به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده برق وکامپیوتر

درس سیستم های کنترل دیجیتال

پروژه نهایی

نام و نام خانوادگی : محمدمهدی رحیمی , محمدرضا بختیاری

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۹۷۵۱۰ , ۸۱۰۱۹۷۴۶۸

تیر ۱۴۰۱

فهرست سوالات

خواسته ها:

۱)

ابتدا نقاط تعادل را بدست می آوریم (با توجه به صفر بودن P1):

$$\begin{cases} \dot{G} = -X(G+G_b) + D(t) \\ \dot{X} = -P_2X + P_3I \\ \dot{I} = -n(I+I_b) + U(t)/V \end{cases} \xRightarrow{D(t)=0} \begin{cases} -X(G+G_b) = 0 \\ -P_2X + P_3I = 0 \\ -n(I+I_b) + \dfrac{U(t)}{V} = 0 \end{cases}$$

با توجه به معادلات بالا دو دسته جواب برای نقاط تعادل خواهیم داشت:

$1) X = 0 \Rightarrow I = 0\,, G = 0\,, U(t) = nI_bV = 16.62$

$2) G = -4.5 \Rightarrow I, U(t), X$

که در ادامه از دسته اول جواب ها استفاده می کنیم. حال حول نقطه تعادل اول خطی سازی می کنیم. که این کار را با مشتق گرفتن از هر عبارت بر اساس متغیر ها انجام می دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} -X & -(G+G_b) & 0 \\ 0 & -P_2 & P_3 \\ 0 & 0 & -n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -4.5 & 0 \\ 0 & -0.025 & 0.000013 \\ 0 & 0 & -5.54/60 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/12 \end{bmatrix}$$

حال برای بدست آوردن تابع تبدیل داریم:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

که می دانیم :

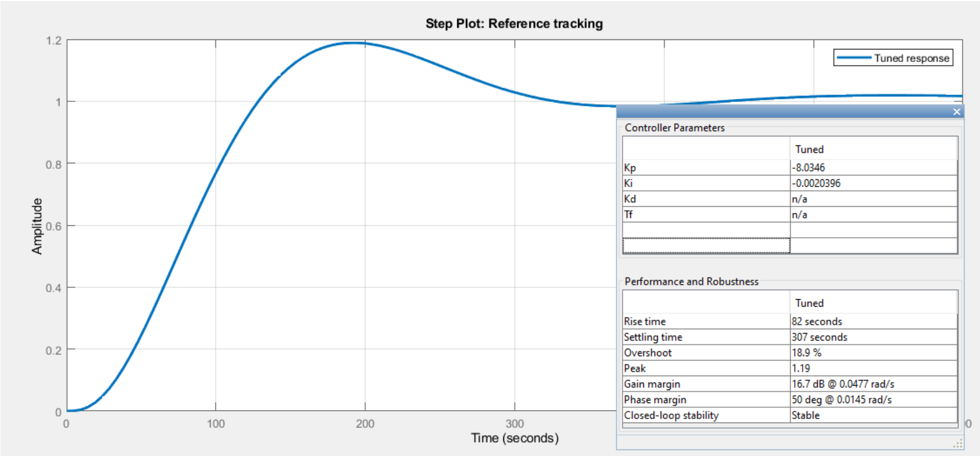
$$C = [1 \quad 0 \quad 0], D = 0$$

که در نتیجه داریم:

$$H(s) = \frac{-4.875 \times 10^{-6}}{s^3 + 0.1173s^2 + 0.002308s}$$

۲)

در این سوال با استفاده از دستور pidtuner یک کنترلر با موارد خواسته شده طراحی می کنیم:



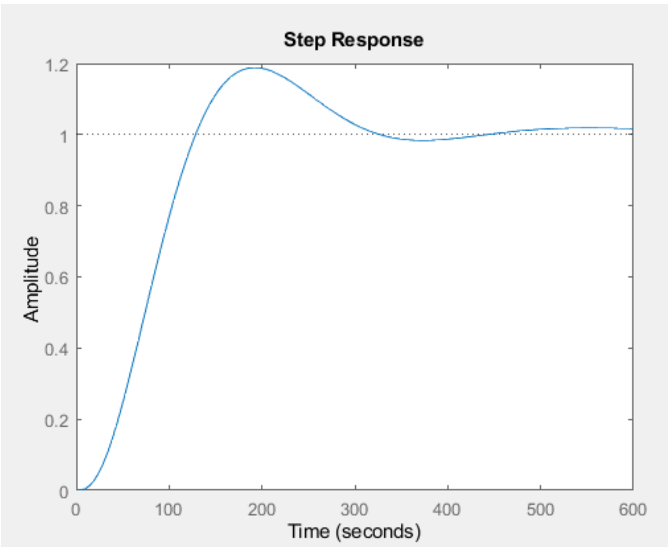
مشاهده می شود زمان نشست ۳۰۷ و مقدار اورشوت آن ۱۸.۹٪ می باشد.کنترلر به شکل زیر می باشد:

$$C(s) = -8.03 - \frac{0.00204}{s}$$

که ویژگی پاسخ گذرا و خطای حالت ماندگار به شکل زیر می باشد:

```
       RiseTime: 81.9615
   SettlingTime: 306.5855
    SettlingMin: 0.9004
    SettlingMax: 1.1886
      Overshoot: 18.8578
     Undershoot: 0
           Peak: 1.1886
       PeakTime: 191.2862

steady state error = 0.018685
```

و پاسخ پله آن به شکل زیر خواهد بود:



(۳

در این قسمت ابتدا با استفاده از کد زیر برای نرخ نمونه برداری های مختلف به دو روش گفته شده معادل گسسته کنترلر را بدست می آوریم. (فایل کد Q3)

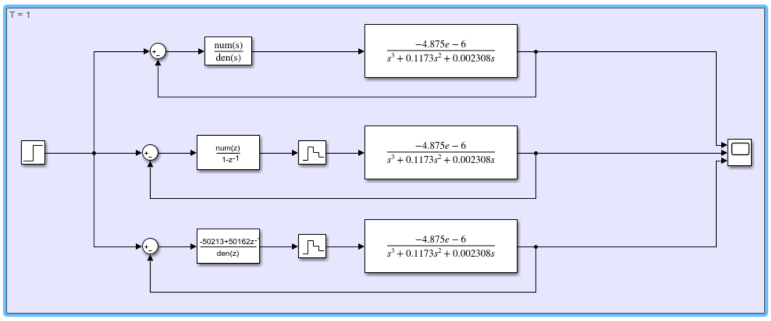
```
syms s z T
Cs = (-8.03*s -0.00204)/s;
% we set T 1, 5, 10
Ts = 1;
%bilinear transformation
Cz1 = subs(Cs,s,(2/T)*((z-1)/(z+1)));
Cz1 = subs(Cz1,T,Ts);
Cz1 = simplifyFraction(Cz1);
% zero-pole mapping
Cz2_temp = (z-exp(-(0.00204/8.03)*T))/(z-1);
k = -8.03 /subs(subs(Cz2_temp,T,Ts),z,-1);
Cz2 = Cz2_temp*k;
Cz2 = vpa(subs(Cz2,T,Ts));
```

برای مقادیر T =1 به ترتیب به روش دو خطی و صفر و قطب تطبیق یافته داریم:

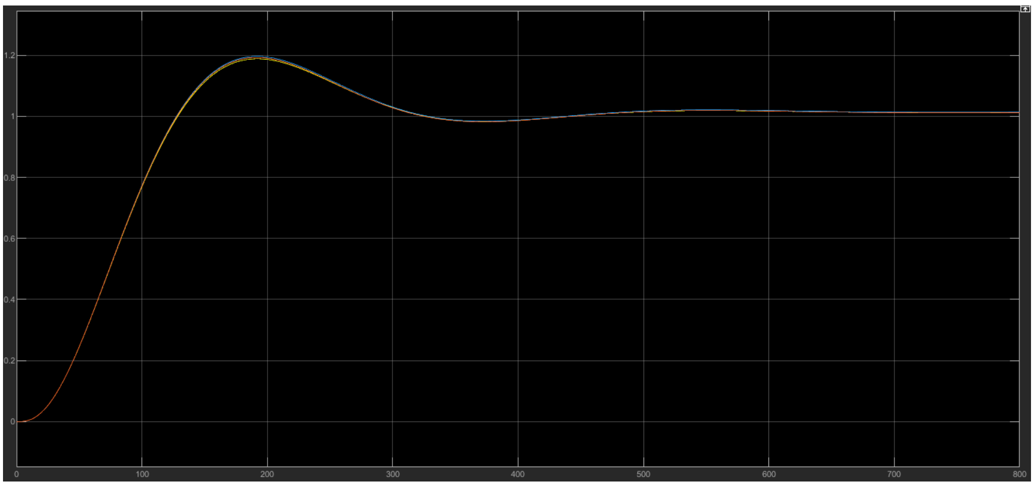
$$-(50213 * z - 50162)/(6250 * (z - 1))$$

$$-(8.031 * (z - 0.9997))/(z - 1.0)$$

حال در قسمت Simulink مدار زیر را طراحی کرده و داریم:



که خروجی آن برای T=1s به شکل زیر می باشد: (نمودار آبی سیستم آنالوگ و نمودار زرد صفر و قطب تطبیق یافته و نمودار نارنجی تبدیل دو خطی می باشد)

