a) Consideramos r como la distancia desde el eje de rotación al punto de masa más alejado del eje y d es la distancia de la vertical desde el punto de rotación

Mirando el teorema de los ejes paralelos, consideramos que el momento de inercia con respecto a los ejes X y Y es $\frac{1}{4}mr^2$

A esto le sumamos md^2 que es el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular que pasa a través del centro de inercia del trompo.

Si sumamos estas dos para obtener I_0 da

$$I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$$

b) Sea el disco que gira por un eje que pasa por el centro y es perpendicular a su plano

$$I_z = \int r^2\, dm$$

Considerando que la dm se puede expresar como

$$\rho = \frac{dm}{dA} \qquad dA = 2\pi r\, dr$$

$$dm = \frac{m\, 2r\, dr\, \cancel{\pi}}{\cancel{\pi} R^2} = \frac{2mr\, dr}{R^2}$$

$$I_z = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3\, dr = \frac{1}{2}mR^2$$

c) conocemos que el lagrangiano del sistema está dado por

$$L = \frac{1}{2} I_0\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_z\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - mgd\cos\theta$$

A su vez sabemos que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

Por lo tanto, tenemos que hacer el teorema con cada coordenada generalizada: θ, ϕ, ψ

* $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}$ y $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0$ Porque $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = Cte.$

Siendo $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_0 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2\theta + I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = P_\phi$

siendo el mismo caso para ψ, entonces

* $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = P_\psi$

para θ sí es diferente ya que L sí es dependiente de θ, por tanto

* $\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_0 \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \operatorname{sen}\theta + mgd\operatorname{sen}\theta$

* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_0 \ddot{\theta}$

reemplazando en la función

$$I_0 \ddot{\theta} = I_0 \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \operatorname{sen}\theta) + mgd\operatorname{sen}\theta$$

y haciendo álgebra

$$I_0 \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta (I_0 - I_z) - I_z \dot{\phi}\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + mgd\operatorname{sen}\theta$$