Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet u Sarajevu
Odsjek za računarstvo i informatiku

Zadaća 2
Naziv zadaće

Diskretna matematika

Ime i prezime: Elma Šeremet
Broj indexa: 18318
Grupa: četvrtak 12:00
Datum: 01.12.2019.

Zadatak №

Podzadatak №

Lista:

- Prvi
- Drugi

Enumerirana lista [1]:

1. Prvi
2. Drugi

Slika 1:

Slika 1. Opis slike

[1] Fusnota

Matematske formule (primjer):

$$
\begin{aligned}
&\arg\max Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \\
&\text{p.o.} \\
&\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Primjer kôda (prilagođeno za Python) 1:

```python
import numpy as np

def incmatrix(genl1,genl2):
    m = len(genl1)
    n = len(genl2)
    M = None
    VT = np.zeros((n*m,1), int)

    #compute the bitwise xor matrix
    M1 = bitxormatrix(genl1)
    M2 = np.triu(bitxormatrix(genl2),1)

    for i in range(m-1):
        for j in range(i+1, m):
            [r,c] = np.where(M2 == M1[i,j])
            for k in range(len(r)):
                VT[(i)*n + r[k]] = 1;
                VT[(i)*n + c[k]] = 1;
                VT[(j)*n + r[k]] = 1;
                VT[(j)*n + c[k]] = 1;

                if M is None:
                    M = np.copy(VT)
                else:
                    M = np.concatenate((M, VT), 1)

                VT = np.zeros((n*m,1), int)

    return M
```

Listing 1. Python kôd

Pseudokôd/Algoritam 1:

Algoritam 1 Pseudokôd algoritma tabu pretraživanja

$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x0}$
$\mathrm{v} \leftarrow \mathrm{f}(\mathbf{x})$
$\mathrm{T} \leftarrow \emptyset$
repeat
    $\Omega' \leftarrow \emptyset$
    repeat
        $\tilde{\mathrm{N}}(\mathbf{x}, \delta) = \mathrm{N}(\mathbf{x}, \delta) \backslash \mathrm{T}$
        izabrati **x'** $\in \tilde{\mathrm{N}}(\mathbf{x}, \delta)$
        $\mathrm{v}' \leftarrow \mathrm{f}(\mathbf{x'})$
        if $\mathrm{v}' \rho \mathrm{v}$ **then**
            uvrstiti v' u Ω
        end if
    until ZavrsenoPretrazivanjeOkoline($\mathbf{x}$)
    $\mathrm{x} \leftarrow$ IzborNovogRjesenja(Ω')
    $\mathrm{T} \leftarrow$ AzuriranjeTabuListe($\mathbf{x}, \Omega'$)
until UslovZaustavljanja()

Tabela 1:

Tabela 1. Tabela

Col1	Col2	Col2	Col3
1	6	87837	787
2	7	78	5415
3	545	778	7507
4	545	18744	7560
5	88	788	6344

Zadatak1[0.2poena]

Nakon što su završene prijave semestra, 20 studenata se dolazi naknadno prijaviti. S obzirom da je broj studenata na izbornim predmetima ograničen, ispostavilo se da samo tri izborna predmeta imaju slobodna mjesta. Prvi ima 6, drugi 9 i posljednji 5 slobodnih mjesta. Na koliko različitih načina se ovi studenti mogu rasporediti na predmete?

Rjesenje :

Za rješavanje ovog zadatka koristiti ću kombinacije bez ponavljanja budući da je poredak studenata na izbornom predmetu nebitan.

Za prvi predmet studente možemo izabrati na : C_{20}^6 načina.
20-6 = 14
Za drugi predmet studente možemo izabrati na : C_{14}^9 načina.
14-9 = 5
Za treći predmet studente možemo izabrati na : C_5^5 načina.

Formula za računanje kombinacija bez ponavljanja je:

$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$C_{20}^6 = \frac{20!}{6! \cdot (20-6)!} = 38760$
$C_{14}^9 = \frac{14!}{9! \cdot (14-9)!} = 2002$
$C_5^5 = \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} = 1$

Primjenom multiplikativnog principa dobila sam konačno rješenje :

$(C_{20})^6 \cdot (C_{14})^9 \cdot (C_5)^5 = 38760 \cdot 2002 \cdot 1 = 77597520 \implies$ broj različitih načina za rasporediti studente na ove predmete je 77597520

Zadatak2[0.25poena]

Potrebno je formirati sedmočlanu ekipu za međunarodno softversko-hardversko takmičenje. Uvjeti su da ekipa mora imati barem tri studenta sa smjera RI, dok su studenti drugih smjerova poželjni (zbog većeg hardverskog znanja) ali ne i obavezni. Za takmičenje se prijavilo 8 studenata smjera RI i 5 studenata smjera AiE (dok studenti drugih smjerova nisu bili zainteresirani). Odredite na koliko načina je moguće odabrati traženu ekipu. Koliko će iznositi broj mogućih ekipa ukoliko se postavi dodatno ograničenje da ekipa mora imati i barem dva studenta smjera AiE?