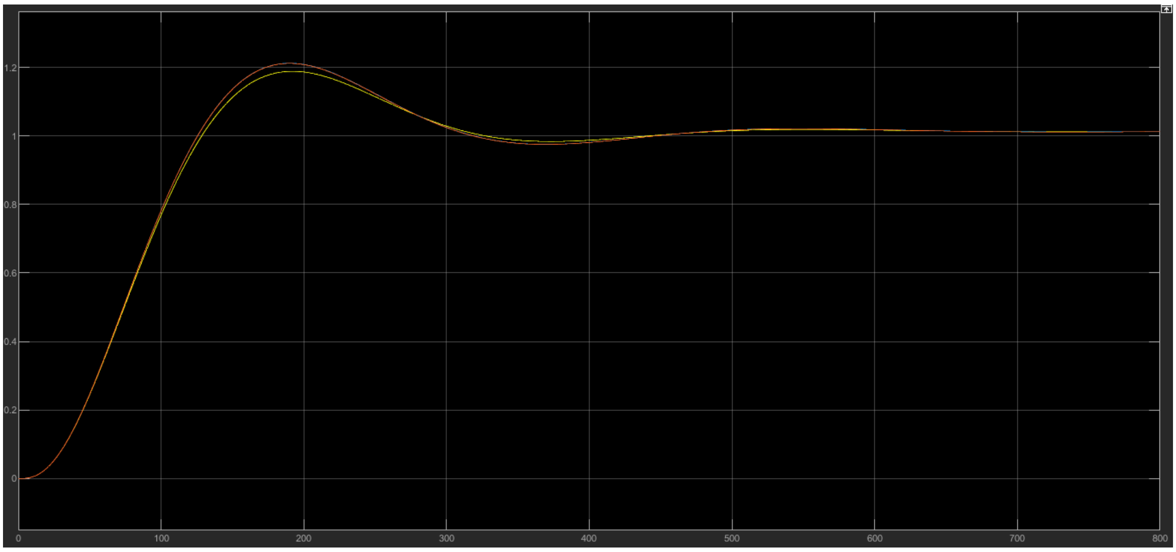


حال برای T=5s داریم:

$$-(80351 * z\ -\ 80249)/(10000 * (z\ -\ 1))$$

$$-(8.035099 * (z\ -\ 0.9987))/(z\ -\ 1.0)$$

که مداری مانند قسمت قبل دارد و خروجی ان به شکل زیر است:

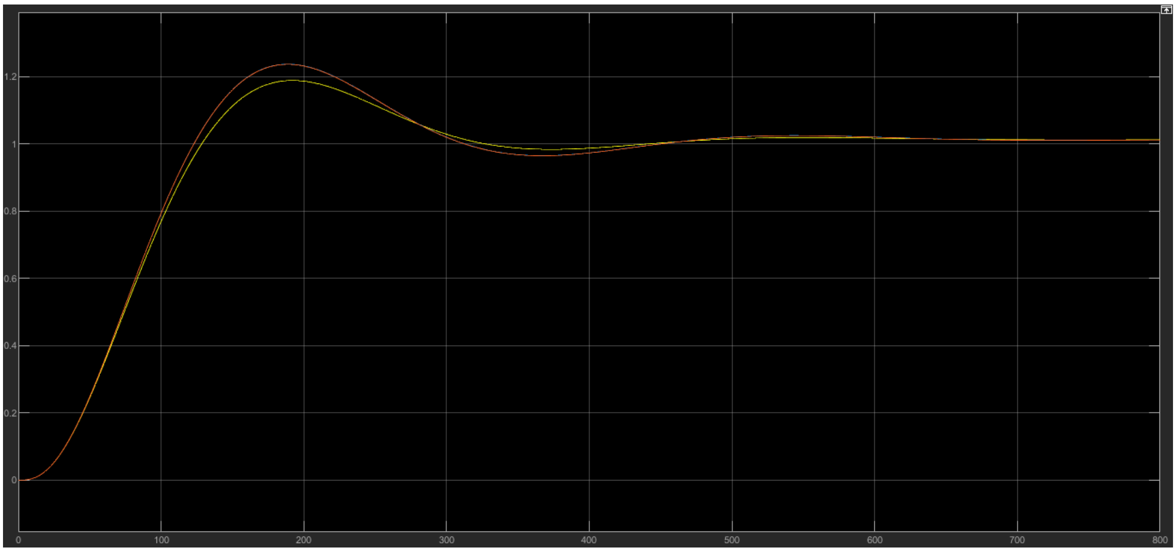


و برای T = 10s داریم:

$$-(40201 * z\ -\ 40099)/(5000 * (z\ -\ 1))$$

$$-(8.0401 * (z\ -\ 0.99746))/(z\ -\ 1.0)$$

و خروجی نیز به شکل زیر است:



همانطور که مشاهده شد برای تبدیل دو خطی نرخ نمونه برداری ۵ و برای صفر و قطب تطبیق یافته ۱ مناسب می باشد

۴)

برای این سوال از انتگرال کانولوشن استفاده می کنیم و نرخ نمونه برداری نیز ۵ در نظر میگیریم:

$$H_{(s)} = \frac{-4.875 * 10^{-6}}{s(s+0.0923)(s+0.025)} \quad , \quad H_{(z)} = Z\{ZOH * H_{(s)}\} = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} * H_{(s)}\right\}$$

$$= (1-z^{-1}) * Z\left\{\frac{H_{(s)}}{s}\right\}$$

$$Y_{(s)} = \frac{H_{(s)}}{s} = \frac{-4.875 * 10^{-6}}{s^2(s+0.0923)(s+0.025)}$$

$$Y_{(s)}{}^* = lim_{p\to 0}\frac{d}{d_p}\left[p^2 * \frac{-4.875*10^{-6}}{p^2(p+0.0923)(p+0.025)} * \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\right]$$

$$+lim_{p\to -0.0923}\left[(p+0.0923) * \frac{-4.875*10^{-6}}{p^2(p+0.0923)(p+0.025)} * \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\right]$$

$$+lim_{p\to -0.025}\left[(p+0.025) * \frac{-4.875*10^{-6}}{p^2(p+0.0923)(p+0.025)} * \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\right]$$

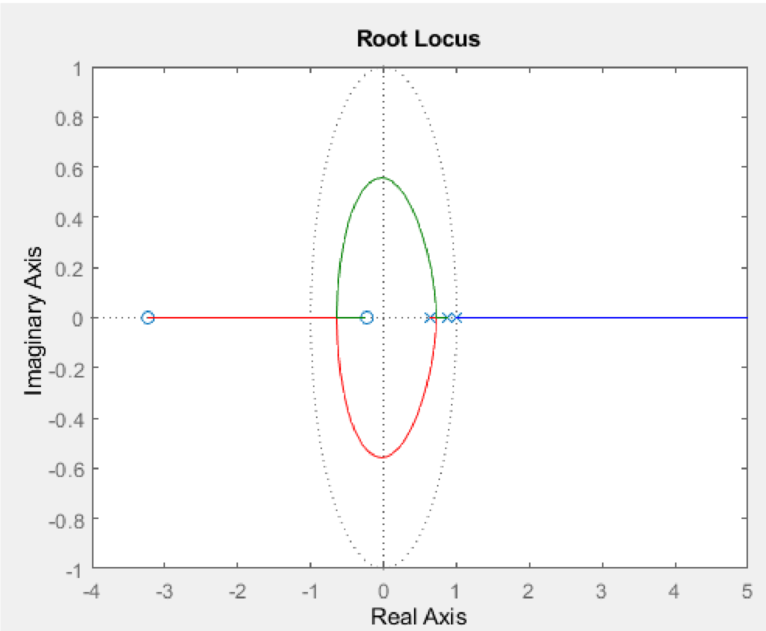
$$= \left[\frac{-0.107}{e^{-Ts}-1} - \frac{0.00211 * T * e^{-Ts}}{(e^{-Ts}-1)^2}\right] + \left[\frac{-0.0085}{e^{-T(s+0.0923)}-1}\right] + \left[\frac{0.115}{e^{-T(s+0.025)}-1}\right]$$

$$Y_{D(z)} = Y_{(s)}{}^*\left|\left[s = \frac{1}{T} * Ln(z)\right] = \frac{0.107}{1-z^{-1}} - \frac{0.00211 * T * z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{0.0085}{1-e^{-T*0.0923} * z^{-1}} - \frac{0.115}{1-e^{-T*0.025} * z^{-1}}\right.$$

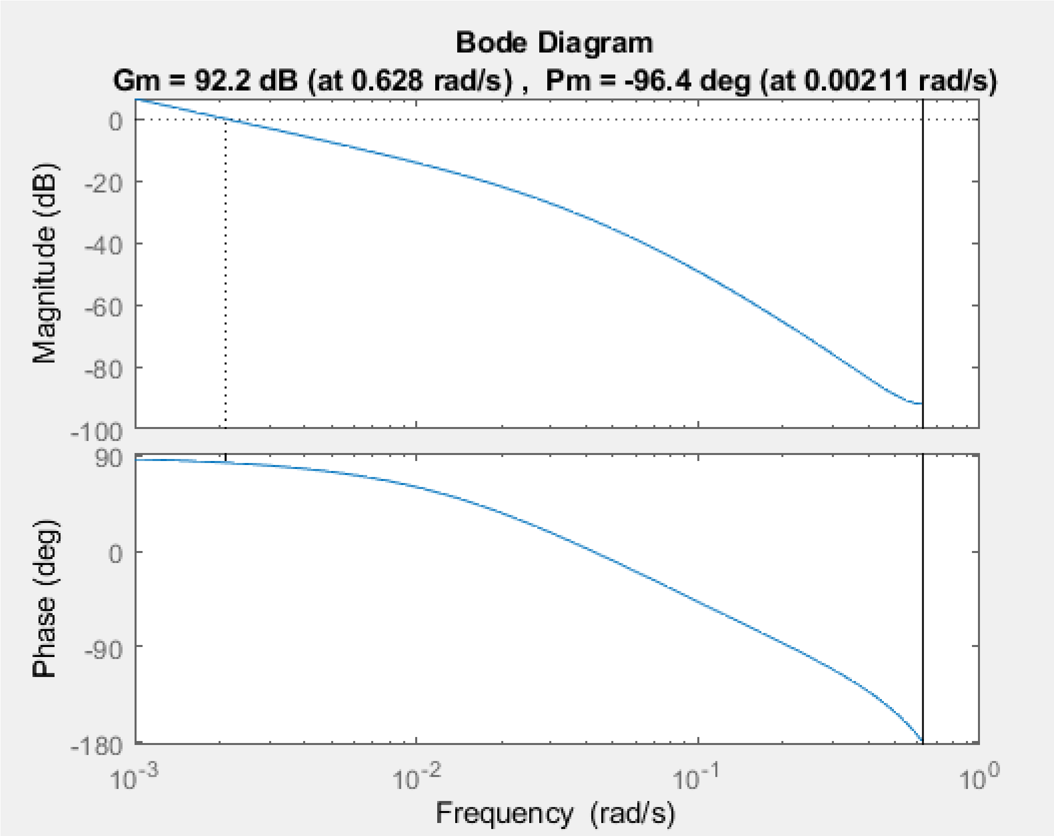
که به ازای $T = 5$ خواهیم داشت :

$$H_{(z)} = (1-z^{-1}) * Y_{D(z)} = \frac{-0.00008 * z^2 - 0.0003 * z^1 - 0.00006}{z^3 - 2.513 * z^2 + 2.069 * z^1 - 0.5563}$$

حال مکان ریشه آن را رسم می کنیم:



و نمودار بد آن به شکل زیر می شود:



که در آن حد فاز و بهره مشخص است.

