به نام خدا

دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

اصول سیستم های مخابراتی

تمرین کامپیوتری اول

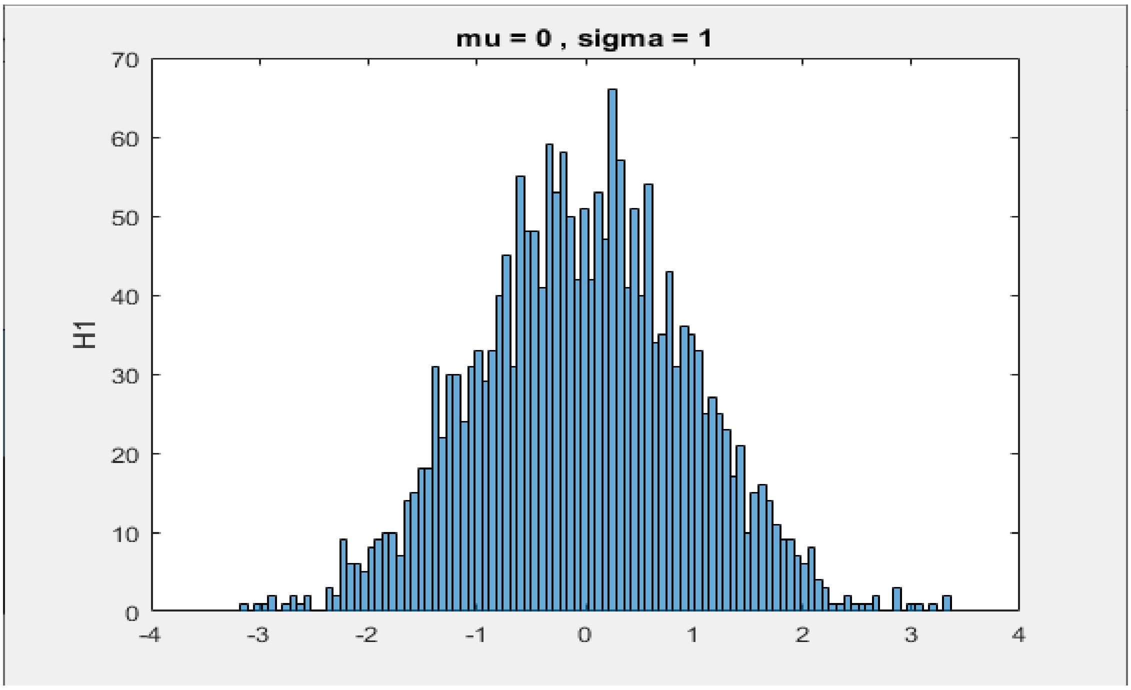
نام و نام خانوادگی	محمدرضا بختیاری
شماره دانشجویی	810197468
تاریخ ارسال گزارش	1399/10/25

فهرست گزارش سوالات

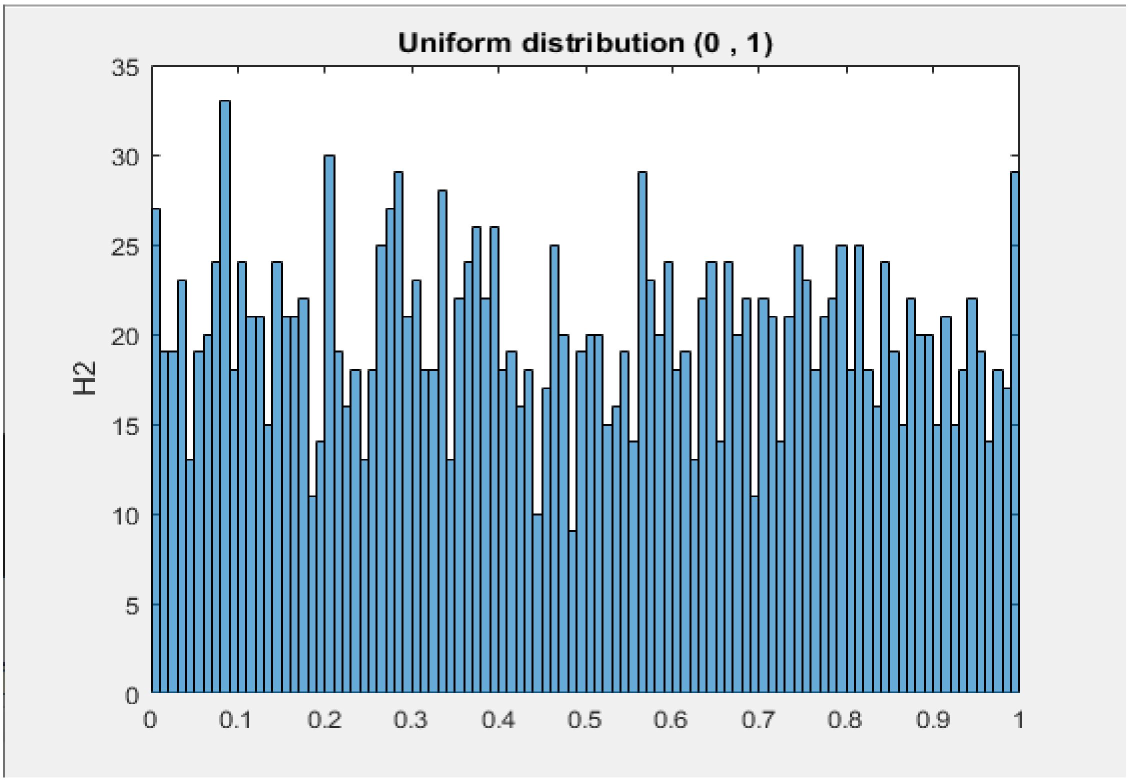
Code :

```
%% Part: 1 Q: 1
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
a = 0 ;   b = 1 ;
number = 2000 ;
nbins = 100 ;

V1 = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;      %Normal distribution
V2 = a + (b-a).*rand(1,number) ;         %Uniform distribution

figure;                                  %Plot H1
H1 = histogram(V1,nbins) ;
ylabel('H1');
title(' mu = 0 , sigma = 1 ')

figure;                                  %Plot H2
H2 = histogram(V2,nbins) ;
title(' Uniform distribution (0 , 1) ')
ylabel('H2');

figure;                                  %Plot H1 and H2 together
H1 = histogram(V1,nbins) ;
hold on
H2 = histogram(V2,nbins) ;
title(' H1 and H2 together ')
ylabel('H1 and H2');
```

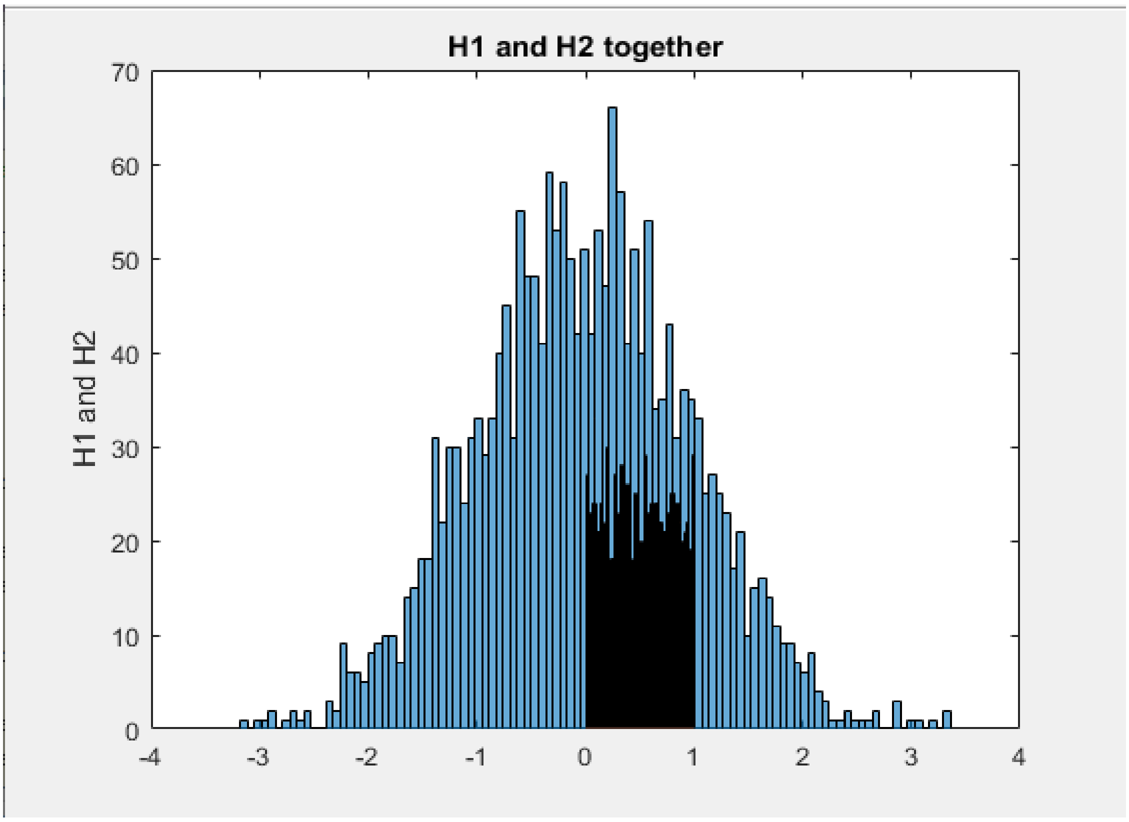
Normal histogram :



