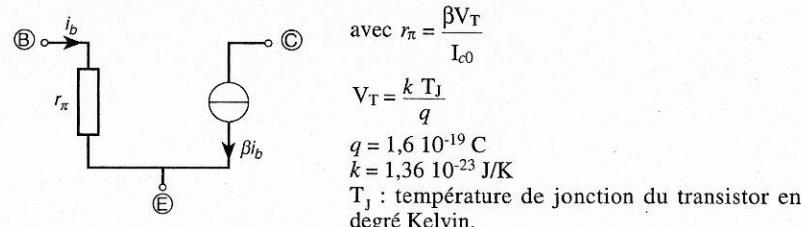
- En remplaçant le pont de base R_1, R_2 par son générateur de Thévenin équivalent, calculer I_{c0} en fonction de V_{cc} , V_{BE0} , R_1 , R_2 , R_E et β .
- En déduire une condition pour que I_{c0} dépende peu du β du transistor.
- On choisit $R_E = 10 \frac{R_1 // R_2}{\beta_{min}}$, $V_{E0} = 3$ V et $I_{c0} = 200$ mA.

Calculer les valeurs de R_E , R_1 , R_2 et V_{cE0} .

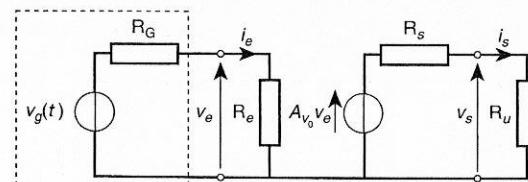
d. Calculer la puissance P_{T0} dissipée par le transistor et la puissance P_f fournie par l'alimentation lorsque l'amplificateur est au repos, on négligera la puissance consommée par le pont de base.

2) On se place dans la bande passante de l'amplificateur, C_E , C_1 et C_2 sont équivalents à des courts-circuits.

On adopte pour le transistor le schéma équivalent suivant :



- Représenter le schéma équivalent petits-signaux de l'amplificateur.
- On souhaite représenter l'amplificateur sous la forme générale suivante :



EXERCICES

Calculer :

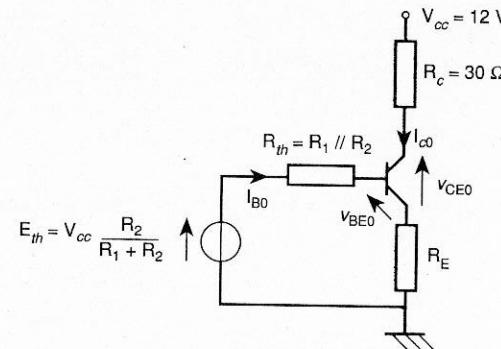
- la résistance d'entrée $R_e = \frac{v_e}{i_e}$.
- la résistance de sortie R_s .
- l'amplification en tension à vide $A_{v0} = \frac{v_s}{v_e}$.

Pour les applications numériques on prend : $\theta_{\text{Junction}} = 100^\circ\text{C}$ et $\beta = \beta_{\text{min}} = 100$

- Soit $v_e(t) = \hat{v}_e \sin \omega t$, exprimer la puissance moyenne P_s fournie à la charge en fonction de R_u , R_c , A_{v0} et \hat{v}_e .
- Calculer la valeur de R_u pour que P_s soit maximale. Dans la suite du problème on adopte cette valeur particulière pour la résistance de charge.
- Calculer l'amplification en puissance $A_p = \frac{P_s}{P_e}$, (P_e puissance d'entrée) et l'exprimer en fonction de β , R_c , I_{c0} et V_T .
- Représenter dans le plan (v_{cE}, i_c) la droite de charge statique et la droite de charge dynamique. Montrer que l'excursion maximale de la tension de sortie est : $\hat{v}_{sMAX} = \frac{R_c I_{c0}}{V_{cE0}} = V_{cE0}$.
- Calculer la puissance moyenne maximale P_{sMAX} reçue par la charge.
- Calculer la puissance moyenne P_f fournie par l'alimentation lorsque $v_s(t) = \hat{v}_{sMAX} \sin \omega t$, on négligera à nouveau la puissance consommée par le pont de base.
- En déduire la valeur de rendement maximal défini par : $\eta_{MAX} = \frac{P_{sMAX}}{P_f}$.
- Calculer la puissance moyenne P_T dissipée par le transistor lorsque $v_s(t) = \hat{v}_{sMAX} \sin \omega t$ et la comparer P_{T0} .

1) Polarisation

a.



Equation de la maille d'entrée : $E_{Th} = R_{Th} I_{B0} + V_{BE0} + R_E I_{c0}$
car $I_{c0} \approx I_{B0}$

On suppose que le transistor fonctionne en régime linéaire donc : $I_{c0} = \beta I_{B0}$

d'où :

$$I_{c0} = \frac{V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_{BE0}}{R_E + R_1 // R_2}$$

b. Pour avoir I_{c0} peu dépendant du β du transistor il faut :

$$R_E \gg \frac{R_1 // R_2}{\beta_{min}}$$

valeur de β la plus défavorable

c. $V_{E_0} = R_E I_{c_0}$ soit $R_E = \frac{V_E}{I_{c_0}}$ alors $R_E = 15 \Omega$

On a : $R_E = 10 \frac{R_1 // R_2}{\beta_{\min}}$ alors $I_{c_0} \approx \frac{V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_{BE_0}}{R_E}$

On en déduit :

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\beta_{\min} R_E}{10} = 150 \Omega$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_E I_{c_0} + V_{BE_0}}{V_{cc}} = 0,3 \quad (1)$$

On multiplie (1) par R_1 alors : $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0,3 R_1 = 150 \Omega$

d'où $R_1 = 500 \Omega$ et $R_2 = 220 \Omega$

$V_{CE_0} = V_{cc} - (R_c + R_E) I_{c_0}$ donc $V_{CE_0} = 3 \text{ V}$ le transistor fonctionne bien en régime linéaire.

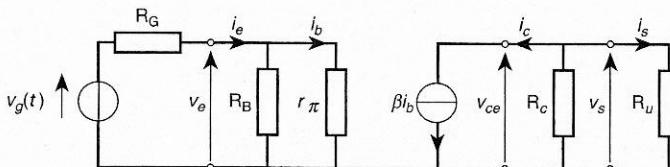
d. $P_{T_0} = V_{ce} I_{c_0} + V_{BE_0} I_{B_0} \approx V_{ce_0} I_{c_0}$

$P_{T_0} \approx 600 \text{ mW}$

On néglige la puissance consommée par le pont de base

donc : $P_f \approx V_{cc} I_{c_0} = 2,4 \text{ W}$

2) a.



avec $R_B = R_1 // R_2$

b. $R_e = R_B // r_\pi \approx r_\pi = 16 \Omega$
 $R_s = R_c = 30 \Omega$

$V_T = 32 \text{ mV}$ et $r_\pi = 16 \Omega$

A vide on a : $v_s = -\beta i_b R_c$
 $v_e = r_\pi i_b$

$$A_{v_0} = -\frac{\beta R_c}{r_\pi} \quad \text{d'où} \quad A_{v_0} = -\frac{R_c I_{c_0}}{V_T} \approx -190$$

3. a. $P_s = \langle v_s i_s \rangle = \frac{\langle v_s^2 \rangle}{R_u}$

$$v_s(t) = \frac{R_u}{R_u + R_s} A_{v_0} \hat{v}_e \sin \omega t$$

$$P_s = R_u \left(\frac{A_{v_0} \hat{v}_e}{R_u + R_s} \right)^2 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt}_{\frac{1}{2}}$$

$$P_s = \frac{R_u}{2} \times \left(\frac{A_{v_0} \hat{v}_e}{R_u + R_s} \right)^2$$

b. Calculons : $\frac{dP_s}{dR_u} = \frac{(A_{v_0} \hat{v}_e)^2}{2} \times \frac{(R_u + R_s)^2 - 2R_u(R_u + R_s)}{(R_u + R_s)^4}$

$$\frac{dP_s}{dR_u} = 0 \Rightarrow R_u + R_s - 2R_u = 0 \quad \text{soit} \quad R_u = R_s = R_c = 30 \Omega$$

