

به نام خدا



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده برق و کامپیوتر



سیستم های کنترل پیشرفته

فاز اول پروژه

نام و نام خانوادگی : محمد مهدی رحیمی – محمدرضا بختیاری

شماره دانشجویی : 810197510 – 810197468

دی 1400

فهرست سوالات

3	بخش دوم – مسائل شبیه سازی
3	سوال 1
4	سوال 2
6	سوال 3
7	سوال 4
8	سوال 5
8	سوال 6
15	سوال 7
22	سوال 8
27	سوال 9
28	پایوست:

بخش دوم - مسائل شبیه سازی

سوال 1

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$(m_0 + m_1) \ddot{x}_2 + F_r x_2 + m_1 L \ddot{x}_4 \cos(x_3) - m_1 L \dot{x}_4^2 \sin(x_3) = F$$

$$(I_S + m_1 L^2) \ddot{x}_4 + c x_4 - m_1 L g \sin(x_3) + m_1 L \dot{x}_2 \sin(x_3) = 0$$

نقطه تعادل : $\ddot{X} = 0 \rightarrow \dot{x} = \ddot{x} = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow x_2 = \dot{x}_2 = x_4 = \dot{x}_4 = 0$

پایداری $\rightarrow \begin{cases} F = 0 \\ \sin(x_3) = 0 \end{cases} \rightarrow x_3 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

x_1 : دلفواه است $\xrightarrow{\text{assume}} x_1 = 0$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

توجه شود موقعیت ارايه (x_1) در نقطه تعادل سیستم بی تاثیر بوده و به صورت دلخواه و برای راحتی کار آن را صفر در نظر می گیریم ($x_1 = 0$).

همچنین زاویه آونگ (x_3) در نقطه تعادل به صورت $x_3 = k\pi$ می باشد که به ازای مقادیر زوج k آونگ رو به بالا بوده و نقطه ی تعادل ناپایدار ما بوده و به ازای مقادیر فرد k آونگ رو به پایین خواهد بود که نقطه ی تعادل پایدار ما است.

سوال 2

$$\left. \begin{aligned} (m_0 + m_1) \ddot{x}_r + F_r x_r + m_1 L \ddot{x}_f \cos(x_\psi) - m_1 L \dot{x}_f^2 \sin(x_\psi) &= F \\ (I_s + m_1 L^2) \ddot{x}_f + C x_f - m_1 L g \sin(x_\psi) + m_1 L \dot{x}_r \cos(x_\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\ddot{x}_f = -C K_f x_f + m_1 L g K_f \sin(x_\psi) - \frac{m_1 L F}{m_0 + m_1} K_f \cos(x_\psi) + \frac{K_f m_1 L F_r}{m_0 + m_1} \cos(x_\psi) x_r - \frac{m_1^2 L^2}{m_0 + m_1} x_f^2 K_f \sin(x_\psi) \cos(x_\psi)$$

$$S.t: K_f = \frac{m_0 + m_1}{(I_s + m_1 L^2)(m_0 + m_1) - m_1^2 L^2 \cos^2(x_\psi)}$$

$$\ddot{x}_r = -F_r K_r x_r + m_1 L K_r x_f^2 \sin(x_\psi) + F K_r + \frac{m_1 L C K_r}{I_s + m_1 L^2} \cos(x_\psi)$$

$$- \frac{m_1^2 L^2 g K_r}{I_s + m_1 L^2} \cos(x_\psi) \sin(x_\psi)$$

$$S.t: K_r = \frac{I_s + m_1 L^2}{(m_0 + m_1)(I_s + m_1 L^2) - m_1^2 L^2 \cos^2(x_\psi)}$$

$$\dot{x}_1 = x_r$$

$$\dot{x}_2 = x_f$$

$$A = \left. \frac{\partial \dot{X}}{\partial x} \right|_{\substack{x. \\ F.}}$$

$$B = \left. \frac{\partial \ddot{X}}{\partial F} \right|_{\substack{x. \\ F.}}$$

در وقت میل نقطه تعادل x_ψ را به صورت $x_\psi = K\pi$ محاسبه کردیم و به ازای مقادیر زوج و فرد K مقادیرهای A و B را محاسبه می کنیم.

به ازای مقادیر زوج $K : \varphi$ به صورت $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ خواهیم شد و آنگاه رو به سمت بالا است و نقطه تعادل ناپایدار است.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/23 & -0/25 & 0/005 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/25 & 10/15 & -0/21 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/223 \\ 0 \\ -0/225 \end{bmatrix}$$

به ازای مقادیر فرد $K : \varphi$ به صورت $\pi, 3\pi, \dots$ خواهیم شد و آنگاه رو به سمت پایین است و نقطه تعادل پایدار است.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/23 & -0/25 & -0/005 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2/25 & -10/15 & -0/21 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/223 \\ 0 \\ 0/225 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BF \\ Y = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

سوال 3

به ازای دو حالت به دست آمده در قسمت قبل (آونگ رو به بالا و آونگ رو به پایین) با استفاده از ماتریس A و محاسبه ی مقدار حقیقی مقادیر ویژه آن ، پایداری نقاط تعادل را بررسی می کنیم .

حالت اول : آونگ رو به بالا ($\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.23 & -0.2505 & 0.005183 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.253 & 10.15 & -0.2101 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 \approx -3.3744, \lambda_3 \approx -2.1326, \lambda_4 \approx 3.06$$

از آنجایی که مقدار حقیقی یکی از مقادیر ویژه مثبت شد ، متوجه می شویم که در این حالت ، نقطه تعادل سیستم ، ناپایدار خواهد بود .

از قبل هم می توانستیم با یک شهود تقریبی به این نتیجه برسیم ، زیرا در حالتی که آونگ رو به بالا متعادل است ، با کوچک ترین حرکت ارا به ، آونگ به راحتی تعادل خود را از دست می دهد .

حالت دوم : آونگ رو به پایین ($\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.23 & -0.2505 & -0.005183 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.253 & -10.15 & -0.2101 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 \approx -2.19, \lambda_3 \approx -0.12, \lambda_4 \approx -0.12$$

مشاهده می کنیم تمامی مقادیر حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A ، منفی می باشد و در نتیجه نقطه تعادل سیستم در این حالت ، پایدار خواهد بود .

سوال 4

برای این سوال ماتریس C را تشکیل می دهیم تا کنترل پذیری را بررسی کنیم که داریم:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.223 & -0.4985 & 1.1708 \\ 0.223 & -0.4985 & 1.1708 & -2.7670 \\ 0 & -0.2253 & 0.5498 & -3.5253 \\ -0.2253 & 0.5498 & -3.5253 & 8.9586 \end{bmatrix} \Rightarrow Rank(C) = 4$$

پس کنترل پذیر می باشد

حال برای رویت پذیری ماتریس O را تشکیل می دهیم.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.23 & -0.2505 & 0.0052 \\ 0 & 2.253 & 10.15 & -0.2101 \\ 0 & 4.9846 & 0.6112 & -0.2631 \\ 0 & -5.4975 & -2.6969 & 10.2058 \end{bmatrix} \Rightarrow Rank(O) = 4$$

با محاسبه رتبه ماتریس O متوجه می شویم که رویت پذیر نیز می باشد.

با توجه به این که هم کنترل پذیر می باشد و هم رویت پذیر می باشد ، مینیمال نیز می باشد.

محاسبات را با استفاده از متلب نیز انجام میدهم:

Controllability Matrix :

0	0.2230	-0.4985	1.1708
0.2230	-0.4985	1.1708	-2.7670
0	-0.2253	0.5498	-3.5253
-0.2253	0.5498	-3.5253	8.9586

Controllability matrix Rank is : 4

Observability Matrix :

1.0000	0	0	0
0	0	1.0000	0
0	1.0000	0	0
0	0	0	1.0000
0	-2.2300	-0.2505	0.0052
0	2.2530	10.1500	-0.2101
0	4.9846	0.6112	-0.2631
0	-5.4975	-2.6969	10.2058

Observability matrix Rank is : 4

شکل 1 : محاسبه ماتریس کنترل پذیری و رویت پذیری

سوال 5

با توجه به رابطه زیر داریم:

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

اگر برای هر خروجی متناسب با ماتریس C آن محاسبه کنیم داریم:

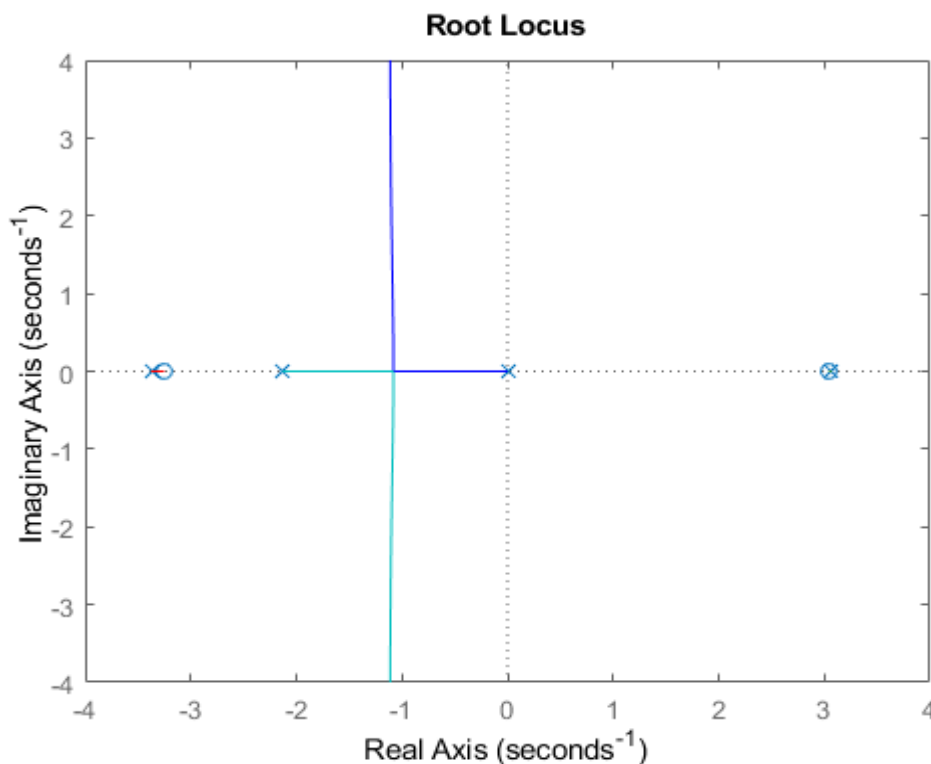
$$G_1(s) = \frac{(0.223s^2) + (0.04568s) - (2.207)}{s^4 + 2.44s^3 - 9.693s^2 - 22.07s}$$

$$G_2(s) = \frac{(-0.2253s^2) + (4.377e - 17s) + (1.532e - 16)}{s^4 + 2.44s^3 - 9.693s^2 - 22.07s}$$

سوال 6

ابتدا صفر و قطب توابع تبدیل G_1 و G_2 را به دست می آوریم تا وضعیت پایداری آن ها را بررسی نماییم. سپس با استفاده از دستور pidTuner ضرایب مناسب PID را برای هر کدام محاسبه می کنیم .

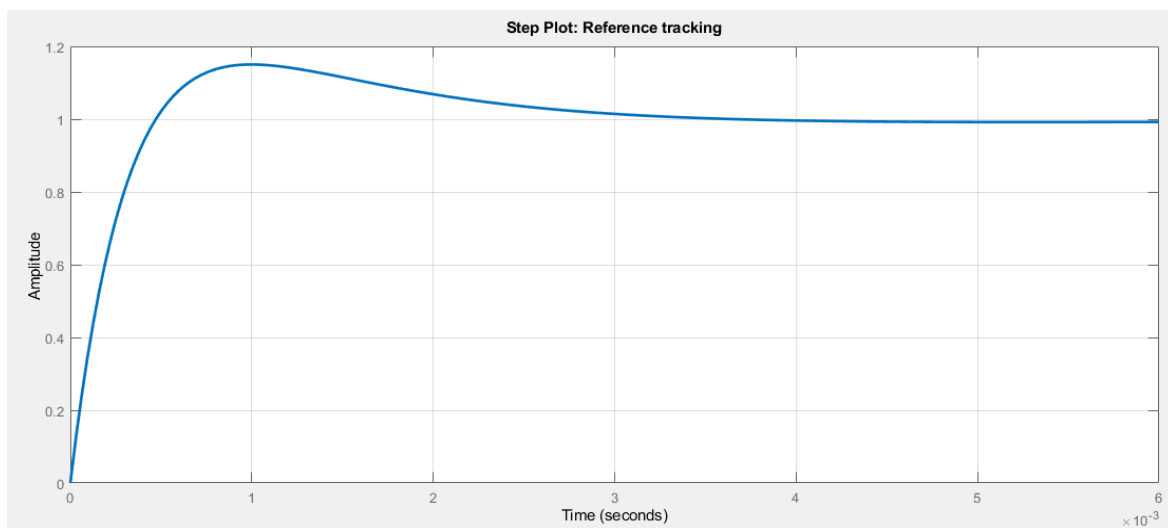
در ابتدا برای تابع تبدیل G_1 داریم :



شکل 2: مکان هندسی صفرها و قطب های G_1

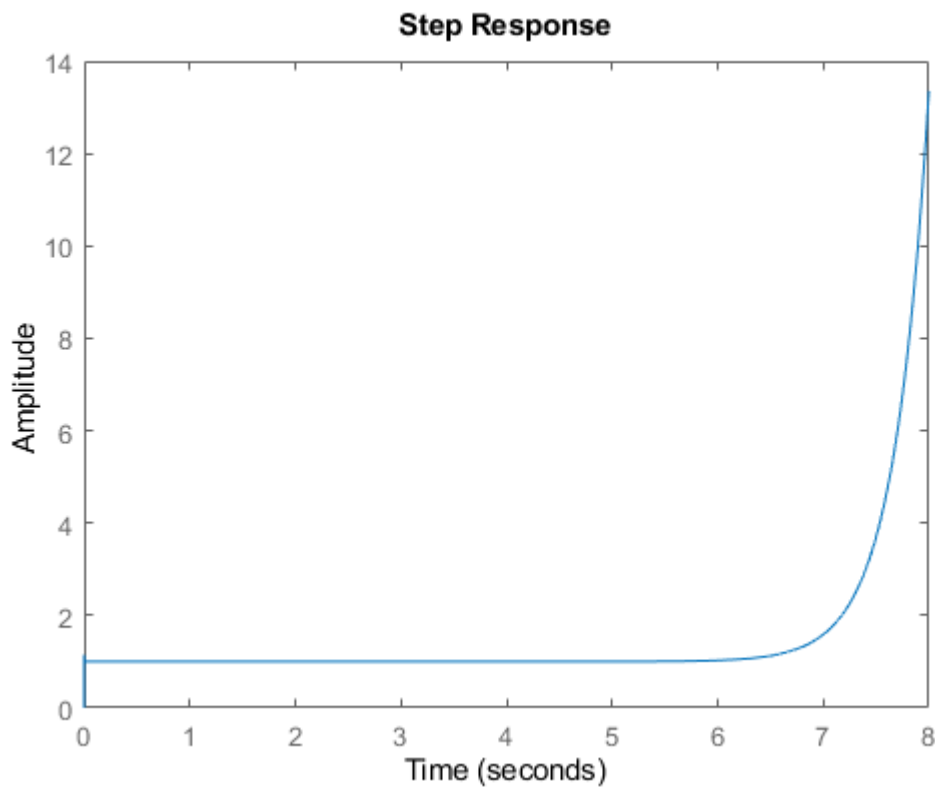
همان طور که مشاهده می کنیم تابع تبدیل G_1 دارای یک قطب با مقدار حقیقی مثبت می باشد که می تواند منجر به ناپایداری سیستم گردد . اگر چه یک صفر نیز در نزدیکی قطب ناپایدار وجود دارد که می تواند تاحدی اثر قطب ناپایدار را از بین ببرد .

در ادامه با استفاده از دستور pidTuner ضرایب مناسب PID را پیدا می کنیم :



شکل 3: پاسخ پله سیستم $G1$ در حضور کنترلر PID تا زمان 6 میلی ثانیه

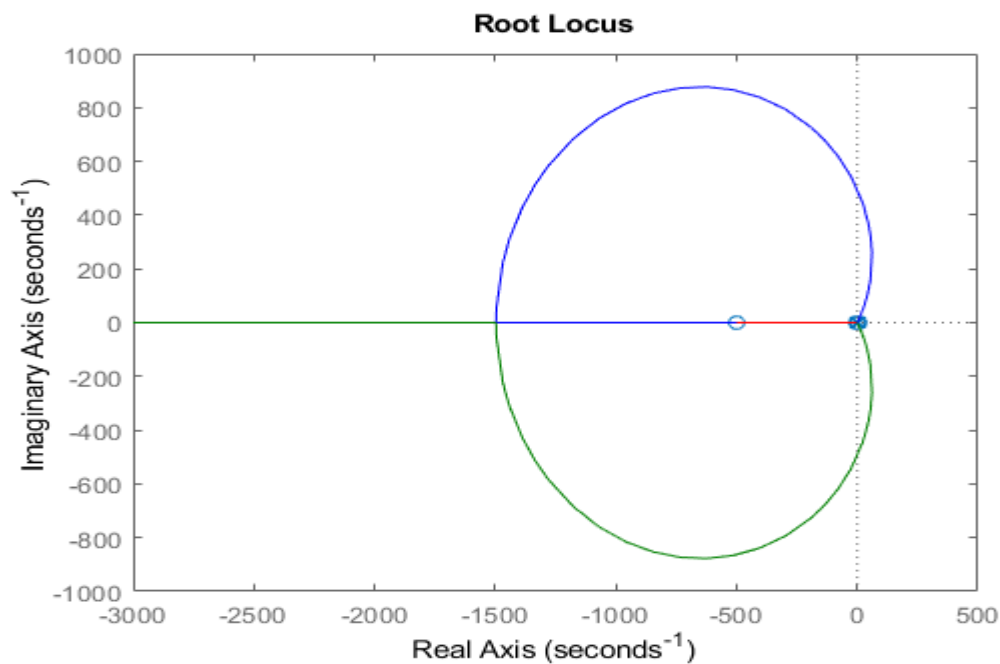
همان طور که مشاهده می کنیم پاسخ پله فوق تا زمان 6 میلی ثانیه را به ما نشان می دهد که پاسخ به نظر پایدار می رسد , اما اگر پاسخ پله سیستم فوق را به ازای زمان ها طولانی تر رسم کنیم , مشاهده خواهیم کرد که سیستم به دست آمده ناپایدار خواهد بود :