و در انتها نیز پهنای باند نمایش داده می شود.

```
Bandwidth is : Inf
```

در ادامه بازه ای از بهره که سیستم به ازای آن پایدار می ماند را با استفاده از پایداری جوری محاسبه می کنیم :

$$1 + K * H_{(z)} = 0 \rightarrow 1 + K * \frac{-0.00008 * z^2 - 0.0003 * z^1 - 0.00006}{z^3 - 2.513 * z^2 + 2.069 * z^1 - 0.5563} \rightarrow$$
$$z^3 - 2.513 * z^2 + 2.069 * z^1 - 0.5563 + K * (-8 * 10^{-5} * z^2 - 3 * 10^{-4} * z^1 - 6 * 10^{-5}) = 0 \rightarrow$$
$$z^3 + (-2.513 - K * -8 * 10^{-5}) * z^2 + (2.069 - K * 3 * 10^{-4}) * z^1 + (-0.5563 - K * 6 * 10^{-5}) = 0$$

که با استفاده از پایداری Jury خواهیم داشت :

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -2.513 - K * -8 * 10^{-5}$$
$$a_2 = 2.069 - K * 3 * 10^{-4} \quad , \quad a_3 = -0.5563 - K * 6 * 10^{-5}$$

-	z^0	z^1	z^2	z^3
1	a_3	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3
3	b_2	b_1	b_0	

که ضرایب b_i ها به این صورت خواهد بود :

$$b_2 = \det\begin{pmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad b_0 = \det\begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

برای این که چند جمله ای مذکور ریشه خارج از دایره واحد نداشته باشد باید داشته باشیم :

$a_0 > 0 \rightarrow 1 > 0$

$|a_3| < a_0 \rightarrow -a_0 < a_3 < a_0$

$P(z)_{|z=1} > 0$

$P(z)_{|z=-1} < 0$

$|b_2| > |b_0|$

که با اعمال شروط فوق محدوده ی زیر برای K به دست خواهد آمد :

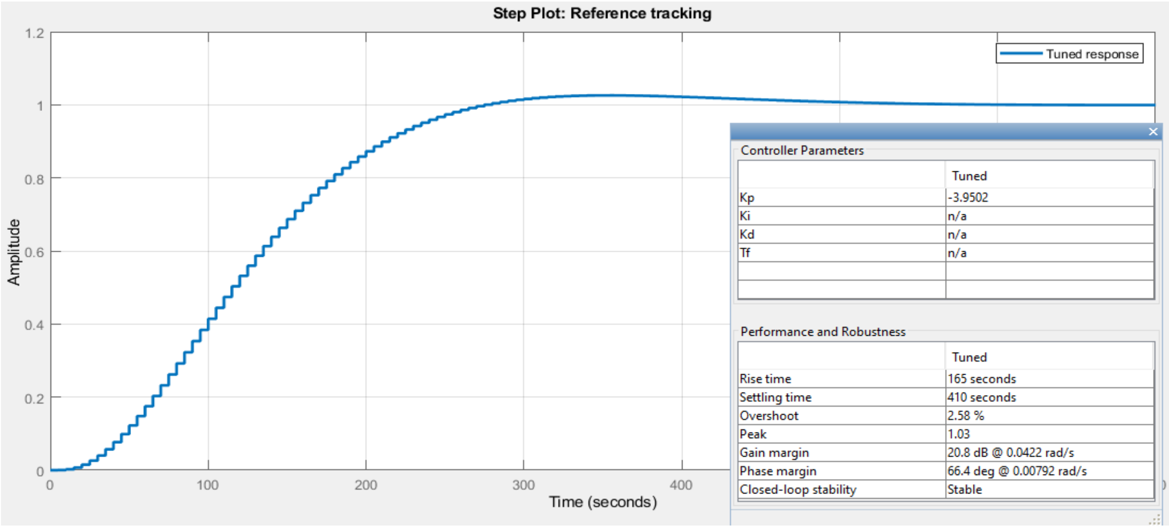
$$-45 < K < +45$$

۵)

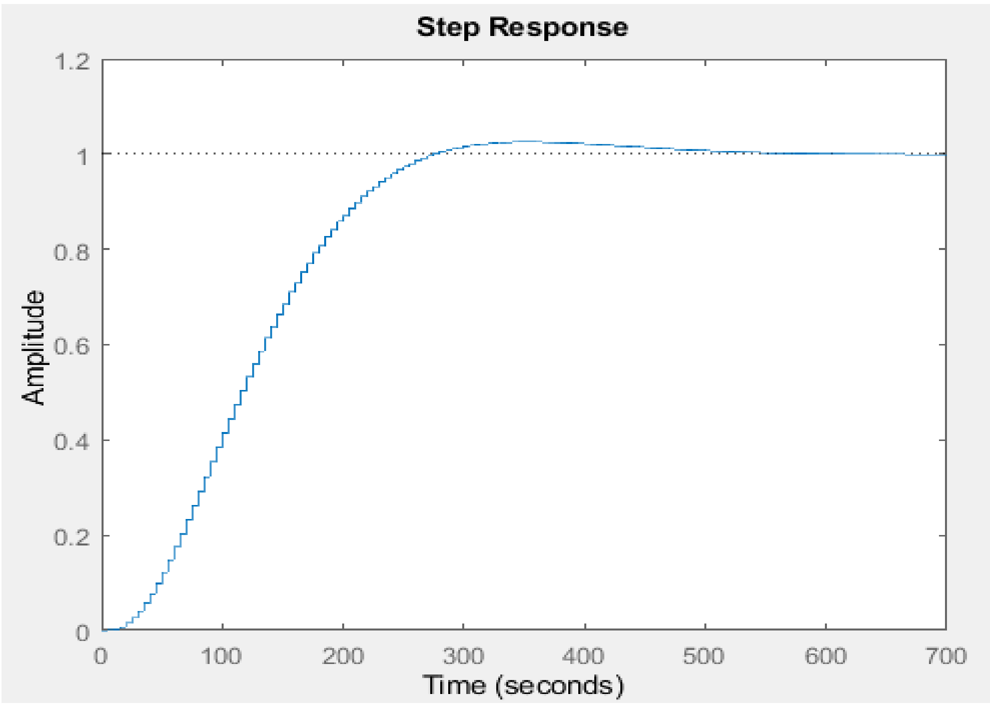
از روی مکان هندسی به دست آمده در قسمت قبل , پیدا است که می توان سیستم را تنها با یک کنترلر P (فقط یک ضریب k) کنترل کرد و بازه ای از K که به ازای آن سیستم پایدار خواهد ماند را از قسمت قبل داریم :

$$-45 < K < +45$$

در ادامه نیز یک بار با استفاده از pidTuner کنترلر را طراحی می کنیم و خواهیم دید که یک کنترلر P در محدوده ی K به دست آمده حاصل خواهد شد.



که خروجی در حلقه کنترلی به شکل زیر می شود:



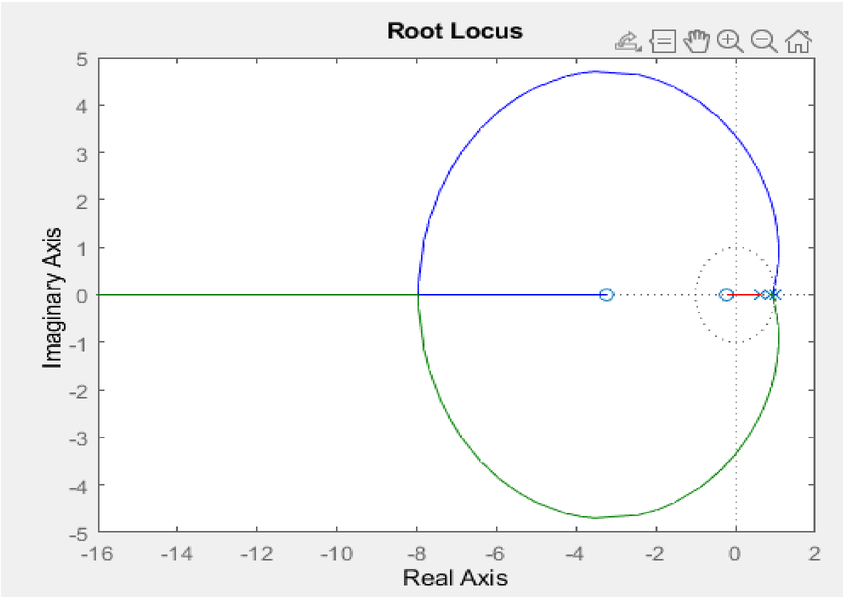
و ویژگی های حالت ماندگار و گذرا به شکل زیر است:

```
  struct with fields:

        RiseTime: 165
    SettlingTime: 410
     SettlingMin: 0.910859833687529
     SettlingMax: 1.025766797063903
       Overshoot: 2.576679706387908
      Undershoot: 0
            Peak: 1.025766797063903
        PeakTime: 350

steady state error = 0.0016832
```

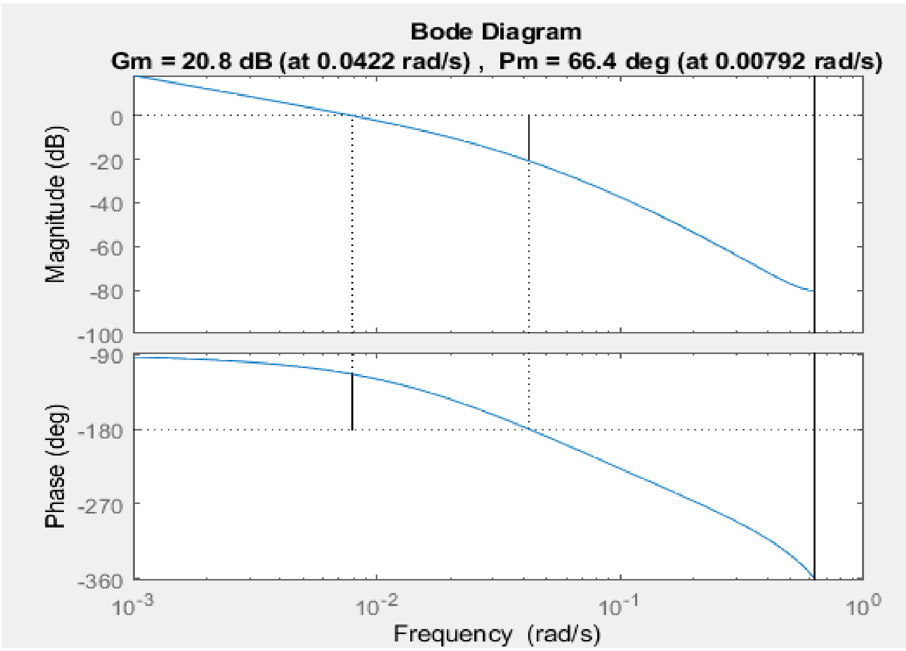
که همانطور مشاهده می شود هم زمان نشست هم اورشوت مناسب می باشد.