Uniform histogram :



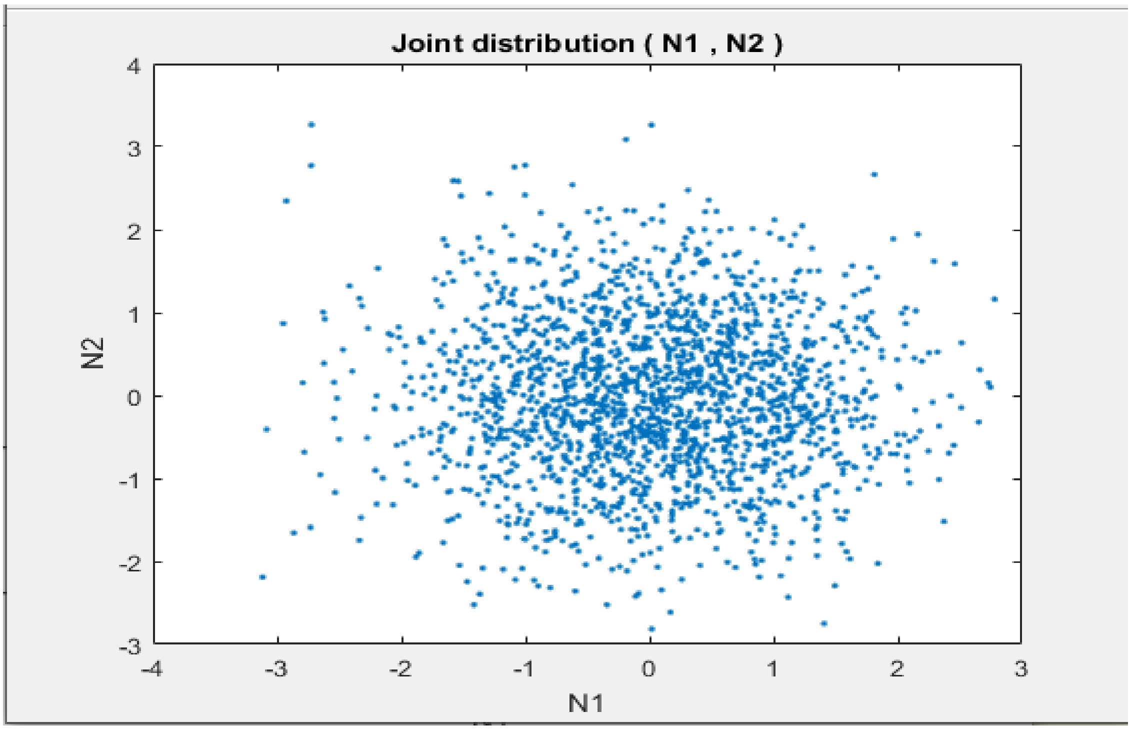
Normal and Uniform histogram together :



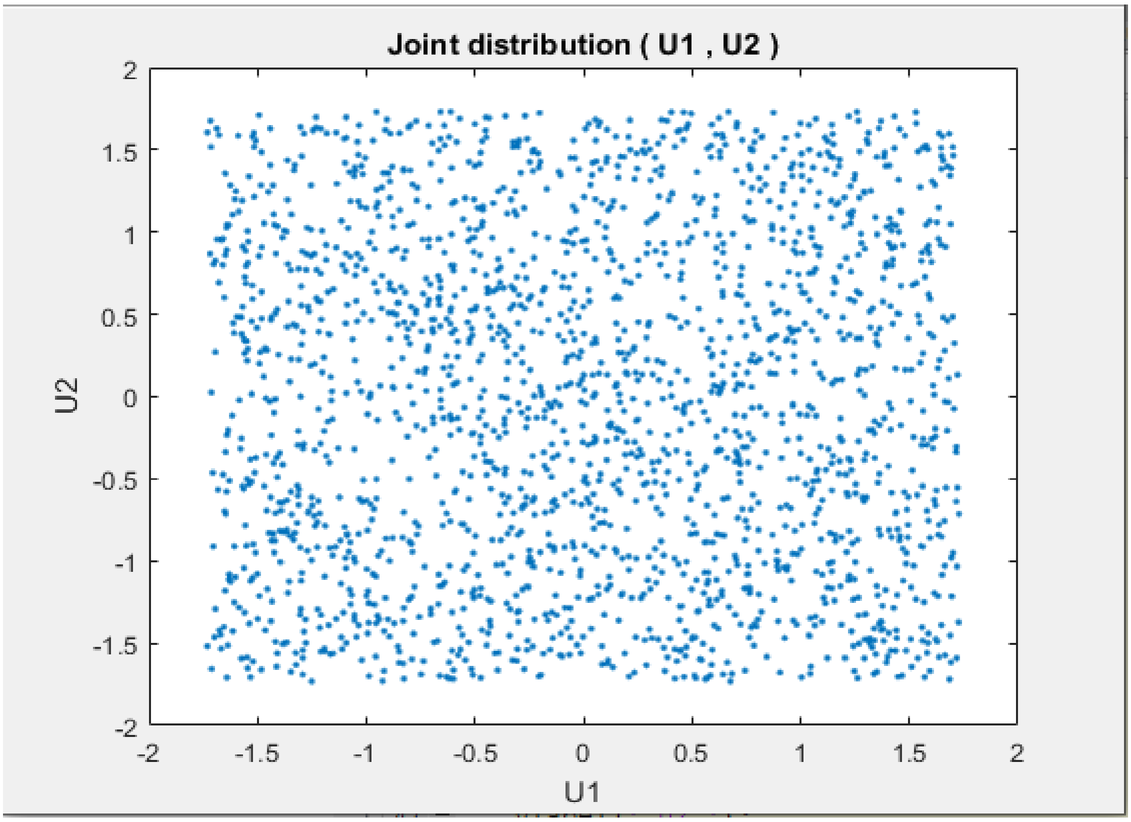
Code :

```
%% Part: 1 Q: 2
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
a = 3^(0.5) ;
number = 2000 ;
                                        %Normal distribution
N1 = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;
N2 = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;

figure;
plot(N1,N2,'.') ;                       %Plot Joint distribution N1 and N2
title(' Joint distribution ( N1 , N2 ) ')
xlabel(' N1 ');
ylabel(' N2 ');
                                        %Uniform distribution
U1 = -a + (a+a).*rand(1,number) ;
U2 = -a + (a+a).*rand(1,number) ;

figure;                                 %Plot Joint distribution U1 and U2
plot(U1,U2,'.') ;
title(' Joint distribution ( U1 , U2 ) ')
xlabel(' U1 ');
ylabel(' U2 ');

figure;                                 %Plot Joint distribution N1 and U1
plot(N1,U1,'.') ;
title(' Joint distribution ( N1 , U1 ) ')
xlabel(' N1 ');
ylabel(' U1 ');
```

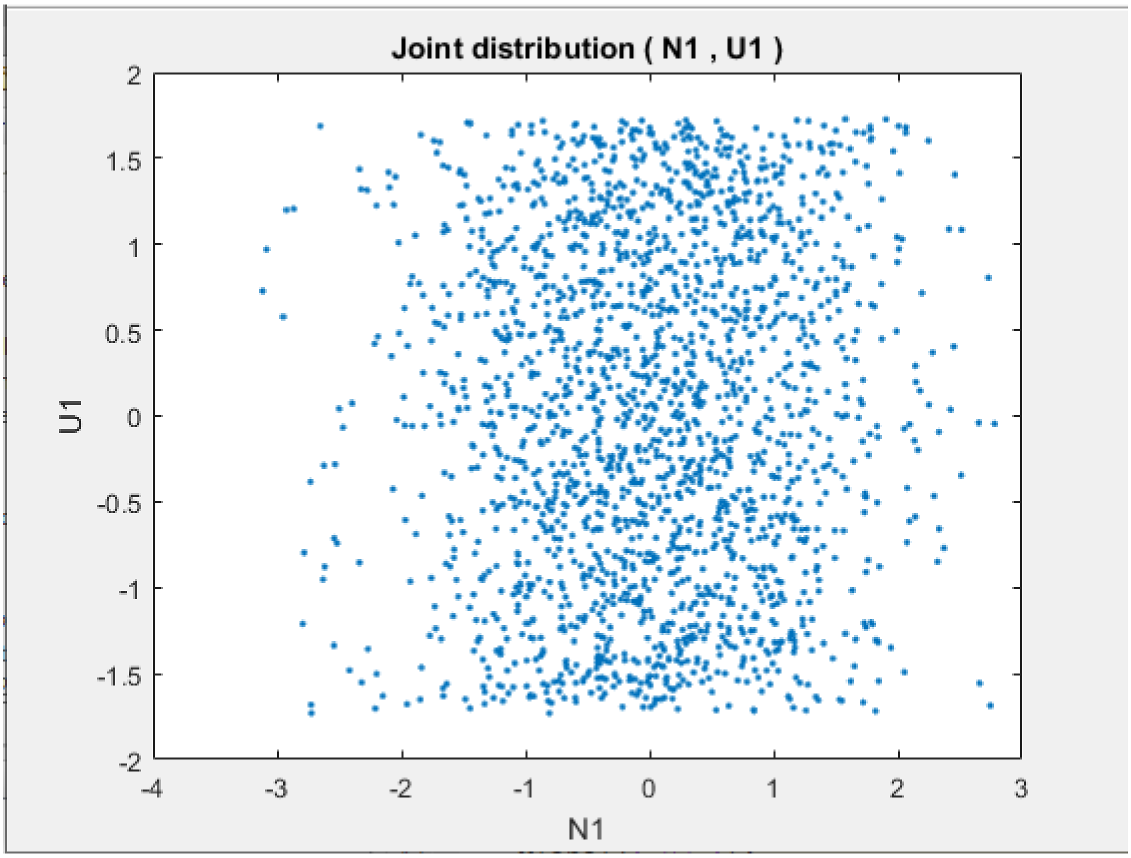
Joint N1 N2 :