Rjesenje :

Budući da je potrebno formirati sedmočlanu ekipu , potrebno je izabrati k studenata sa RI , te 7-k studenata sa AiE.
Iz uslova zadatka da ekipa mora imati barem tri studenta sa smjera RI imamo uslov da je $k \geq 3 \implies k \in 3, 4, 5, 6, 7$

Studenta sa smjera RI možemo odabrati na C_8^k načina, dok studente sa smjera AiE možemo odabrati na C_5^{7-k} načina, budući da se svi studenti međusobno razlikuju.

Izbor studenta sa RI ne ovisi od izbora studenta sa AiE tako da ću koristiti multiplikativni princip, te aditivnim principom dobiti traženi broj načina.

$C_8^3 \cdot C_5^4 + C_8^4 \cdot C_5^3 + C_8^5 \cdot C_5^2 + C_8^6 \cdot C_5^1 + C_8^7 \cdot C_5^0 = 56 \cdot 5 + 70 \cdot 10 + 56 \cdot 10 + 28 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 280 + 700 + 560 + 140 + 8 = 1688 \implies$ traženu ekipu možemo izabrati na 1688 načina.

Ako postavimo dodatno ograničenje da ekipa mora imati barem dva studenta AiE , moguće situacije su :
2 AiE , 5 RI
3 AiE , 4 RI
4 AiE , 3 RI

$C_8^5 \cdot C_5^2 + C_8^4 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^4 = 56 \cdot 10 + 70 \cdot 10 + 56 \cdot 5 = 560 + 700 + 280 = 1540 \implies$ traženu ekipu možemo izabrati na 1688 načina.

Zadatak3[0.25poena]

Ploča veličine 11 x 11 je podijeljena na jednake kvadrate. Dva kvadrata su obojena žutom bojom, a ostali su obojeni zelenom bojom. Dvije kolor šeme ploče su ekvivalentne ako rotiranjem jedne možemo dobiti drugu. Koliko različitih kolor šema ploče se može napraviti?

Rjesenje :

Prije svega potrebno je izračunati na koliko načina možemo rasporediti dva kvadrata na tabli jer se oni razlikuju.
Za većinu slučajeva imamo po 4 rotacije , a da se kolor šema ne promijeni, tako da broj mogućih načina za raspoređivanje dva kvadrata dijelimo sa 4.

Budući da je ploča veličine 11 x 11 , broj načina da na njoj izaberemo dva kvadrata je :

$C_{121}^2 = \frac{121!}{2! \cdot 119!} = 7260$

Budući da trebamo podijeliti sa 4, dobije se : $\frac{7260}{4} = 1815$

Također , potrebno je da pronađem i ukupan broj simetričnih postavljana dva kvadrata u odnosu na centar, jer u tome slučaju nakon dvije rotacije dobijemo poziciju koja je jednaka početnoj.

Centar table veličine 11 x 11 se nalazi u 6-tom redu i 6-toj koloni, tako da je potrebno pronaći broj načina da odaberemo jedan kvadrat iznad centra. To ćemo dobiti zbirom broja kvadrata iznad centra , brojem kvadrata pored centra sa jedne strane (ili lijeve ili desne).

Ukupan broj kolor šema ploče koje zadovoljavaju uslove zadane u zadatku su : $1815 + 121 = 1936$

Zadatak4[0.25poena]

Na stolu se nalazi određena količina papirića, pri čemu se na svakom od papirića nalazi po jedno slovo. Na 3 papirića se nalazi slovo U, na 4 papirića se nalazi slovo A, na 5 papirića slovo S i na 4 papirića slovo Z. Odredite koliko se različitih sedmoslovnih riječi može napisati slažući uzete papiriće jedan do drugog (nebitno je imaju li te riječi smisla ili ne).