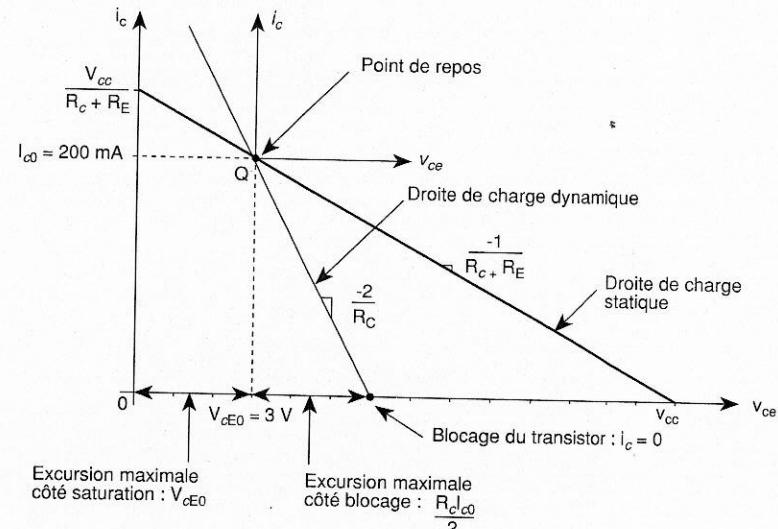
c. Nous avons : $P_e = \langle v_e i_e \rangle = \frac{\langle v_e^2 \rangle}{R_e} = \frac{1}{2} \frac{\hat{v}_e^2}{r_\pi}$

$$A_p = \frac{P_s}{P_e} = \frac{A_{v_0}^2 \hat{v}_e^2}{8 R_c} \times \frac{2 r_\pi}{\hat{v}_e^2} = \frac{A_{v_0}^2 r_\pi}{4 R_c}$$

On remplace A_{v_0} et r_π par leur expression d'où :

$$A_p = \frac{R_c^2 I_{c_0}^2}{V_T^2} \times \frac{1}{4 R_c I_{c_0}} \quad \text{soit} \quad A_p = \beta \frac{R_c I_{c_0}}{4 V_T} \approx 4700$$

d.



Equation de la droite de charge statique :

$$I_c = \frac{V_{cc} - V_{ce}}{R_c + R_E}$$

Equation de la droite de charge dynamique dans le repère :

$$(Q, v_{ce}, i_c) : i_c = -\frac{v_{ce}}{R_c // R_u} = -\frac{2 v_{ce}}{R_c} \quad \text{car} \quad R_u = R_c .$$

Dans ce cas particulier on a : $V_{ce_0} = \frac{R_c I_{c_0}}{2} = 3 \text{ V}$ donc :

$$\hat{v}_{sMAX} = \hat{v}_{ceMAX} = V_{ce_0} = \frac{R_c I_{c_0}}{2} = 3 \text{ V}$$

$$\text{e. } P_{s\text{MAX}} = \frac{\langle v_s^2 \rangle}{R_c} = \frac{1}{2} \frac{\hat{v}_{s\text{MAX}}^2}{R_c}$$

$$\text{soit } P_{s\text{MAX}} = \frac{R_c I_{c_0}^2}{8} = 150 \text{ mW}$$

$$\text{f. } p_f = V_{cc} [I_{c_0} + i_c(t)] \quad \text{avec} \quad i_c(t) = -\frac{2 \hat{v}_{s\text{MAX}}}{R_c} \sin \omega t$$

puissance instantanée fournie par l'alimentation

$$P_f = \frac{1}{T} \int_0^T V_{cc} [I_{c_0} + i_c(t)] dt$$

$$P_f = V_{cc} I_{c_0} + \frac{V_{cc}}{T} \underbrace{\int_0^T -\frac{2 \hat{v}_{s\text{MAX}}}{R_c} \sin \omega t dt}_0$$

$$P_f = V_{cc} I_{c_0} = 2,4 \text{ W}$$

L'alimentation fournit une puissance constante quelle que soit la puissance reçue par la charge.

$$\text{g. } \eta_{\text{MAX}} = \frac{R_c I_{c_0}^2}{8 V_{cc} I_{c_0}} = \frac{R_c I_{c_0}}{8 V_{cc}} = 6,25 \%$$

$$\text{h. Nous avons : } p_T = v_{ce} i_c$$

puissance instantanée dissipée par le transistor

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ce} = V_{ce_0} + v_{ce}(t) \\ i_c = I_{c_0} + i_c(t) \end{array} \right.$$

D'autre part nous pouvons écrire pour les petits-signaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ce}(t) = v_s(t) = \hat{v}_{s\text{MAX}} \sin \omega t \\ i_c(t) = -\frac{2v_{ce}(t)}{R_c} \quad \text{car} \quad R_c = R_u \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$p_T = [V_{ce_0} + \hat{v}_{s\text{MAX}} \sin \omega t] \left[I_{c_0} - \frac{2 \hat{v}_{s\text{MAX}} \sin \omega t}{R_c} \right]$$

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T p_T dt = V_{ce_0} I_{c_0} - \frac{2(\hat{v}_{s\text{MAX}})^2}{R_c} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt}_\frac{1}{2}$$

$$P_T = V_{ce_0} I_{c_0} - \frac{(\hat{v}_{s\text{MAX}})^2}{R_c}$$

$$\text{or } \hat{v}_{s\text{MAX}} = \frac{R_c I_{c_0}}{2} \quad \text{donc} \quad P_T = P_{T_0} - \frac{R_c I_{c_0}^2}{4} = 300 \text{ mW}$$

On remarque $P_T < P_{T_0}$, c'est donc lorsque l'amplificateur est au repos que le transistor dissipe une puissance maximale.

702 Amplificateur classe B (Texte d'examen)

On étudie l'étage amplificateur de la figure 1, comprenant deux transistors complémentaires au silicium.

On dispose des courbes caractéristiques des transistors : elles sont identiques pour chacun ; seul le signe des grandeurs concernées est changé selon qu'il s'agit du transistor NPN ou du PNP.

On admet que :

- la caractéristique $I_B(V_{BE})$ est indépendante de la tension collecteur-émetteur V_{CE} en fonctionnement normal
- le courant résiduel de collecteur I_{CE0} est négligeable.

On donne : $V_0 = 10 \text{ V}$, $R = 20 \Omega$ (voir figure 1).

L'étage est excité par un générateur parfait de tension sinusoïdale : $e(t) = E \sin \omega t$

1) Analyse du fonctionnement

- a. Décrire rapidement le fonctionnement de l'étage pour chacune des alternances de $e(t)$ dans les deux cas suivants :

$$E \leq 0,5 \text{ V} \quad E > 0,5 \text{ V}$$

Quelle est la classe de fonctionnement de chacun des transistors ?

- b. Dans le réseau $I_C(V_{CE})$ joint, tracer, en la justifiant, la ligne de charge du transistor (T_1) ; y placer le point de repos Q_1 de (T_1).

Quelles sont les coordonnées (I_{C2}, V_{CE2}) du point de repos Q_2 de (T_2) ?

- c. Dans le plan $I_C(I_B)$ de la feuille jointe, tracer la courbe de transfert en courant de (T_1) en fonctionnement.

Déduire du graphique les valeurs du courant collecteur i_{C1} , puis de la tension de sortie v_s et de la tension d'entrée e pour les valeurs suivantes de la tension base-émetteur v_{BE} :

| $v_{BE} (\text{V})$ | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | | | | | |

Pour quelle valeur de v_{BE} le transistor est-il saturé ?

Quelle est la valeur correspondante de e ?

- d. Tracer, à partir des résultats précédents, la courbe de transfert en tension $v_s = f(e)$ de l'étage pour e variant de -10 V à $+10 \text{ V}$.

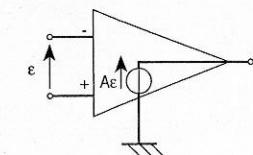
Indiquer la valeur de crête de $e(t)$ au seuil de conduction des transistors.

2) Amélioration de l'étage (figure 2)

On adjoint au montage précédent un amplificateur opérationnel et on soumet l'ensemble à une réaction par R_2 et R_1 . La charge est constituée par la résistance R ; la tension d'entrée est $e(t)$.

On admet que l'amplificateur opérationnel, dans son domaine linéaire et pour la bande de fréquences considérées, présente :

- une impédance d'entrée infinie
- une impédance de sortie nulle
- une amplification de tension $A = -10^4$.



- a. Calculer e en fonction de v_s , v_{BE} et A .

On donne $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$. À quelle valeur, le seuil de conduction est-il abaissé dans ce montage ?

Montrer que pour $|e| > 10 \text{ mV}$, on a $v_s \approx -e$.

- b. Quelle est l'amplification en puissance du montage de la figure 2 ?

3) Puissances mises en jeu

On s'intéresse au montage amélioré de la figure 2 qui permet d'admettre que, si $e(t)$ est sinusoïdal d'amplitude donnée, E , $v_s(t) = -e(t)$ est parfaitement sinusoïdal et de même amplitude.