شکل 4: پاسخ پله سیستم $G1$ در حضور کنترلر PID تا زمان 8 ثانیه

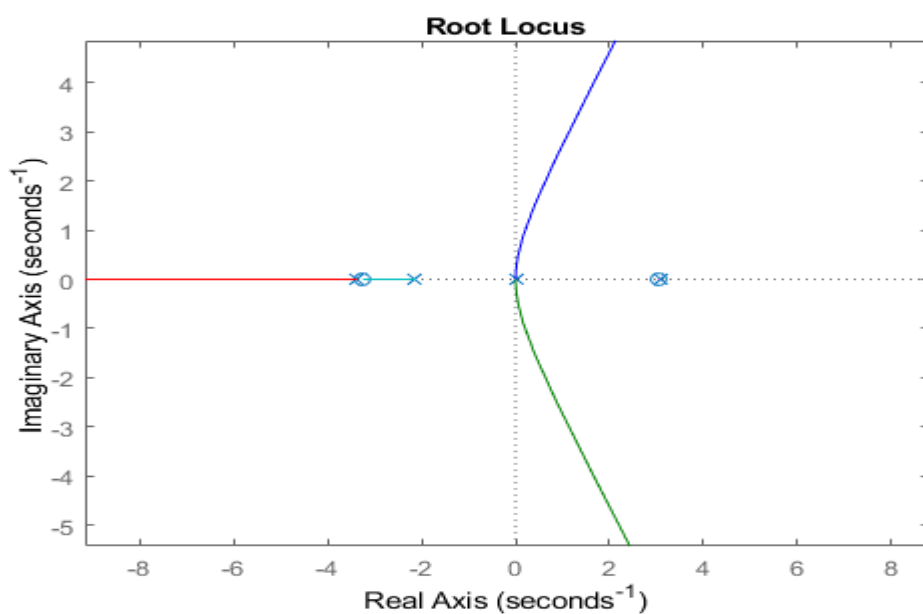
همان طور که مشاهده می کنیم سیستم ناپایدار است و علت نیز این است که کنترلر طراحی شده نتوانسته است اثر قطب ناپایدار را از بین ببرد .

برای بررسی دقیق تر مکان هندسی صفرها و قطب های سیستم در حضور کنترل کننده را رسم می کنیم :



شکل 5: نمای کلی از مکان هندسی صفرها و قطب های سیستم GI در حضور کنترل کننده

کمی بزرگنمایی شکل را بیشتر می کنیم تا به خوبی قطب ناپایدار را مشاهده نماییم :



شکل 6: مکان هندسی صفرها و قطب های سیستم GI در حضور کنترل کننده با بزرگ نمایی بیشتر

مشاهده می کنیم کنترل کننده PID طراحی شده به خوبی نمی تواند شرط پایداری سیستم را برآورده سازد و اثر قطب ناپایدار سیستم از بین نرفته و کمافی السابق (بدون حضور کنترل کننده) سیستم ناپایدار است .

در انتها ضرایب به دست آمده برای کنترلر PID و همچنین برخی از مشخصات پاسخ پله سیستم (درصد فراجهش ، زمان نشست ، ...) را در حضور کنترل کننده ذکر می کنیم :

Controller Parameters	
	Tuned
Kp	19067935.3005
Ki	4760795018.0937
Kd	19092.7227
Tf	n/a
Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	0.000345 seconds
Settling time	0.00284 seconds
Overshoot	15 %
Peak	1.15
Gain margin	-24.7 dB @ 497 rad/s
Phase margin	76.8 deg @ 4.31e+03 rad/s
Closed-loop stability	Stable

شکل 7 : پارامترها و ضرایب به دست آمده برای $G1$

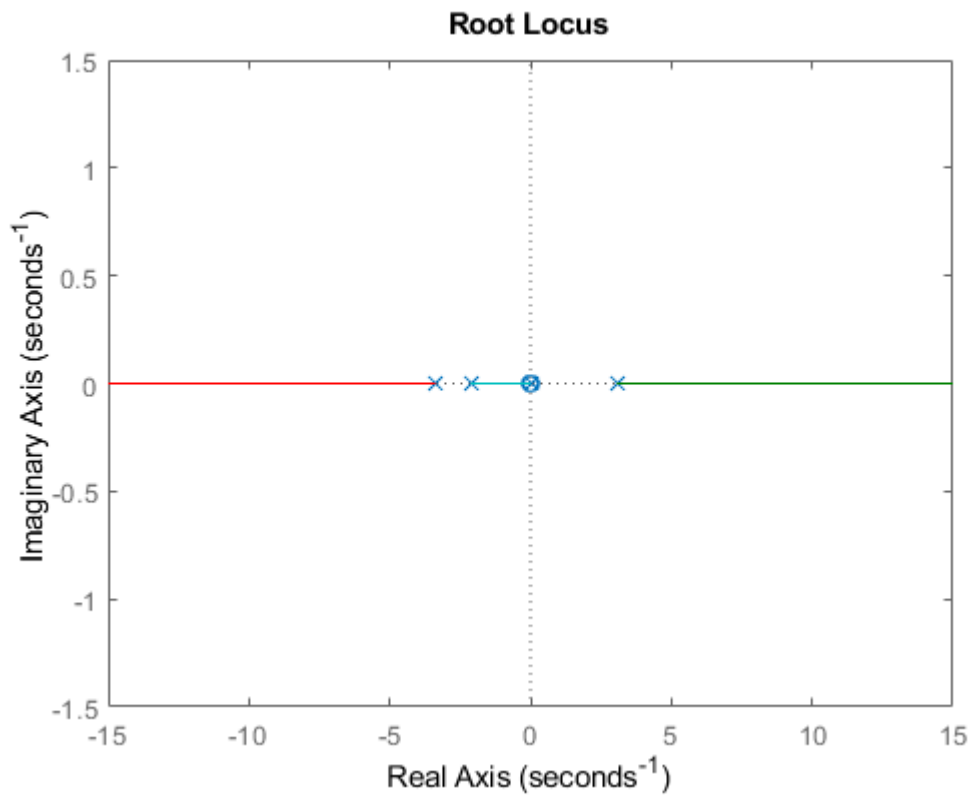
که با توجه به شکل ضرایب به شکل زیر بدست آمده اند:

$$Kp = 19067935.3005 \quad Ki = 4760795018.0937 \quad Kd = 19092.7227$$

و تابع تبدیل کنترلر PID مربوط به سیستم $G_1(s)$ به این صورت خواهد بود :

$$\frac{1.909e04 s^2 + 1.907e07 s + 4.761e09}{s}$$

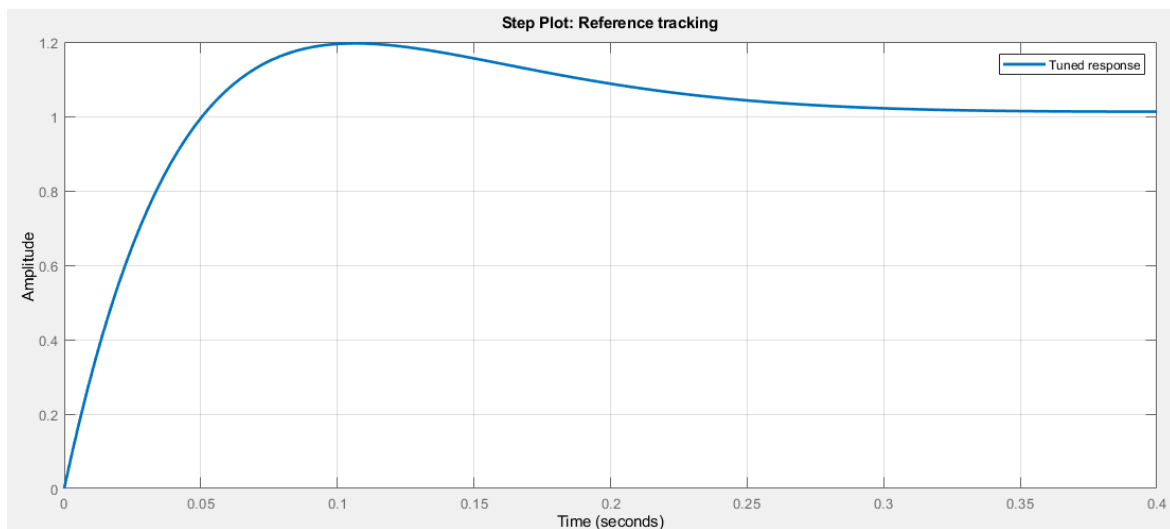
و برای سیستم G_2 داریم:



شکل 8: مکان هندسی صفرها و قطب های G_2

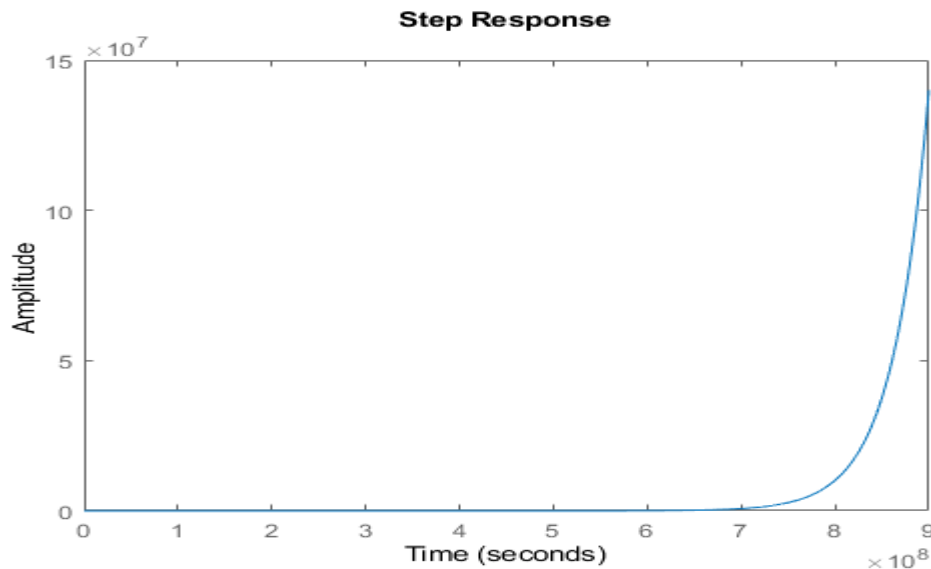
همان طور که مشاهده می کنیم تابع تبدیل G_2 دارای یک قطب با مقدار حقیقی مثبت می باشد که منجر به ناپایداری سیستم می گردد.

در ادامه با استفاده از دستور pidTuner ضرایب مناسب PID را پیدا می کنیم :



شکل 9: پاسخ پله سیستم G_2 در حضور کنترلر PID تا زمان 0.4 ثانیه

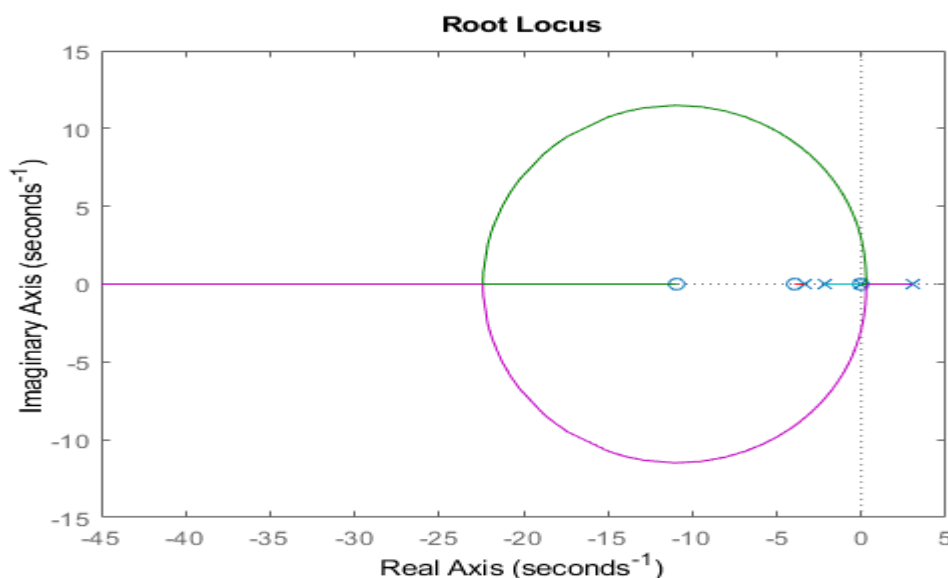
همان طور که مشاهده می کنیم پاسخ پله فوق تا زمان 0.4 ثانیه را به ما نشان می دهد که پاسخ به نظر پایدار می رسد ، اما اگر پاسخ پله سیستم فوق را به ازای زمان ها طولانی تر رسم کنیم ، مشاهده خواهیم کرد که سیستم به دست آمده ناپایدار خواهد بود :



شکل 10: پاسخ پله سیستم $G2$ در حضور کنترلر PID تا زمان 9×10^8 ثانیه

همان طور که مشاهده می کنیم سیستم ناپایدار است و اگر چه تا زمان بسیار زیادی خروجی پایدار می باشد ولی به ازای زمان های طولانی تر (700 مگا ثانیه!) خروجی سیستم ناپایدار شده و علت نیز این است که کنترلر طراحی شده نتوانسته است اثر قطب ناپایدار را به خوبی از بین ببرد .

برای بررسی دقیق تر مکان هندسی صفرها و قطب های سیستم در حضور کنترل کننده را رسم می کنیم :



شکل 11: نمای کلی از مکان هندسی صفرها و قطب های سیستم $G2$ در حضور کنترل کننده

مشاهده می کنیم کنترل کننده PID طراحی شده به خوبی نمی تواند شرط پایداری سیستم را برآورده سازد و اثر قطب ناپایدار سیستم از بین نرفته و کمافی السابق (بدون حضور کنترل کننده) سیستم ناپایدار است .

در انتها ضرایب به دست آمده برای کنترلر PID و همچنین برخی از مشخصات پاسخ پله سیستم (درصد فراجهش ، زمان نشست ، ...) را در حضور کنترل کننده ذکر می کنیم :

Controller Parameters	
	Tuned
Kp	-2265.1081
Ki	-6579.8749
Kd	-152.421
Tf	n/a
Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	0.0381 seconds
Settling time	0.307 seconds
Overshoot	19.6 %
Peak	1.2
Gain margin	-29.1 dB @ 2.87 rad/s
Phase margin	70.6 deg @ 35.8 rad/s
Closed-loop stability	Stable

شکل 11 : پارامترها و ضرایب به دست آمده برای G_2

که با توجه به شکل ضرایب به شکل زیر بدست آمده اند:

$$Kp = -2265.1081 \quad Ki = -6579.8749 \quad Kd = -152.421$$

و تابع تبدیل کنترلر PID مربوط به سیستم $G_2(s)$ به این صورت خواهد بود :

$$\frac{-152.4 s^2 - 2265 s - 6580}{s}$$

سوال 7

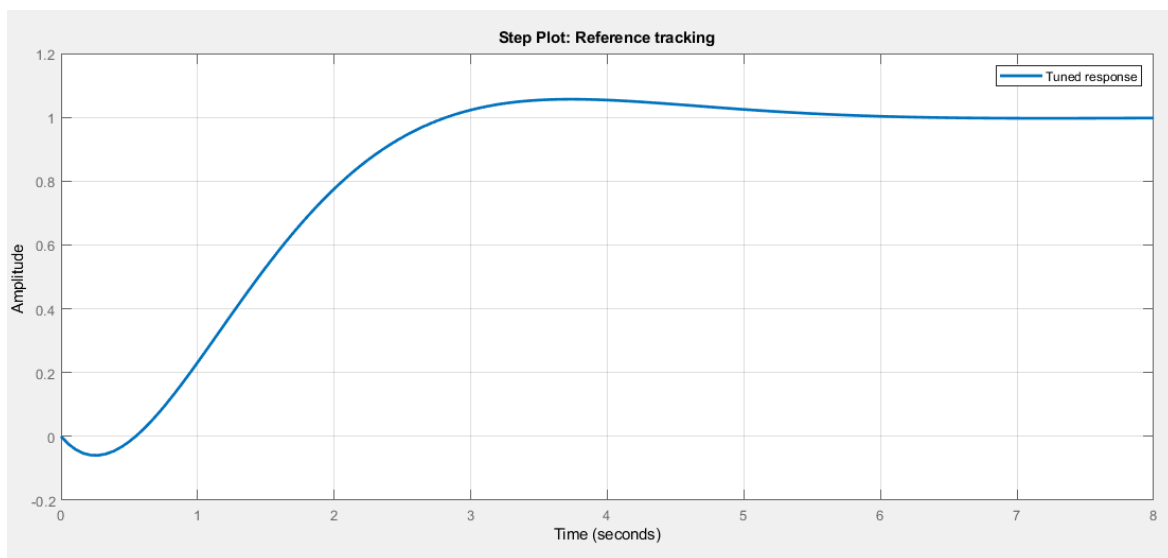
این سوال را یک بار به صورت دستی و یک بار با استفاده از ابزار Sisotool انجام می دهیم و مشاهده می کنیم نتایج به دست آمده بسیار نزدیک به هم می باشند .

روش اول : حذف صفر و قطب به صورت دستی

در این بخش با توجه به خواسته ابتدا با دستور pole در متلب قطب های تابع تبدیل را پیدا می کنیم سپس به صورت دستی یک صفر ایجاد می کنیم به نحوی که با قطب ناپایدار ساده شده و اثر نامطلوب آن را از بین ببرد .

در انتها نیز همانند سوال 6 با استفاده از pidTuner یک بهره¹ برای سیستم پیدا می کنیم که سیستم پایدار شود .

