# Содержание

# 1 Введение

Цель курсовой работы состояла в изучении портфельной теории Марковица. В ходе работы были изучены теоретические вопросы математической формализации выбора оптимального портфеля: приведено решение классической задачи выбора портфеля Марковица, приведены методы статистической оценки параметров для задачи оптимизации, обосновано добавление регуляризации с точки зрения теории некорректных задач.

В разделе "Алгоритмы решения задач выпуклой оптимизации"приведены базовые понятия теории выпуклой оптимизации, показана ее применимость для рассматриваемой задачи выбора оптимального портфеля. Далее описаны численные методы решения задач с регуляризацией: метод последовательного квадратичного программирования (SQP) для гладких весовых функций, метод оптимизации с ограничениями при помощи линейной аппроксимации (COBYLA algorithm) для негладких весовых функций.

В разделе "Практическая часть"приведен численный эксперимент для обыкновенных ликвидных Российских акций первого уровня, который заключается в сравнении оптимальных весов и показателей портфеля задачи без регуляризации и задачи с регуляризацией (L1, L2).

# 2 Портфельная теория Марковица

## 2.1 Портфельная теория Марковица.

Выбор оптимального портфеля ценных бумаг, т.е. подбора оптимальной пропорции каждого актива, является важной задачей для инвестора, в связи с этим необходима формализация данной задачи с целью автоматизации ее решения. Поскольку объем финансовых данных с каждым годом растет и становится необозрим для человека, возникла необходимость автоматизации выбора.

Задача оптимизации была математически сформулирована Г. Марковицем в 1952 году, которая положила начало современной портфельной теории.

**Определение 1.** *Доходность в момент времени $t$ $R_t$ портфеля ценных бумаг определяется как стоимость портфеля в момент времени $t$ ($T_t$) деленная на стоимость портфеля в предыдущий период времени $t-1$ ($T_{t-1}$):*

$$R_t = \frac{T_t}{T_{t-1}} - 1$$

Рассмотрим портфель ценных бумаг, состоящий из $n$ активов. Пусть $i$-ый актив имеет доходность $R_i$. Пусть нам известны вероятностные характеристики доходностей: математическое ожидание отдельного актива: $\mathbb{E}[R_i] = \mu_i$; а также ковариация между доходностями $i$-ого и $j$-ого активов: $\sigma_{i,j}$. Способы получения этих характеристик из реальных данных будут описаны далее.

Очевидно, что доходность портфеля $R$ представима в виде:

$$R = \sum_{i=1}^{n} a_i R_i,$$

где $a_i$ — вес $i$-го актива. Вес — процент количества актива в портфеле. Логично, что сумма весов всех активов портфеля должна равняться единице:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Исходя из представления общей доходности можно выразить вероятностные характеристики для $R$:

$$E = \mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i,$$

$$V = Var[R] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[R_i] + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{i,j}$$

Для фиксированного набора $(\mu_i, \sigma_{i.j})_{i,j}$ у инвестора есть выбор многих вариантов $E$ и $V$, которые зависят только от выбора весов. Один из критериев выбора оптимального портфеля: минимизация вариации портфеля. Запишем математическую формулировку этой задачи.

$$\begin{cases}\sum_{i,j} a_i a_j \sigma_{i,j} \to \min_{a_1 \dots a_n} \\ \sum_i^n a_i = 1.\end{cases}$$

Другой вариант критерия оптимальности - классическая формулировки выбора оптимального портфеля, сформулированная Г.Мароквицем [**2**]:

$$\sum_{i,j} a_i a_j \sigma_{i,j} \to \min_{a_1 \dots a_n}$$

$$\sum_i a_i \mu_i = \mu^*$$

$$\sum_i^n a_i = 1.$$

Смысл оптимизации заключается в минимизации $V$ — вариации доходности портфеля, при условии что средняя доходность зафиксирована на уровне $E = \mu^*$. Эту задачу можно записать в более компактном виде, если записать ее в векторной форме: $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ — вектор весов, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — математическое ожидание вектора доходностей, $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j}$ — матрица ковариации. Задача записывается в виде:

$$\begin{cases}\omega^T \Sigma \omega \to \min_\omega \\ \mu^T \omega = \mu^* \\ \omega^T 1_N = 1\end{cases} \tag{2.1}$$

Система 2.1 представляет собой задача выпуклого программирования. Точное решение этой задачи может быть получено с помощью метода множителей Лагранжа.