On pose : $E = k \cdot V_0$
de sorte que $e(t) = k \cdot V_0 \cdot \sin\omega t$
et $v_s(t) = -k \cdot V_0 \cdot \sin\omega t$

On admet, dans cette partie, que k peut varier de 0 à 1.

a. Donner les représentations graphiques de $i_{C1}(t)$ et $i_{C2}(t)$, puis de $v_{CE1}(t)$ et $v_{CE2}(t)$ dans quatre figures utilisant la même échelle pour les abscisses.

Exprimer, en fonction de k , les valeurs extrêmes atteintes

b. Calculer en fonction de k , V_0 et R , les puissances moyennes :

- P_R dissipée par R
- $P_{V_0}^+$ et $P_{V_0}^-$ fournie par chaque source d'alimentation des transistors
- P_{T_1} et P_{T_2} dissipée dans chaque transistor (on néglige la dissipation dans la jonction base-émetteur).

Exprimer le rendement η de l'ensemble des deux transistors.

b. On fait varier l'amplitude k . V_0 de $e(t)$.

Pour quelle valeur k_0 de k la puissance dissipée P_{T_1} est-elle maximale ? Que valent alors P_{T_1} , P_R et η ?

4) Distorsion harmonique en signaux forts**a. Etude préliminaire**

1. On applique à l'entrée du montage de la figure 1, une tension continue $e = 11$ V. Que pensez-vous du fonctionnement du transistor (T_1) ?

2. On applique à l'entrée du montage de la figure 2, une tension continue $e = -11$ V. Les tensions de saturation de l'amplificateur opérationnel sont $+V_0$ et $-V_0$. Que pensez-vous du fonctionnement de l'amplificateur opérationnel et du fonctionnement du transistor (T_1) ?

b. Pour un signal $e(t)$ sinusoïdal à l'entrée et d'amplitude suffisante, on observe à l'oscilloscophe la courbe $v_s(t)$ représentée à la figure 3.

Justifier que la décomposition en série de Fourier de $v_s(t)$ peut s'écrire :

$v_s(t) = V_1 \sin\omega t + V_3 \sin 3\omega t + V_5 \sin 5\omega t$ en admettant que les termes harmoniques d'ordre supérieur à cinq ont des amplitudes négligeables par rapport à celles des harmoniques précédentes.

c. En procédant par identification aux valeurs remarquables de $v_s(t)$

(pour $\omega t = \frac{\pi}{6}$, $\omega t = \frac{\pi}{4}$ et $\omega t = \frac{\pi}{2}$) calculer numériquement V_1 , V_3 et V_5 .

En déduire le taux de distorsion de $v_s(t)$.

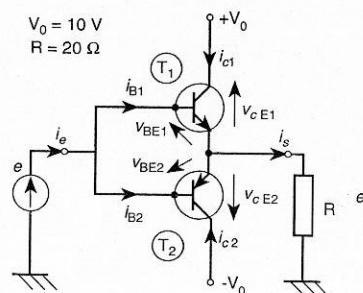


figure 1

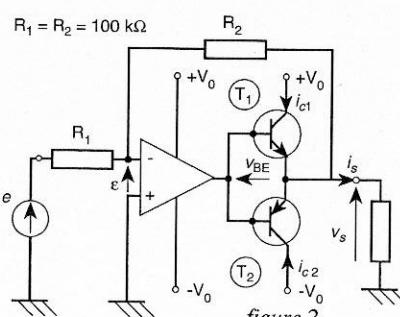


figure 2

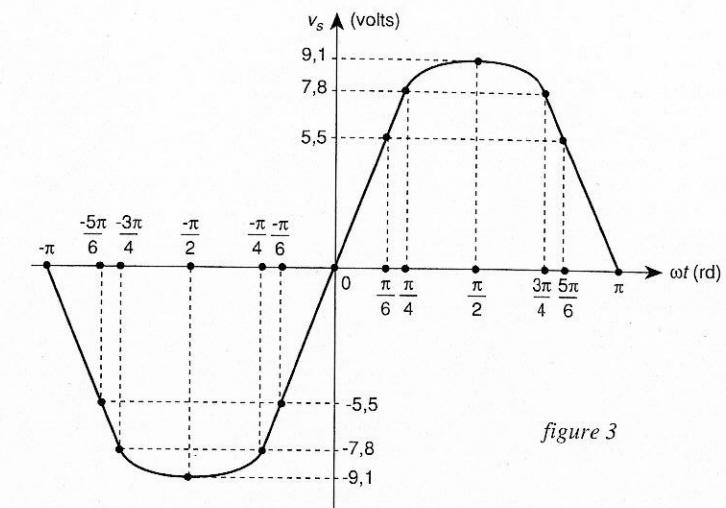
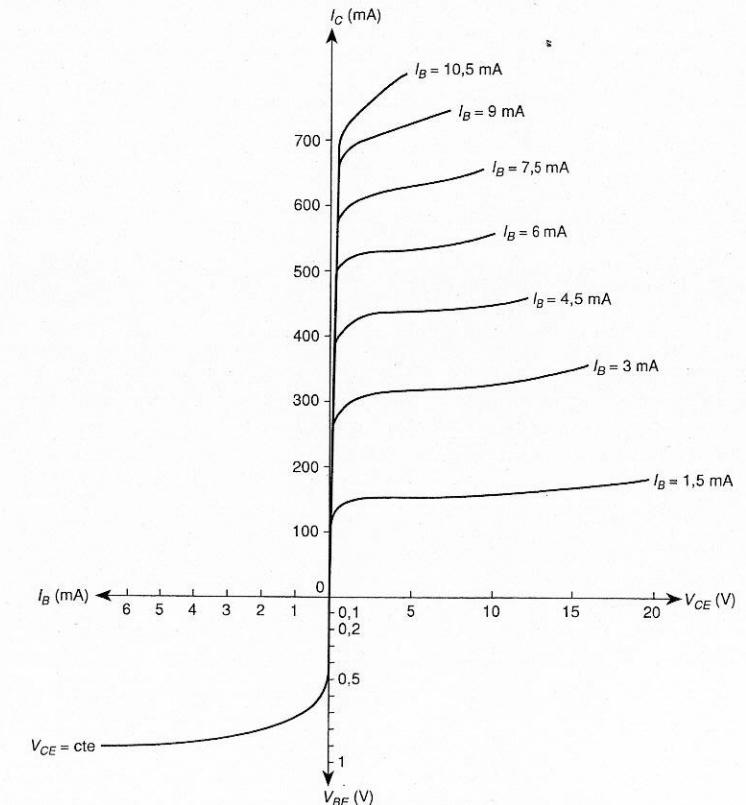


figure 3

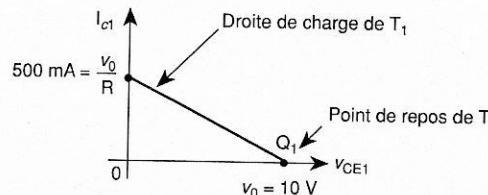


1) Analyse du fonctionnement

a. $e(t) = E \sin \omega t$ Pour $E \leq 0,5$ V les transistors sont bloqués et $v_s = 0$.Pour $E > 0,5$ V :

- T_1 est passant lors de l'alternance positive de $e(t)$ lorsque $e(t) > 0,5$ V
- T_2 est passant lors de l'alternance négative de $e(t)$ lorsque $e(t) < -0,5$ V.

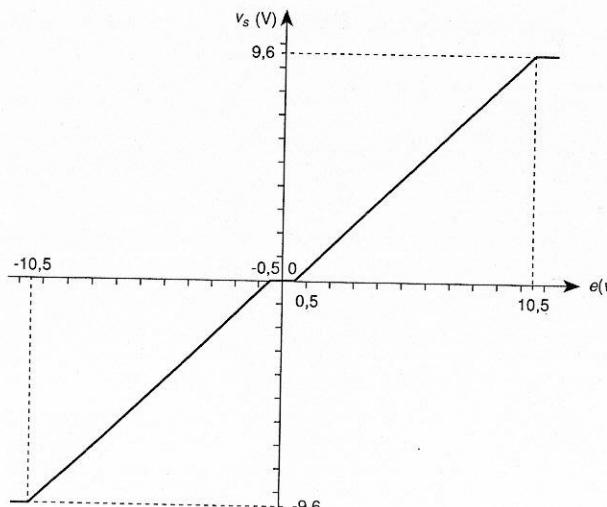
Les transistors fonctionnent en classe B.

b. Droite de charge de T_1 : $V_0 = V_{cE1} + RI_{c1}$
car $I_{c1} = I_s$ puisque T_2 bloqué lorsque T_1 conduit.Au repos $e(t) = 0$ donc $i_{c1} = 0$ alors $v_{cE1} = V_0$.On en déduit les coordonnées de Q_2 : $I_{c2} = 0$, $V_{cE2} = -V_0$.c. En traçant la droite de charge sur le réseau de caractéristiques du transistor on détermine I_c (I_B) et on en déduit le tableau suivant sachant que $e = v_{BE} + v_s$.

| v_{BE} (V) | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| i_{c1} (mA) | 0 | 0 | 0 | 25 | 60 | 160 | 425 |
| v_s (V) | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 1,2 | 3,2 | 8,5 |
| e (V) | 0 | 0,2 | 0,5 | 1,1 | 1,9 | 4 | 9,4 |

Le transistor est saturé pour $V_{cE} \approx 0,4$ V soit $v_{BE} \approx 0,9$ V ce qui correspond à $s \approx 9,6$ V et $e \approx 10,5$ V.

d.