برای تابع تبدیل $G1$ داریم :



شکل 12 : تنظیم ضرایب PID برای $G1$

¹ Gain

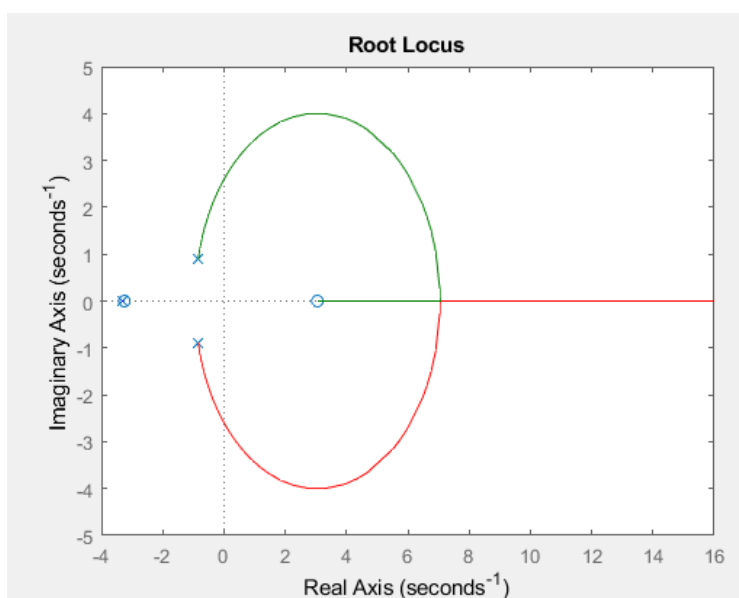
Controller Parameters	
	Tuned
Kp	-2.28
Ki	n/a
Kd	n/a
Tf	n/a
Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	1.59 seconds
Settling time	5.12 seconds
Overshoot	5.67 %
Peak	1.06
Gain margin	12.8 dB @ 2.6 rad/s
Phase margin	60 deg @ 0.683 rad/s
Closed-loop stability	Stable

شکل 13 : پارامترها و ضرایب به دست آمده برای GI

قطب ناپایدار آن در 3.0669 می باشد که یعنی کنترلر ما به شکل زیر است :

$$C = -2.28(s - 3.0669)$$

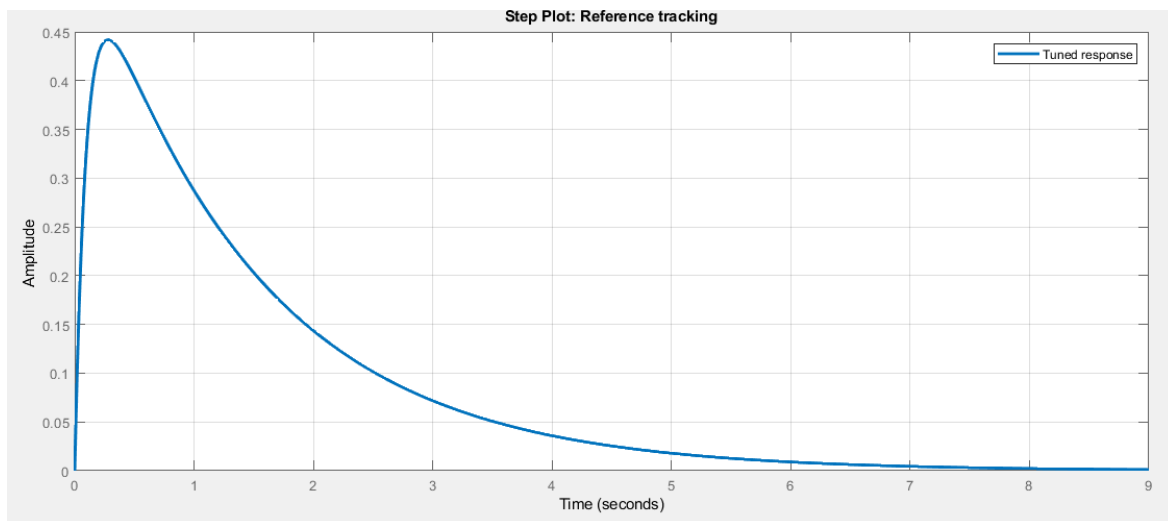
در سوال قبل مکان هندسی قطب ها و صفر ها را مشاهده کردیم حال پس از اعمال کنترلر و تغییرات انجام شده اگر مکان هندسی را رسم کنیم داریم :



شکل 14 : نمای کلی از مکان هندسی صفر ها و قطب های سیستم GI در حضور کنترل کننده

همانطور که مشاهده می شود قطب ناپایداری دیگر وجود ندارد.

حال برای G_2 داریم:



شکل 15: تنظیم ضرایب PID برای G_2

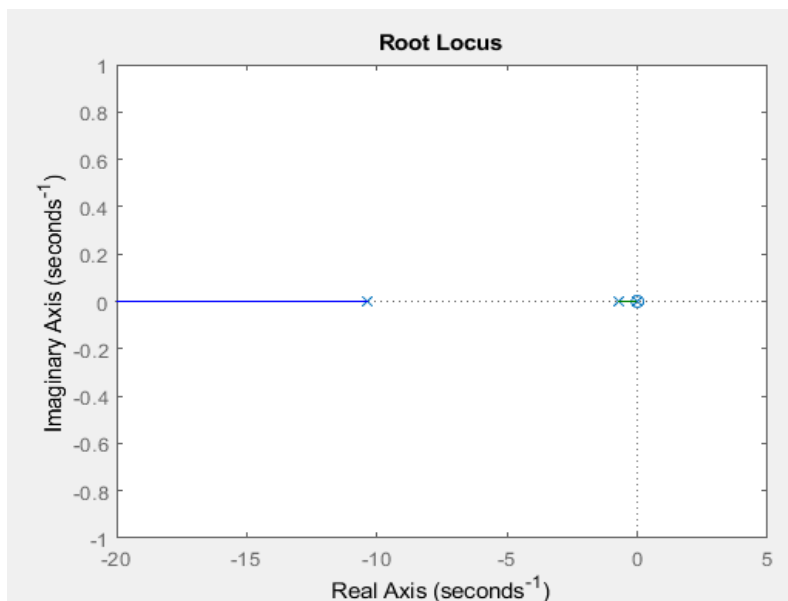
Controller Parameters	
	Tuned
Kp	-24.7018
Ki	n/a
Kd	n/a
Tf	n/a
Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	4.63e-06 seconds
Settling time	6.02 seconds
Overshoot	1.44e+06 %
Peak	0.442
Gain margin	325 dB @ 3.33e-08 rad/s
Phase margin	90 deg @ 8.3e-16 rad/s
Closed-loop stability	Stable

شکل 16: پارامترها و ضرایب به دست آمده برای G_2

در این تابع تبدیل نیز قطب ناپایدار در 3.0669 می باشد که یعنی کنترلر ما به شکل زیر است :

$$C = -24.7018(s - 3.0669)$$

در سوال قبل مکان هندسی قطب ها و صفر ها را مشاهده کردیم حال پس از اعمال کنترلر و تغییرات انجام شده اگر مکان هندسی را رسم کنیم داریم :



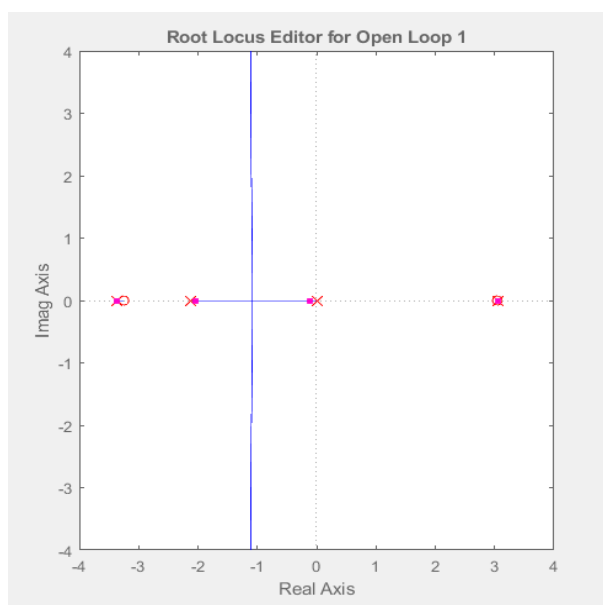
شکل 17: نمای کلی از مکان هندسی صفرها و قطب های سیستم $G2$ در حضور کنترل کننده

همانطور که مشاهده می شود قطب ناپایداری دیگر وجود ندارد.

روش دوم: استفاده از ابزار Sisotool

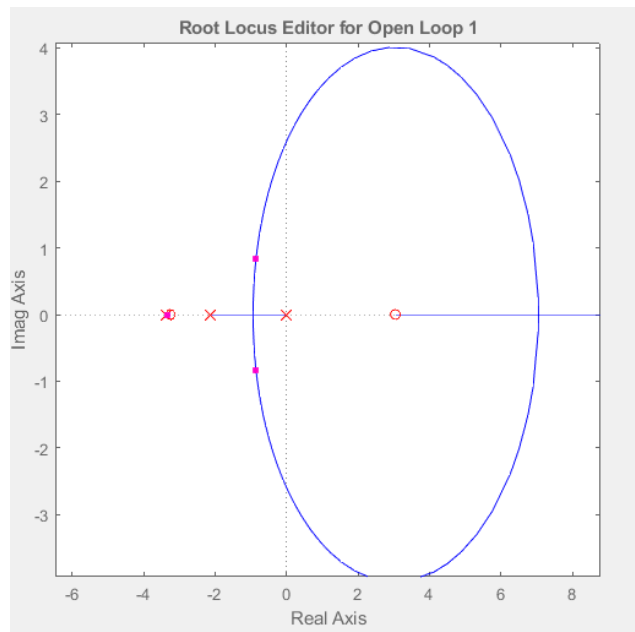
حال از ابزار Sisotool استفاده می کنیم. در ابتدا تنظیمات ابتدایی را انجام می دهیم سپس با باز شدن پنجره ابزار می توان مکان هندسی قطب ها و صفرها را مشاهده کرد. با توجه به مکان هندسی می توان قطب های ناپایدار را به راحتی با این ابزار حذف کرد.