Rjesenje :

Među papirićima imamo :

3 slova U
4 slova A
5 slova S
4 slova Z

Budući da tražim sedmoslovne riječi tražim koeficijent uz t^7
Redoslijed uzimanja slova je bitan, pa zbog toga se radi o permutacijama sa ponavljanjem klase 7.
Rezultat treba da bude jednak $k! \cdot \lambda_k$ pri čemu je λ_k koeficijent koji stoji uz t^k kada izvršim razvoj po stepenima t u polinomu :

$$\psi_{n;m_1,m_2,..,m_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{t^j}{j!}$$

Razvijajući ovaj polinom za :
$n = 4, m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5, m_4 = 4$ i tražeći član uz t^7 sam dobila :
$\psi_{4;3,4,5,4} = (1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}) \cdot (1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!})^2 \cdot (1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}) = ...$

Množenjem svih mogućih kombinacija i izdvajanjem onih koje uz sebe sadrže t^7 dobila sam :

$... = t^7 \cdot (\frac{7}{144} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{80} + \frac{1}{40} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{72}) \implies t^7 \cdot (\frac{1}{16} + \frac{7}{3} + \frac{43}{80}) \implies t^7 \cdot \frac{44}{15}$

Konačno riješenje je dato sa $k! \cdot \lambda_k \implies 7! \cdot \frac{44}{15} = 14784$

Zadatak5[0.25poena]

Odredite koliko se različitih paketa koji sadrže 6 voćki može napraviti ukoliko nam je raspolaganju 5 banana, 4 breskve, 3 naranče, 2 kruške i 1 smokva (pri čemu se pretpostavlja da ne pravimo razliku između primjeraka iste voćke).

Rjesenje :

6 voćki, 5 banana, 4 breskve, 3 naranče , 2 kruške , 1 smokva

Redoslijed stavljanja voćki u paket nije bitan tako da zadatak možemo riješiti traženjem kombinacija sa ponavljanjem klase 6.

Za računanje koristiti ću funkciju izvodnice čija formula glasi :
$\varphi_{n;m_1,m_2,..,m_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} t^j$

Tražim koeficijent uz t^6 uz vrijednosti iz zadatka :
$n = 5; m_1 = 5, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 2, m_5 = 1$

$\varphi_{n;m_1,m_2,..,m_n}(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5) \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + t^4) \cdot (1 + t + t^2 + t^3) \cdot (1 + t + t^2) \cdot (1 + t)$
Nakon množenja prve zagrade sa drugom, te treće zagrade sa četvrtom i petom dobila sam :
$(1+2t+3t^2+4t^3+5t^4+5t^5+4t^6+3t^7+2t^8+t^9)\cdot(1+3t+5t^2 6t^3+5t^4+3t^5+t^6)$
Budući da mi je potreban koeficijent uz t^6 množeći sve , te zanemarujući vrijednosti koje mi nisu potrebne dobila sam :
$4 \cdot t^6 + 15 \cdot t^6 + 25 \cdot t^6 + 24 \cdot t^6 + 15 \cdot t^6 + 6 \cdot t^6 + t^6 = 90 \cdot t^6$

Uz t^6 se nalazi 90, tako da 90 predstavlja broj različitih paketa koji se mogu napraviti uz uslove zadane u tekstu zadatka.

Zadatak6[0.25poena]

Odredite na koliko načina se može rasporediti 20 identičnih kuglica u 6 različitih kutija, ali tako da u svakoj kutiji bude najviše 5 kuglica.

Rjesenje :

Kao i u prethodnom zadatku koristiti ću funkcije izvodnice, ali ovaj put računati ću kombinacije klase 20 skupa od 5 elemenata.
Sada tražim koeficijent uz t^{20}

Za računanje koristiti ću funkciju izvodnice čija formula glasi :
$\varphi_{n;m_1,m_2,..,m_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} t^j$

Imamo da je : $n = 6; m_i = 5$

$\varphi_{n;m_1,m_2,..,m_n}(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5)^6$

Računanjem kao u prethodnom zadatku dobila sam da je koeficijent uz t^{20} 2247, pa broj načina za raspoređivanje kuglica pod uslovima zadanim u zadatku jeste 2247.

Zadatak7[0.25poena]

Odredite na koliko načina se 13 različitih predmeta upakovati u 9 identičnih vreća (koje nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogle razlikovati), pri čemu se dopušta i da neke od vreća ostanu prazne.