Составим соответствующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \omega^T \Sigma \omega - \lambda_1(\mu^T \omega - \mu^*) - \lambda_2(1 - \omega^T 1_N).$$

Необходимые условия достижения условного минимума:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^N \omega_j \sigma_{i,j} - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0, \quad i = 1, \dots, N \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \mu^T \omega - \mu^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 1 - \omega^T 1_N = 0$$

Уравнение 2.2 задает систему из $N$ уравнений. Будем предполагать, что матрица $\Sigma$ невырождена и хорошо обусловлена, обратная матрица $\Sigma^{-1} = (c_{i.k})$ устойчива. Запишем систему уравнений в матричной форме.

$$\omega^T \Sigma = \lambda_1 \mu^T - \lambda_2 1_N^T$$

Умножим полученное уравнение справа на обратную матрицу $\Sigma^{-1}$. Как указано выше, предполагаем существование и устойчивость обратной матрицы.

$$\omega^T = \lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} - \lambda_2 1_N^T \Sigma^{-1}$$

Транспонируем и пользуемся свойствами суммы и произведения матриц.

$$\omega = \lambda_1 (\Sigma^{-1})^T \mu - \lambda_2 (\Sigma^{-1})^T 1_N$$

Запишем решение в по-координатном виде.

$$\omega_i = \lambda_1 \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_j - \lambda_2 \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}, \quad i = 1, \dots, N \tag{2.3}$$

Найдем коэффициенты $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Умножим каждое уравнение системы 2.3 на $\mu_i$ и сложим, чтобы выразить скалярное произведение весов и ожидаемых доходностей. Второе уравнение получается простым сложением полученных весов, что дает скалярное произведение вектора весов и вектора из единиц.

$$\omega^T \mu = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i = \lambda_1 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_i\mu_j - \lambda_2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}\mu_i = \mu^*.$$

$$\omega^T 1_N = \sum_{i=1}^{N} \omega_i = \lambda_1 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_j - \lambda_2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j} = 1$$

Таким образом, получена линейная система двух уравнений относительно переменных $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

$$\lambda_1 = \frac{\mu^* \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}\mu_i}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_i\mu_j \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j} - (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}\mu_i)^2}.$$
$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_i\mu_j - \mu^* \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}\mu_i}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_i\mu_j \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j} - (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}\mu_i)^2}$$

Для более компактной записи и визуальной обозримости результата введем следующие обозначения для двойных сумм:

- $\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}\mu_i\mu_j$.
- $\alpha_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}\mu_i$.
- $\beta = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}$.

Тогда результат поиска $\lambda_1$ и $\lambda_2$ можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 = \frac{\mu^* \beta - \alpha_2}{\alpha_1 \beta - (\alpha_2)^2}. \tag{2.4}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_1 - \mu^* \alpha_2}{\alpha_2 \beta - (\alpha_2)^2}. \tag{2.5}$$

Находим искомые оптимальные веса задачи оптимизации 2.1 при помощи соотношений 2.3, 2.4 и 2.5.

$$\omega_i = \frac{(\mu^* \beta - \alpha_2) \sum_{j=1}^{N} c_{i,j} \mu_j - (\alpha_1 - \mu^* \alpha_2) \sum_{j=1}^{N} c_{i.j}}{\alpha_1 \beta - (\alpha_2)^2}, \quad i = 1, \ldots, N$$

Таким образом, получено явное решение задачи оптимального выбора весов активов в портфеле в задаче поиска портфеля Марковица минимального риска. Решение получено при условии невырожденности и хорошей обусловленности матрицы ковариации $\Sigma$, что при условии реальных данных не может быть гарантировано априори. Следовательно, задача в общем случае является некорректной и требуется ее регуляризация. Более формально определим некорректность задачи.

**Определение 2.** *Пусть $U, F$ — банаховы пространства, $A : U \to F$ — линейный оператор. Задача поиска точного решения уравнения $Au = f$ называется корректной по Адамару, если выполнены следующие условия:*

1. $\forall f \in F \; \exists u \in U : Au = f$.

2. $Au_1 = Au_2 \Rightarrow u_1 = u_2$. *Это условие эквивалентно существованию обратного оператора $A^{-1}$.*

3. *Норма обратного оператора $\|A^{-1}\|$ ограничена.*

**Определение 3.** *Если одно из условий корректности по Адамару не выполняется, то задача называется некорректной по Адамару.*

При условии, что матрица ковариации $\Sigma$ вырождена, задача некорректна по Адамару по пункту 2. Определения 2. Если матрица ковариации плохо обусловлена, то задача некорректна по Адамару по пункту 3. Определения 2. Значит необходимо использование техник теории некорректных задач.

## 2.2 Статистическая оценка параметров выбора оптимальных весов

Оптимизационная задача 2.1 предполагает, что матрица ковариации $\Sigma$ и вектор средних доходностей $\mu$ известны. Следовательно, необходимо указать способ их оценивания из набора реальных данных.

Классическим методом в математической статистике оценки математического ожидания случайной величины по ограниченной выборке является поиск выборочного среднего, поскольку полученная оценка является несмещенной, а также по слабому закону больших чисел оценка является состоятельной. Запишем оценку вектора средней доходности $\mu$ на основе данных $\mu_1, \ldots, \mu_n$ за $n$ периодов.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Оценка ковариационной матрицы производится с помощью выборочной ковариации. Полученная оценка, как и оценка математического ожидания, является несмещенной.