Au seuil de conduction des transistors $e(t) = \pm 0,5$ V.

EXERCICES

2) Amélioration de l'étage

a. Loi des noeuds à l'entrée inverseuse de l'A.O. :

$$\frac{E - e}{R_1} + \frac{E - v_s}{R_2} = 0 \quad \text{d'où} \quad e = E \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - v_s \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{et } A\epsilon = v_{BE} + v_s \quad \text{soit } \epsilon = \frac{v_{BE} + v_s}{A}$$

$$\text{On en déduit : } e = \frac{v_{BE}}{A} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + v_s \left(\frac{R_1 + R_2}{A R_2} - \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\text{Pour } R_1 = R_2 \quad e = v_s \left(\frac{2}{A} - 1\right) + \frac{2}{A} v_{BE}$$

Lorsque $v_s = 0$ on a : $e = \frac{2}{A} v_{BE}$, le seuil de conduction est atteint pour $v_{BE} = 0,5$ V d'où le nouveau seuil de conduction $e = 0,1$ mV.Pour $|e| > 10$ mV alors T_1 où T_2 conduit et $e \approx -v_s + 1$ mV car $A \gg 1$ donc pour $|e| > 10$ mV on a $v_s \approx -e$.

$$\text{b. } A_p = \frac{P_s}{P_e} \quad \text{pour } e(t) = E \sin \omega t \text{ on a } v_s = -E \sin \omega t$$

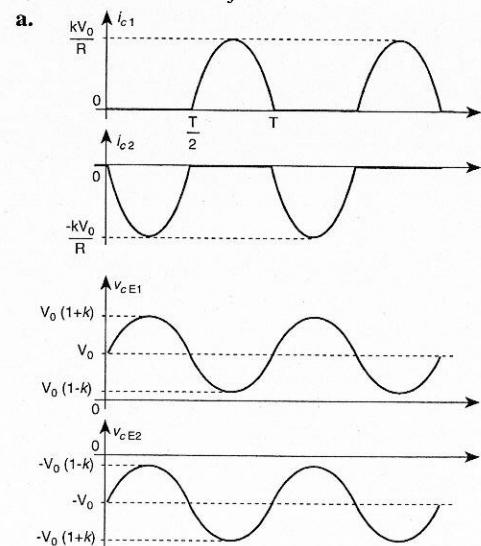
La résistance d'entrée du circuit étant égale à R_1 , on a :

$$P_e = \frac{E^2}{2R_1}$$

$$\text{D'autre part : } P_s = \frac{E^2}{2R}$$

$$\text{D'où : } A_p = \frac{R_1}{R} = 5 \ 000$$

3) Puissances mises en jeu



$$\text{b. } P_R = \frac{(kV_0)^2}{2R}$$

$$P_{v_0^+} = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 i_{c_1} dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} V_0 \frac{k V_0}{R} \sin \omega t dt$$

$$P_{v_0^+} = \frac{-k V_0}{T R} \times \frac{1}{\omega} [-\cos \omega t] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \quad P_{v_0^+} = \frac{k V_0^2}{\pi R}$$

D'après la symétrie du montage on en déduit :

$$P_{v_0^+} = P_{v_0^-} \text{ et } P_{T_1} = P_{T_2}$$

$$\text{Bilan de puissance : } P_{v_0^+} + P_{v_0^-} = P_{T_1} + P_{T_2} + P_R$$

$$\text{d'où : } 2 P_{v_0^+} = 2 P_{T_1} + P_R \quad P_{T_1} = P_{v_0^+} - \frac{P_R}{2}$$

$$P_{T_1} = \frac{k V_0^2}{\pi R} - \frac{k^2 V_0^2}{4R} \quad P_{T_1} = \frac{k V_0^2}{R} \left[\frac{1}{\pi} - \frac{k}{4} \right]$$

$$\text{On en déduit : } \eta = \frac{P_R}{P_{v_0^+} + P_{v_0^-}} = \frac{k \pi}{4}$$

$$\text{c. } \frac{dP_{T_1}}{dk} = \frac{V_0^2}{R} \left[\frac{1}{\pi} - \frac{k}{2} \right] \quad \frac{dP_{T_1}}{dk} = 0 \Leftrightarrow k_0 = \frac{2}{\pi}$$

$$P_{T_1\text{MAX}} = \frac{V_0^2}{R \pi^2} \quad P_R = \frac{2 V_0^2}{R \pi^2} \quad \eta = \frac{1}{2} = 50\%$$

Remarque : la puissance dissipée dans T_1 est maximale pour $k_0 = \frac{2}{\pi}$ alors que la puissance est maximale dans la charge pour $k = 1$. Si on souhaite une puissance maximale dans la charge $P_R = \frac{V_0^2}{2R}$ alors T_1 et T_2 doivent pouvoir dissiper

$$P_{T_1\text{MAX}} = \frac{2}{\pi^2} P_R \approx 0,2 P_R$$

4) Distorsion harmonique en signaux fort

a.

$$1. e = 11 \text{ V} > 9,4 \text{ V} \text{ donc } T_1 \text{ est saturé}$$

$$2. e = -11 \text{ V} \text{ si l'AO n'est pas saturé alors } v_s = -e = 11 \text{ V} \text{ ce qui n'est pas possible car } v_s \leq 9,6 \text{ V.}$$

Donc l'A.O. est saturé et sa tension de sortie est égale à $V_0 = 10 \text{ V}$ on en déduit alors $v_{BE} \approx 0,9 \text{ V}$ et $v_s \approx 9,4 \text{ V} < 9,6 \text{ V}$ donc T_1 n'est pas saturé.

b. Le signal est périodique donc décomposable en série de Fourier.

$v_s(t) = 0$, il n'y a pas de terme constant.

$v_s(t)$ est impair, la décomposition ne contient que des termes en sinus.

$v_s(t)$ est symétrique par rapport à $\frac{T}{4}$ donc les harmoniques de rang pair s'annulent.

$$\text{c. Pour } \omega t = \frac{\pi}{6} \quad 5,5 = \frac{V_1}{2} + V_3 + \frac{V_5}{2}$$

$$\text{Pour } \omega t = \frac{\pi}{4}, \quad 7,8 = \frac{\sqrt{2}}{2} V_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} V_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} V_5$$

$$\text{Pour } \omega t = \frac{\pi}{2} \quad 9,1 = V_1 - V_3 + V_5$$

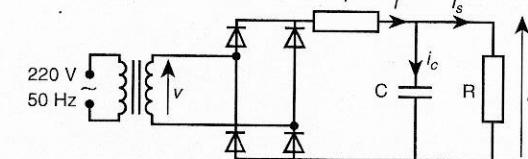
On résoud ce système et on obtient :

$$V_1 = 10 \text{ V} \quad V_3 = 0,63 \text{ V} \quad V_5 = -0,32 \text{ V}$$

Taux de distorsion harmonique :

$$D = \frac{\sqrt{V_3^2 + V_5^2}}{V_1} \approx 7,1 \%$$

703 Redressement double alternance avec filtrage capacitif



La résistance vue du secondaire du transformateur ainsi que la chute de tension due aux diodes sont modélisées par la résistance r .

Les diodes sont alors supposées parfaites.

Le filtrage est suffisant pour que la tension de sortie soit pratiquement constante : $u = U_0$ et $i_s = I_0$.

La tension au secondaire du transformateur est de la forme : $v(t) = E \cos \omega t$.

1) a. On appelle $]t_0, t_0[$ l'intervalle de conduction des diodes pour $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$. Calculer t_0 en fonction de E , U_0 et ω .

b. Déterminer l'expression de $i(t)$ et le représenter graphiquement.

c. Calculer $i(t)$ en fonction de E , r , t_0 et ω .

d. L'angle d'ouverture $\theta_0 = \omega t_0$ est suffisamment petit pour que l'on puisse utiliser les développements limités suivants : $\sin \theta_0 \approx \theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6}$ et $\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$.