۶)

حال با استفاده از کنترلری که در سوال قبل بدست آوردیم نمودار بد و مکان ریشه را رسم می کنیم و در ابتدا نمودار مکان ریشه را داریم که به شکل زیر می باشد داریم:



و نمودار بد آن به شکل زیر است:



همانطور که مشاهده شد مقادیر حد فاز و بهره تغییر کرده اند و میدانیم برای پایداری باید هر دوی آن ها مثبت با شد که کنترلر باعث شده است حد فاز مثبت شود و در سیستم کنترل شده هر دو مثبت بوده و یعنی پایدار می باشد. از طرفی میدانیم به طور معمول در طراحی سیستم ها حد فاز باید در بازه ۳۰ تا ۶۰ باشد که در اینجا در همان حدود می باشد و حد فاز نیز در محدوده مناسبی می باشد.

۷)

در این سوال کنترلر مرده نوش را طراحی می کنیم. ابتدا باید F(z) را پیدا کنیم. با توجه به H(z) که تابع تبدیل کلی می باشد اولین جمله آن از ترم Z^-1 می باشد پس برای F(z) داریم:

$$F(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$$

حال صفر ها و قطب های تابع تبدیل اصلی را نمایش می دهیم و داریم:

```
>> pole(Hz)

ans =

   1.000000000000004
   0.882464117370968
   0.630360848107380
```

```
>> zero(Hz)

ans =

  -3.236545817290016
  -0.230473704905303
```

همانطور که مشاهده می شود یک صفر ناپایدار دارد پس:

$$F(z) = (1 + 3.236545z^{-1})(m_1 z^{-1}) \Rightarrow f_2 = 3.23654 f_1$$

و چون برای ورودی پله خواسته است داریم:

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})(1 + n_1 z^{-1}) \Rightarrow f_2 - 1 = -f_1$$

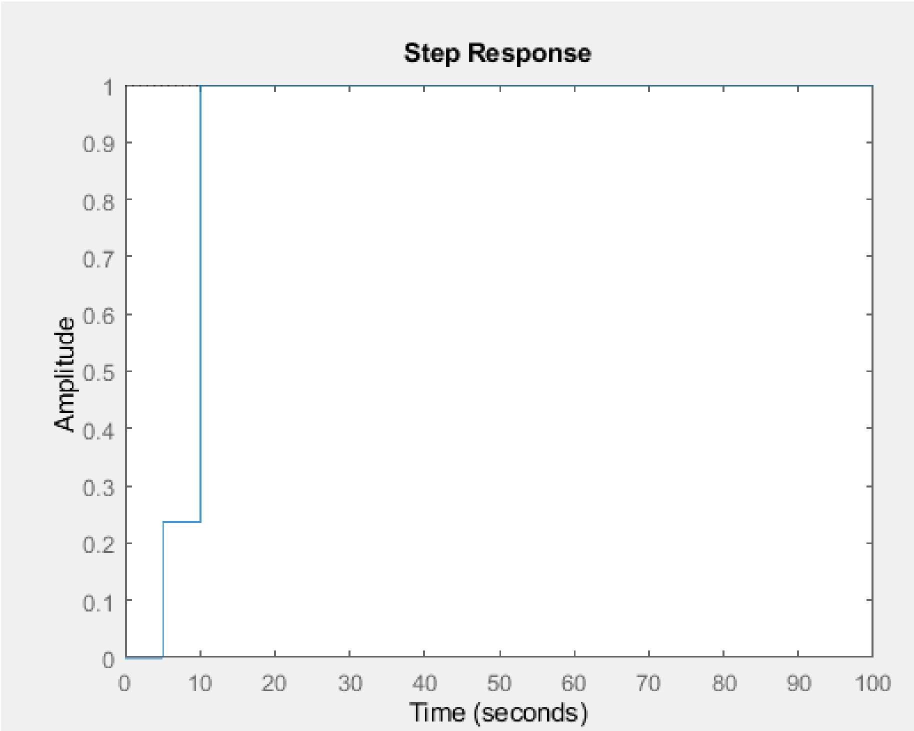
با استفاده از دو معادله بالامی توان F(z) را بدست آورد و سپس می توان کنترلر را بدست آورد که داریم:

$$C(z)\frac{F(z)}{\big(1 - F(z)\big)H(z)}$$

که در نهایت C(z) بدست می آید:

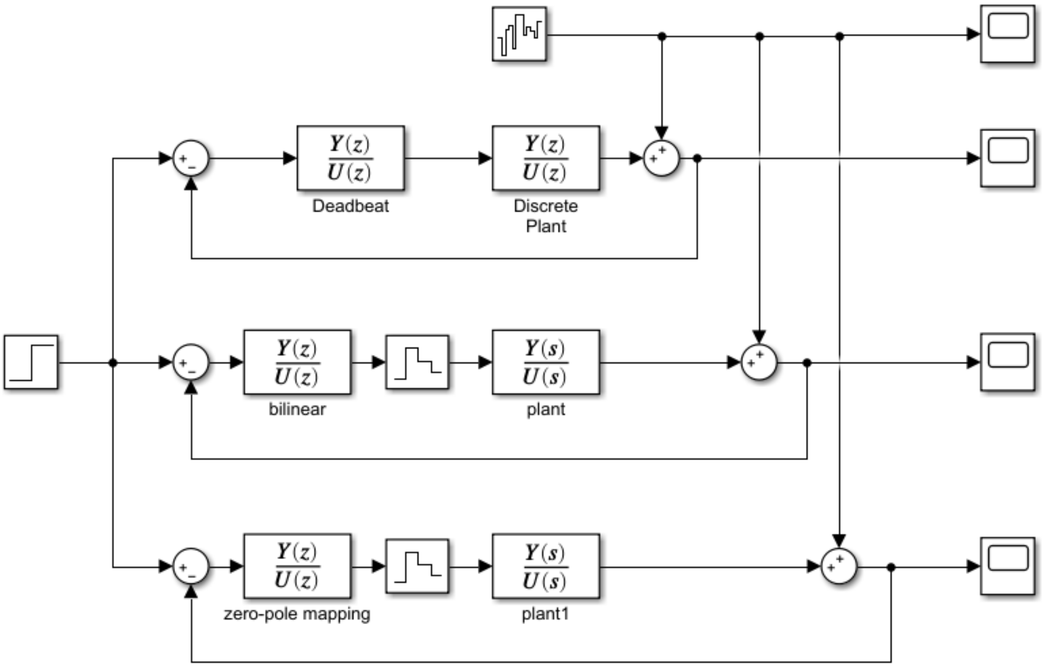
```
Cz =

  -2682 z^2 + 4057 z - 1492
  -------------------------
   z^2 + 0.9944 z + 0.1761
```

که حال اگر با استفاده از این کنترلر حلقه کنترلی را ایجاد کرده و نمودار با ورودی پله را رسم کنیم داریم:

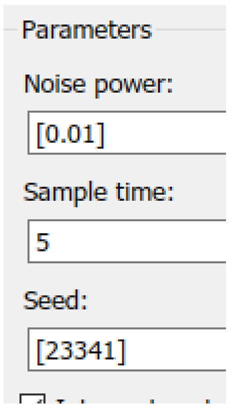

Step Response
Amplitude
Time (seconds)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

۸)

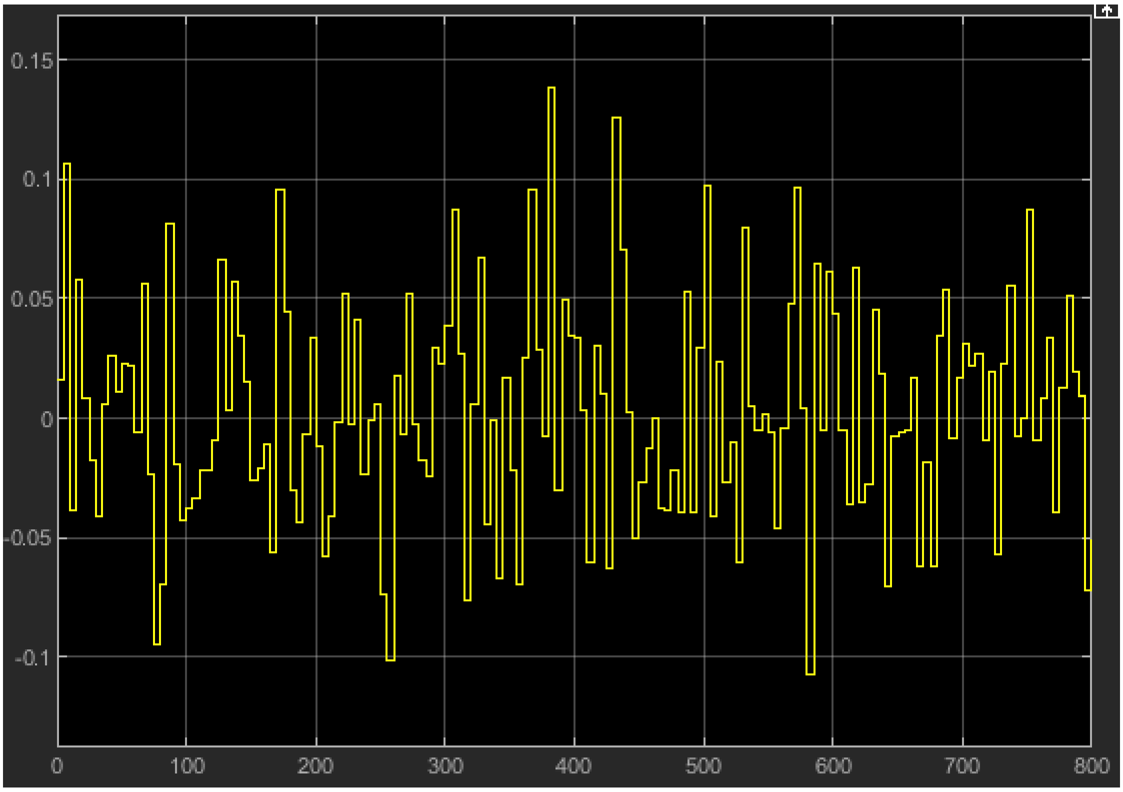
در این بخش ابتدا باید فایل با پسوند m. اجرا شود تا کنترلر ها و تابع تبدیل سیستم ها ایجاد شود سپس مداری مانند شکل زیر را در محیط سیمولینک ایجاد می کنیم:



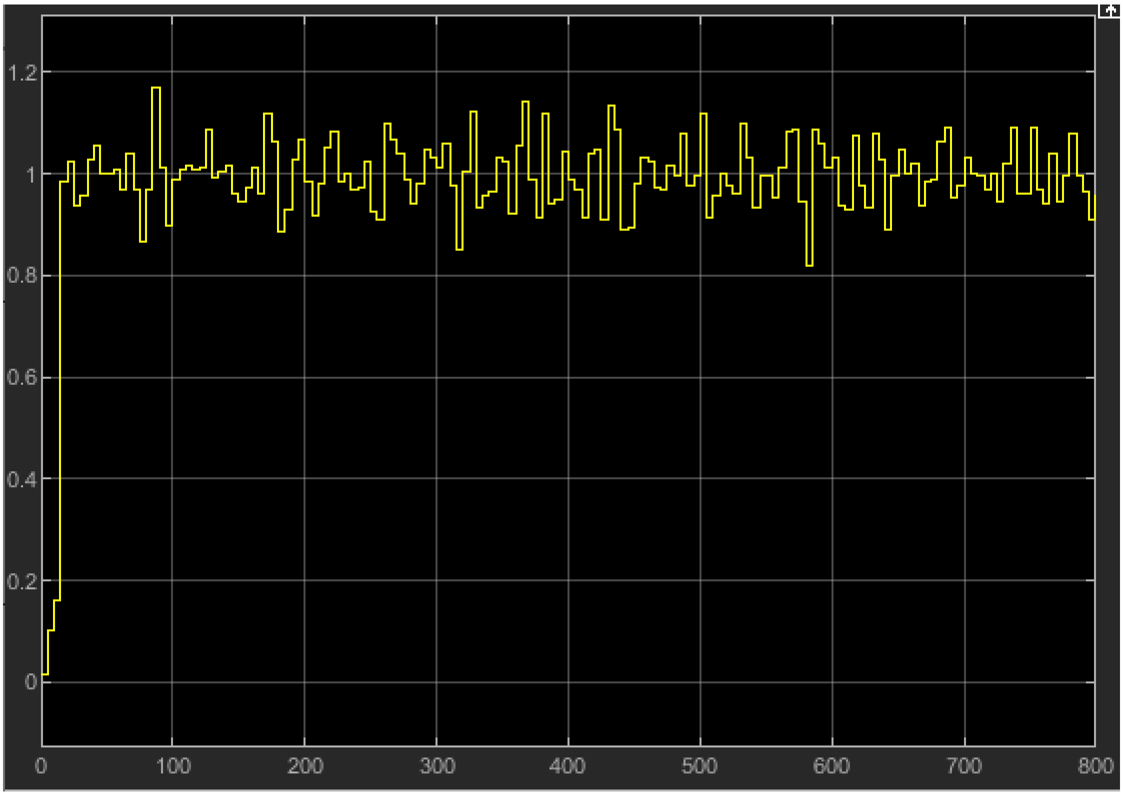
که پارامتر های نویز به شکل زیر تنظیم شده اند:



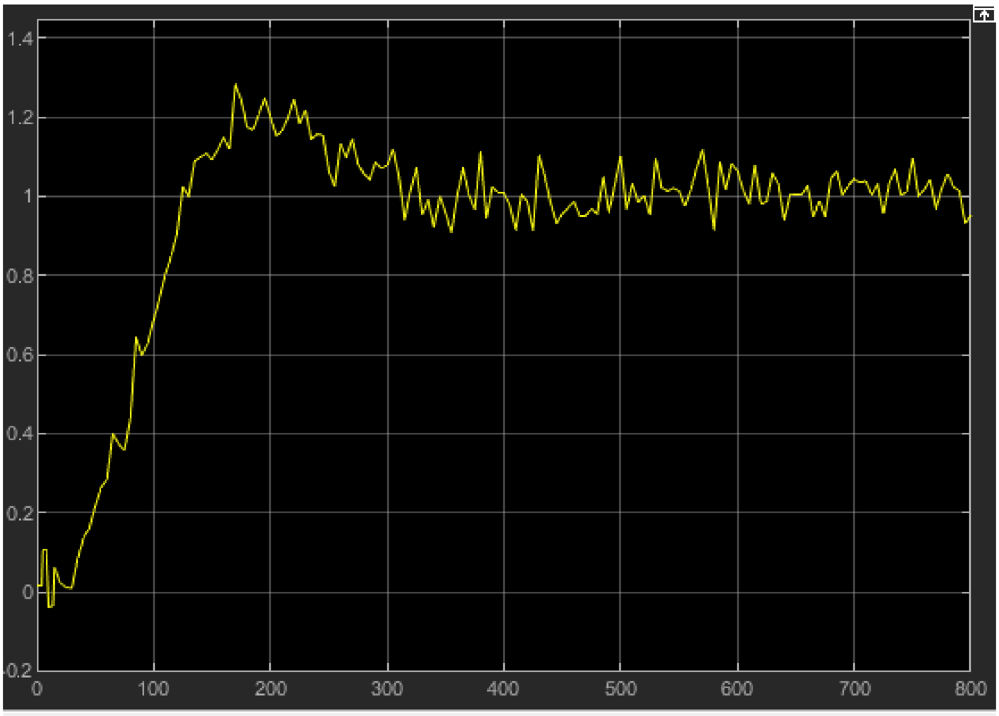
که خروجی نویز به شکل زیر می باشد:



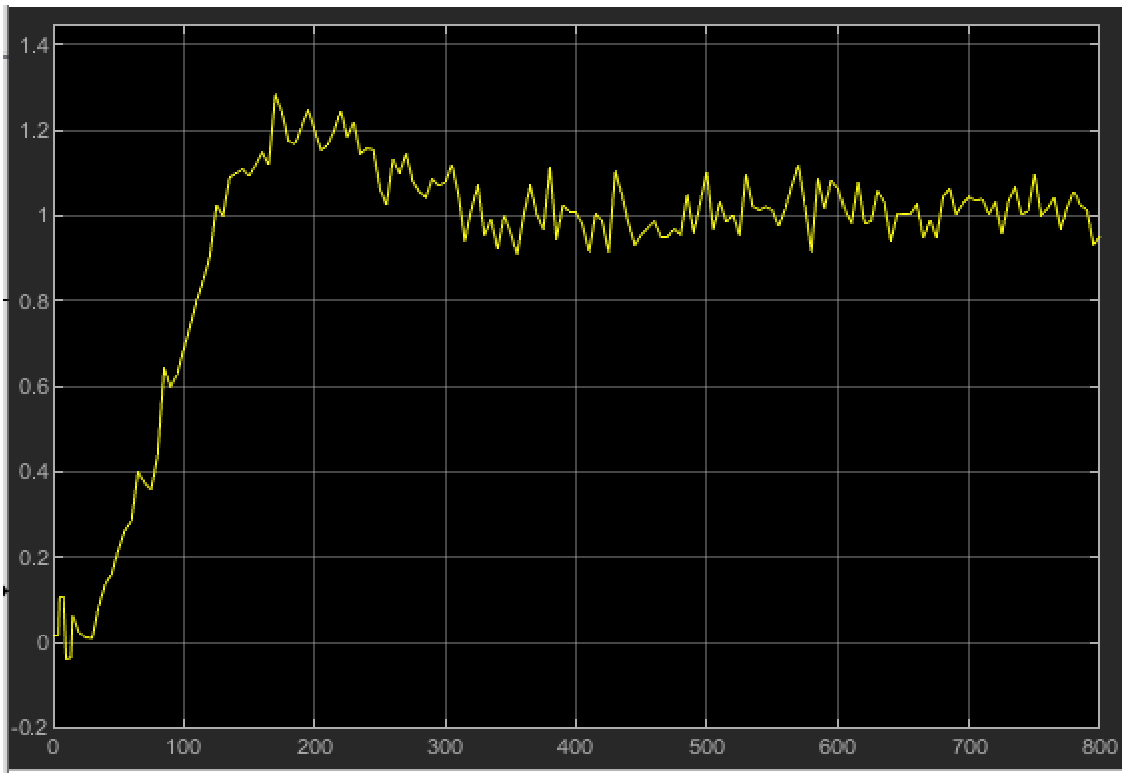
و درنهایت خروجی ها را مشاهده می کنیم. در ابتدا خروجی کنترلر مرده نوش را مشاهده می کنیم:



حال برای تبدیل دو خطی را داریم:



و در نهایت برای تبدیل صفر و قطب تطبیق یافته نیز به شکل زیر است:



همانطور که مشاهده می شود هر سه کنترلر در صورت وجود اغتشاش هم به درستی عملکرده است.