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \hat{\mu})(\mu_i - \hat{\mu})^T.$$

Проблема подобных оценок является отсутствие робастности. Это означает, что оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ чувствительны к наличию выбросов в данных. В связи с этим можно применить метод усечения: при подсчете оценок не учитываются выбросы, что позволяет получать робастные оценки.

В предыдущем разделе была указана математическая обоснованность применения метода регуляризации в задаче поиска портфеля Марковица оптимального веса. Приведем также статистическое обоснование.

Поскольку оптимизационная задача решается относительно оцененных параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$, полученных из конечной выборки, подбор оптимальных весов производится на полном доверии оценкам, что, очевидно, является достаточно наивным подходом [**4**]. Переобучение по оценке $\hat{\Sigma}$ приводит к недостаточной диверсификации портфеля. Следовательно, необходимость регуляризации показана со статической точки зрения.

## 2.3 Регуляризованная задача поиска оптимальных весов портфеля

Одним из популярных методов регуляризации является добавление к оптимизационной задаче 2.1 штрафной функции $\rho_\lambda(\omega)$, которая зависит от вектора весов $\omega$ и служит методом уменьшения разряженности в элементов вектора оптимальных весов [**5**]. Дополнительный параметр $\lambda$, параметр регуляризации, контролирует влияет штрафной функции. Задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{cases} \omega^T \Sigma \omega + \rho_\lambda(\omega) \to \min_\omega \\ \mu^T \omega = \mu^* \\ \omega^T 1_N = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

В данном работе будет исследован узкий класс штрафных функций — класс выпуклых функций, поскольку задача выпуклой оптимизации является вычислительно более простой, чем оптимизация функций общего вида, также решение всегда существует и единственно. В дальнейшем планируется рассмотрение и невыпуклых штрафных функций.

# 3 Алгоритмы решения задачи выпуклой оптимизации

## 3.1 Задача выпуклой оптимизации

В этом разделе будет описана задача выпуклой оптимизации и возможные алгоритмов ее численного решения. Приведем необходимые определения из теории выпуклого программирования.

**Определение 4.** *Подмножество $C$ линейного пространства $\mathbb{L}$ называется выпуклым, если выполнено следующее условие:*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1] : (1-t)x + ty \in C.$$

**Определение 5.** *Функционал $f : X \to \mathbb{R}$, определенный на выпуклом множестве $X$, называется выпуклым, если выполнено следующее:*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall t \in [0,1] : f((1-t)x_1 + tx_2) \leq f((1-t)x_1) + f(tx_2)$$

Выпишем стандартный вид задачи выпуклой оптимизации. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m$ — выпуклые функции, а функции $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, p$ являются аффинными. Тогда задача стандартная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m \\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, p \end{cases}, \tag{3.1}$$

где функция $f$ называется целевой функцией, а функции $h_i$ и $g_i$ называются ограничениями.

Покажем, что задача оптимизации 2.6 является задачей выпуклой оптимизации при условии, что штрафная функция выпукла. Очевидно, что сумма двух выпуклых функций является выпуклой, значит необходимо проверить выпуклость выражения $\kappa(\omega) := \omega^T \Sigma \omega$.

$$\kappa((1-t)x_1 + tx_2) = ((1-t)x_1 + tx_2)^T \Sigma ((1-t)x_1 + tx_2) =$$

$$= x_1^T \Sigma x_1 + t^2 (x_2 - x_1)^T \Sigma (x_2 - x_1) + t x_1^T \Sigma (x_2 - x_1) + t(x_2 - x_1)^T \Sigma x_1 \leq$$

Поскольку $t \in [0,1] \Rightarrow t^2 \leq t$, продолжаем цепочку неравенств.

$$\leq x_1^T \Sigma x_1 + t(x_2 - x_1)^T \Sigma (x_2 - x_1) + t x_1^T \Sigma (x_2 - x_1) + t(x_2 - x_1)^T \Sigma x_1 =$$

$$= (1-t) x_1^T \Sigma x_1^t + t x_2^T \Sigma x_2 = (1-t)\kappa(x_1) + t\kappa(x_2)$$

Таким образом задача 2.6 действительно задача выпуклого программирования. Отметим также, что при условии разумного требования на весовую функцию:

$\lambda \neq 0 : \rho_\lambda(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$, при ненулевом параметре регуляризации целевая функция становится строго выпуклой. Решение задачи оптимизации строго выпуклой оптимизации всегда существует и имеет единственное решение, что является очень важным свойством при построении численных алгоритмов.