Montrer alors que $\bar{i}(t) \approx \frac{2E\theta_0^3}{3\pi r}$.

2) a. Sachant que la valeur moyenne du courant est nulle dans un condensateur, déterminer la relation $\frac{U_0}{E} (I_0)$ et la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{U_0}{E} = 1 - (\alpha I_0)^{2/3}$$

Exprimer α en fonction de r et E .

b. Déterminer les valeurs de I_0 et θ_0 correspondant à $\frac{U_0}{E} = \frac{1}{2}$.

c. Pour $r = 2,5 \Omega$ et $E = 24 \text{ V}$ représenter graphiquement $\frac{U_0}{E} (I_0)$ pour $0 \leq \theta_0 \leq 60^\circ$.

1) a. Pour l'alternance positive centrée sur l'origine des temps, lorsque les diodes se mettent à conduire nous avons : $v(-t_0) = E \cos(-\omega t_0) = U_0$

$$\text{d'où } t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{U_0}{E}\right)$$

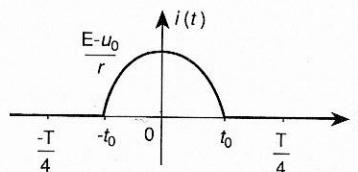
b. Le courant est périodique de période $\frac{T}{2}$.

On s'intéresse à la période suivante : $t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right]$.

Pour $t \notin]-t_0, t_0[$, les diodes sont bloquées et $i(t) = 0$.

Pour $t \in]-t_0, t_0[$ on a : $v = Ri + U_0$.

$$\text{d'où : } i(t) = \frac{E \cos \omega t - U_0}{r}$$



$$\text{c. } \overline{i(t)} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} i(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{t_0} \frac{E \cos \omega t - U_0}{r} dt$$

$$\overline{i(t)} = \frac{4E}{\pi r T} \left[\sin \omega t \right]_0^{t_0} - \frac{4U_0}{Tr} t_0$$

$$\overline{i(t)} = \frac{2E}{\pi r} [\sin \omega t_0 - \omega t_0 \cos \omega t_0]$$

$$\text{d. On a } \omega t_0 = \theta_0 \text{ d'où } \overline{i(t)} = \frac{2E}{\pi r} [\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0]$$

En utilisant les développements limités on obtient :

$$\overline{i(t)} \approx \frac{2E}{\pi r} \left[\theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6} - \theta_0 + \frac{\theta_0^3}{2} \right] = \frac{2E\theta_0^3}{3\pi r}$$

2) a. D'après la loi des nœuds à la sortie :

$$i = i_c + i_s$$

$$\overline{i(t)} = \overline{i_c(t)} + \overline{i_s(t)}$$

$$\text{or } \overline{i_c(t)} = 0 \text{ et } \overline{i_s(t)} = I_0$$

$$\text{donc } \overline{i(t)} = I_0 = \frac{2E\theta_0^3}{3\pi r} \text{ d'où : } \theta_0 = \left(\frac{3\pi r I_0}{2E} \right)^{1/3}$$

$$\text{d'autre part nous avons : } \frac{U_0}{E} = \cos \theta_0 \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

$$\text{On en déduit } \frac{U_0}{E} \approx 1 - \left(\frac{3\pi r}{4\sqrt{2}E} I_0 \right)^{2/3}$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{3\pi r}{4\sqrt{2}E}$$

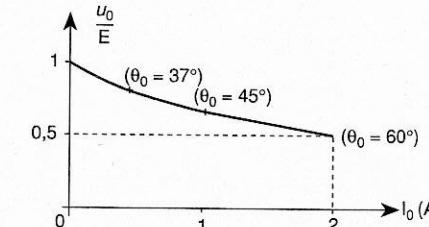
EXERCICES

$$\text{b. } U_0 = \frac{E}{2} \text{ alors } \frac{U_0}{E} = \frac{1}{2} = \cos \theta_0 \text{ d'où } \theta_0 = 60^\circ$$

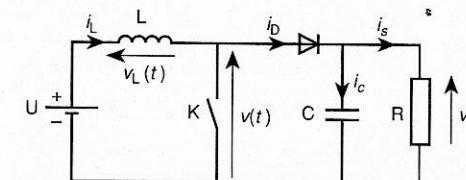
$$\text{et } \left(\frac{3\pi r}{4\sqrt{2}E} I_0 \right)^{2/3} = \frac{1}{2} \quad \frac{3\pi r}{4\sqrt{2}E} I_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{d'où : } I_0(60^\circ) = \frac{2E}{3\pi r}$$

$$\text{c. } E = 24 \text{ V} \quad r = 2,5 \Omega \quad I_0(60^\circ) = 2 \text{ A}$$

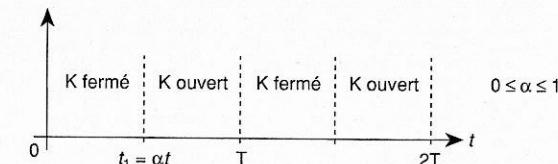


704 Alimentation à découpage élévatrice de tension



Hypothèses :

- la diode est parfaite
- la cellule de filtrage LC permet d'obtenir une tension de sortie V_s que l'on supposera constante
- l'interrupteur électronique K est commandé périodiquement :



On s'intéresse au régime permanent.

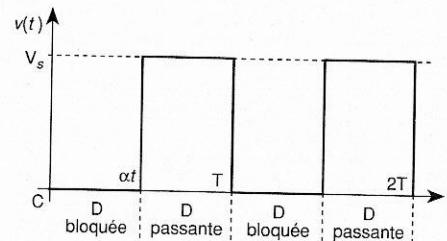
1) a. Dessiner la courbe représentative de $v(t)$ et indiquer l'état de la diode lors des différentes phases.

b. En écrivant que la valeur moyenne de $v_L(t)$ est nulle, calculer V_s en fonction de U et α . Représenter graphiquement $V_s = f(\alpha)$ pour $U = 5 \text{ V}$.

2) a. Pour $0 \leq t \leq \alpha T$, établir l'équation différentielle régissant $i_L(t)$.

b. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, $i_L(0) = I_{min}$, résoudre cette équation et établir la loi de variation de $i_L(t)$.

- 3) a.** Pour $\alpha T \leq t \leq T$, établir l'équation différentielle régissant $i_L(t)$.
b. Sachant qu'à l'instant $t = \alpha T$, $i_L(\alpha T) = I_{\text{MAX}}$, résoudre cette équation et établir la loi de variation de $i_L(t)$.
- 4) a.** Représenter graphiquement $i_L(t)$ et $i_D(t)$.
b. Calculer la valeur moyenne de $i_D(t)$: $\overline{i_D(t)}$ et l'exprimer en fonction de I_{MAX} , I_{min} et α .
c. Sachant que la valeur moyenne du courant est nulle dans le condensateur, en déduire l'expression de I_s .
- 5) a.** En écrivant que $i_L(\alpha T) = I_{\text{MAX}}$, calculer la variation de courant : $\Delta i_L = I_{\text{MAX}} - I_{\text{min}}$ en fonction de U , α , L et T .
b. Pour que le circuit fonctionne correctement il faut que $I_{\text{min}} > 0$. Déterminer la condition sur la résistance de charge R .
- 6)** On souhaite calculer l'ondulation $\Delta V_s = V_{s\text{MAX}} - V_{s\text{min}}$ de la tension de sortie. On fait l'hypothèse que le courant de sortie i_s est constant. Déterminer l'expression de $v_s(t)$ pour $0 \leq t \leq \alpha T$ et en déduire ΔV_s en fonction de I_s , C , α et T .

1) a.