۹)

در این سوال با فرض نرخ نمونه برداری ۵ با توجه به فرمول های زیر داریم:

$$G = e^{At}\,, H = \int_0^T e^{A\alpha}B\, d\alpha$$

که با قطعه کد زیر پس از بدست آوردن ماتریس ها ماتریس های کنترل پذیری و رویت پذیری محاسبه شده و در نهایت رنک آن ها نمایش داده می شود:

```
A = [0 -4.5 0 ; 0 -0.025 0.000013 ; 0 0 -5.4/60];
B = [0 ; 0 ; 1/12];
C = [1 0 0];
T = 5;
G = expm(A*T);
func = @(x) expm(x*A)*B;
H = integral(func,0,T,'ArrayValued',1);
controllability  = [H  G*H G^2*H];
observability  = [C ; C*G ; C*G^2];
disp(['Rank of controllability matrix is ' num2str(rank(controllability)) ])
disp(['Rank of observability matrix is ' num2str(rank(observability)) ])
```

که خروجی به شکل زیر می شود:

```
Rank of controllability matrix is 3
Rank of observability matrix is 3
```

و با توجه به اینکه فول رنک هستند پس هم کنترل پذیر بوده و هم رویت پذیر می باشد.

حال ماتریس های بدست آمده را به شکل زیر داریم:

```
G =

   1.000000000000000 -21.150557534772830  -0.000606393023172
                   0   0.882496902584595   0.000048973750193
                   0                   0   0.637628151621773

H =

  -0.000088256535876
   0.000011229500429
   0.335529489239099
```

و تقریبی از معادلات فضای حالت گسسته به شکل زیر می شود:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1 - 21.15x_2 - 0.0006x_3 - 0.00008u(k) \\ x_2(k+1) = 0.882x_2 + 0.000x_3 + 0.00001u(k) \\ x_3(k+1) = 0.63x_3 + 0.33u(k) \end{cases}$$

۱۰)

در این سوال ابتدا ماتریس های حالت گسسته محاسبه می شوند سپس ماتریس کنترل پذیری یا همان M را بدست می آوریم و سپس با استفاده از قسمت ابتدایی کد تابع تبدیل پالسی را بدست آورده و ضرایب مورد نیاز را استخراج می کنیم که خروجی قسمت ابتدایی کد به شکل زیر خواهد بود:

```
Now we show a1 a2 a3

den{1} =

   1.000000000000000  -2.512729284978286   2.068907410349227  -0.556178125370942
```

حال ماتریس W که با استفاده از ضرایب بدست آمده محاسبه می شود را بدست می آوریم:

```
W =

   2.068907410349227  -2.512729284978286   1.000000000000000
  -2.512729284978286   1.000000000000000                   0
   1.000000000000000                   0                   0
```

حال با استفاده از فرول زیر ماتریس T را بدست می آوریم:

```
T =

  -0.000065648276946  -0.000305137739297  -0.000088014915701
  -0.000009202457062  -0.000001986238407   0.000011188695469
   0.294511531781276  -0.628236818429570   0.333725286648294
```

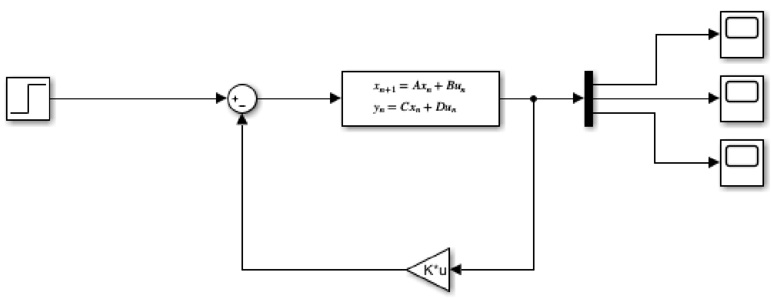
و درنهایت با استفاده از فرمول زیر ورودی فیدبک مورد نظر را بدست می آوریم:

$$u = -[-a_3 - a_2 \; -a_1]T^{-1}x$$

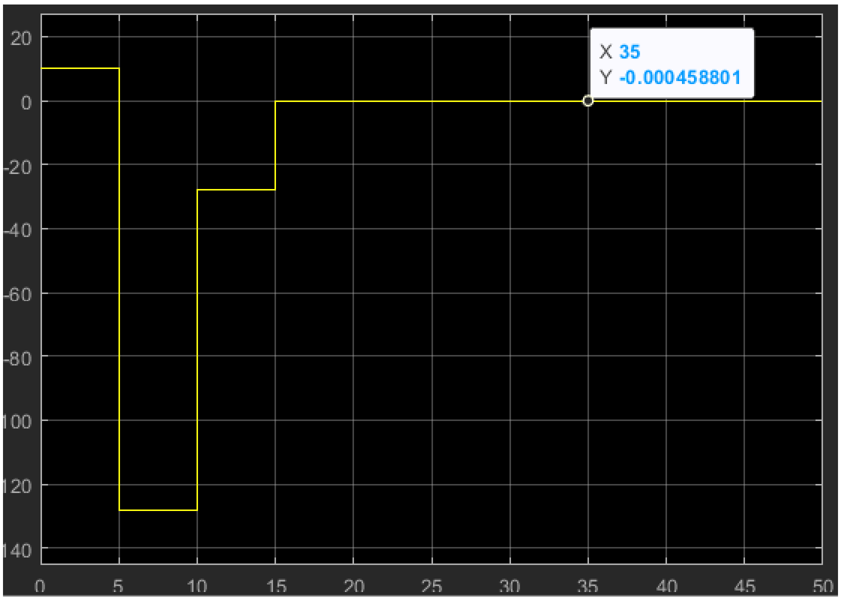
و درنهایت u بدست می آید:

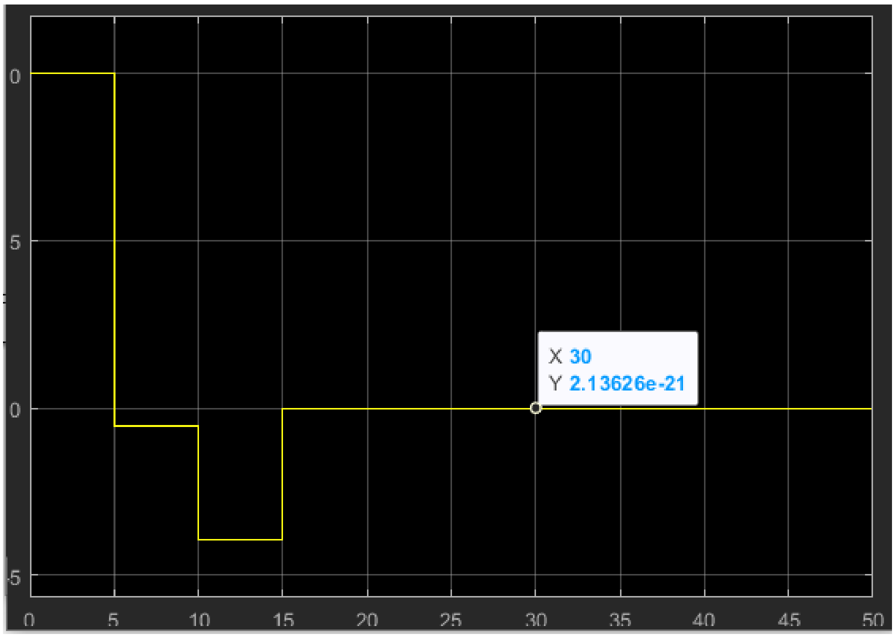
```
U is
   1.0e+04 *

  -0.217959452645970   8.571244823702385   0.000408084742073
```

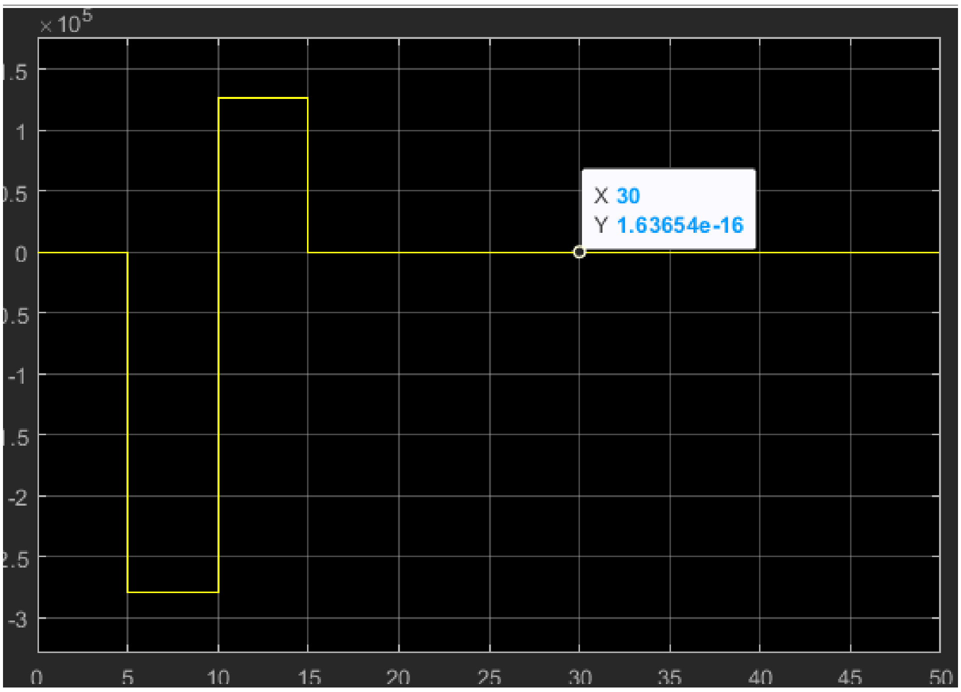
حال مدار زیر را در سیمولینک با توجه به ماتریس های بدست آمده از کد پیاده سازی می کنیم:



و حالت ها در خروجی به شکل زیر دیده می شوند:







همانطور که مشاهده شد به حالت ها مقدار اولیه ۱۰ را داده ایم که در ۳ دوره نمونه برداری به مقدار مطلوب رسیده اند.

