



Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie

Modélisation du système Ball & Beam

4ème année Informatique Industrielle et Automatique

Année Universitaire 2022-203

1/ Présentation du système

Le système Ball & Beam est un banc d'essai communément utilisé dans le domaine du contrôle et de la régulation des systèmes dynamiques. Il est composé d'une barre horizontale appelée "Beam" sur laquelle est posée une bille qui roule librement. Le but du système est de contrôler la position de la bille sur la poutre en ajustant l'angle de celle-ci comme le montre la figure suivante:

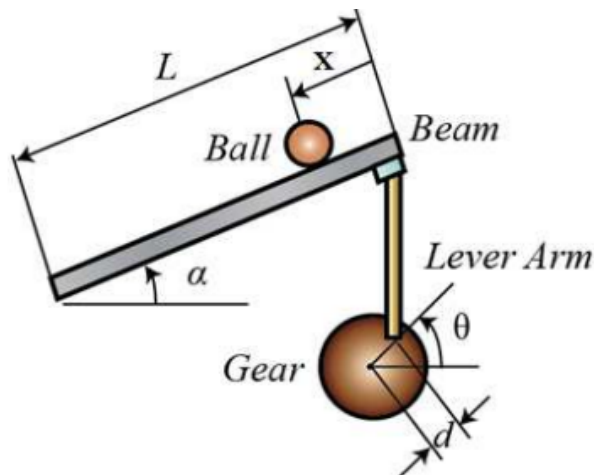


Fig1 : Ball and Beam

Les avantages

Le système Ball & Beam présente plusieurs avantages en tant que banc d'essai pour l'apprentissage automatique, le contrôle et la régulation des systèmes:

- Il est relativement simple et peu coûteux à mettre en place, ce qui le rend accessible à de nombreux chercheurs et ingénieurs.
- Il permet de modéliser des systèmes dynamiques non linéaires et instables, ce qui est très utile pour tester des algorithmes de contrôle et de régulation.
- Le système Ball & Beam permet également de contrôler la position de la balle sur la poutre avec une grande précision, ce qui est important pour l'analyse et la validation des algorithmes de contrôle.
- Le système peut être utilisé pour tester différents types de contrôleurs tels que les régulateurs PID, les régulateurs flous ou encore les réseaux de neurones artificiels.

2/ Modèle dynamique du système

On adoptera la notation $q = [\mathbf{a} \ x]^T \in \mathbb{R}^n$ où x le vecteur des variables articulaires prismatiques alors que \mathbf{a} est le vecteur des variables articulaires rotatives.

a. Par la méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange est décrite par:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta L}{\delta q} = \frac{\delta w}{\delta q} \quad (1)$$

avec :

$$L = K - P$$

où :

L : Lagrangien du système

K : Énergie cinétique totale du système

P : Énergie potentielle totale du système

w : Travail injecté au système

Travail injecté au système :

Les contraintes du bille au centre de gravité sont décrites par :

$$\begin{cases} a = x \cos\alpha \\ b = x \sin\alpha \end{cases} \quad (2)$$

Les dérivées temporelles des contraintes sont données par :

$$\begin{cases} \dot{a} = \dot{x} \cos\alpha - x\dot{\alpha} \sin\alpha \\ \dot{b} = \dot{x} \sin\alpha + x\dot{\alpha} \cos\alpha \end{cases} \quad (3)$$

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$K = K_1 + K_2 \quad (4)$$

Avec K_1 est l'énergie cinétique du barre :

$$K_1 = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 \quad (5)$$

où J est le moment d'inertie et $\dot{\alpha}$ la vitesse angulaire de la barre

K_2 est l'énergie cinétique de la balle :

$$K_2 = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}_b^2 + \frac{1}{2} m v_b^2 \quad (6)$$

où $\dot{\theta}_b$ est la vitesse angulaire de la balle et V_b est la vitesse linéaire de la balle.

Avec

$$\dot{\theta}_b = \frac{\dot{x}}{r} \quad (7)$$

où r est le rayon de la balle.

Sachant que

$$V_b^2 = \dot{a}^2 + \dot{b}^2 \quad (8)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = \dot{x}^2 \cos^2 \alpha - 2x\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + x^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha \\ \dot{b}^2 = \dot{x}^2 \sin^2 \alpha + 2x\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + x^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha \end{cases} \quad (9)$$

Par suite

$$V_b^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\alpha}^2 \quad (10)$$

D'où

$$K_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Jb}{r^2} + m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m x^2 \dot{\alpha}^2 \quad (11)$$

L'énergie potentielle totale du système est donnée par :

$$p = \left(\frac{1}{2} M + mx \right) g \sin \alpha \quad (12)$$

Le Lagrangien du système est alors donné par:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{Jb}{r^2} + m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (mx^2 + J) \dot{\alpha}^2 - \left(\frac{1}{2} M + mx \right) g \sin \alpha \quad (13)$$

Calculons les différents termes composant l'équation de Lagrange.

