tecnicas de Conteo 20.

Una Combinacion con repeticion de orden r de los n elementos de A es una seleccion no ordenada de r elementos de A que pueden repetirse.
Cada combinacion con repeticion de orden r de los elementos de A se corresponde a una solucion de

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$$

Siendo x_i el numero de veces que elegimos el elemento i-esimo. Es decir solo consideramos soluciones positivas. Cada solucion positiva se corresponde con una cadena de r y $n-1$ barras distribuidas como

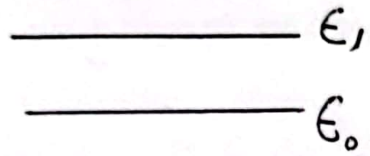
$$\underbrace{1\cdots1}_{x_1}|\underbrace{1\cdots1}_{x_2}|\cdots|\underbrace{1\cdots1}_{x_n}$$

Por lo tanto buscamos el numero de formas de colocar $n-1$ barras en $n+r-1$ posiciones. es decir:

$$\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{n+r-1}{r}$$

12. generales de probabilidad

$$E = n_0 \epsilon_0 + n_1 \epsilon_1$$



$$N = n_0 + n_1$$

a. Una combinacion de orden r de los elementos de A es un subconjunto, en nuestro ejemplo, los microestados. Cualquier variacion de orden r de los elementos de A es una aplicacion inyectiva de $\{1,2,\cdots,r\}$ en A. si $r=n$ una variacion es simplemente una permutacion

el numero de variaciones de orden r de n elementos es

$$V_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

en nuestro caso $n_0 = r$, $N = n$, por lo tanto $N - n_0 = n_1$

es decir

$$C_N^{n_0 n_1} = \frac{N!}{n_0 (N-n_0)!} = \frac{N!}{n_0!\, n_1!} = \Omega$$

$$C_N^{n_0 n_1} = \frac{N!}{n_0(N-n_0)!} = \frac{N!}{n_0!\,n_1!} = \Omega$$

b. $S(N, n_0) = K_B \ln(\Omega)$ y formula de Stirling $\ln(N!) \simeq N\ln(N) - N$

$\frac{N!}{n_0!\,n_1!}$

$S(\Omega, n_0, n_1) = K_B \ln(\Omega)$

Logaritmo de un factorial

Producto de un Logaritmo

$= K_B[\ln(N!) - \ln(n_0!\,n_1!)]$

$= K_B[(N\ln(N) - N) - [\ln(n_0!) + \ln(n_1!)]]$

$$S(\Omega, n_0, n_1) = K_B \left[(N \ln(N) - N) - [\ln(n_0!) + \ln(n_1!)] \right]$$

$$= K_B \left(N \ln(N) - N - n_0 \ln(n_0) + n_0 - n_1 \ln(n_1) + n_1 \right)$$

$$= K_B \left(N \ln(N) - n_0 \ln(n_0) - n_1 \ln(n_1) \right)$$

$$\hookrightarrow \quad = k_B N \ln(N) - K_B \sum n_i \ln(n_i)$$

$$= K_B \left(N \ln(N) - n_0 \ln(n_0) - n_1 \ln(n_1) \right)$$

$$\hookrightarrow \quad = K_B\, N \ln(N) - K_B \sum n_i \ln(n_i)$$

C. $x = n_1/N$ la entropía del punto anterior se convierte en:

$$S(N, n_0, n_1) = K_B\, N \left(\ln(N) - (1-x)(\ln(N) + \ln(1-x)) - x(\ln(N) + \ln(x)) \right)$$

$$\downarrow$$

$$= K_B\, N \left(x \ln(1-x) - \ln(1-x) - x \ln(1-x) \right)$$

$$\downarrow$$

$$- K_B\, N \left(x \ln x + (1-x) \ln(1-x) \right)$$

e.

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_N \left(\frac{\partial x}{\partial E} \right)_N$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) = T \left(\frac{\partial x}{\partial E} \right) = \partial_x \left(-K_B N \left[x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \right] \right)$$

$$\downarrow$$

$$= -K_B N \ln\left(\frac{x}{1-x} \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -k_B N \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \frac{1}{N(\epsilon_1 - \epsilon_0)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k_B}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{T}$$

$$\frac{\Delta E}{k_B T} = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} = \frac{1}{x} - 1 \iff 1 + e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}$$

$$X = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta E}{K_B T}}}$$

f) Para $T \to \infty$ $\quad x(T \to \infty) = \frac{1}{2}$

$$S(T \to \infty) = -K_B N \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right) = K_B N \left(\ln(2) \right)$$

g). Para Procesos isotermicos

$$nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) \to V_f = 2V_0 \to nRT \ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{l} PV = nRT \\ PV = K_B N \end{array}\right\} \Rightarrow nRT = K_B N$$