(۱۱)

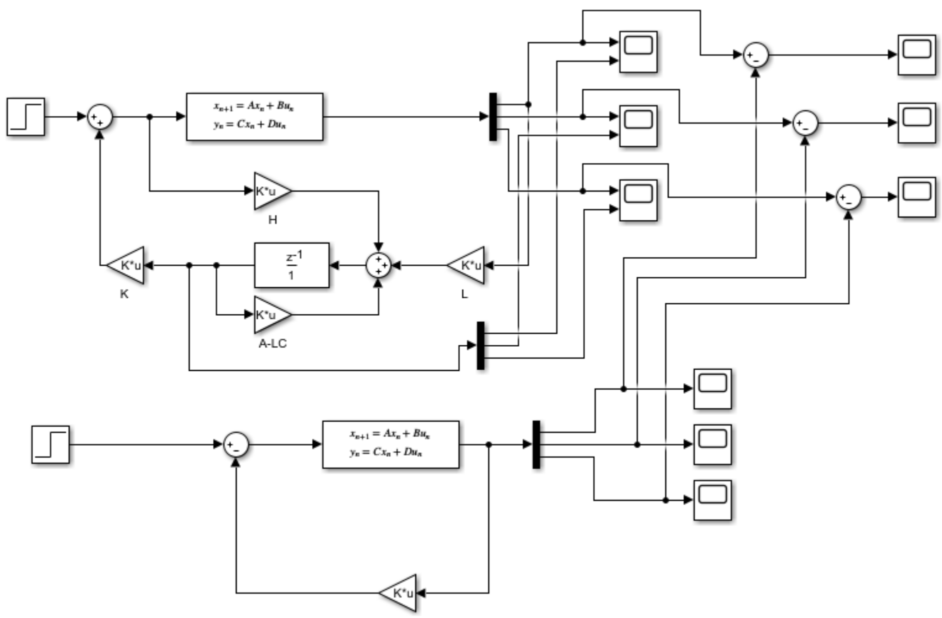
با استفاده از رابطه ی زیر مقدار L را محاسبه می کنیم.

$$L = \psi(G) * N^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

که معادله ی مشخصه مطلوب را هم به گونه ای انتخاب می کنیم که ریشه های آن داخل دایره واحد باشد و از نظر پایداری مشکلی نداشته باشیم و در اینجا ما رویت گر را نیز مرده نوش در نظر می گیریم پس :

$$\psi(\lambda) = \lambda^3$$

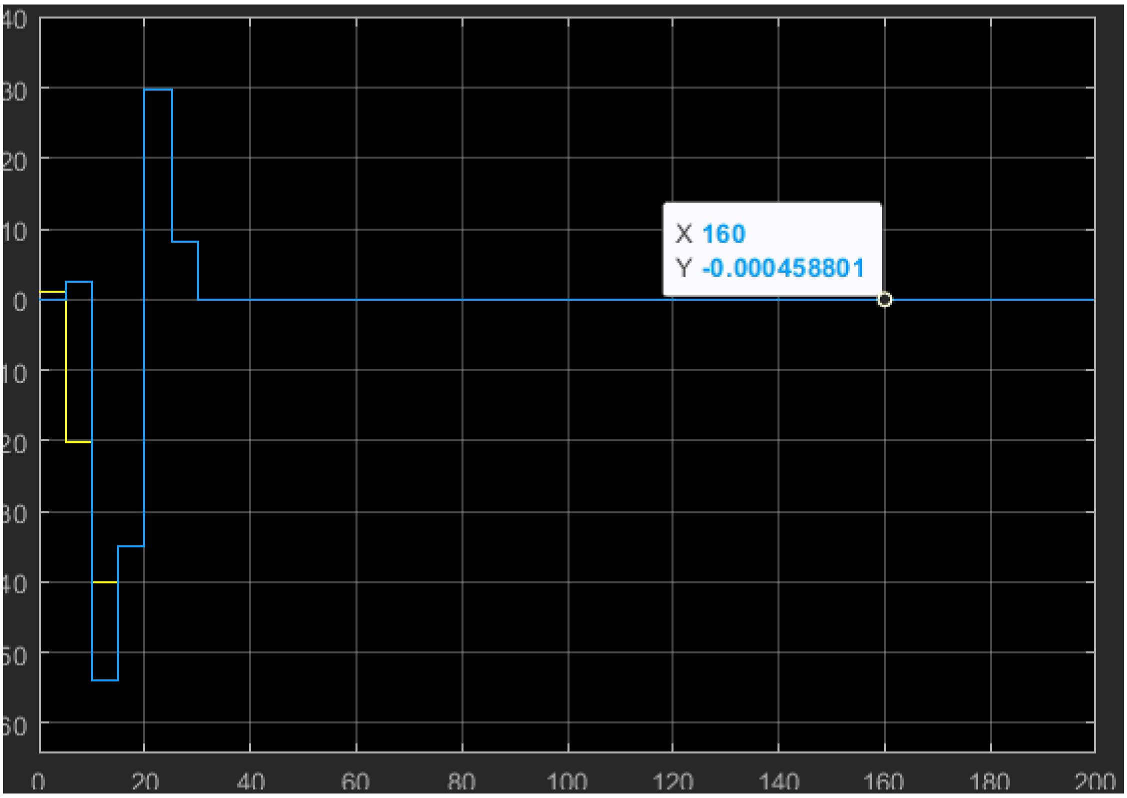
حال با توجه به رابطه ای که داشتیم می توان L را بدست آورد و سپس A-LC را نیز بدست می آوریم و مدار زیر را طراحی می کنیم:

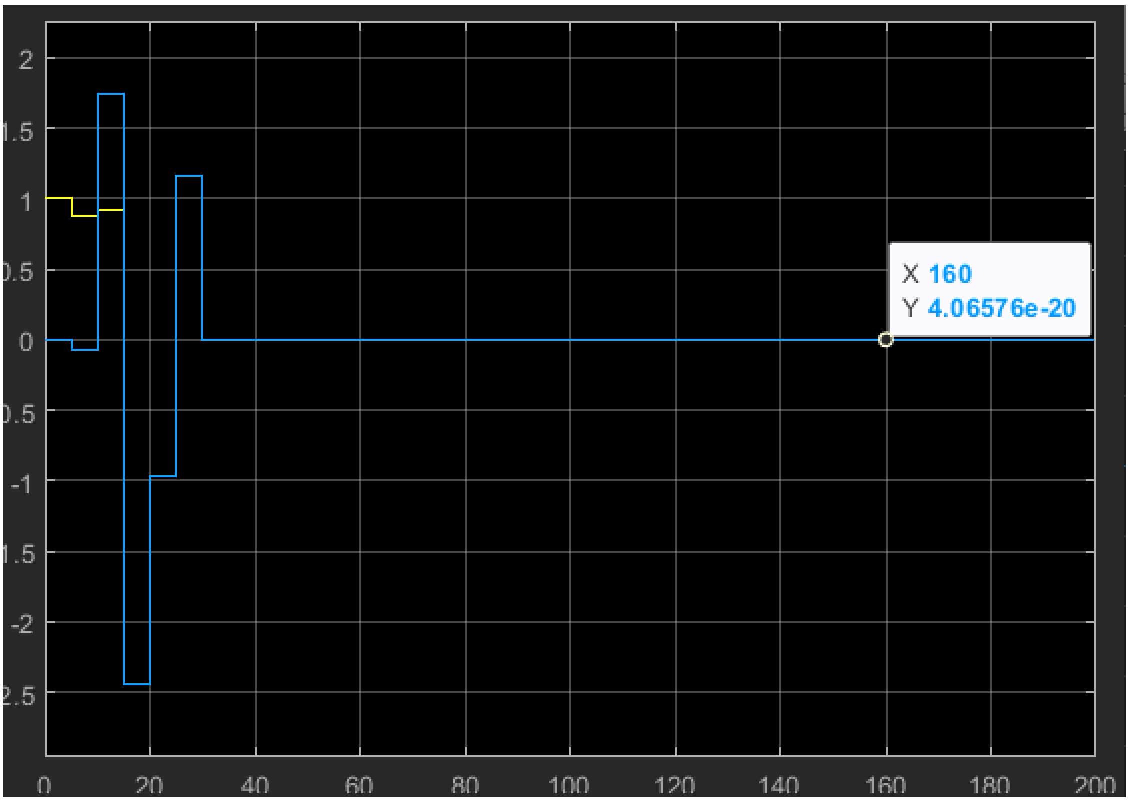


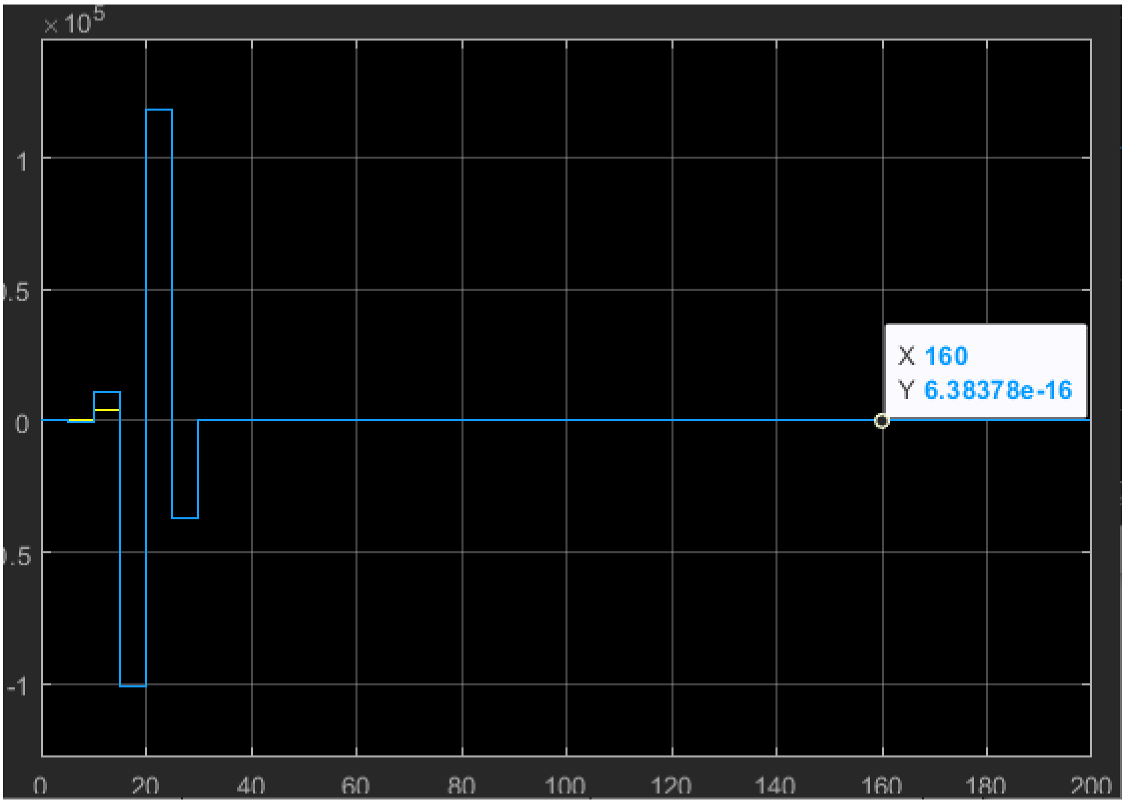
که در اینجا L به شکل زیر بدست می آید :

```
L is :
   1.0e+02 *

   0.025127292849783
  -0.000737501490094
  -2.852002205623906

A-LC is :
   1.0e+02 *

  -0.015127292849783  -0.211505575347728  -0.000006041895553
   0.000737501490094   0.008824969025846   0.000000487045361
   2.852002205623906                   0   0.006302323823937
```