ابتدا برای $G1$ مکان هندسی را به شکل زیر داریم:

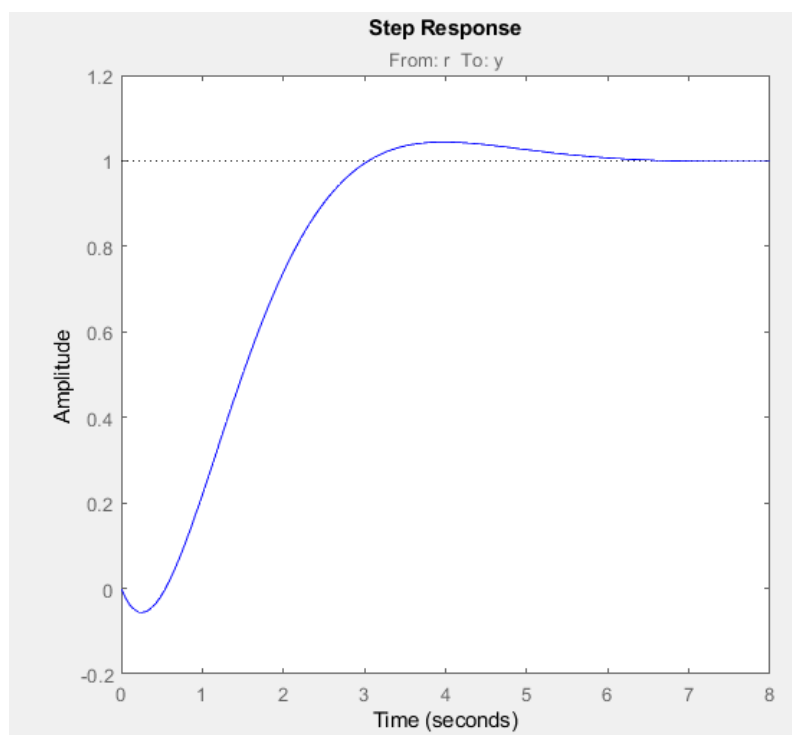


شکل 18: مکان هندسی قطب ها و صفرهای $G1$

حال اگر قطب ناپایدار را حذف کنیم داریم :



شکل 19 : مکان هندسی قطب ها و صفر های GI بعد از حذف قطب ناپایدار



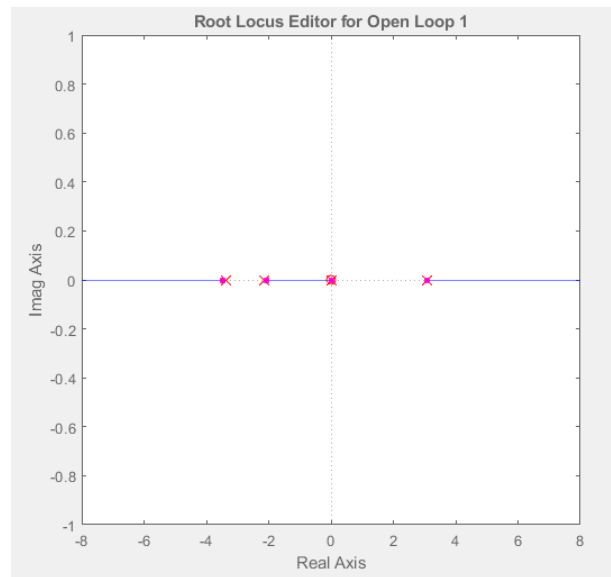
شکل 20 : پاسخ پله GI بعد از حذف قطب ناپایدار

که کنترلر آن به شکل زیر می شود :

$$-2.1599 (s-3.067)$$

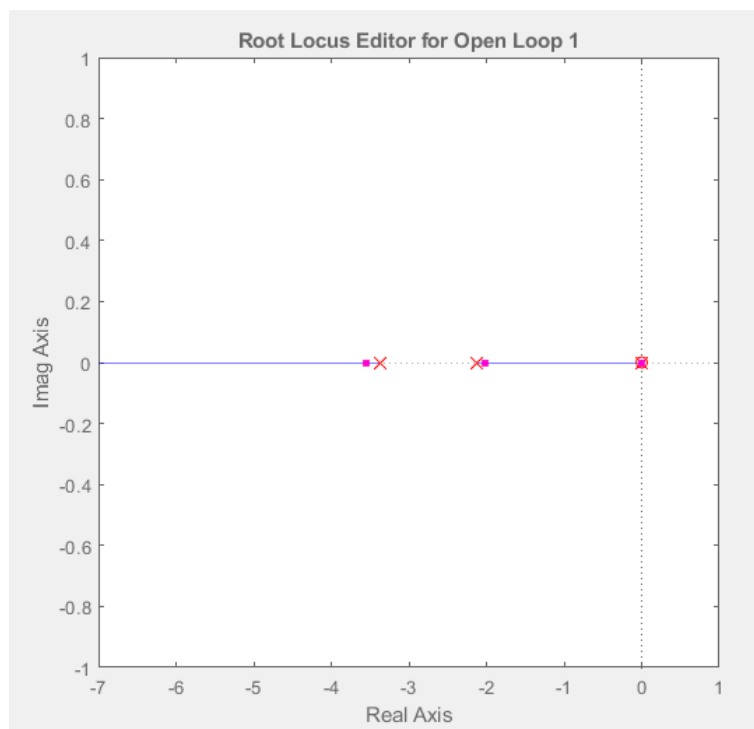
شکل 21 : کنترلر محاسبه شده برای GI

همانطور که مشاهده می شود نتیجه بسیار نزدیک به حالت قبل می باشد.
حال اگر همین کار ها را برای $G2$ تکرار کنیم داریم :

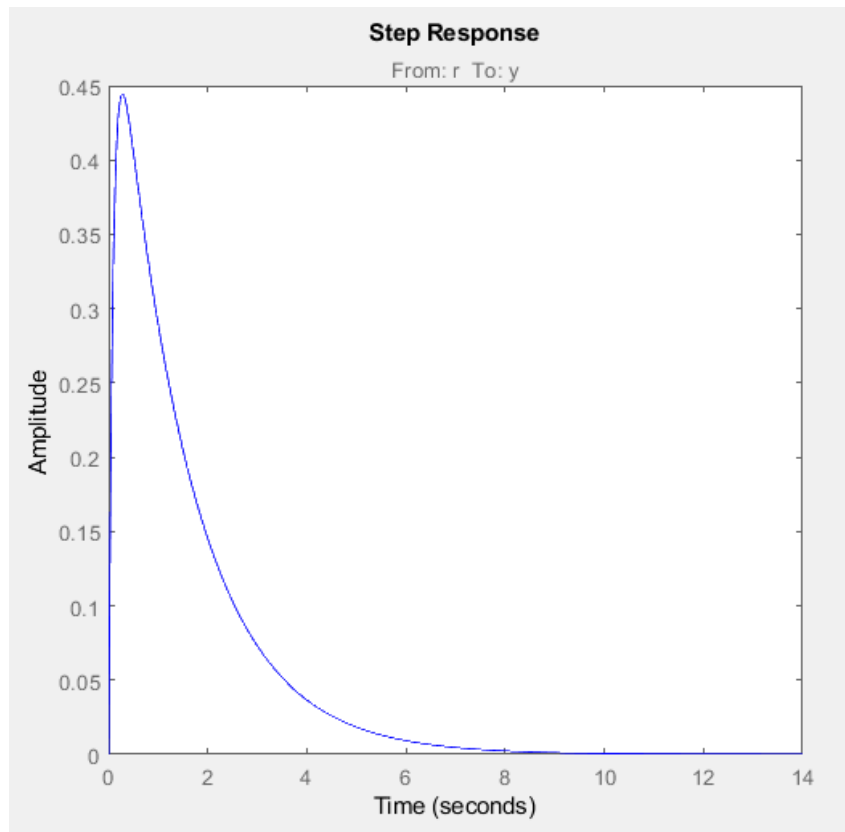


شکل 22: مکان هندسی قطب ها و صفر های $G2$

حال اگر قطب ناپایدار را حذف کنیم داریم :



شکل 23: مکان هندسی قطب ها و صفر های $G2$ بعد از حذف قطب ناپایدار



شکل 24: پاسخ پله $G2$ بعد از حذف قطب ناپایدار

که کنترلر آن به شکل زیر می باشد :

$$-24.961 \text{ (s-3.067)}$$

شکل 25: کنترلر محاسبه شده برای $G2$

همانطور که مشاهده می شود نتیجه بسیار نزدیک به حالت قبل می باشد .