Lorsque K est fermé alors $v_D = -V_s < 0$, la diode est bloquée.
 tension v_{AK} aux bornes de la diode

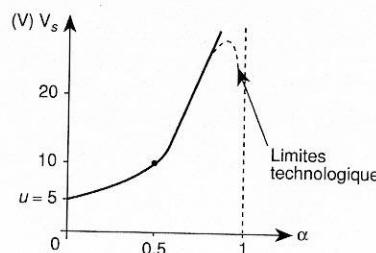
Lorsque K s'ouvre, le courant $i_L(t)$ ne peut pas subir de discontinuité, il apparaît une tension aux bornes de L qui permet à la diode de conduire.

b. D'après la loi des mailles, nous pouvons écrire :
 $U = v_L(t) + v(t)$

$$U = \overline{v_L(t)} + \overline{v(t)}$$

$$v_L(t) = 0 \text{ donc } U = \overline{v(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = (1 - \alpha) V_s$$

$$\text{soit } V_s = \frac{U}{1 - \alpha}$$

**EXERCICES**

- 2) a.** Pour $0 \leq t \leq \alpha T$: $U = L \frac{di_L}{dt}$

$$\mathbf{b. } i_L(t) = \frac{U}{L} t + A$$

$$\text{à } t = 0, i_L(0) = I_{\text{min}} = A$$

$$\text{d'où : } i_L(t) = \frac{U}{L} t + I_{\text{min}}$$

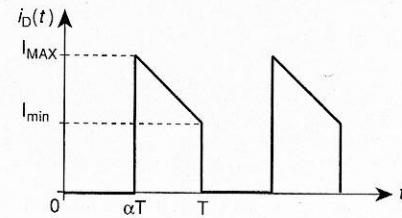
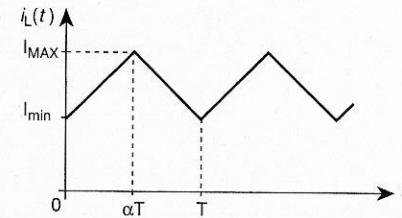
- 3) a.** Pour $\alpha T \leq t \leq T$: $U = L \frac{di_L}{dt} + V_s$

$$\text{soit : } \frac{-\alpha U}{1 - \alpha} = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\mathbf{b. } i_L(t) = \frac{-\alpha U}{L(1 - \alpha)} t + A$$

$$\text{à } t = \alpha T, i_L(\alpha T) = I_{\text{MAX}} = -\frac{\alpha U}{L(1 - \alpha)} \alpha T + A$$

$$\text{d'où : } i_L(t) = \frac{-\alpha U}{L(1 - \alpha)} (t - \alpha T) + I_{\text{MAX}}$$

4) a.

$$\mathbf{b. } \overline{i_D(t)} = \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T i_D(t) dt}_{\mathcal{A}}$$

\mathcal{A} : aire comprise entre $i_D(t)$ et l'axe des abscisses pendant une période.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (I_{\text{MAX}} + I_{\text{min}}) \times (1 - \alpha) T$$

$$\text{d'où : } \overline{i_D(t)} = \frac{(1 - \alpha)}{2} (I_{\text{MAX}} + I_{\text{min}})$$

c. D'après la loi des nœuds : $i_D(t) = i_c(t) + I_s$
 $\overline{i_D(t)} = \overline{i_c(t)} + I_s$

$$i_c(t) = 0 \text{ donc : } I_s = \overline{i_D(t)} = (1 - \alpha) \frac{(I_{MAX} + I_{min})}{2}$$

5) a. Pour $0 \leq t \leq \alpha T$: $i_L(t) = \frac{U}{L} t + I_{min}$

$$i_L(\alpha T) = I_{MAX} = \frac{U}{L} \alpha T + I_{min}$$

$$\text{d'où } \Delta i_L = \frac{U}{L} \alpha T$$

b. D'après la question 4) c. on en déduit :

$$I_{MAX} + I_{min} = \frac{2 I_s}{1 - \alpha} = \frac{2 V_s}{R(1 - \alpha)} = \frac{2 U}{R(1 - \alpha)^2} \quad (1)$$

$$\text{et } I_{MAX} - I_{min} = \frac{U}{L} \alpha T \quad (2)$$

$$(1) - (2) : 2 I_{min} = \frac{2 U}{R(1 - \alpha)^2} - \frac{U}{L} \alpha T$$

$$\text{On souhaite } I_{min} > 0 : \frac{2U}{R(1 - \alpha)^2} > \frac{U}{L} \alpha T$$

$$\text{d'où : } R < \frac{2L}{\alpha(1 - \alpha)^2 T}$$

6) Pour $0 \leq t \leq \alpha T$: $I_s = -C \frac{dv_s}{dt}$

$$v_s(t) = -\frac{I_s}{C} t + A, \text{ la pente étant négative on est donc dans une phase de décroissance}$$

pour $v_s(t)$, la tension passe donc de V_{MAX} à V_{min} .
 $v_s(0) = V_{MAX} = A$

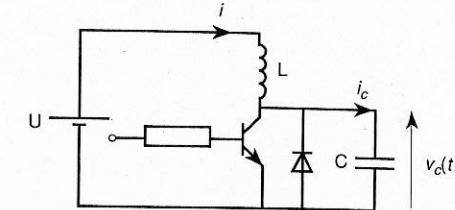
$$\text{d'où : } v_s(t) = -\frac{I_s}{C} t + V_{MAX} \text{ pour } 0 \leq t \leq \alpha T$$

$$v_s(\alpha T) = V_{min} = -\frac{I_s}{C} \alpha T + V_{MAX}$$

$$\text{soit : } \Delta v_s = \frac{I_s}{C} \alpha T$$

705 Etude d'un circuit de balayage ligne

Le circuit ci-dessous est utilisé pour produire le balayage ligne d'un téléviseur. Le courant i dans la bobine d'inductance L varie entre deux valeurs I_M et $-I_M$. La montée en courant de $-I_M$ à $+I_M$ est lente et dure $54 \mu s$. La descente est rapide et dure $10 \mu s$. La période du balayage est de $64 \mu s$. On négligera la résistance de la bobine et on supposera la diode parfaite.



1) A l'instant $t = 0$, le circuit est au repos : $i(0) = 0$ et $v_c(0) = 0$. On alimente le circuit en même temps que l'on sature le transistor.

a. Déterminer l'expression de $i(t)$.

b. Calculer la valeur de l'inductance L pour obtenir $i(t_0) = I_0 = 5 \text{ A}$ pour $U = 12 \text{ V}$ et $t_0 = 27 \mu s$.

2) A l'instant $t = t_0$ on bloque le transistor.

a. Déterminer les équations différentielles régissant $i(t)$ et $v_c(t)$ et indiquer l'état de la diode.

b. Déterminer les conditions initiales suivantes :

$$i(t_0^+), \frac{di}{dt}(t_0^+), v_c(t_0^+) \text{ et } \frac{dv_c}{dt}(t_0^+)$$

c. On prend comme nouvelle origine des temps l'instant t_0 . Montrer que $i(t)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$i(t) = I_M \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right)$$

Donner l'expression de T et montrer que $\frac{I_M}{I_0}$ et $\tan \varphi$ s'exprime uniquement en fonction de T et t_0 .

d. Déterminer l'expression de $v_c(t)$.

e. Soit V_M la valeur maximale de $v_c(t)$. Montrer que le rapport $\frac{V_M}{U}$ s'exprime uniquement en fonction de t_0 et T .

f. Calculer les valeurs numériques de C , I_M , V_M et φ pour $T = 20 \mu s$.

g. Représenter graphiquement $i(t)$ et $v_c(t)$ jusqu'à l'instant t_1 où la diode se met à conduire.

Exprimer t_1 en fonction de φ et T et calculer la valeur du courant $i(t_1)$ en fonction de I_0 et φ .

3) On prend comme nouvelle origine des temps l'instant où la diode s'est mise à conduire.

a. Calculer $i(t)$ et déterminer l'instant t_2 où le courant s'annule en fonction de t_0 et φ .

b. Montrer que si l'on remet en conduction le transistor dans un intervalle de temps que l'on déterminera, le courant pourra repasser à un instant t_3 par I_0 et qu'en recommençant le cycle on peut fournir un signal périodique.

Calculer la période T_L de ce signal en fonction de L , C , I_0 et U .

1) a. T saturé donc $U = L \frac{di}{dt}$ avec $i(0) = 0$.

$$\text{d'où : } i(t) = \frac{U}{L} t$$

$$b. i(t_0) = \frac{U}{L} t_0 = I_0 \quad L = \frac{U t_0}{I_0} \quad L = 65 \mu H$$

2. a. Pour assurer la continuité du courant dans L alors $i_c(t_0^+) = I_0$ et la diode est bloquée.

On a les équations suivantes :

$$(1) \quad U = L \frac{di}{dt} + v_c(t), \quad i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} \quad \text{et} \quad i_c(t) = i(t)$$

On en déduit : $U = v_c(t) + LC \frac{d^2 v_c}{dt^2}$

On dérive l'équation (1) : $0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt}$

d'où : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$

b. Continuité du courant dans L : $i(t_0^-) = i(t_0^+) = I_0$

Continuité de la tension aux bornes de C :

$$v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+) = 0$$

D'après l'équation (1) on en déduit :

$$U = L \frac{di}{dt}(t_0^+) + v_c(t_0^+) \quad \text{d'où} \quad \frac{di}{dt}(t_0^+) = \frac{U}{L}$$

D'autre part : $i_c(t_0^+) = i(t_0^+) = C \frac{dv_c}{dt}(t_0^+) = I_0$

donc : $\frac{dv_c}{dt}(t_0^+) = \frac{I_0}{C}$

c. On pose $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$ est solution de l'équation différentielle régissant $i(t)$.