که خروجی ها به شکل زیر می شود:



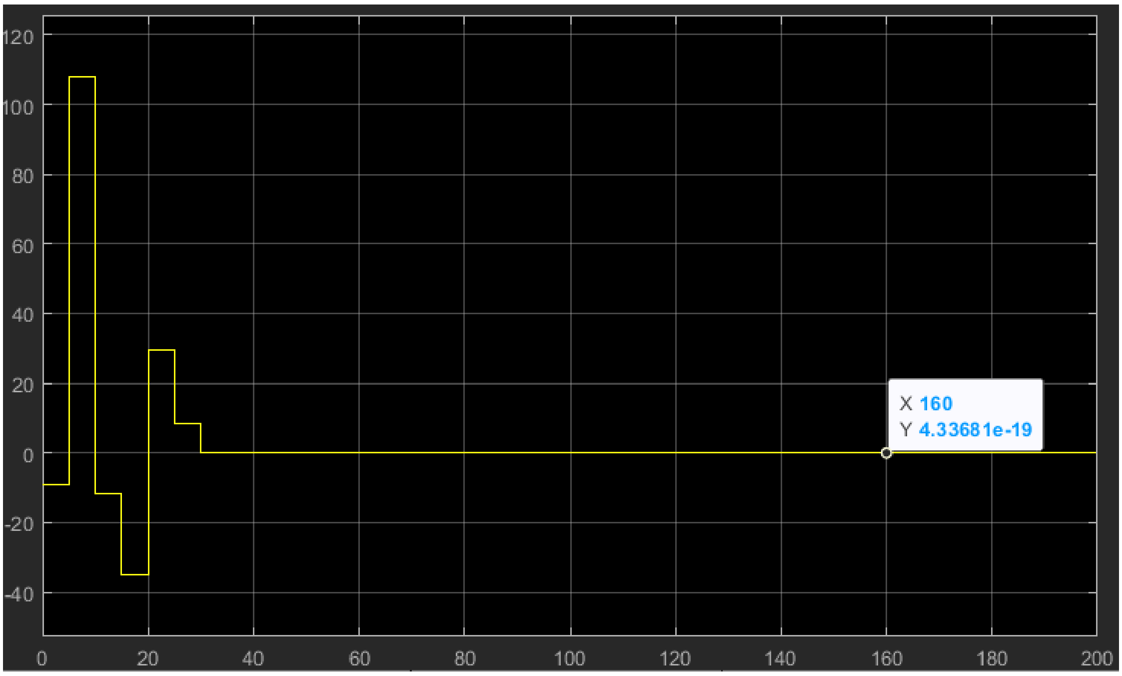


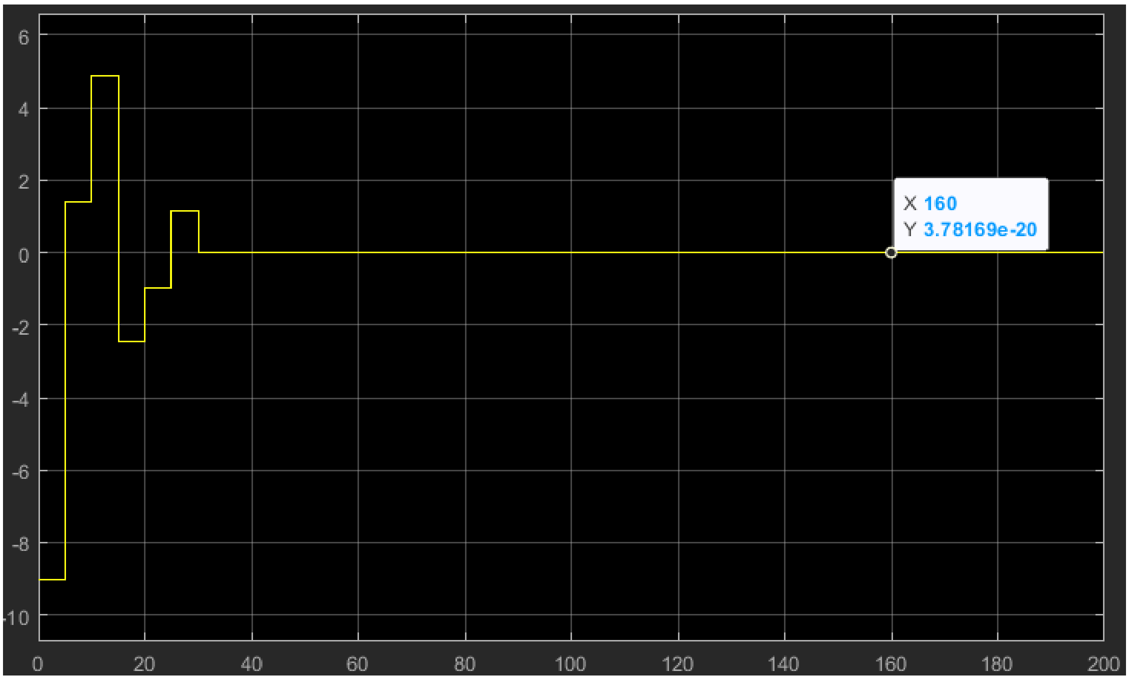


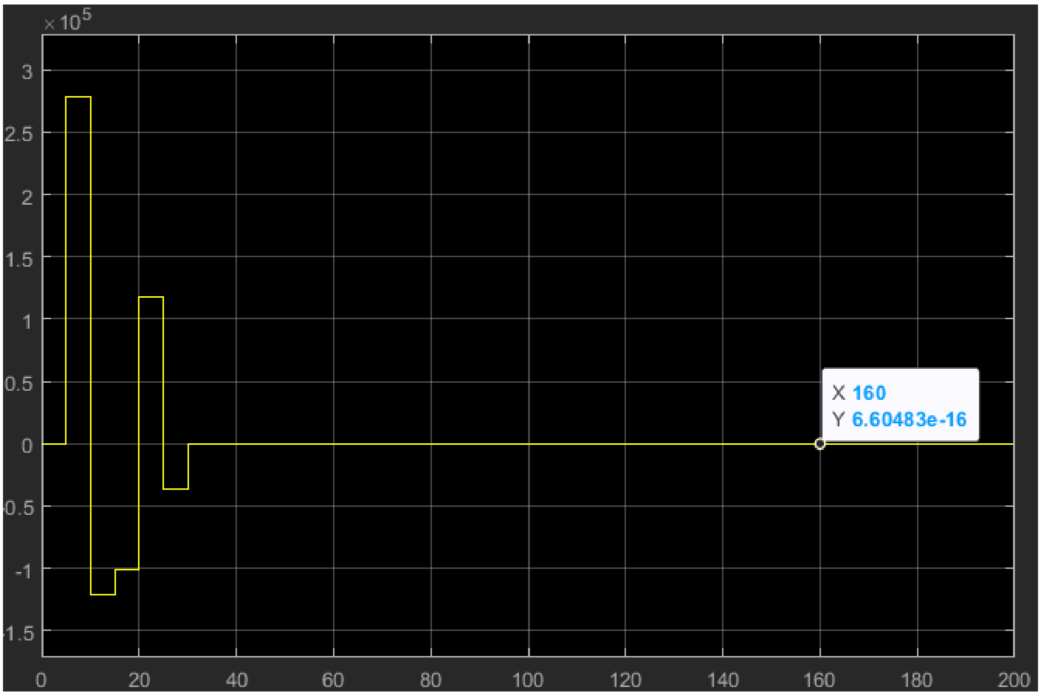
نمودار های زرد حالت های سیستم و نمودار های آبی تخمین ها می باشد. با توجه به اینکه رویت گر ما مرده نوش می باشد و ابعاد فضای حالت سه می باشد رویت گر ما بعد از گذشت سه دوره با حالت اصلی سیستم یکسان شده است و بعد از این زمان در سه دوره زمانی دیگر به مقدار مطلوب می رسد.

در این سوال مشاهده شد که هم رویت گر هم کنترلر از نوع مرده نوش در نظر گرفته شده بودند و در خروجی این نمایان بود زیرا بعد از سه دوره نمونه برداری ابتدا رویتگر به حالت اصلی سیستم می رسد و بعد از آن در سه دوره دیگر سیستم کنترل می شود. دلیل آن هم این می باشد که با استفاده از این کنترلر و با توجه به این که ماتریس های پوچ توان در توان مشخصی به صفر می رسند این عمل صورت می گیرد.

همانطور که در مدار طراحی شده مشاهده کردید مدار سوال قبل که به صورت مستقیم از حالت ها فیدبک می گیرد نیز وجود دارد و خروجی مدار بدون رویتگر و خروجی مدار با رویتگر از یکدیگر کسر شده تا بتوان آن ها را مقایسه کرد که به ترتیب حالت ها داریم:


120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
X 160
Y 4.33681e-19


6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
X 160
Y 3.78169e-20



همانطور که مشاهده می شود بعد از زمانی اختلاف آن ها خیلی کم می باشد و نشان از عملکرد مناسب رویتگر می باشد.