Joint U1 U2 :



Joint N1 U1 :



در منحنی اول مشاهده می شود که تابع توزیع مشترک دو متغییر تصادفی نرمال با تقریب خوبی شبیه یک دایره شده است.

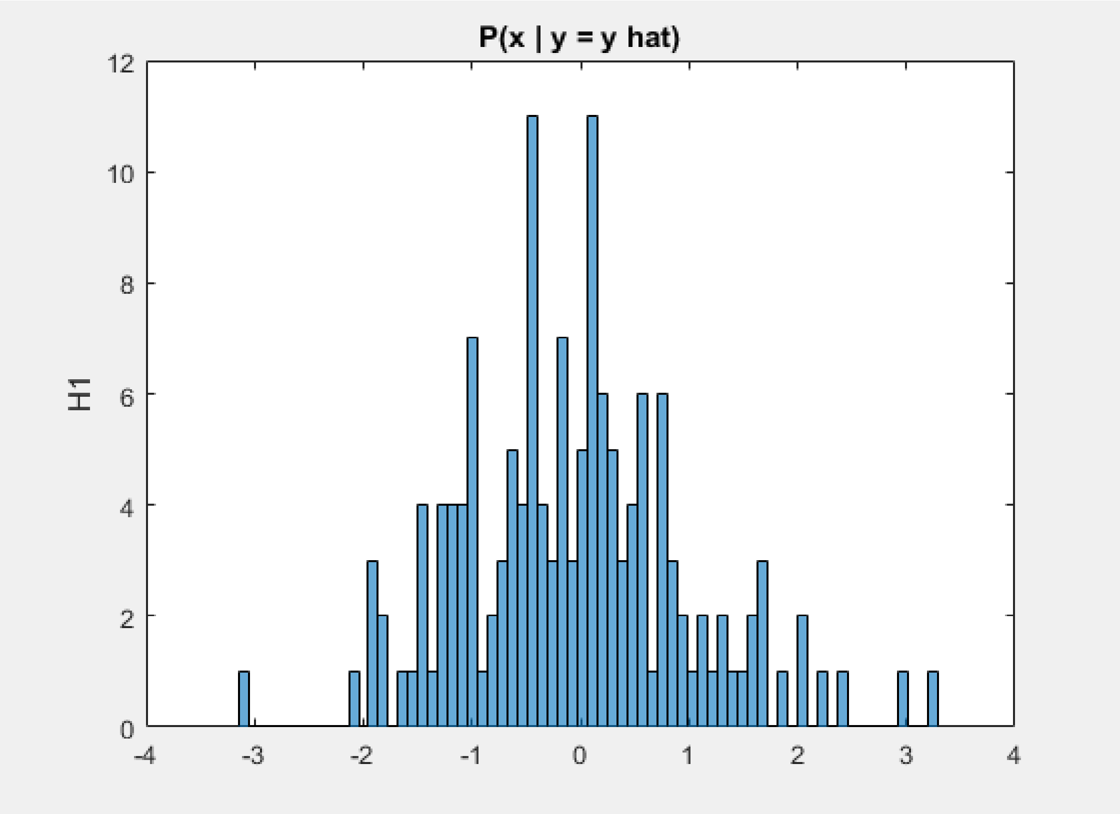
در منحنی دوم که مربوط به تابع توزیع مشترک دو متغییر تصادفی Uniform می باشد , با توجه به تابع چگالی متغییر تصادفی Uniform که عدد ثابتی می باشد و محدوده مشخصی را در بر میگیرد , در نتیجه تابع توزیع مشترک دو متغییر تصادفی Uniform نیز باید به صورت یک مربع که محدوده ی مشخصی را در بر میگیرد درآید.

و در آخر برای منحنی سوم که مربوط به تابع توزیع نرمال و Uniform می باشد , با توجه به ناهمبستگی بین دو متغییر تصادفی , و ضرب شدن هر دو تابع توزیع در یکدیگر , با در نظر داشتن این موضوع که می دانیم تابع توزیع متغییر تصادفی Uniform همواره ثابت می باشد , در نتیجه تابع توزیع نرمال در عددی ثابت در تمام نقاط ضرب شده و به شکل یه مستطیل دیده می شود.

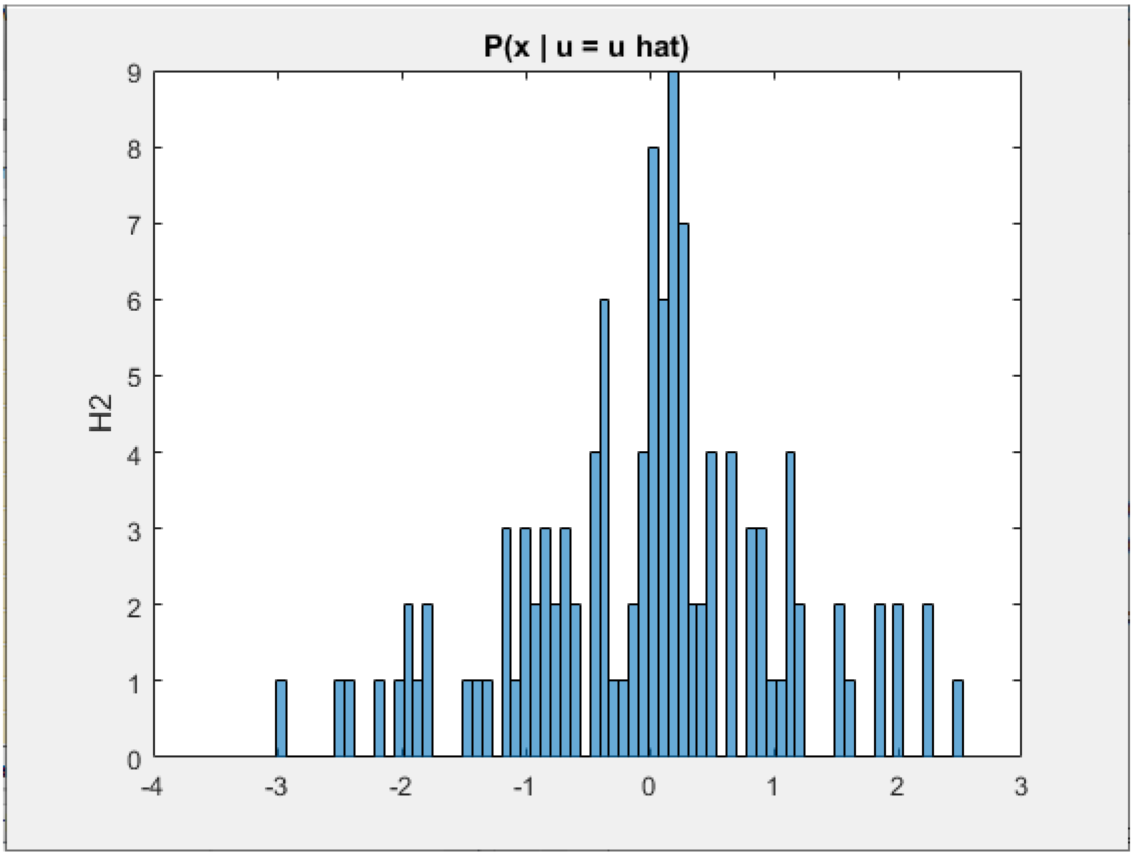
Code :

```
%% Part: 1 Q: 3
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
a = 3^(0.5) ;
number = 2000 ;
nbins = 70 ;
sigma_Y = 0.1 ;      Y_Hat = 0.5 ;
sigma_U = 0.1 ;      U_Hat = 0.5 ;
                                       %Normal distribution
X = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;
Y = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;
                                       %Uniform distribution
U = -a + (a+a).*rand(1,number) ;

Conditional_Distribution_XY = [ ] ;
Conditional_Distribution_XU = [ ] ;

for Counter_1 = 1:2000
    if (Y(Counter_1)>=(Y_Hat-sigma_Y) && Y(Counter_1)<=(Y_Hat+sigma_Y))
        Conditional_Distribution_XY(end+1) = X(Counter_1) ;
    end
end

figure;                                 %Plot P(x | y = y_Hat)
H1 = histogram(Conditional_Distribution_XY,nbins) ;
ylabel('H1');
title(' P(x | y = y hat) ')

for Counter_2 = 1:2000
    if (U(Counter_2)>=(U_Hat-sigma_U) && U(Counter_2)<=(U_Hat+sigma_U))
        Conditional_Distribution_XU(end+1) = X(Counter_2) ;
    end
end

figure;                                 %Plot P(x | u = u_Hat)
H2 = histogram(Conditional_Distribution_XU,nbins) ;
ylabel('H2');
title(' P(x | u = u hat) ')
```