## 3.2 Численное решение задачи оптимизации при условии дифференцируемости весовой функции

Запишем Лагранжиан для задачи оптимизации 2.6.

$$L(\omega, \lambda, \sigma) = \omega^T \Sigma \omega + \rho_\lambda(\omega) - \lambda(\mu^T \omega - \mu^*) - \sigma(\omega^T 1_N - 1)$$

Далее применяется вариация метода Ньютона для задач оптимизации с ограничениями: метод последовательного квадратичного программирования (SQP). Метод заключается в поиске соответствующего направления $d_k$, как решение следующей задачи квадратичного программирования для каждой итерации $\omega_k$.

$$\begin{cases} L(\omega_k, \lambda_k, \sigma_k) + \nabla L(\omega_k, \lambda_k, \sigma_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \cdot L(\omega_k, \lambda_k, \sigma_k) d \to \min_d \\ \mu^T \omega = \mu^* \\ \omega^T 1_N = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Оптимизационная задача 3.2 является задачей квадратичного программирования, поскольку теперь зафиксированы переменные $\omega_k, \lambda_k, \sigma_k$.

Следующая итерация алгоритма формируется следующим образом:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + d_k.$$

Коэффициенты $\lambda_{k+1}$ и $\sigma_{k+1}$ для следующего шага определяются как решение задачи оптимизации 3.2.

Поскольку в целевой функции слагаемое $L(\omega_k, \lambda_k, \sigma_k)$ не зависит от $d$, для упрощения задачи его можно исключить:

$$\begin{cases} \nabla L(\omega_k, \lambda_k, \sigma_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \cdot L(\omega_k, \lambda_k, \sigma_k) d \to \min_d \\ \mu^T \omega = \mu^* \\ \omega^T 1_N = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

## 3.3 Численное решение задачи оптимизации без условия дифференцируемости весовой функции

В более общем случае, когда весовая функция принадлежит только классу непрерывных функции и не обязательно является дифференцируемой, применяется метод оптимизации с ограничениями при помощи линейной аппроксимации (COBYLA algorithm).

Вопрос нахождения оптимума в таком случае актуален, так как, к примеру, популярная весовая функция LASSO, которая является нормой $l_1$, не дифференцируема в нуле.

Для начала сформулируем алгоритм для следующей задачи безусловной оптимизации, описанный Nelder и Mead (1965). Задача заключается в поиске минимума следующего функционала:

$$f(x) \to \min_x \tag{3.4}$$

где переменная $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$; $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Введем необходимое понятие симплекса в пространстве $\mathbb{R}^n$ для дальнейшего изложения.

**Определение 6.** *Симплексом в $\mathbb{R}^n$ называется множество векторов: $x^{(0)}, \ldots, x^{(n)}$, таких что все вектора $x^{(j)} - x^{(0)}$ попарно независимы для $j : 0 < j \leq n$.*

Пусть задан симплекс $S$. Введем дополнительные обозначения для элементов $S$ с максимальным ($x^{(l)}$)) и минимальным ($x^{(m)}$)) значениями целевой функции:

$$x^{(l)} := argmax\{f(x) : x \in S\},$$

$$x^{(m)} := argmin\{f(x) : x \in S\}.$$

На каждом шаге итерации "худшая"вершина заменяется на новую $x^{(l)}_{new}$, при которой значение целевой функции меньше: $f(x^{(l)}_{new}) < f(x^{(l)})$. Опишем методику нахождения новой вершины $x^{(l)}_{new}$ [**3**].

Для "худшей"вершины находится отражение $x^{(r)}$ относительно остальных вершин симплекса для фиксированного $\alpha > 0$:

$$x^{(r)} = -\alpha x^{(l)} + \frac{1+\alpha}{n} \sum_{j=0, j\neq l}^{n} x^{(j)}$$

Тогда возможно несколько вариантов:

- При условии $f(x^{(m)} < f(x^{(r)}) < f(x^{(l)})$, определяем новую вершину $x^{(l)}_{new} = x^{(r)}$.
- При условии $f(x^{(r)} < f(x^{(m)})$ найдено правильное направление для улучшения симплекса. Вводится дополнительная вершина при фиксированном параметре $\beta > 1$:

$$x^{(e)} = \beta x^{(l)} + \frac{1-\beta}{n} \sum_{j=0, j\neq l}^{n} x^{(j)}.$$

Тогда обновленная вершина $x^{(l)}_{new}$ определяется следующим образом:

$$x^{(l)}_{new} = \begin{cases} x^{(e)}, f(x^{(e)}) < f(x^{(r)}) \\ x^{(r)}, f(x^{(e)}) \geq f(x^{(r)}) \end{cases}$$

- При условии $f(x^{(r)} \geq f(x^{(l)})$ найдено неправильное направление для улучшения симплекса. Вводится дополнительная вершина при фиксированном параметре $0 < \gamma < 1$:

$$x^{(e)} = \gamma x^{(l)} + \frac{1-\gamma}{n} \sum_{j=0, j\neq l}^{n} x^{(j)}.$$

Если полученная вершина $x^{(e)}$ оказалась лучше $x^{(l)}$: $f(x^{(e)}) < f(x^{(l)})$, тогда определяем $x^{(l)}_{new} = x^{(e)}$. Иначе симплекс сужается по следующему правилу:

$$x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(j)} + x^{(l)}),\ 0 \leq j \leq n.$$

На основе алгоритма безусловной оптимизации был сформулирован алгоритм минимизации при ограничениях M.J.D. Powell [**1**].

$$\begin{cases} F(x) \to \min_x \\ c_i \geq 0, 0 \leq i \leq m \end{cases}, \tag{3.5}$$

где переменная $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$; $F, c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Функция для сравнения качества векторов для задачи оптимизации 3.5 задается следующим образом:

$$\Phi(x) = F(x) + \mu \max\{0, \max\{-c_i(x) | 0 \leq i \leq m\}\},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$. При помощи функции $\Phi$ производится сравнение вершин в симплексе. Очевидно, что если вектор $\bar{x}$ удовлетворяет ограничениям, то $\Phi(\bar{x}) = F(\bar{x})$.