On a donc : $T = \frac{2\pi}{\omega} \quad T = 2\pi \sqrt{LC}$

Exprimons les conditions initiales :

$$i(0^+) = I_M \cos \varphi = I_0$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = I_M \omega \sin \varphi = \frac{U}{L}$$

On en déduit : $I_M^2 \cos^2 \varphi + I_M^2 \sin^2 \varphi = I_0^2 + \frac{U^2}{L^2 \omega^2}$

soit : $I_M^2 = I_0^2 + \frac{I_0^2}{(2\pi)^2} \times \frac{T^2}{t_0^2}$

donc : $\frac{I_M}{I_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi t_0}\right)^2}$

On a aussi : $\tan \varphi = \frac{U}{L \omega I_0}$ soit $\tan \varphi = \frac{T}{2\pi t_0}$

d. Pour déterminer $v_c(t)$ nous utilisons l'équation suivante : $U = L \frac{di}{dt} + v_c(t)$

$$v_c(t) = U + L I_M \times \frac{2\pi}{T} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right)$$

soit $v_c(t) = U + I_M \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right)$

e. $V_M = U + L I_M \times \frac{2\pi}{T} \quad \frac{V_M}{U} = 1 + \frac{t_0}{I_0} \times I_M \times \frac{2\pi}{T}$

donc : $\frac{V_M}{U} = 1 + 2\pi \frac{t_0}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi t_0}\right)^2}$

soit : $\frac{V_M}{U} = 1 + \sqrt{\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right)^2 + 1}$

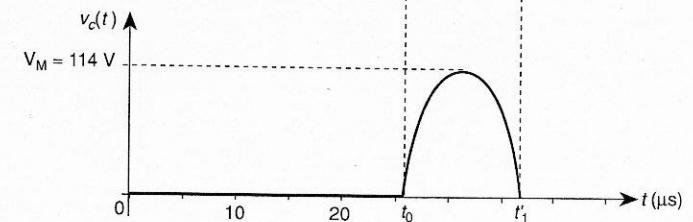
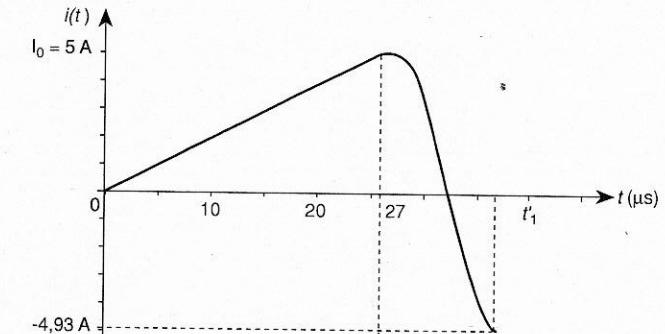
f. $T = 20 \mu s$ alors $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 156 \text{ nF}$

$$I_M = I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi t_0}\right)^2} = 5,03 \text{ A}$$

$$V_M = U \left[1 + \sqrt{\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right)^2 + 1} \right] = 114 \text{ V}$$

$$\tan \varphi = \frac{T}{2\pi t_0} \quad \varphi = 6,7^\circ \approx 0,12 \text{ rad}$$

g.



Avec t_0 comme origine des temps nous avons :

$$v_c(t) = U \left[1 + \left(\frac{V_M}{U} - 1 \right) \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right) \right]$$

avec $\frac{V_M}{U} - 1 = \sqrt{\left(\frac{2\pi t_0}{T}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \varphi} + 1} = \frac{1}{\sin \varphi}$

donc $v_c(t) = U \left[1 + \frac{1}{\sin \varphi} \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right) \right]$

A l'instant t_1 nous avons : $v_c(t_1) = 0$ d'où :

$$\sin(2\pi \frac{t_1}{T} - \varphi) = -\sin\varphi = \sin(\varphi + \pi)$$

$$\text{soit : } t_1 = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{2\varphi}{\pi} \right)$$

A.N. : $t_1 = 10,7 \mu s$.

Pour le courant nous pouvons écrire :

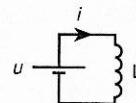
$$i(t_1) = I_M \cos\left(2\pi \frac{t_1}{T} - \varphi\right) = I_M \cos(\varphi + \pi) = -I_M \cos\varphi$$

$$\text{or } I_M = I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi t_0}\right)^2} = I_0 \sqrt{1 + \tan^2\varphi} = \frac{I_0}{\cos\varphi}$$

$$\text{d'où : } i(t_1) = -\frac{I_0}{\cos^2\varphi} = -4,93 \text{ A}$$

3) a. La diode est passante, le transistor est bloqué et nous avons comme condition initiale

$$i = -\frac{I_0}{\cos\varphi}$$



$$U = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{U}{L} t - \frac{I_0}{\cos\varphi}$$

$$i(t_2) = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{U}{L} t_2 = \frac{I_0}{\cos\varphi} \quad t_2 = \frac{LI_0}{U} \times \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$t_2 = \frac{t_0}{\cos\varphi} \approx t_0 = 27 \mu s$$

b. Pour obtenir un signal périodique il faut remettre en conduction le transistor avant que le courant s'annule donc dans l'intervalle :

$$[t'_1 = t_1 + t_0 = 37,7 \mu s, t'_2 = t'_1 + t_2 = 64,7 \mu s]$$

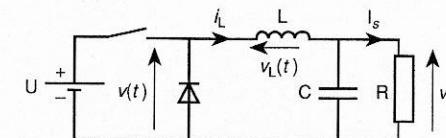
$$T_L = t_1 + 2t_0 \approx \frac{T}{2} + 2t_0 \quad \text{car} \quad \frac{2\varphi}{\pi} \ll 1 \text{ donc :}$$

$$T_L \approx 2 \frac{LI_0}{U} + \pi\sqrt{LC} = 64 \mu s$$

Exercices à résoudre

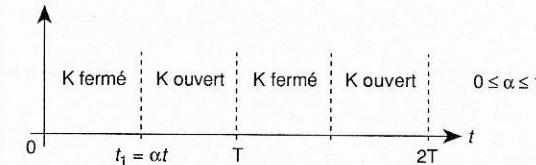
706 Alimentation à découpage abaisseur de tension

On considère le circuit suivant :



Hypothèses :

- la diode est parfaite
- la cellule de filtrage LC est telle que la tension de sortie V_s est supposé constante



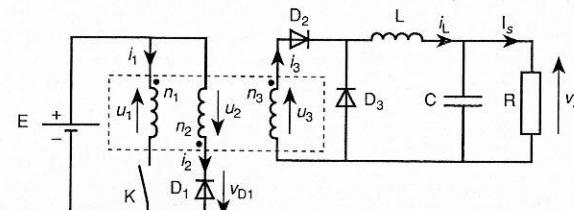
- l'interrupteur électronique K est commandé périodiquement :

On s'intéresse au régime permanent.

- 1) a. Dessiner la courbe représentative de $v(t)$ et indiquer l'état de la diode lors des différentes phases.
b. En écrivant que la valeur moyenne de $v_L(t)$ est nulle, calculer V_s en fonction de U et α .
- 2) a. Pour $0 \leq t \leq \alpha T$, établir l'équation différentielle régissant $i_L(t)$.
b. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, $i_L(0) = I_{\min}$, résoudre cette équation et établir la loi de variation de $i_L(t)$.
- 3) a. Pour $\alpha T \leq t \leq T$, établir l'équation différentielle régissant $i_L(t)$.
b. Sachant qu'à l'instant $t = \alpha T$, $i_L(\alpha T) = I_{\max}$, résoudre cette équation et établir la loi de variation de $i_L(t)$.
- 4) a. Représenter graphiquement $i_L(t)$.
b. Calculer la valeur moyenne de $i_L(t)$: $\overline{i_L(t)}$ et l'exprimer en fonction de I_{\max} et I_{\min} .
c. Sachant que la valeur moyenne du courant est nulle dans le condensateur, calculer I_s en fonction de I_{\max} et I_{\min} .

- 5) a. En écrivant que $i_L(\alpha T) = I_{\max}$, calculer la variation de courant $\Delta i_L = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de U , α , L et $f = \frac{1}{T}$.

- b. Pour que le circuit fonctionne correctement il faut que $I_{\min} > 0$. Déterminer la condition sur la résistance de charge R .