اما با توجه به مباحث تدریس شده در کلاس می دانیم که هر چند بتوان سیستم را به این شکل پایدار کرد که به صورت BIBO پایدار باشد ، ممکن است با حذف صفر و قطب ترم هایی در معادلات حالت باشد که پایدار نباشند اما در خروجی نمایش داده نشوند ، همچنین در واقعیت پیاده سازی کنترلر PD به نحوی که بتواند صفری ایجاد کند که به صورت دقیق قطب ناپایدار را حذف کند ، غیر ممکن است .

حتی در صورتی هم که بتوانیم کنترلر PD ای طراحی کنیم که قادر باشد به صورت دقیق قطب ناپایدار را حذف کند ، اگر چه خروجی سیستم کراندار است و سیستم از بیرون پایدار به نظر می رسد و مشکلی ندارد اما می دانیم کراندار بودن خروجی سیستم لزوماً کراندار بودن همه حالت های سیستم را نتیجه نمی دهد و با حذف صفر و قطب به صورت ذکر شده ، اگر چه خروجی سیستم پایدار می شود اما ممکن است حالت های درون سیستم کراندار نباشند و دچار مشکل شوند و سیستم پایدار داخلی نباشد .

سوال 8

ابتدا دیاگرام بلوکی داده شده را ساده کرده و خروجی ها را بر حسب ورودی های $x_d(t)$ و $\varphi_d(t)$ و توابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ و کنترل کننده های به دست آمده از سوال 7 $(C_1(s), C_2(s))$ می نویسیم .

به علت این که کنترل کننده های طراحی شده در سوال 6 کماکان منجر به ناپایداری سیستم می شدند از کنترل کننده های سوال 7 که سیستم را پایدار می کردند استفاده کردیم .

معادلات حاکم بر دیاگرام بلوکی پس از ساده سازی :

$$x(s) = \frac{(1 + G_2(s)C_2(s)) * (G_1(s)C_1(s)x_d(s) + G_1(s)C_2(s)\varphi_d(s)) - G_1(s)G_2(s)C_2(s)[C_1(s)x_d(s) + C_2(s)\varphi_d(s)]}{1 + G_1(s)C_1(s) + G_2(s)C_2(s) + 2G_1(s)C_1(s)G_2(s)C_2(s)}$$

$$\varphi(s) = \frac{(1 + G_1(s)C_1(s)) * (G_2(s)C_1(s)x_d(s) + G_2(s)C_2(s)\varphi_d(s)) - G_1(s)G_2(s)C_1(s)[C_1(s)x_d(s) + C_2(s)\varphi_d(s)]}{1 + G_1(s)C_1(s) + G_2(s)C_2(s) + 2G_1(s)C_1(s)G_2(s)C_2(s)}$$

که در آن ورودی های مطلوب x_d , φ_d برابر خواهد بود با :

$$\varphi_d(t) = 0 \rightarrow \varphi_d(s) = 0$$

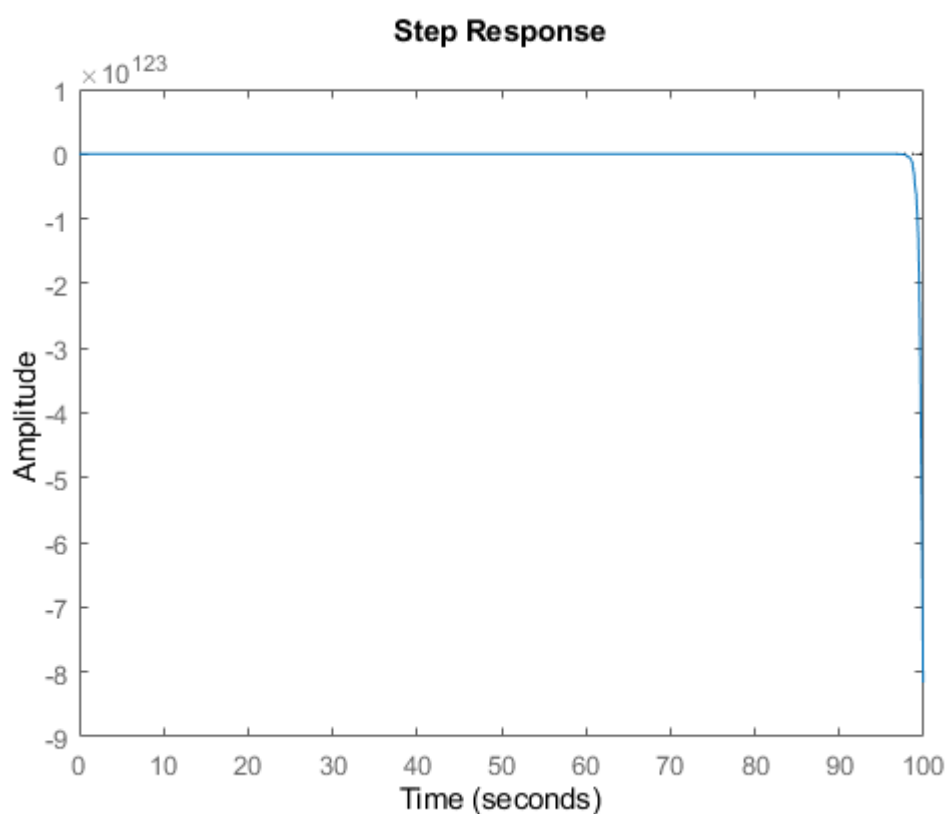
$$x_d(t) = (0.4 * U(t - 30) - 0.4 * U(t - 60)) - (0.4 * U(t - 60) - 0.4 * U(t - 90)) \rightarrow$$

$$x_d(s) = 0.4 * \frac{e^{-30s}}{s} - 0.8 * \frac{e^{-60s}}{s} + 0.4 * \frac{e^{-90s}}{s}$$

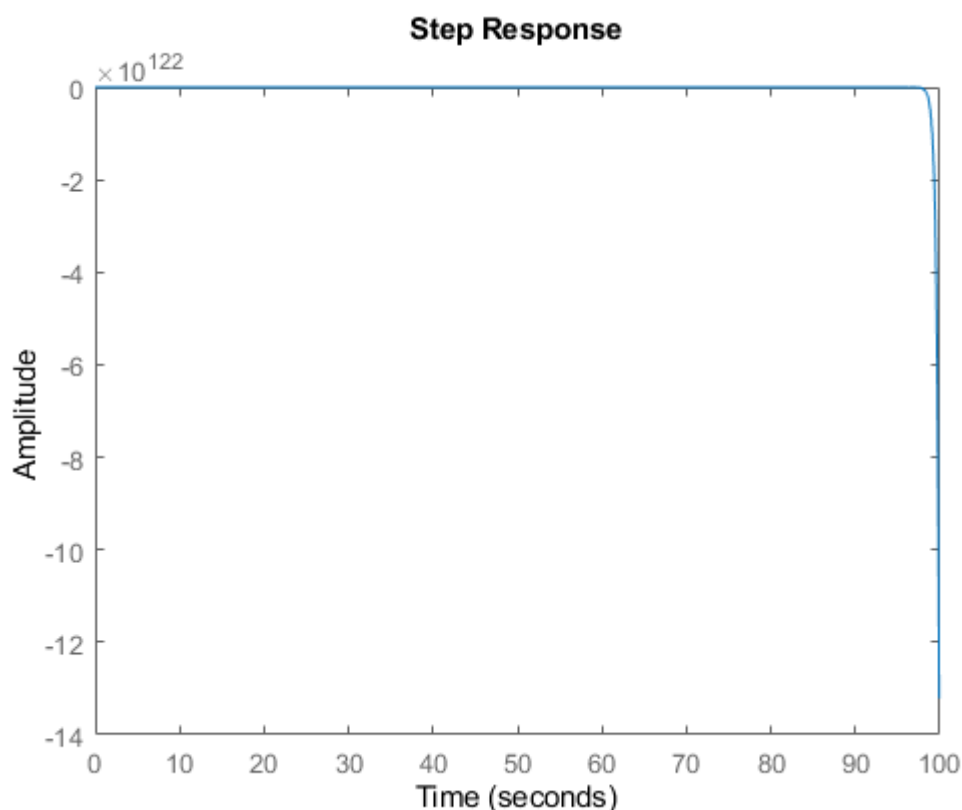
سیستم تک ورودی - چند خروجی خواسته شده را به 2 طریق پیاده سازی می کنیم .

روش 1 :

در این روش بدون استفاده از تقلیل مرتبه که در سوال 7 استفاده کردیم ، پیاده سازی را انجام می دهیم و با توجه به این که در این روش صفر کنترلر PD نمی تواند به صورت دقیق روی قطب ناپایدار قرار گیرد و اثر نامطلوب آن را خنثی کند انتظار داریم خروجی نیز ناپایدار شود .
در ادامه ، موقعیت ارا به و زاویه ی پاندول را مشاهده می کنیم :



شکل 26 : خروجی موقعیت ارا به زمانی که از تقلیل مرتبه استفاده نمی کنیم .



شکل 27: خروجی زاویه پاندول زمانی که از تقلیل مرتبه استفاده نمی کنیم .

مشاهده می کنیم به علت این که صفر کنترلر های PD استفاده شده دقیقاً بر روی قطب ناپایدار قرار نگرفته اند ، اثر نامطلوب قطب ناپایدار از بین نرفته و هر دو خروجی سیستم ناپایدار شده اند .