# 4 Практическая часть

## 4.1 Выбор активов для тестового портфеля

С целью проверки работы различных алгоритмов выбора оптимальных весов в портфеле был выбран набор ценных бумаг, допущенных к торгам по состоянию на 10.05.2020 на Мосбирже [1]. Для тестирования и исследования результатов использовались акции первого уровня.

Каждая ценная бумага, которая допущена к торгам на Мосбирже, относится к одной из трех категорий. Ниже приведены краткие сведения по каждой категории.

- III категория: ценные бумаги, которые не включены в котировальный список.
- II категория: малоликвидные акции.
- I категория: самые надежные акции.

Более подробная информация по требованиям к акциям разных категорий находится в Файловой библиотеке Московской Биржи в документе "Правила листинга ПАО Московская Биржа"[2].

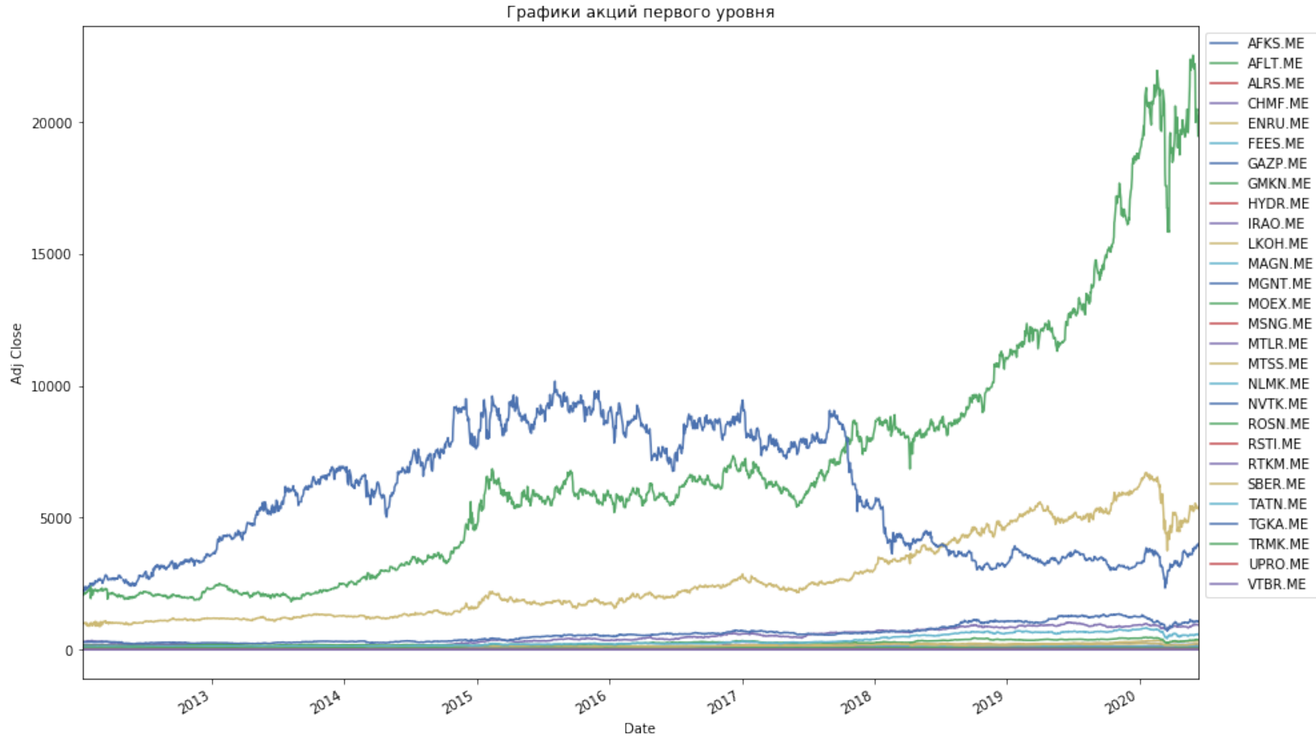
## 4.2 Данные. Обработка данных

Программная реализация численного эксперимента проведена при помощи высокоуровнего языка программирования Python в командной оболочке Jupyter Notebook.