Rjesenje :

Iz zadatka možemo zaključiti da se problem svodi na računanje :

$\sum_0^k S_n^k$

jer se radi o problemu gdje su vreće identične, a predmeti različiti.
Dakle, zadatak ću riješiti pomoću Stirlingovog trougla za podskupove:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155
12	0	1	2047	86526	611501	1379400	1323652	627396	159027	22275
13	0	1	4095	261625	2532530	7508501	9321312	5714424	1899612	359502

Rješenje zadatka jeste suma svih brojeva koji se nalaze u zadnjem redu tabele:

$\sum_0^9 S_{13}^k = 0+1+4095+261625+2532530+7508501+9321312+5715424+1899612+359502 = 27602602$

Zadatak8[0.25poena]

Odredite na koliko se načina može 14 kamenčića razvrstati u 6 gomilica. Pri tome se i kamenčići i gomilice smatraju identičnim (odnosno ni kamenčići ni gomilice nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogli razlikovati).

Rjesenje :

Budući da poredak kod kamenčića i gomilica nije bitan, te da su gomilice skupovi koji ne smiju biti prazni , rješenje zadatka možemo dobiti računanjem broja particija broja 14 sa 6 sabiraka, to jest : $(p_{14})^6$

Broj particija zadovoljava rekurzivnu formulu : $q_n^k = q_n^{k-1} + q_{n-k}^k$ uz početne uvjete : $q_n^1 = 1, q_0^k = 1$i$q_n^k = q_n^n$ za k ¿ n. Imamo da je : $p_n^k =$

$q^{k}_{n-k} = q^{6}_{14-6} = q^{6}_{8}$

q^6_8 možemo izračunati tabeliranjem i računanjem q^j_i za i od 1 do n, te onda za svaku vrijednost i za sve vrijednosti j od 1 do k.
Tabela izgleda ovako :

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7
6	1	4	7	9	10	11
7	1	4	8	11	13	14
8	1	5	10	15	18	20

Iz tabele možemo vidjeti da je $q^6_8 = q^5_8 + q^6_2 = 18 + 2 = 20 \implies$ broj načina na koje se 14 kamenčića može razvrstati u 6 gomilica jeste 20.

Zadatak9[0.25poena]

Odredite na koliko načina se broj 12 može rastaviti na sabirke koji su prirodni brojevi, pri čemu njihov poredak nije bitan, ali pod dodatnim uvjetom da se sabirak 1 smije pojaviti najviše 2 puta, dok se sabirak 3 smije pojaviti samo neparan broj puta.

Rjesenje :

Za rješavanje ovog zadatka koristiti ću funkcije izvodnice, budući da moram odrediti broj particija broja 12, a dodatno imam postavljenje neke uslove u zadatku za određene sabirke.

$\varphi_k(t) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} t^{i \cdot j}$

Potreban mi je koeficijent uz t^{12}

1 se može pojaviti, 0,1,2 puta (zbog uslova zadatka) , 2 se može pojaviti 0,1,2,3,4,5,6 puta, 3 se može pojaviti 1,3 puta(također zbog uslova zadatka),

4 se može pojaviti 0,1,2,3 puta, itd..

$$\varphi_k(t) = (1+t+t^2)\cdot(1+t^2+t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{12})\cdot(t^3+t^9)\cdot(1+t^4+t^8+t^{12})\cdot(1+t^5+t^{10})\cdot(1+t^6+t^{12})\cdot(1+t^7)\cdot(1+t^8)\cdot(1+t^9)\cdot(1+t^10)\cdot(1+t^{11})\cdot(1+t^{12}) = ..+t^{12}+..+t^{12}+..+2\cdot t^{12}+..+t^{12}+..+3\cdot t^{12}+..+4\cdot t^{12} = ..+12\cdot t^{12}+...$$

Računanjem dobila sam da je koeficijent uz $t^{12} = 12 \implies$ broj 12 se može rastaviti na sabirke koji su prirodni brojevi, te koji zadovoljavaju dodatni uvjet na 12 načina.

Zadatak10[0.2poena]

Ana i Boris parkiraju auta na praznom parkiralištu koje se sastoji od 18 mjesta u jednom redu. Vjerovatnoća parkiranja na mjesta je jednaka. Koja je vjerovatnoća da su parkirali auta tako da se između auta nalazi najviše jedno prazno mjesto za parkiranje?

Rjesenje :

Kada Boris dođe na prazan parking (ili Ana, sasvim je svejedno) broj mogućih načina na koje on može parkirati auto je $\frac{1}{18}$
Međutim kada Ana dođe nakon toga na parking imamo više različitih slučajeva :

PRVI SLUČAJ - Boris je parkirao auto na rubu parkinga
U tom slučaju može biti jedno ili nijedno prazno mjesto između njih te, Ana kada dođe na parking može parkirati auto na $\frac{2}{17}$ načina.