P(x | y = y_hat) :



P(x | u = u_hat) :



تابع توزیع های به دست آمده با قسمت قبل تفاوتی ندارند به این علت که وقتی دو متغیر تصادفی ناهمبسته می باشند , شرطی کردن تابع توزیع , تاثیری بر روی خروجی نهایی نخواهد داشت , به این علت که برای متغییر های تصادفی مستقل تابع توزیع مشترک در اصل ضرب دو تابع توزیع در یکدیگر می باشد , به همین جهت قرار دادن شرط و شرطی کردن تابع توزیع تاثیری بر روی خروجی نخواهد داشت.(در نتایج به دست آمده نیز مشخص است)

Part 2 Q 1

محاسبات دستی :

P: 2 Q: 1

$$Z = ax + \sqrt{1-a^2}\, y \longrightarrow E(Z) = a \underbrace{E(X)}_{0} + \sqrt{1-a^2}\, \underbrace{E(Y)}_{0} = 0$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E(Z^2) = E(a^2x^2 + (1-a^2)y^2 + 2a\sqrt{1-a^2}\, xy)$$

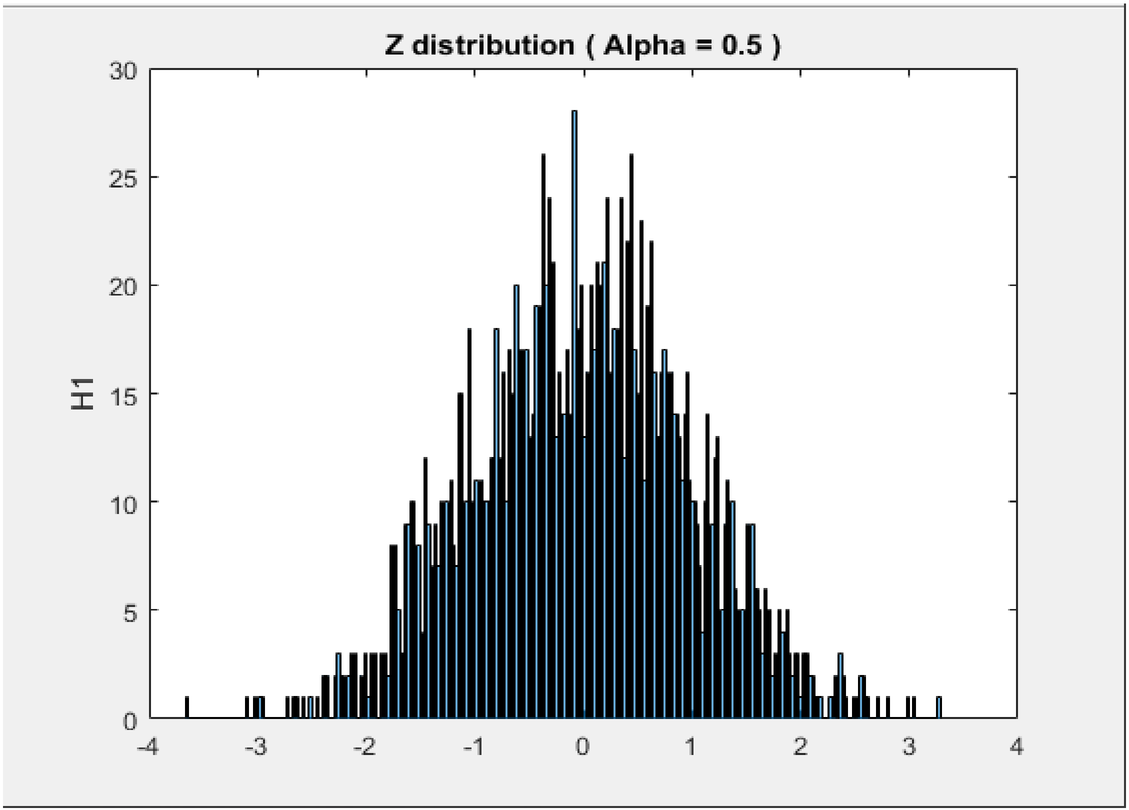
$$= a^2 + (1-a^2) + 0 = 1$$

$$E\{xz\} = E\{x[ax + \sqrt{1-a^2}\, y]\} = a E\{x^2\} + \sqrt{1-}\; E\{xy\} = \alpha + 0 = \alpha$$

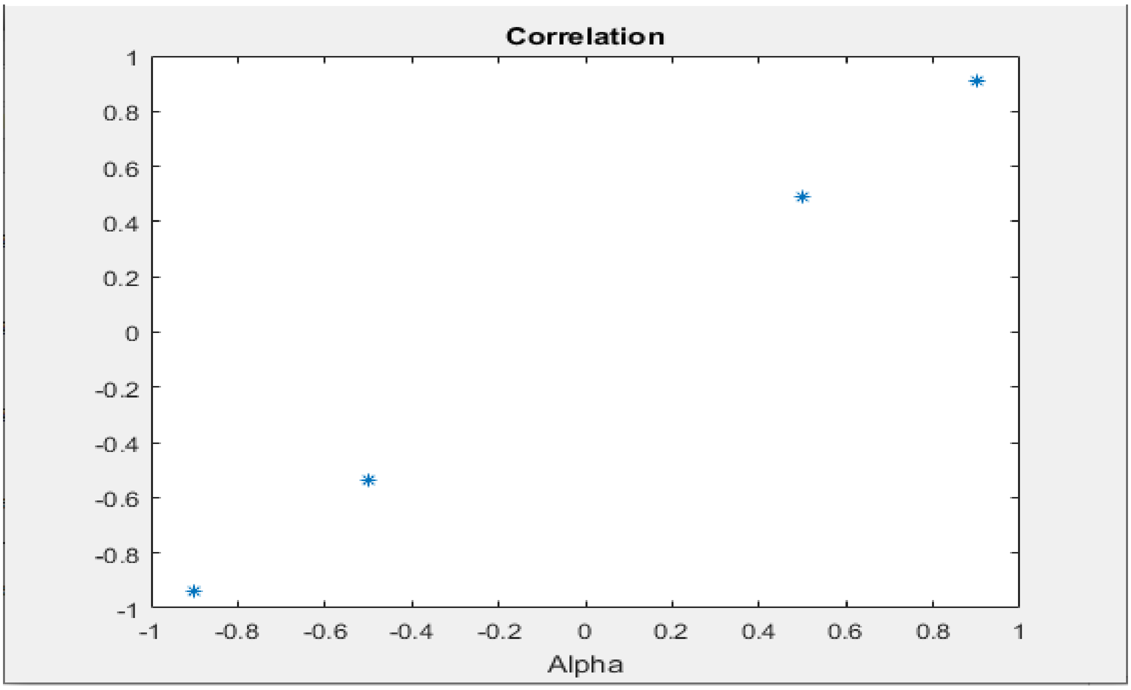
برای تایید محاسبات به دست آمده واریانس و میانگین متغییر تصادفی مورد نظر را با استفاده از متلب مشاهده می کنیم :

```
Average_Z =

    0.0086

Variance_Z =

    1.0251
```

Z distribution (Alpha = 0.5) :



Correlation :



برای محاسبه ی کورلیشن بین دو متغیر تصادفی همانگونه که در کد زیر نیز مشخص است می توان با ضرب کردن دو متغیر تصادفی مورد نظر در هم و میانگین گرفتن از آن مقدار کرولیشن بین دو متغیر تصادفی را محاسبه کرد.