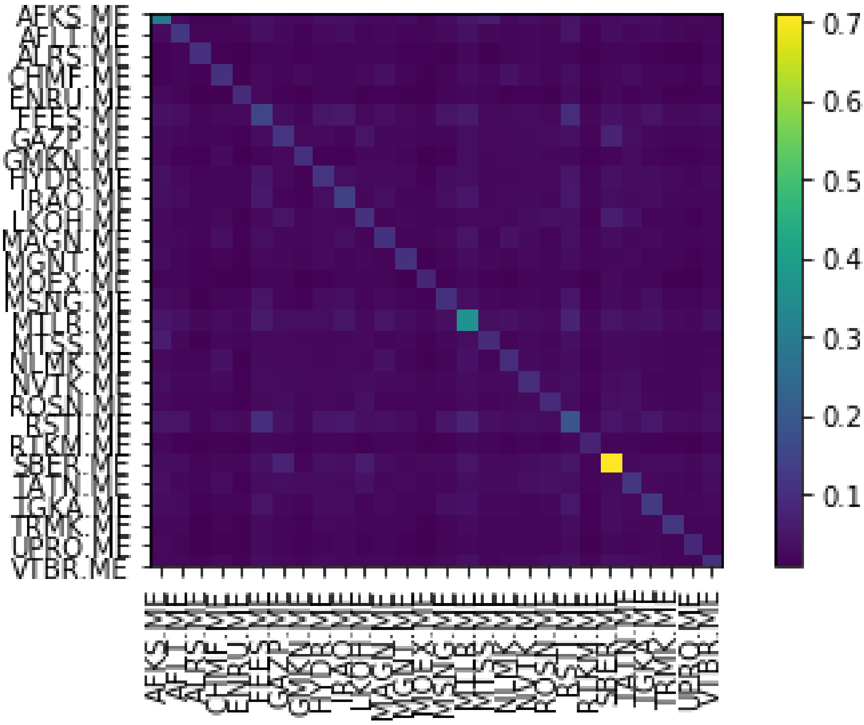
Для исследования были использованы скорректированные цены закрытия по каждой выбранной ценной бумаге, которые учитывают помимо цены закрытия также дивиденды, дробление акций и новые предложения акций

В первую очередь были загружены данные по акциям первого уровня с помощью библиотеки fix-yahoo-finance с сайта "finance.yahoo.com". Затем были отфильтрованы низколиквидные акции: удалены активы, для которых более, чем в течение 7 торговых дней было меньше 50000 транзакций. В результате фильтрации осталось 24 акции, ниже представлен график скорректированной цены закрытия с 01.01.2012 по 05.06.2020.

[1]https://www.moex.com/ru/listing/securities.aspx
[2]https://fs.moex.com/files/257

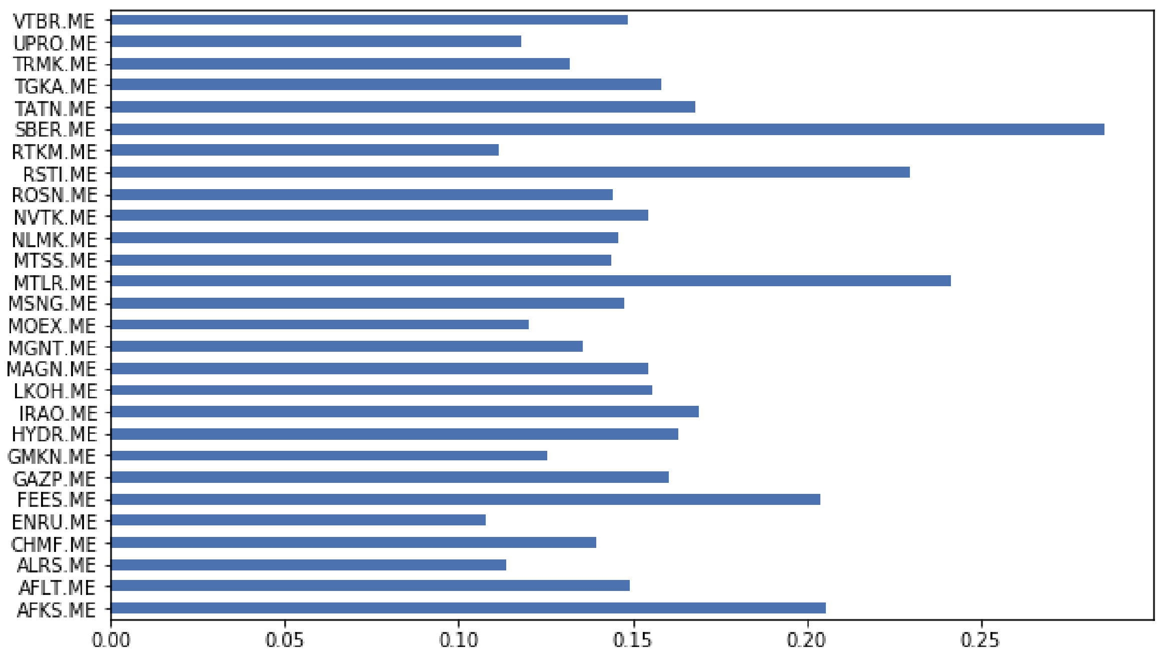



Для следующих вычислений использовалась открытая библиотека для оптимизации весов в портфеле PyPortfolioOpt [3]. Далее представлена визуализация оценки матрицы ковариации $\hat{\Sigma}$ для полученных ценных бумаг.