DRUGI SLUČAJ - Boris je parkirao auto na mjesto koje se nalazi jedno mjesto udaljeno od ruba parkinga
U tom slučaju Ana može parkirati auto na $\frac{3}{17}$ načina.

TREĆI SLUČAJ - Boris je parkirao auto na bilo koje mjesto na parkingu izuzev prva dva slučaja
U tom slučaju Ana može parkirati auto na $\frac{4}{17}$ načina.

Prvi, drugi i treći slučaj su međusobno isključivi , pa zbog toga trebamo koristiti aditvni princip :

$14 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{17} + 2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{17} + 2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{17} = \frac{66}{306} = 0.21568627 = 21.56\% \implies$ vjerovatnoća da su parkirali auta tako da se između auta nalazi najviše jedno prazno mjesto za parkiranje iznosi 21.56%

Zadatak11[0.25poena]

U nekoj kutiji nalazi se 165 kuglica, od kojih je 11 kuglica crne boje, dok su ostale kuglice bijele. Ukoliko nasumice izaberemo 6 kuglica iz kutije, nađite vjerovatnoću da će:

Rjesenje :

a) sve izabrane kuglice biti bijele;

Vjerovatnoća da će sve izabrane kuglice biti bijele :

$$p = \frac{C_{154}^{6}}{C_{165}^{6}} = ... = 0.65664 = 65.66\%$$

b) tačno jedna izabrana kuglica biti crna;

Vjerovatnoća da će tačno jedna izabrana kuglica biti crna :

$$p = \frac{C_{11}^{1} \cdot C_{154}^{5}}{C_{165}^{6}} = ... = 0.29086 = 29.09\%$$

c) barem jedna izabrana kuglica biti crna;

Događaj da će barem jedna izabrana kuglica biti crna je suprotan događaju da će sve izabrane kuglice biti bijele, tako da ovu vjerovatnoću možemo dobiti jednostavno uz pomoć već dobijene vjerovatnoće pod a) :

$$p = 1 - \frac{C_{154}^{6}}{C_{165}^{6}} = 1 - 0.65664 = 0.34336 \implies 34.34\%$$

d) tačno dvije izabrane kuglice biti crne;

Vjerovatnoća da će tačno dvije izabrane kuglice biti crne se može dobiti slično kao pod b) :

$p = \frac{C_{11}^2 \cdot C_{154}^4}{C_{165}^6}$

$C_{11}^2 = 55, C_{154}^4 = 22533126, C_{165}^6 = 25564880880$

$p = \frac{55 \cdot 22533126}{25564880880} = 0.04847 = 4.85\%$

e) barem dvije izabrane kuglice biti crne;

Ovu vjerovatnoću možemo jednostavnije izračunati ako prvo izračunamo vjerovatnoću da su manje od dvije kuglice crne:

$p_1 = \frac{C_{154}^6 + C_{11}^1 \cdot C_{154}^5}{C_{165}^6}$

$C_{154}^6 = 16787178870$

$C_{11}^1 = 11$

$C_{154}^5 = 675993780$

$C_{165}^6 = 25564880880$

$p_1 = 0.94751 \implies p = 1 - p_1 \implies p = 0.05249 = 5.25\%$

f) najviše dvije izabrane kuglice biti crne;

Ovaj dio zadatka možemo uraditi slično kao prvi dio pod e), samo što trebam uključiti slučaj i da je broj crnih kuglica jednak 2.

$p = \frac{C_{154}^6 + C_{11}^1 \cdot C_{154}^5 + C_{11}^2 \cdot C_{154}^4}{C_{165}^6}$

$C_{154}^4 = 22533126$

$C_{11}^2 = 55$

$p = 0.995992 = 99.6\%$

g) najviše dvije izabrane kuglice biti bijele;

$p = \frac{C_{11}^6 + C_{154}^1 \cdot C_{11}^5 + C_{154}^2 \cdot C_{11}^4}{C_{165}^6} = 0.0001548741 = 0.015\%$

h) sve izabrane kuglice biti crne.