Nous aurons alors :

$$\frac{\delta L}{\delta q} = \begin{pmatrix} \frac{\delta L}{\delta \alpha} \\ \frac{\delta L}{\delta x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} M + mx \right) g \cos \alpha \\ mx \dot{\alpha}^2 - mg \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}} \\ \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (mx^2 + J) \dot{\alpha} \\ \left(\frac{Jb}{r^2} + m \right) \dot{x} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) \right) = \left(\begin{array}{c} \left(\frac{Jb}{r^2} + m \right) \ddot{x} \\ 2m x \dot{x} \dot{\alpha} + (m x^2 + J) \ddot{\alpha} \end{array} \right) \quad (16)$$

Le travail est exprimé par :

$$W = \tau \alpha$$

La dérivée du travail par rapport à α donne:

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} \cdot q$$

Ce qui résulte au modèle dynamique suivant:

$$\begin{cases} (m x^2 + J) \ddot{\alpha} + 2m x \dot{x} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} M + m x \right) g \cos \alpha = \tau \\ \left(\frac{Jb}{r^2} + m \right) \ddot{x} + m g \sin \alpha - m x \dot{\alpha}^2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

b. la mécanique newtonienne

Nous allons maintenant procéder à la dérivation des équations de mouvement pour le système Ball and Beam en utilisant la mécanique newtonienne avec:

$$a_a = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times v_{rel} + a_{rel} \quad (18)$$

où ω : la vitesse angulaire de l'axe de rotation

r : le vecteur de position,

v_{rel} : la vitesse relative à l'axe de rotation

a_{rel} : l'accélération du corps par rapport au système de coordonnées en rotation.

Considérons l'ensemble de coordonnées, axes tournant avec une vitesse angulaire de ω représentés par la figure suivante:

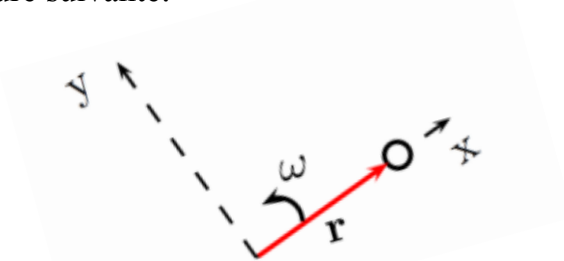


Fig 2 : Axes de rotation

En utilisant la même notation utilisée dans la figure 1, nous pouvons définir les vecteurs nécessaires suivant:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{k} \quad (20)$$

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x} \mathbf{i} \quad (21)$$

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x} \mathbf{i} \quad (22)$$

Nous procédons maintenant à la réalisation des produits vectoriels nécessaires au calcul de l'accélération absolue:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = \ddot{\alpha} \mathbf{k} \times x \mathbf{i} = x \ddot{\alpha} \mathbf{j} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\alpha} \mathbf{k} \times x \mathbf{i} = x \dot{\alpha} \mathbf{j} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \dot{\alpha} \mathbf{k} \times x \dot{\alpha} \mathbf{j} = -x \dot{\alpha}^2 \mathbf{i} \quad (25)$$

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} \times 2\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\alpha} \mathbf{k} \times \dot{x} \mathbf{i} = 2\dot{x}\dot{\alpha} \mathbf{j} \quad (26)$$

En substituant (22) – (26) à (18) on obtient l'accélération relative aux axes de rotation

$$\mathbf{a}_{\text{a}} = x \ddot{\alpha} \mathbf{j} - x \dot{\alpha}^2 \mathbf{i} + 2\dot{x}\dot{\alpha} \mathbf{j} + \ddot{x} \mathbf{i} \quad (27)$$

$$\mathbf{a}_{\text{a}} = (\ddot{x} - x \dot{\alpha}^2) \mathbf{i} + (x \ddot{\alpha} + 2\dot{x}\dot{\alpha}) \mathbf{j} \quad (28)$$

Considérez le diagramme de corps libre illustré à la figure 4.

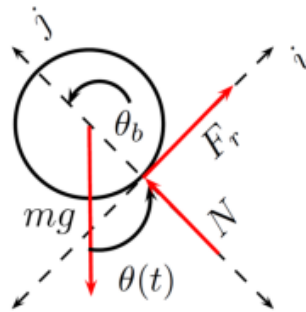


Fig3 : Corps libre de la balle

La sommation des couples autour de l'axe de rotation de la balle donne

$$J_b \ddot{\theta}_b = F_r \cdot r \quad (29)$$

où J_b est le moment d'inertie et l'angle de rotation de la balle autour de son centre θ_b est donné par:

$$\theta_b = - \frac{x}{r} \quad (30)$$

où r est le rayon de la balle.