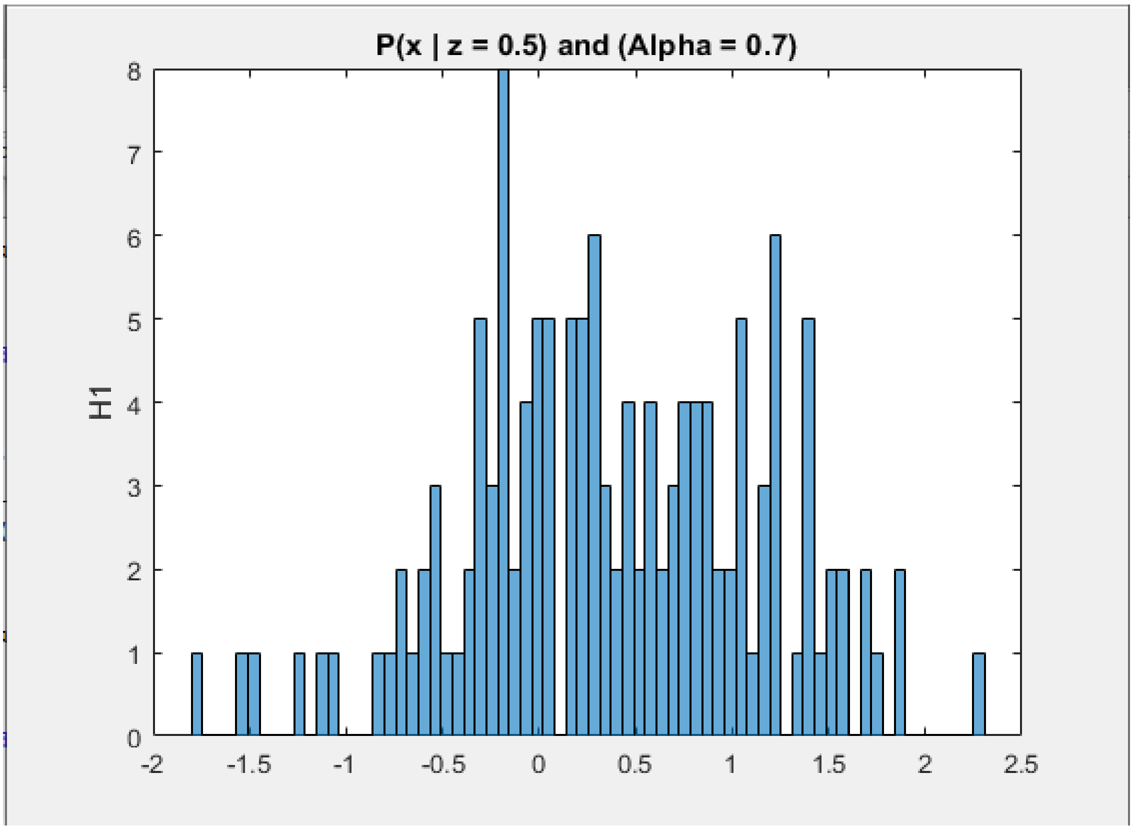
Code :

```
%% Part: 2 Q: 1
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
number = 2000 ;
nbins = 300 ;
Alpha = [0.5 , -0.5 , 0.9 , -0.9] ;
Correlation = [] ;
                                        %Normal distribution (X , Y)
X = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;
Y = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;

Z1 = [] ;  Z2 = [] ;  Z3 = [] ;  Z4 = [] ;
E_XZ1 = 0 ;  E_XZ2 = 0 ;  E_XZ3 = 0 ;  E_XZ4 = 0 ;
                                                       %Z1 (Alpha = 0.5)
Z1 = X*Alpha(1) + sqrt(1 - (Alpha(1)*Alpha(1)))*Y ;
E_XZ1 = abs(sum(X.*Z1)/number) ;
                                                       %Z2 (Alpha = -0.5)
Z2 = X*Alpha(2) + sqrt(1 - (Alpha(2)*Alpha(2)))*Y ;
E_XZ2 = -abs(sum(X.*Z2)/number) ;
                                                       %Z3 (Alpha = 0.9)
Z3 = X*Alpha(3) + sqrt(1 - (Alpha(3)*Alpha(3)))*Y ;
E_XZ3 = abs(sum(X.*Z3)/number) ;
                                                       %Z4 (Alpha = -0.9)
Z4 = X*Alpha(4) + sqrt(1 - (Alpha(4)*Alpha(4)))*Y ;
E_XZ4 = -abs(sum(X.*Z4)/number) ;

Variance_Z = var(Z1) ;
Average_Z = abs(sum(Z1) / number) ;
                                         %Plot Z distribution ( Alpha = 0.5
H1 = histogram(Z1,nbins) ;
title(' Z distribution ( Alpha = 0.5 ) ')
ylabel('H1');
                                         %Plot Correlation
figure;
Correlation = [E_XZ1 , E_XZ2 , E_XZ3 , E_XZ4] ;
plot(Alpha , Correlation , '*');
title(' Correlation ')
xlabel('Alpha');
```

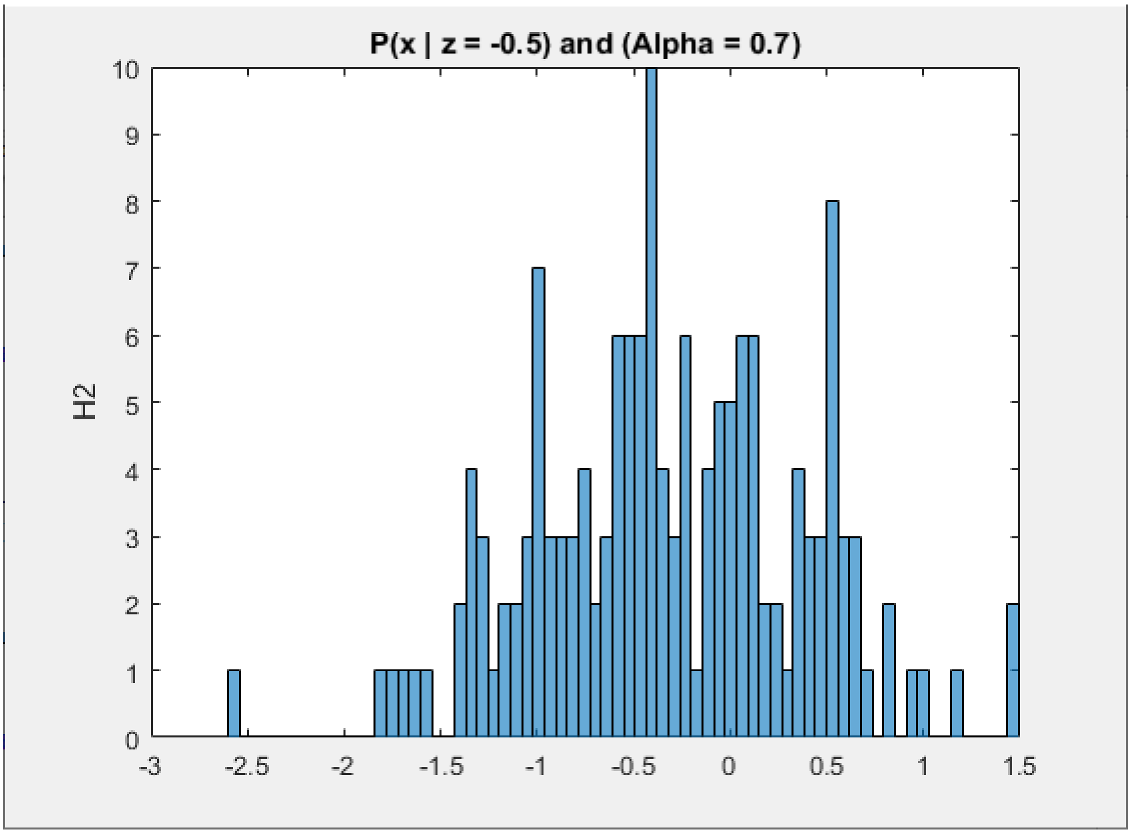
Code :

```
%% Part: 2 Q: 2
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
number = 2000 ;
nbins = 70 ;
Alpha = [0.7 -0.7] ;
sigma_Z = 0.1 ;     Z_Hat_1 = 0.5 ;     Z_Hat_2 = -0.5 ;
                                        %Normal distribution (X , Y)
X = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;
Y = normrnd(mu,sigma,[1,number]) ;

Z1 = [] ;  Z2 = [] ;
E_XZ1 = 0 ;  E_XZ2 = 0 ;
                                                       %Z1 (Alpha = 0.7)
Z1 = X*Alpha(1) + sqrt(1 - (Alpha(1)*Alpha(1)))*Y ;
E_XZ1 = abs(sum(X.*Z1)/number) ;
                                                       %Z2 (Alpha = -0.7)
Z2 = X*Alpha(2) + sqrt(1 - (Alpha(2)*Alpha(2)))*Y ;
E_XZ2 = abs(sum(X.*Z2)/number) ;

Conditional_Distribution_XZ_1 = [ ] ;         % (Alpha = 0.7) (Z = 0.5)
Conditional_Distribution_XZ_2 = [ ] ;         % (Alpha = 0.7) (Z = -0.5)
Conditional_Distribution_XZ_3 = [ ] ;         % (Alpha = -0.7) (Z = 0.5)
Conditional_Distribution_XZ_4 = [ ] ;         % (Alpha = -0.7) (Z = -0.5)

for Counter_1 = 1:2000
    if (Z1(Counter_1)>=(Z_Hat_1-sigma_Z) && Z1(Counter_1)<=(Z_Hat_1+sigma_Z))
        Conditional_Distribution_XZ_1(end+1) = X(Counter_1) ;
    end
end

figure;                                 %Plot P(x | z = 0.5) and (Alpha = 0.7)
H1 = histogram(Conditional_Distribution_XZ_1,nbins) ;
ylabel('H1');
title(' P(x | z = 0.5) and (Alpha = 0.7) ')

for Counter_2 = 1:2000
    if (Z1(Counter_2)>=(Z_Hat_2-sigma_Z) && Z1(Counter_2)<=(Z_Hat_2+sigma_Z))
        Conditional_Distribution_XZ_2(end+1) = X(Counter_2) ;
    end
end

figure;                                 %Plot P(x | z = -0.5) and (Alpha = 0.7)
H2 = histogram(Conditional_Distribution_XZ_2,nbins) ;
ylabel('H2');
title(' P(x | z = -0.5) and (Alpha = 0.7) ')

for Counter_3 = 1:2000
    if (Z2(Counter_3)>=(Z_Hat_1-sigma_Z) && Z2(Counter_3)<=(Z_Hat_1+sigma_Z))
        Conditional_Distribution_XZ_3(end+1) = X(Counter_3) ;
    end
end

figure;                                 %Plot P(x | z = 0.5) and (Alpha = -0.7)
H3 = histogram(Conditional_Distribution_XZ_3,nbins) ;
ylabel('H3');
title(' P(x | z = 0.5) and (Alpha = -0.7) ')

for Counter_4 = 1:2000
    if (Z2(Counter_4)>=(Z_Hat_2-sigma_Z) && Z2(Counter_4)<=(Z_Hat_2+sigma_Z))
        Conditional_Distribution_XZ_4(end+1) = X(Counter_4) ;
    end
end

figure;                                 %Plot P(x | z = -0.5) and (Alpha = -0.7)
H4 = histogram(Conditional_Distribution_XZ_4,nbins) ;
ylabel('H4');
title(' P(x | z = -0.5) and (Alpha = -0.7) ')
```