کما اینکه در واقعیت نیز با همچنین چالشی مواجه هستیم و به صورت دقیق نمی توانیم با اضافه کردن کنترلر PD ، اثر قطب ناپایدار سیستم را از بین ببریم و به علت موارد ذکر شده کنترل کننده PD نمی تواند سیستم مذکور را کنترل کند .

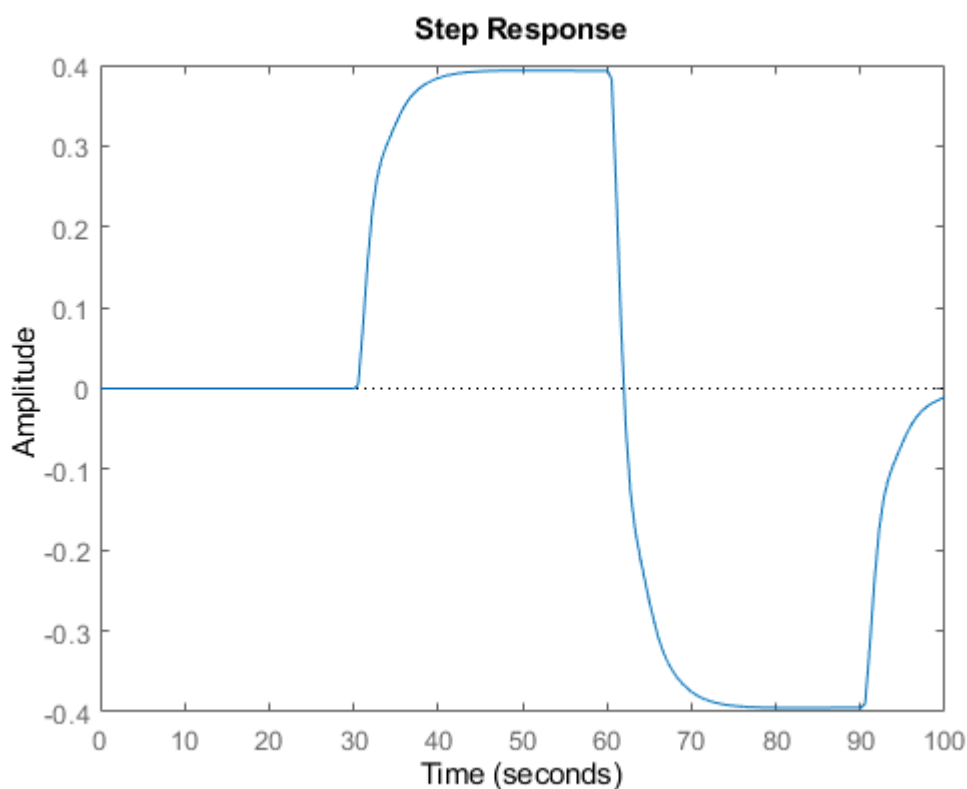
در ادامه با استفاده از تقلیل مرتبه سیستم را کنترل می کنیم ، اگر چه می دانیم استفاده از تقلیل مرتبه در واقعیت غیر ممکن است و نمی توان به این صورت درجه ی یک سیستم را کم کرد .

روش 2:

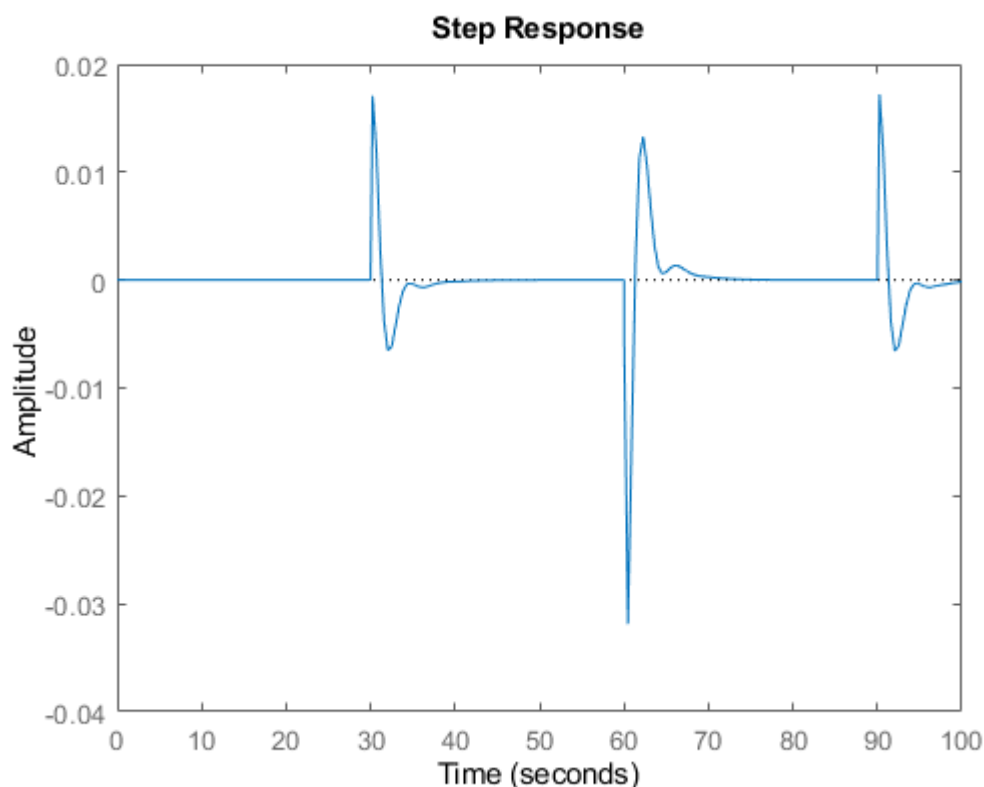
در این روش با استفاده از تقلیل مرتبه به کار گرفته شده در سوال 7، سعی می کنیم سیستم مورد نظر را پایدار نماییم.

به این صورت که به صورت دستی صفر کنترلر PD را با قطب ناپایدار ساده می کنیم و انتظار داریم خروجی مورد نظر نیز پایدار شود.

در ادامه، موقعیت ارا به و زاویه ی پاندول را مشاهده می کنیم:



شکل 28: خروجی موقعیت ارا به زمانی که از تقلیل مرتبه استفاده می کنیم.



شکل 29: خروجی زاویه پاندول زمانی که از تقلیل مرتبه استفاده می کنیم.

مشاهده می کنیم موقعیت پاندول تا حد مطلوبی توانسته است ورودی خود (x_d) را دنبال کند و بدون هیچ بالازدگی¹ و تنها کمی زمان نشست² خواسته ما را تا حد مطلوبی برآورده کند.

زاویه ی پاندول هم به خوبی مرجع خود (φ_d) را دنبال کرده و فقط در زمان هایی که ارا به موقعیت خود را تغییر داده مقدار کمی (در حد صدم درجه) بالازدگی دارد.

با توجه به موارد ذکر شده می دانیم در عمل پیاده سازی این روش غیر ممکن است و طراحی صفر کنترلر PD به نحوی که بتواند قطب ناپایدار را از بین ببرد غیر ممکن است و در واقعیت نمی توان به این صورت درجه ی سیستم را کاهش داد.

¹ Overshoot

² Settling Time

سوال 9

در سوال 6 دیدیم کنترلر PID نمی تواند سیستم مورد نظر را به پایداری برساند و صفرهای کنترلر مورد نظر قادر به از بین بردن قطب ناپایدار نبوده و نتوانسته است اثر نامطلوب آن را خنثی کند .

در سوال 7 با استفاده از تقلیل مرتبه و به نوعی به صورت دستی کنترلر PD را طراحی کردیم به گونه ای که اطمینان داشته باشیم صفر کنترل کننده با قطب ناپایدار ساده شده و اثر نامطلوب آن را به صورت کامل از بین می برد .

در عمل روش ذکر شده غیرممکن است و پیاده سازی آن امکان ندارد . زیرا نمی توانیم کنترلر PD ای طراحی کنیم که به صورت کاملاً دقیق صفری ایجاد کند که کاملاً با قطب ناپایدار ساده شده و اثر آن را از بین ببرد . از طرفی می دانیم در واقعیت نمی توانیم به این صورت درجه ی سیستم را کم کنیم و از تقلیل مرتبه استفاده کنیم .

حتی در صورتی هم که بتوانیم کنترلر PD ای طراحی کنیم که قادر باشد به صورت دقیق قطب ناپایدار را حذف کند , اگر چه خروجی سیستم کراندار است و سیستم از بیرون پایدار به نظر می رسد و مشکلی ندارد اما می دانیم کراندار بودن خروجی سیستم لزوماً کراندار بودن همه حالت های سیستم را نتیجه نمی دهد و با حذف صفر و قطب به صورت ذکر شده , اگر چه خروجی سیستم پایدار می شود اما ممکن است حالت های درون سیستم کراندار نباشند و دچار مشکل شوند و سیستم پایدار داخلی نباشد . در نتیجه کنترلر هایی که در این پروژه دیدیم و طراحی کردیم اگر چه در برخی موارد در شبیه سازی ها کارآمد بودند و منجر به پایداری سیستم شدند , اما با توجه به دلایل ذکر شده , پیاده سازی آن ها در عمل غیر ممکن است .

پیوست:

تمامی فایل ها و کد های ارسالی در نرم افزار متلب , نسخه های R 2020 b و R 2018 b اجرا و تست شده اند .