En substituant (30) à (29) on obtient

$$F_r = -\frac{J_b}{r^2} \ddot{x} \quad (31)$$

Nous procédons maintenant à la somme des forces agissant sur la balle dans la direction i donne

$$Fr - \left(\frac{1}{2}M + mx\right)g \sin \alpha = m(\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2) \quad (32)$$

En substituant (31) à (32) on obtient

$$\left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\ddot{x} + mg \sin \alpha - mx\dot{\alpha}^2 = 0 \quad (33)$$

Pour calculer la deuxième équation de mouvement, nous devons d'abord calculer la force normale N comme le montre la figure 4.

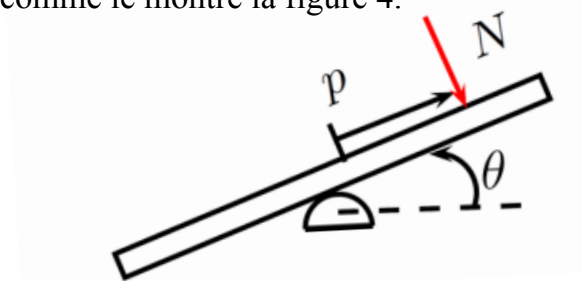


Fig 4 : Corps libre de la barre

En additionnant les forces agissant sur la balle dans la direction j , on obtient

$$N = m(x\ddot{\alpha} + 2\dot{x}\dot{\alpha}) + \left(\frac{1}{2}M + m\right)g \cos \alpha \quad (34)$$

La sommation des couples agissant sur la barre donne

$$\tau - Nx = J\ddot{\alpha} \quad (35)$$

où τ est le couple externe appliqué et J est l'inertie de la barre.

La substitution de (35) dans (34) donne

$$2mx\dot{\alpha}\dot{\alpha} + (mx^2 + J)\ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2}M + mx\right)g \cos \alpha = \tau \quad (36)$$

Ce qui résulte au modèle dynamique suivant:

$$\begin{cases} (mx^2 + J)\ddot{\alpha} + 2mx\dot{\alpha}\dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2}M + mx\right)g \cos \alpha = \tau \\ \left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\ddot{x} + mg \sin \alpha - mx\dot{\alpha}^2 = 0 \end{cases} \quad (37)$$

3/ Représentation d'état :

Les équations de mouvement qu'on a dérivées pour le système « bille sur rail » peuvent être écrites sous la forme d'une représentation d'état.

On doit d'abord définir un vecteur d'état comme suit :

$$X = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

a. du système non linéaire :

$$X' = \begin{pmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \\ x4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ \frac{m(x1x4^2 - g \sin(x3))}{(Jb/r^2 + m)} \\ x4 \\ \frac{\tau - 2mx1x2x4 - (0.5M + mx1)g \cos x3}{mx1^2 + J + Jb} \end{pmatrix}$$

Donc on prend : $f(X) = X'$

b. du système linéaire :

On définit un point de fonctionnement correspondant à une position constante de la bille $x0$: donc si $f(X) = 0$ alors $\tau0 = (0.5M + mx0)g$

$\tau0$ est le couple nécessaire pour maintenir la bille dans la position $x0$.

L'état de fonctionnement est alors donné par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de l'équation $f(X)$ par rapport au vecteur d'état X :

$$A = \frac{d}{dx} f(x) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mx_4^2}{Jb/r^2} & 0 & -\frac{mg \cos(x_3)}{Jb/r^2 + m} & \frac{2mx_1x_4}{Jb/r^2 + m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{d}{dx_1} f_4(x) & -\frac{2mx_1x_4}{mx_1^2 + J + Jb} & \frac{(0.5M + mx_1)g \sin x_3}{mx_1^2 + J + Jb} & -\frac{2mx_1x_2}{mx_1^2 + J + Jb} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\frac{d}{dx_1} f_4(x) = \frac{(-2mx_2x_4 - mg \cos x_3)(mx_1^2 + J + Jb) - (2mx_1 + J + Jb)(\tau - 2mx_1x_2x_4 - (0.5M + mx_1)g \cos(x_3))}{(mx_1^2 + J + Jb)^2}$$

L'évaluation au point de fonctionnement donne la matrice d'état A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{Jb/r^2 + m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mg}{mx_0^2 + J + Jb} + \frac{Mg(2mx_0 + J + Jb)}{mx_0^2 + J + Jb} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'évaluation au point de fonctionnement donne la matrice d'entrée B :

$$B = \frac{d}{d\tau} f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mx0^2 + J + Jb} \end{pmatrix}$$

On définit la sortie du système, la position de la bille , ce qui donne la matrice C de la représentation d'état :

$$C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$