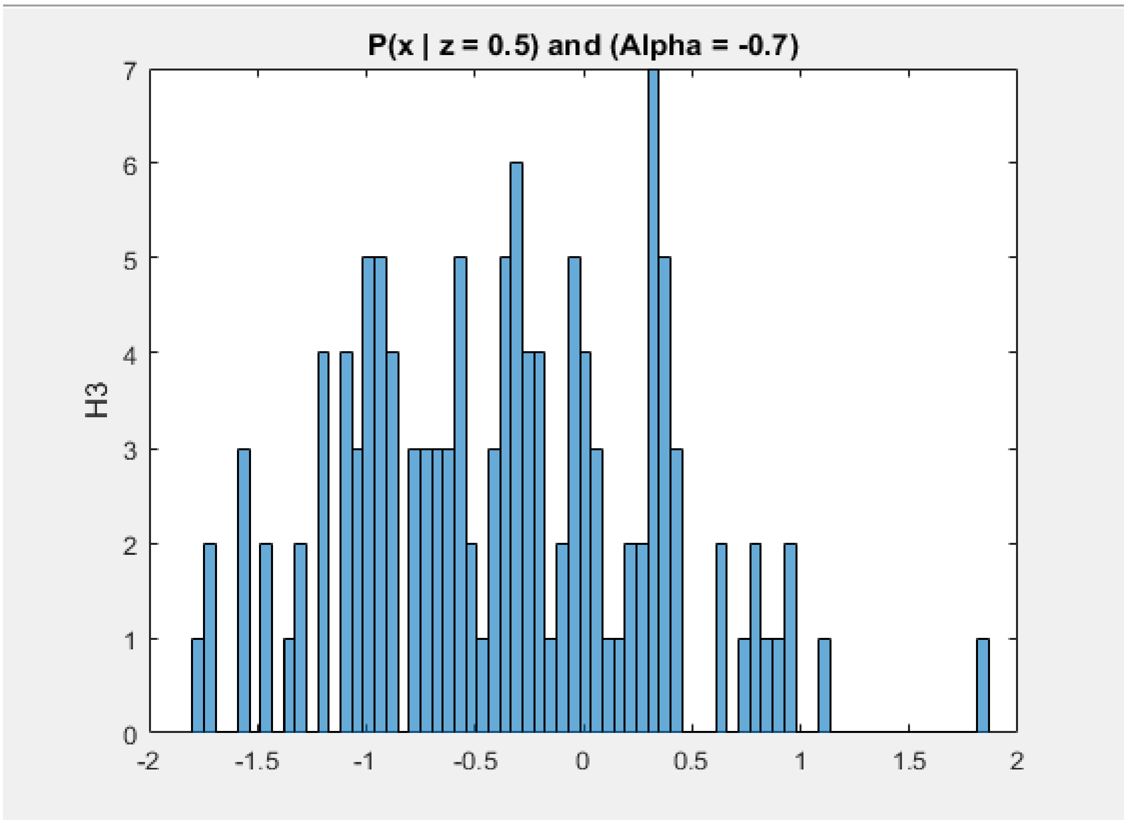
Z = 0.5 , Alpha = 0.7 :



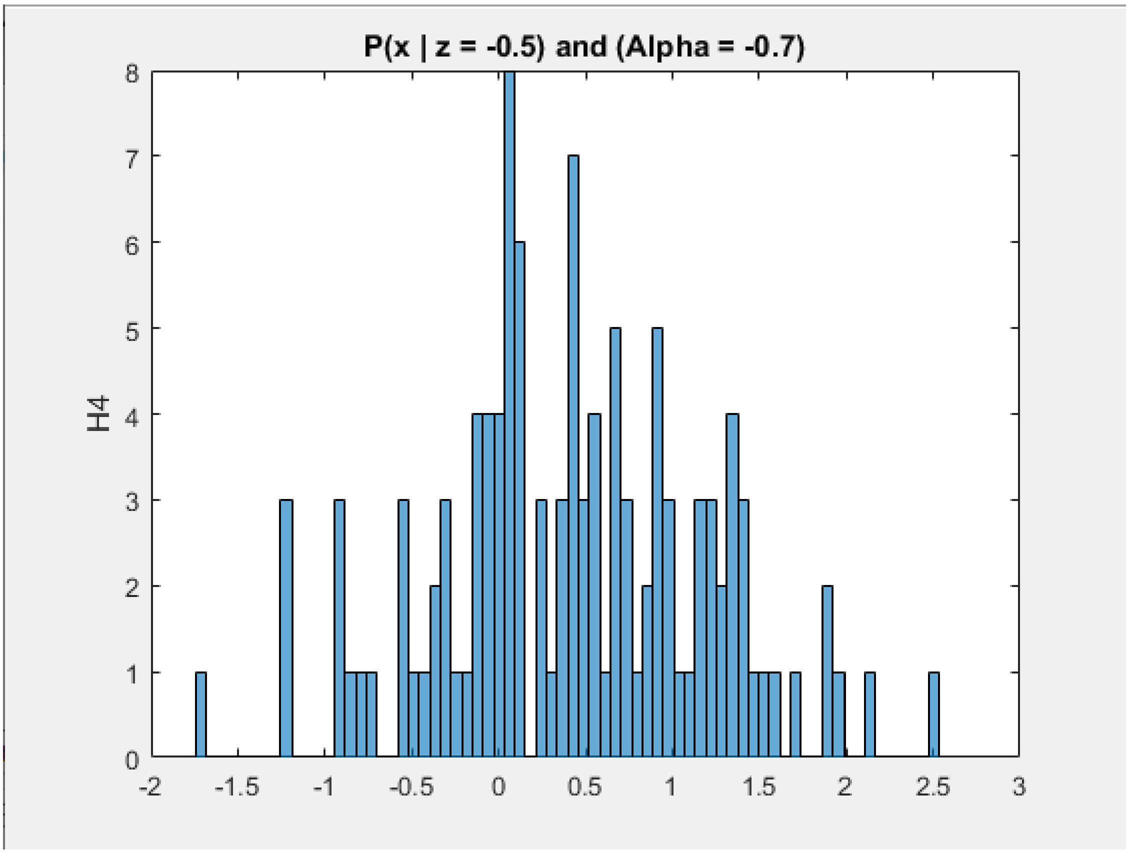
Z = -0.5 , Alpha = 0.7 :



Z = 0.5 , Alpha = -0.7 :