$p = \frac{C_{11}^6 \cdot C_{154}^0}{C_{165}^6} = 1.80716 \cdot 10^{-8}$

Zadatak12[0.25poena]

Neka je dat pravičan novčić, tj. novčić kod kojeg je jednaka vjerovatnoća pojave glave ili pisma prilikom bacanja. Ako bacimo takav novčić 64 puta, očekujemo da će otprilike 32 puta pasti glava i isto toliko puta pismo. Međutim, to naravno ne znači da će sigurno biti tačno 32 pojava glave ili pisma (štaviše, vjerovatnoća da se tačno to desi je prilično mala). Odredite:

Rjesenje :

a) Vjerovatnoću da će se zaista pojaviti 32 puta glava i 32 puta pismo;

$p = C_{64}^{32} \cdot \frac{1}{2}^{32} \cdot \frac{1}{2}^{32} = ... = 0.09934 = 9.93\%$

b) Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 29 a manje od 35 puta;

$p = C_{64}^{30} \cdot \frac{1}{2}^{30} \cdot \frac{1}{2}^{64-30} + C_{64}^{31} \cdot \frac{1}{2}^{31} \cdot \frac{1}{2}^{64-31} + C_{64}^{32} \cdot \frac{1}{2}^{32} \cdot \frac{1}{2}^{64-32} + C_{64}^{33} \cdot \frac{1}{2}^{33} \cdot \frac{1}{2}^{64-33} + C_{64}^{34} \cdot \frac{1}{2}^{34} \cdot \frac{1}{2}^{64-34} = 0.087836 + 0.096336 + 0.099347 + 0.096336 + 0.087836 = 0.467691 = 46.77\%$

c) Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 25 a manje od 39 puta.

Raditi ću na isti način kao i pod b)

$p = C_{64}^{26} \cdot \frac{1}{2}^{26} \cdot \frac{1}{2}^{64-26} + C_{64}^{27} \cdot \frac{1}{2}^{27} \cdot \frac{1}{2}^{64-27} + C_{64}^{28} \cdot \frac{1}{2}^{28} \cdot \frac{1}{2}^{64-28} + C_{64}^{29} \cdot \frac{1}{2}^{29} \cdot \frac{1}{2}^{64-29} + C_{64}^{30} \cdot \frac{1}{2}^{30} \cdot \frac{1}{2}^{64-30} + C_{64}^{31} \cdot \frac{1}{2}^{31} \cdot \frac{1}{2}^{64-31} + C_{64}^{32} \cdot \frac{1}{2}^{32} \cdot \frac{1}{2}^{64-32} + C_{64}^{33} \cdot \frac{1}{2}^{33} \cdot \frac{1}{2}^{64-33} + C_{64}^{34} \cdot \frac{1}{2}^{34} \cdot \frac{1}{2}^{64-34} + C_{64}^{35} \cdot \frac{1}{2}^{35} \cdot \frac{1}{2}^{64-35} + C_{64}^{36} \cdot \frac{1}{2}^{36} \cdot \frac{1}{2}^{64-36} + C_{64}^{37} \cdot \frac{1}{2}^{37} \cdot \frac{1}{2}^{64-37} = 0.896578 = 89.66\%$

d) Vjerovatnoću da se glava neće pojaviti dva puta zaredom.

Uzeti ću da je prilikom bacanja novčića k puta x_k broj načina u kojim je moguće da se glava ne pojavi 2 puta zaredom . Ako bacamo novčić jednom onda imamo da je broj mogućih ishoda 2 jer su prilikom tog bacanja moguće

dvije situacije (pismo ili glava) to jeste $x_1 = 2$.
Ako bacamo novčić dva puta onda imamo da je broj mogućih ishoda 3 jer su prilikom bacanja novčića dvaput moguće 3 situacije (pismo-glava, glava-pismo, pismo-pismo) to jeste $x_2 = 3$.
Ako uzmem sada za neko k koje je veće od 2. Tada imamo dvije mogućnosti : da je prvo bacanje dalo pismo, ili da je prvo bacanje palo na glavu.
Ukoliko je prilikom prvog bacanja palo pismo onda imamo x_{k-1} mogućih ishoda. Međutim, ukoliko je prilikom prvog bacanja pala glava onda zbog uslova zadatka ne smije doći do toga da i drugo bacanje također bude glava, već mora pasti na pismo. Ako je drugo bacanje pismo onda imamo x_{k-2} ishoda.
Iz navedenih uslova i zaključaka možemo dobiti rekurzivnu formulu $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$.
Posmatrajući formulu koju smo dobili možemo utvrditi njenu sličnost sa formulom kojom se određuju Fibonaccijevi brojevi, ali naravno zbog uslova našeg zadatka, i zadatka samog po sebi, naši početni uslovi su drugačiji($x_1 = F3, x_2 = F4 \implies x_k = Fk + 2$