[3]https://github.com/robertmartin8/PyPortfolioOpt

Для построения оптимального портфеля будут необходимы оценки средних доходностей по каждой акции. Ниже представлена визуализация полученных оценок $\hat{\mu}$.

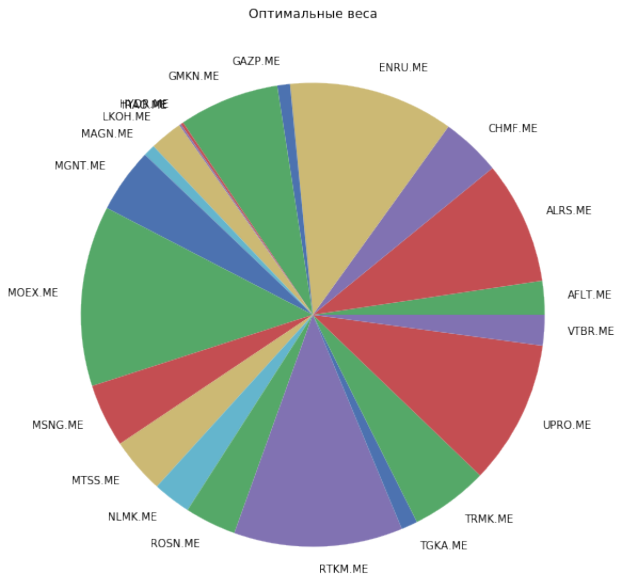



## 4.3 Результаты численного решения задачи минимизации риска без регуляризации

В данном разделе представлено численное решение следующей задачи для имеющихся данных:

$$\begin{cases} \omega^T \hat{\Sigma} \omega \to \min \\ \omega^T 1_N = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Результаты выбора весов говорят о том, что портфель достаточно консолидирован. Большая часть портфеля сконцентрирована на акциях Московской биржи (MOEX), Энел (ENRU), Ростелеком (RTKM).




Параметры собранного портфеля с такими весами будут следующими: годовая доходность - 12,7%, годовая волатильность - 15,1%, коэффициент Шарпа - 0,7 %. Причем оказалось, что 7 из 24 акций имеют нулевой вес. В итоге, результирующий портфель оказался недостаточно диверсифицирован.

## 4.4 Результаты численного решения задачи минимизации риска с регуляризацией

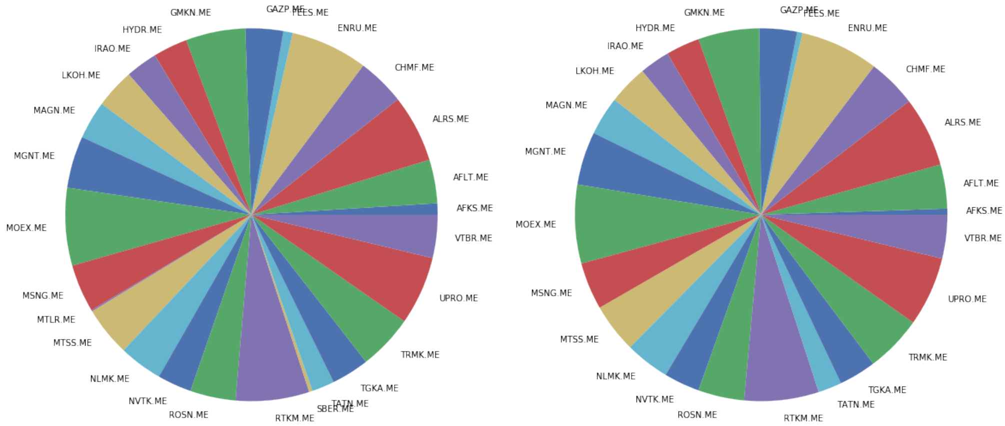
В данном разделе представлено численное решение следующей задачи для имеющихся данных:

$$\begin{cases} \omega^T \hat{\Sigma} \omega + \rho_\lambda(\omega) \to \min \\ \omega^T 1_N = 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Приведем результаты подбора оптимальных весов для двух весовых функций: $\rho_\lambda^1(\omega) = \lambda \|\omega\|_2^2$ (далее L2) и $\rho_\lambda^2(\omega) = \lambda \|\omega\|_1$ (далее L1).

Ниже представлены результаты выбора весов для каждой весовой функции. В качестве параметра регуляризации выбраны: $\lambda_1 = 0.2$ для весовой функции L2, $\lambda_2 = 1000$ для весовой функции L1. Поскольку весовая функция L2 гладкая, применялся метод SQP, а для негладкой весовой функции L1 метод COBYLA.