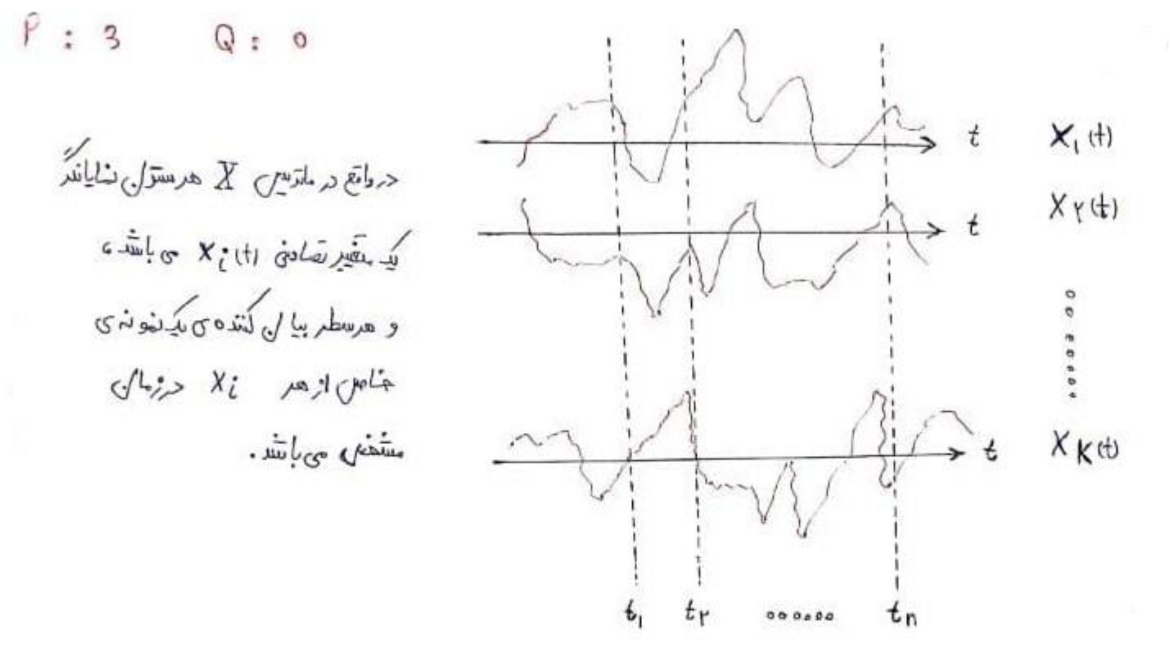
Z = -0.5 , Alpha = -0.7 :



با توجه به مفهوم همبستگی (کرولیشن) بین دو متغییر تصادفی , هر چه این میزان همبستگی بیشتر باشد , در نتیجه وابستگی بین دو متغییر تصادفی بیشتر شده و از روی هر کدام از آن ها می توان متغییر تصادفی دیگر را نیز به دست آورد.
در توزیع های شرطی نیز هنگامی که دو متغییر تصادفی که از همبستگی خوبی نسبت به هم برخوردار باشند , داشته باشیم با گذاشتن شرط بر روی هر یک از آن ها با توجه به میزان بالا بودن همبستگی آن ها می توان شرط مورد نظر را روی متغییر تصادفی دیگر اعمال کنیم و در نهایت نتیجه را با تقریب خوبی مشاهده کنیم .

Part 3 Q 0

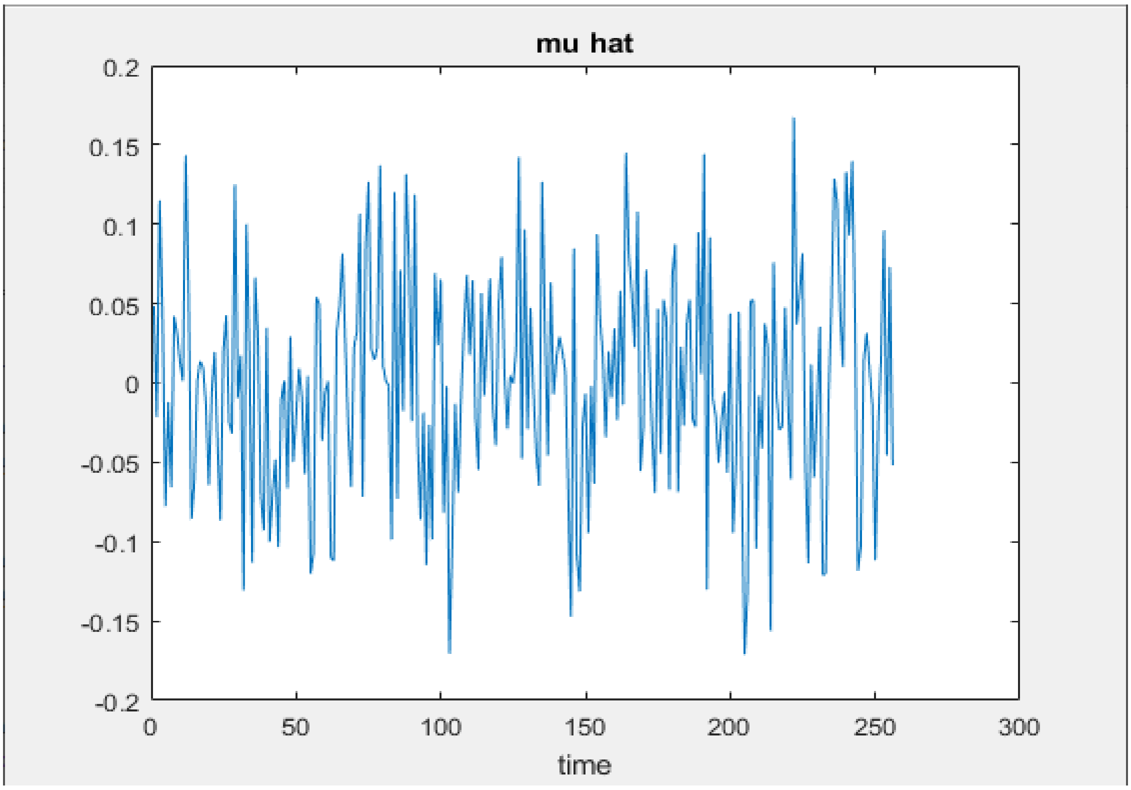
مفهوم سطر و ستون ماتریس X :



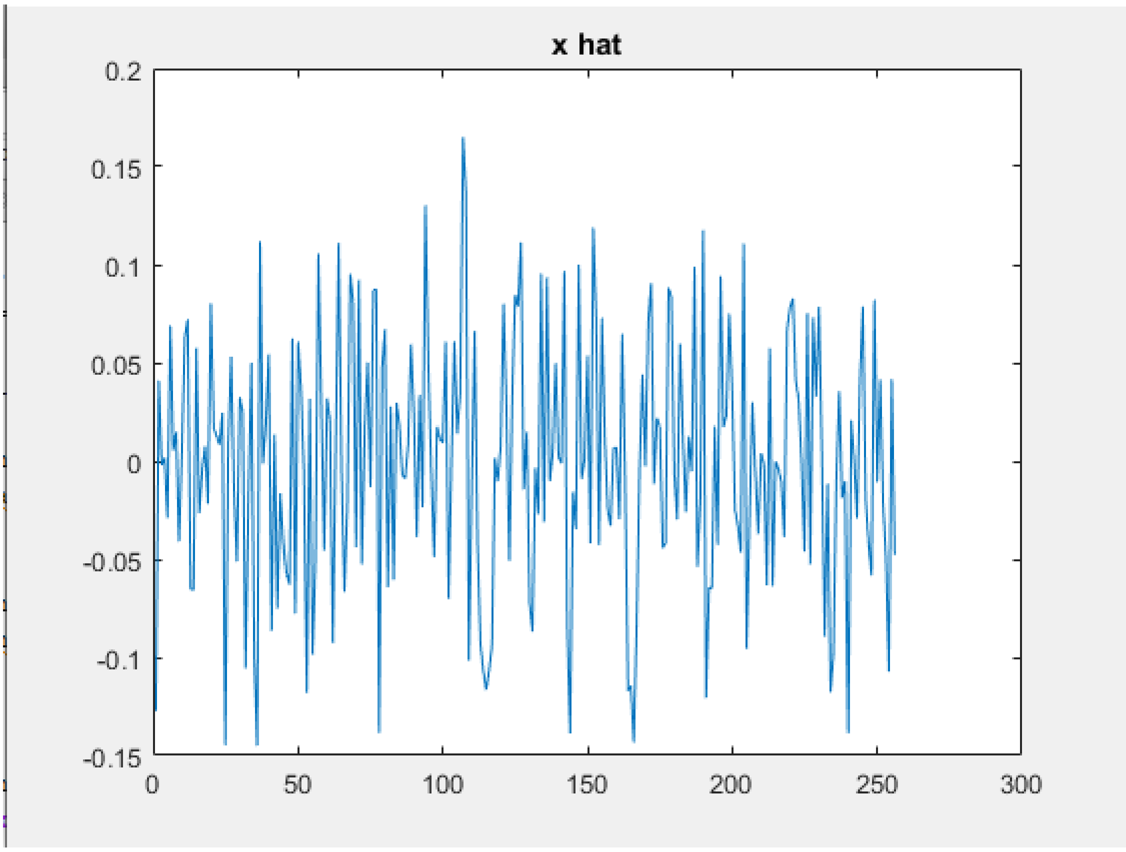
Code :

```
%% Part: 3 Q: 1
K = 256 ;   N = 256 ;                   %Indicates the size of the matrix
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
mu_hat = [] ;     x_hat = [] ;

X_normal = normrnd(mu,sigma,N,K);       %Normal distribution

for Counter1 = 1:N                      %Generating x_hat
    x_hat(end+1) = mean(X_normal(:,Counter1));
end

for Counter2 = 1:K                      %Generating mu_hat
    mu_hat(end+1) = mean(X_normal(Counter2,:));
end

figure                                  %Plot x_hat
plot(x_hat);
title('x hat');

figure                                  %Plot mu_hat
plot(mu_hat);
title('mu hat');
xlabel('time');
```

Mu hat :



X hat :