Na osnovu svih donesenih zaključaka i poznate činjenice k = 64, možemo dobiti da je : $x_{64} = F66 = 27777890035288$
Budući da je nama potrebna vjerovatnoća , nju možemo dobiti kada dobijeno rješenje podijelimo sa brojem svih mogućih kombinacija prilikom bacanja novčića 64 puta ($2^{64} = 18446744073709551616$

Tražena vjerovatnoća iznosi približno: $1.5058424361 \cdot 10^{-6}$

Zadatak13[0.25poena]

Odredite vjerovatnoću da će u skupini od 11 nasumično izvučenih karata iz dobro izmješanog špila od 52 karte dvije karte biti sa slikom i šest karata crvene boje (herc ili karo).

Rjesenje :

D_1 - karte crvene boje sa slikom :
Ukupno karata sa slikom ima 12 , od toga je 6 crvene boje.

D_2 - karte koje nisu crvene, ali su sa slikom (crne) :
Također 6.

D_3 - karte crvene boje koje nisu sa slikom :
Od A-10, po dvije $\implies$ ima ih 20.

D_4 - ostale karte :
52-20-6-6 = 20

Koristeći uslove iz zadatka te uzimajući d_1, d_2, d_3, d_4 imamo :
$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 11, d_1 + d_3 = 6, d_1 + d_2 = 2 \implies d_1, d_2 = 2 - d_1, d_3 = 6 - d_1, d_4 = 3 + d_1$

Za $d_1 \in 0, 1, 2$ imamo da je :

$d_1 = 0, d_2 = 2, d_3 = 6, d_4 = 3$
$d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 5, d_4 = 4$
$d_1 = 2, d_2 = 0, d_3 = 4, d_4 = 5$

Budući da su svi slučajevi međusobno nezavisni, ukupna vjerovatnoća se može dobiti kao suma vjerovatnoća :

$P(D) = \frac{C_6^0 \cdot C_6^2 \cdot C_{20}^6 \cdot C_{20}^3}{C_{52}^{11}} + \frac{C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{20}^5 \cdot C_{20}^4}{C_{52}^{11}} + \frac{C_6^2 \cdot C_6^0 \cdot C_{20}^4 \cdot C_{20}^5}{C_{52}^{11}} = \frac{1 \cdot 15 \cdot 38760 \cdot 1140}{60403728840} + \frac{6 \cdot 6 \cdot 15504 \cdot 4845}{60403728840} + \frac{15 \cdot 1 \cdot 4845 \cdot 15504}{60403728840} = 0.07439 = 7.44\%$

Zadatak14[0.25poena]

Profesor Greškić često griješi u naučnim činjenicama i na pitanja studenata odgovara netačno s vjerovatnoćom 0.19, neovisno od pitanja. Na svakom predavanju profesora Greškića pitaju ili 1 ili 2 pitanja, pri čemu imamo jednaku vjerovatnoću pojave 1 ili 2 pitanja.

Rjesenje :

a) Koja je vjerovatnoća da će profesor Greškić odgovoriti netačno na sva pitanja?

Vjerovatnoća je sljedeća :
$p = \frac{1}{2} \cdot 0.19 + \frac{1}{2} \cdot 0.19^2 = 0.11305 = 11.31\%$

b) Koja je vjerovatnoća da su postavljena dva pitanja, ako je profesor Greškić odgovorio na sva pitanja netačno?

Ovdje imamo uslovnu vjerovatnoću :

D_1 - događaj da su postavljena dva pitanja, $p(D_1) = \frac{1}{2}$
D_2 - događaj da je profesor Greškić odgovorio netačno na sva pitanja. (vjerovatnoća koju smo dobili pod a)

$p(D_1|D_2) = \frac{p(D_1)\cdot p(D_2|D_1)}{p(D_2)} = \frac{0.5\cdot 0.19^2}{0.11305} = 0.15966 = 15.97\%$

Zadatak15[0.3poena]

Muzičari Aria i Bolero su jedine osobe koje su se prijavile na takmičenje za novi jingle. Svaki takmičar može priložiti samo jedan jingle. Sudac Libretto proglašava pobjednika čim dobije dovoljno besmislen jingle, što se uopšte ne mora desiti. Aria piše besmislene jingle-ove brzo, ali loše. Vjerovatnoća da će prva predati je 0.6. Ako Bolero nije već pobijedio, Aria će biti proglašena pobjednikom sa vjerovatnoćom 0.31. Bolero sporo piše, ali je talentovan za ovo. Ako Aria nije pobijedila do vremena Bolerovog slanja jingla, Bolero će pobijediti s vjerovatnoćom 0.65.