Результаты показывают, что регуляризация L2 дает большую диверсифицированность портфеля (меньше нулевых весов), чем L1. Ниже приведена таблица для сравнения результатов




(a) Оптимальные веса для задачи с регуляризацией L2.

(b) Оптимальные веса для задачи с регуляризацией L1.

Рис. 1: Оптимальные веса для задачи с регуляризацией

| | Годовая доходность | Годовая волатильность | Коэффициент Шарпа | Количество нулевых весов |
|---|---|---|---|---|
| L2 | 13,9 % | 15,7 % | 0.75 | 1 |
| L1 | 13.7 % | 15,7 % | 0.75 | 3 |

Таблица 1: Характеристики портфелей, полученных с помощью методом регуляризации

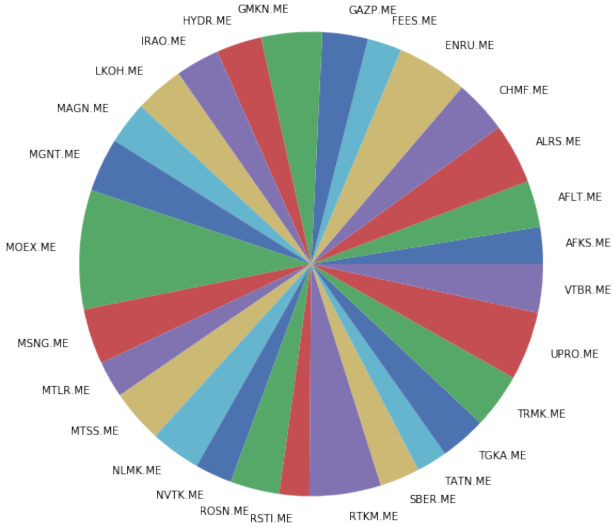
Полученные результаты решения задачи с весовыми функциями L1 и L2 дают большую ожидаемую годовую доходность, меньше акций получили нулевой вес в портфеле, вырос коэффициент Шарпа.

## 4.5 Результаты численного решения задачи Марковица без регуляризации

В данном разделе представлено численное решение следующей задачи для имеющихся данных:

$$\begin{cases} \omega^T \hat{\Sigma} \omega \to \min \\ \omega^T \mu = \mu^* \\ \omega^T 1_N = 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

В качестве желаемого уровня доходов был выбран $\mu^* = 0.15$. Ниже представлены визуализация результатов выбора оптимальных весов. На диаграмме видно, что полученный портфель более диверсифицирован, чем в задаче минимизации волатильности.




Параметры собранного портфеля с такими весами будут следующими: годовая доходность - 15%, годовая волатильность - 16,7%, коэффициент Шарпа - 0,78 %. Причем оказалось, что 7 из 24 акций имеют нулевой вес. В итоге, результирующий портфель оказался недостаточно диверсифицирован.

В данной задаче добавление регуляризаторов не повлияло на веса в портфеле.

# 5 Заключение

В ходе работы была исследована портфельная теория Марковица. При помощи методов теории некорректных задач была обоснована необходимость регуляризации оптимизационной задачи.

Описаны алгоритмы численного решения задач выпуклого программирования, которые использовались в практической части с помощью открытой Python библиотеки PyPortfolioOpt: метод последовательного квадратичного программирования (SQP) для гладких весовых функций, метод оптимизации с ограничениями при помощи линейной аппроксимации (COBYLA algorithm) для негладких весовых функций.

В практической части приведено сравнение результатов подбора оптимального портфеля, состоящего из обыкновенных акций, допущенных к торгам на Московской бирже. В результате показана необходимость использования регуляризатора для задачи минимизации вариации портфеля: добавление весовой функции приводит к больше диверсифицированности портфеля.

На сайте `https://github.com` представлен код на языке Python[4], при помощи которого проводился численный эксперимент.

[4] `https://github.com/Bakhterev/KR_Bakhterev/blob/master/PortfolioOpt.ipynb`

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] *Michael James David Powell* A Direct Search Optimization Method that Models the Objective and Constraint Functions by Linear Interpolation, Advances in Optimization and Numerical Ananlysis, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1994, 51-67 c.

[2] *Markowitz, H.M.* Portfolio Selection, The Journal of Finance, 1952.

[3] *Leo Miko Versbach* Evaluation of a Gradient Free and a Gradient Based Optimization Algorithm for Industrial Beverage Pasteurisation Described by Different Modeling Variants, Lund University, 2016, 36-42 c.

[4] *B. Fastrich, S. Paterlini, P. Winker* Constructing optimal sparse portfolio using regularization methods, Springer, 2014.

[5] *Philipp J. Kremer , Sangkyun Lee , Małgorzata Bogdan , and Sandra Paterlini* Sparse Portfolio Selection via the sorted $l^1$ - Norm, arxiv.org, 2017.