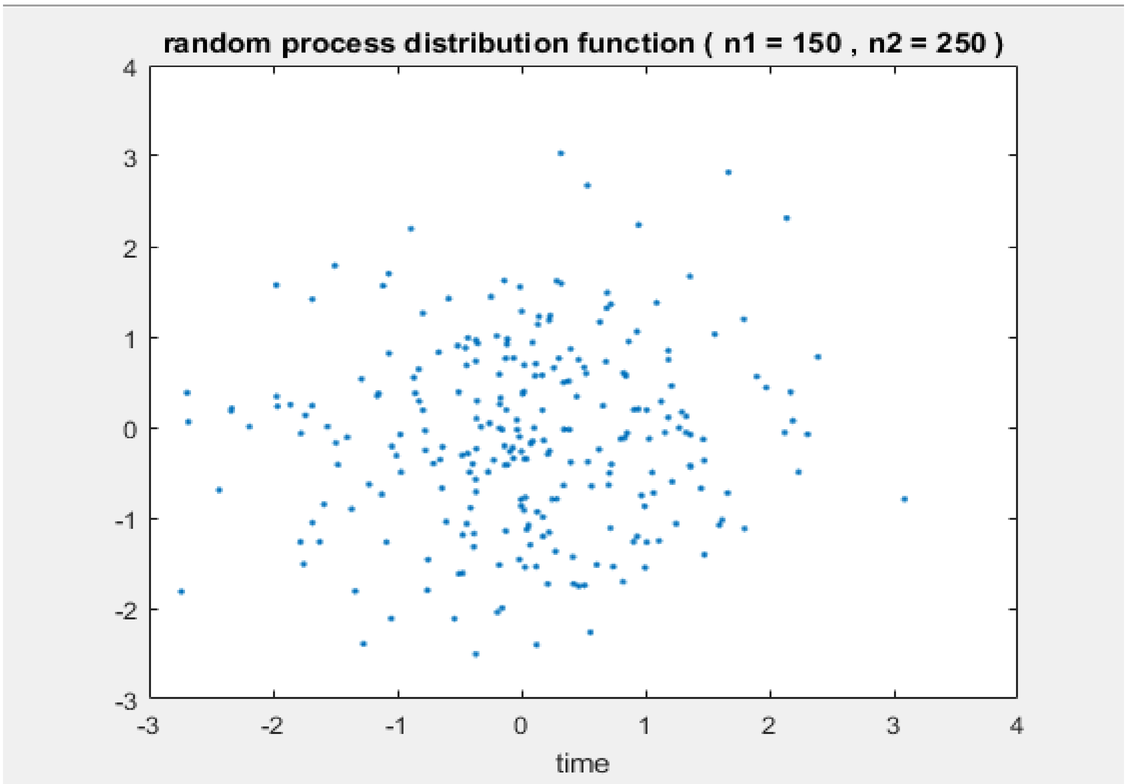
باتوجه به مفهوم فرایند ارگودیک (برابر بودن میانگین سطری و ستونی و یا به عبارتی در اینجا برابر بودن میانگین زمانی و متغییر تصادفی) با تقریب خوب می توان فرایند مورد نظر را ارگودیک در نظر گرفت.

Part 3 Q 2

Code :

```
%% Part: 3 Q: 2
K = 256 ;  N = 256 ;                %Indicates the size of the matrix
mu = 0 ;  sigma = 1 ;
E_X1X2 = 0 ;   Correlation = 0 ;
n = [150 , 250] ;                   % n1 = 150  ,  n2 = 250

X_normal = normrnd(mu,sigma,N,K);   %Normal distribution

figure                              %Plot random process distribution function
plot(X_normal(n(1),:),X_normal(n(2),:),'.');
title('random process distribution function ( n1 = 150 , n2 = 250 )');
xlabel('time');

E_X1X2 = X_normal(n(2),:).*X_normal(n(1),:) ;
Correlation = sum(E_X1X2)/K ;
```

Correlation : (n1 = 150 , n2 = 250)



با توجه به نتیجه ی به دست آمده و پراکندگی نقاط , مشخص می شود که همبستگی بین دو متغییر تصادفی بسیار پایین بوده و عملا مقدار کورلیشن بین این دو متغییر تصادفی برابر صفر خواهد بود.

برای تایید مشاهدات به دست آمده با استفاده از فرمول و کد زیر که مربوط به محاسبه کورلیشن بین دو متغییر تصادفی است استفاده می کنیم :

```
E_X1X2 = X_normal(n(2),:).*X_normal(n(1),:) ;
Correlation = sum(E_X1X2)/K ;
```

$$r_{xz} = E[XZ]$$

نتیجه ی کورلیشن به دست آمده نیز تایید کننده ی مشاهدات اولیه می باشد.

```
Correlation =

    0.0430
```

همان طور که در صورت سوال نیز گفته شد بود , این متغییر های تصادفی هیچ گونه همبستگی با هم ندارند.

Part 4 Q 1

محاسبات :

P : ۴ Q : ۱

$x[n] = x[n-1] + w[n]$ با در نظر گرفتن فرض : $x[۰] = ۰$

$\xrightarrow{n=1} x[1] = x[0] + w[1] \longrightarrow x[1] = w[1]$ (*)

$\xrightarrow{n=2} x[2] = x[1] + w[2] \xrightarrow{(*)} x[2] = w[1] + w[2]$

$\vdots$

$\xrightarrow{n=i} x[i] = x[i-1] + w[i] \longrightarrow x[i] = w[1] + w[2] + \dots + w[i]$

$\longrightarrow x[n] = \sum_{i=1}^{n} w[i]$ (A)

از قسمت قبل می‌دانیم : $E\{w[i]\} = 0 \xrightarrow{(A)} E\{x[n]\} = 0$

$\longrightarrow \mu_{x[n]} = 0$ for All n

محاسبات دستی :

P: 4 Q: 2

$$x[1] = x[0] + w[1] \xrightarrow{x[0]=0} x[1] = w[1] \quad (A)$$

$$Var(w[1]) = E(w[1]^2) - \underbrace{E(w[1])^2}_{0} \longrightarrow Var(w[1]) = E(w[1]^2) \quad (B)$$

$$E(x^2[1]) \overset{(A)}{=} E(w^2[1]) \overset{(B)}{=} Var(w[1])$$

$$\longrightarrow \boxed{E(x^2[1]) = Var(w[1])}$$

$$P_x[n] = E(x^2[n-1] + w^2[n] + 2x[n-1]w[n]) =$$

$$P_x[n-1] + Var(w[n]) + 2E(w[n](w[1] + \dots + w[n-1]))$$

$$\xrightarrow{\text{w ها ناهمبسته اند}} P_x[n] = P_x[n-1] + Var(w[n]) + 2E(w[n])\,E(w[1]) + \dots$$

$$\xrightarrow{E(w)=0} \boxed{P_x[n] = P_x[n-1] + Var(w[n])}$$

ناهمبسته $\longrightarrow$ Covariance $= 0$

$$Covariance(x[n-L], w[n]) = E((x[n-L] - 0)(w[n] - 0))$$

$$= E(x[n-L]\,w[n]) = E(w[n](w[1] + \dots + w[n-L])) =$$

$$\underbrace{E(w[n]w[1])}_{0} + \dots + \underbrace{E(w[n]w[n-L])}_{0} = 0 \longrightarrow \text{Covariance} = 0 \longrightarrow \text{ناهمبسته}$$

صریح : $P_x[n] = n$ $\qquad$ $n \to \infty$: $P_x[n] \longrightarrow \infty$

محاسبات دستی :

P : 4 Q : 3

$$r_x(n, n-1) = E\left(x[n]\, x[n-1]\right) = E\left(x[n-1]\left(x[n-1] + w[n]\right)\right) =$$

$$E\left(x[n-1]^2\right) + E\left(x[n-1]\, w[n]\right) = P_x[n-1] + E\left(x[n-1]\right) \underbrace{E\left(w[n]\right)}_{0}$$

$$\boxed{= P_x[n-1]}$$

$$r_x(n, n-l) = E\left(x[n]\, x[n-l]\right) = E\left(\left(x[n-1] + w[n]\right)\left(w[n-l] + \dots + w[1]\right)\right)$$

$$= E\left(\left(w(n) + w(n-1) + \dots + w[1]\right)\left(w[n-l] + \dots + w[1]\right)\right) \xrightarrow{E(w(i)\,w(j))} \begin{cases} i = j & \text{[illegible]} \\ i \neq j & 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow r_x(n, n-l) = \underbrace{E\{w^2[n-l]\} + \dots + E\{w^2[1]\}}_{n-l\ \text{[illegible]}} = \boxed{(n-l)\, Var\left(w[1]\right)}$$

میدانیم : $E\left(x^2[n]\right) = n\, Var\left(w[1]\right) \longrightarrow \sqrt{P_x(n)\, P_x(n-l)} = Var\left(w(n)\right)\sqrt{n(n-l)}$

از طرفی : $r_x(n, n-l) = (n-l)\, Var\{w[n]\}$

$$\longrightarrow \boxed{\rho_x(n, n-l) = \sqrt{\frac{n-l}{n}}}$$

if $n \to \infty$: $\boxed{\rho_x(n, n-l) = 1}$