Rjesenje :

a) Kolika je vjerovatnoća da niko neće pobijediti?

$p = (1 - 0.31) \cdot (1 - 0.65) = 0.69 \cdot 0.35 = 0.2415 = 24.15\%$

b) Kolika je vjerovatnoća da će Aria pobijediti?

$p = 0.6 \cdot 0.31 + (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.65) \cdot 0.31 = 0.2294 = 22.94\%$

c) Ako je Aria pobijedila, koja je vjerovatnoća da je Bolero prvi poslao jingle?

A - pobijedila je Aria, B - Bolero poslao prvi jingle

$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{(1-0.6) \cdot (1-0.65) \cdot 0.31}{0.2294} = 0.189189 = 18.91\%$

d) Koja je vjerovatnoća da će prvi poslani jingle biti pobjednički?

$p = 0.6 \cdot 0.31 + (1 - 0.6) \cdot 0.65 = 0.446 = 44.6\%$

Zadatak16[0.3poena]

Prije nego ode na posao, Viktor provjeri vremensku prognozu, kako bi odlučio da li da nosi kišobran ili ne. Ako prognoza kaže da će padati kiša, vjerovatnoća da će ona zaista padati iznosi 83%. Ako prognoza kaže da kiše neće biti, vjerovatnoća da će ona ipak padati iznosi 6%. Za vrijeme jeseni i zime, vjerovatnoća pojave prognoze kiše iznosi 65%, a za vrijeme ljeta i proljeća pojava prognoze kiše iznosi 18%.

Rjesenje :

P(zj) = 0.65 - za zimu i jesen
P(ljp) = 0.18 - za ljeto i proljeće
P(k) = 0.83 - kiša ukoliko je prognozirana
$p(k_1)$ = 0.06 - kiša ukoliko nije prognozirana

a) Jedan dan Viktor nije pogledao vremensku prognozu i kiša je padala. Koja je vjerovatnoća da je prognozirana kiša ako se ovo desilo za vrijeme zime? Koja je vjerovatnoća da je prognozirana kiša ako se ovo desilo za vrijeme ljeta?

Vjerovatnoća da kiša padne zimi iznosi :

$p(z) = p(zj) \cdot p(k) + p(zj') \cdot p(k_1) = 0.65 \cdot 0.83 + 0.35 \cdot 0.06 = 0.5605 = 56.05\%$

Vjerovatnoća da je kiša padala ukoliko je prognozirana iznosi P(zj — z) :

$p(zj — z) = \frac{0.65 \cdot 0.83}{0.5605} = 0.9625 = 96.25\%$

Vjerovatnoća da kiša padne ljeti iznosi :

p(lj) = p(ljp) $\cdot$p(k) + p(ljp')$\cdot$ p(k_1) $= 0.18 \cdot 0.83 + 0.82 \cdot 0.06 = 0.1986 = 19.86\%$

Vjerovatnoća da je kiša padala ukoliko je prognozirana iznosi P(ljp — lj) :

p(ljp — lj) $= \frac{0.18 \cdot 0.83}{0.1986} = 0.7522 = 75.22\%$

b) Vjerovatnoća da će Viktor propustiti prognozu iznosi 0.25 bilo koji dan u godini. U slučaju da propusti prognozu on baca pravedni novčić da odluči hoće li nositi kišobran ili ne. Ako prognoza kaže da će padati kiša, on će sigurno ponijeti kišobran, a ako prognoza kaže da neće biti kiše, on neće ponijeti kišobran. Primiječen je Viktor kako nosi kišobran, ali kiša ne pada. Koja je vjerovatnoća da je vidio vremensku prognozu?

P(a) - Viktor propustio prognozu
Vjerovatnoća da je ponio kišobran , a da nije padala kiša iznosi :

p(b) $= 0.25 \cdot 0.5 \cdot (0.65 \cdot 0.17 + 0.35 \cdot 0.94 + 0.18 \cdot 0.17 + 0.82 \cdot 0.96) + 0.75 \cdot (0.65 \cdot 0.17 + 0.18 \cdot 0.17) = 0.2629 = 26.29\%$

Konacan rezultat je uslovna vjerovatnoća P(a — b) :

p(a — b) $= \frac{0.25 \cdot 0.7371}{0.2629} = 0.7009 = 70.09\%$