707 Alimentation isolée à découpage : convertisseur "Forward"


Le transformateur est constitué d'un enroulement primaire comprenant n_1 spire et de deux enroulements secondaires comprenant n_2 et n_3 spires. On rappelle les équations liant les tensions et les courants avec les conventions choisies :

$$\begin{aligned} u_1 &= n_1 \frac{d\phi}{dt} & u_2 &= n_2 \frac{d\phi}{dt} & u_3 &= n_3 \frac{d\phi}{dt} \\ n_1 i_1 - n_2 i_2 - n_3 i_3 &= \mathcal{R}\phi \end{aligned}$$

ϕ : flux à travers le circuit magnétique.

\mathcal{R} : reluctance, c'est une constante qui caractérise le circuit magnétique.

K est un interrupteur électrique commandé périodiquement à la fréquence $f = \frac{1}{T}$. Les diodes sont parfaites.

Le filtrage dû à la cellule LC est suffisant pour que la tension de sortie V_s soit supposée constante.

On s'intéresse au régime permanent.

1) Première phase : le transformateur est au repos, les courants et les tensions du transformateur sont nuls.

A $t = 0$ on ferme K.

a. Exprimer u_1 , u_2 et u_3 en fonction de E, n_1 , n_2 et n_3 .

b. Calculer $\phi(t)$.

c. En déduire l'état des diodes D_1 , D_2 et D_3 .

d. Calculer $i_L(t)$ sachant qu'à $t = 0$ $i_L(0) = I_{\min}$.

e. En déduire l'expression de $i_1(t)$.

2) Deuxième phase : à $t = t_1$ on ouvre K et on notera $\phi(t_1) = \phi_{\max}$

a. Indiquer l'état des diodes D_1 , D_2 et D_3 .

b. Calculer $\phi(t)$.

c. En déduire $i_2(t)$ et déterminer l'instant t_2 tel que $\phi(t_2) = 0$.

d. Calculer $i_3(t)$ sachant qu'à $t = t_1$ $i_L(t_1) = I_{\max}$.

e. Pour un fonctionnement correct de l'alimentation à découpage le circuit magnétique doit être complètement démagnétisé à la fin de chaque période T.

Déterminer la condition sur le rapport cyclique $\alpha = \frac{t_1}{T}$ en fonction de n_1 et n_2 . Dans la suite du problème on a les conditions suivantes :

$$n_1 = n_2 = 5n_3, \alpha = 0,4, f = \frac{1}{T} = 40 \text{ kHz et } E = 310 \text{ V.}$$

3) a. Représenter graphiquement les tensions $u_1(t)$, $u_3(t)$ et $u_4(t)$.

b. En écrivant que la valeur moyenne de la tension est nulle aux bornes de L, en déduire V_s en fonction de n_1 , n_3 , E et α .

Calculer la valeur de V_s .

4) a. Représenter graphiquement l'allure de $i_L(t)$.

b. Calculer la valeur moyenne de $i_L(t)$: $\overline{i_L(t)}$ en fonction de I_{\min} et I_{\max} .

- c. Calculer l'ondulation en courant $\Delta i_L = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de E, n_1 , n_3 , L, α et f.
- d. Calculer les valeurs de I_{\max} et I_{\min} pour $I_s = 6 \text{ A}$ et $L = 350 \mu\text{H}$.

- 5) a. L'inductance propre du bobinage primaire L_1 est reliée à la reluctance \mathcal{R} par la relation suivante :

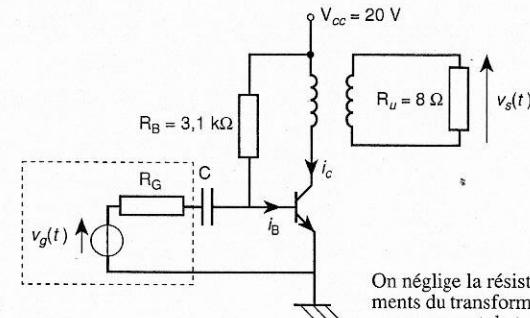
$$L_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}}$$

Calculer les valeurs de $i_1(t_1) = I_{\max}$ et $i_2(t_1) = -I_{\max}$ pour $L_1 = 10 \text{ mH}$.

- b. Représenter graphiquement les courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$.

708 Amplificateur classe A : liaison par transformateur

On néglige la résistance des enroulements du transformateur et on appelle m son rapport de transformation.



On néglige la résistance des enroulements du transformateur et on appelle m son rapport de transformation

Transistor :

$$\begin{cases} V_{BE0} = 0,6 \text{ V} \\ \beta = 100 \end{cases}$$

1) Polarisation

a. Calculer I_{B0} , I_{C0} , V_{CE0} et la puissance dissipée dans le transistor P_{T0} .

b. Représenter dans le plan (v_{ce}, i_c) la droite de charge statique.

2) a. Déterminer l'équation de la droite de charge dynamique $i_c(v_{ce})$ et la représenter dans le plan (v_{ce}, i_c) .

b. Calculer la valeur de m pour obtenir une excursion maximale de la tension de sortie.

c. En déduire l'excursion maximale de $v_s(t)$: $\hat{v}_{s\max}$.

3) Dans le cas où $\hat{v}_s = \hat{v}_{s\max}$ calculer :

a. La puissance fournie par l'alimentation P_f .

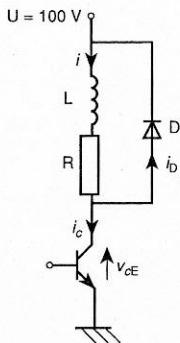
b. La puissance utile P_u .

c. Le rendement de l'amplificateur $\eta = \frac{P_u}{P_f}$

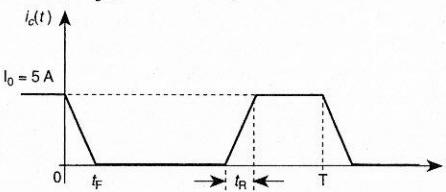
d. La puissance dissipée dans le transistor P_T .

709 Etude d'un circuit d'aide à la commutation

On considère le hacheur à transistor suivant :



- la diode D est parfaite
- l'inductance L est suffisante pour que l'on puisse considérer le courant $i(t)$ comme constant et égal à $I_0 = 5 \text{ A}$ dans la charge
- lors de la commutation l'évolution du courant $i_c(t)$ est décrite par la courbe suivante :

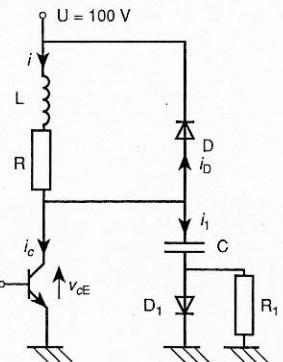


$$\text{La fréquence de hachage : } f = \frac{1}{T} = 20 \text{ kHz.}$$

Le temps de descente du courant : $t_F = 2 \mu\text{s}$.
Le temps de montée du courant : $t_R = 1 \mu\text{s}$.

- 1) a. Représenter $v_{cE}(t)$ et $i_D(t)$ en concordance de temps.
- b. Calculer les puissances moyennes dissipées dans le transistor :
 - à la fermeture P_F
 - à l'ouverture P_R
 - totale P_T

- 2) Pour diminuer les pertes lorsque le transistor passe de l'état conducteur à l'état bloqué, on ajoute un circuit d'aide à la commutation.



- D_1 est parfaite
- $i_c(t)$ à la même évolution que précédemment.

- a. Pour $0 \leq t \leq t_F$, calculer $v_{cE}(t)$ et $i_1(t)$.
- b. Soit $v_{cE}(t_F) = V_0$, déterminer l'expression de V_0 en fonction de I_0 , t_F et C et en déduire une condition sur C pour que la diode D soit toujours bloquée à $t = t_F$.
- c. Pour $t \geq t_F$, calculer $i_1(t)$, $v_{cE}(t)$ et l'instant t_0 à partir duquel la diode D se met à conduire.
- d. Représenter l'allure de $i_c(t)$, $v_{cE}(t)$, $i_1(t)$ et $i_D(t)$ en concordance de temps dans la phase d'ouverture du transistor.
- e. Calculer la puissance moyenne dissipée dans le transistor à l'ouverture P'_F . En déduire la valeur de C pour que $P'_F = \frac{P_F}{10}$.

En déduire la puissance moyenne dissipée dans le transistor.

- f. Lors de la phase de fermeture il apparaît une pointe de courant dans le transistor due à la décharge du condensateur. Calculer R_1 pour limiter le courant dans le transistor à un maximum de 7 A.