Daniel Olsson de Orleans dodo@kth.se

Laboration 3

Numeriska metoder för Hamiltonska system

Uppgift 1

a)-c):

1. $$\ddot{q}_1(t) = -\frac{q_1(t)}{\left(q_1(t)^2 + q_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dq_1}\frac{1}{\sqrt{q_1+q_2}} \quad (i)$$

kallar $\dot{q}_1 = p_1$ och $\dot{q}_2 = p_2$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = HL = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \frac{-q_1}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-q_2}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-q_1}{(\;)} \\ \frac{-q_2}{(\;)} \end{pmatrix}$$

b)

$$\nabla_p H(p,q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\dot{q}}(t) = \nabla_p H(p,q)$$

$$\nabla_q H(p,q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \frac{1}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \frac{1}{(q_1^2+q_2^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \end{pmatrix} = \{\text{av } (i)\} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\ddot{q}_1 \\ -\ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\dot{p}}(t) = -\nabla_q H(p,q)$$

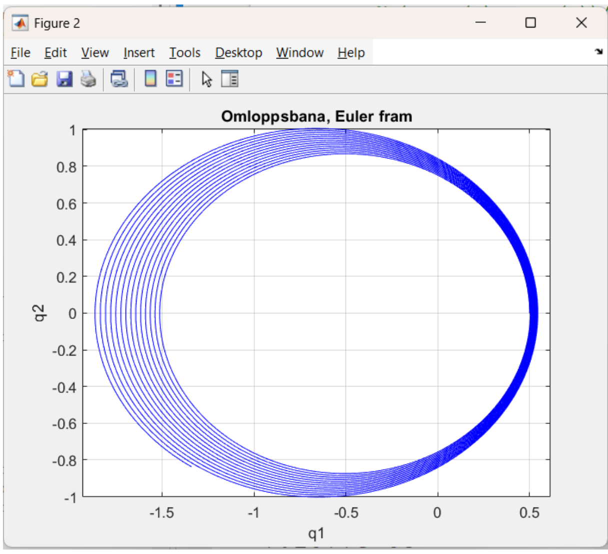
$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \ldots = \underline{\dot{p}} \cdot \underline{\nabla}_p$$

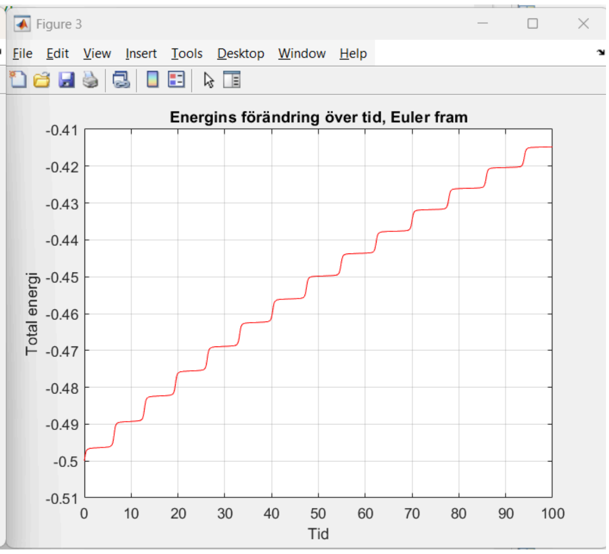
c) $$\dot{H} = \frac{d}{dt}H(p,q) = \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{dt} = \{\text{flerdim.}\} =$$

$$= \underline{\nabla_p} H \cdot \dot{p} + \underline{\nabla_q} H \cdot \dot{q} = \underline{\nabla_p} H \cdot (-\underline{\nabla_q} H) + \nabla_q H \cdot (\underline{\nabla_p} H) = 0$$

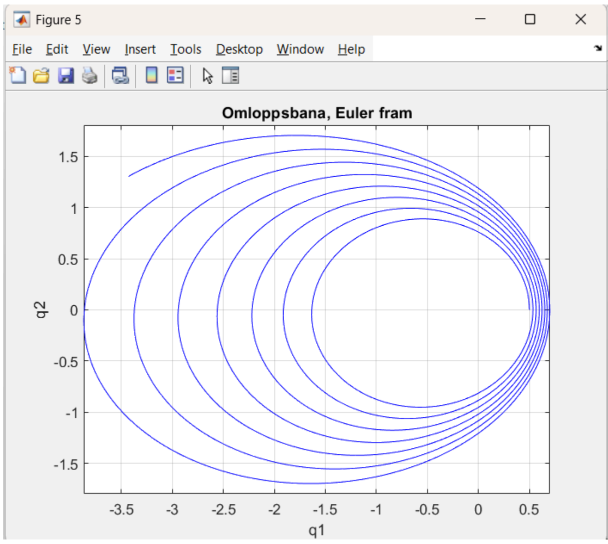
d)-e):
Euler frammåt:

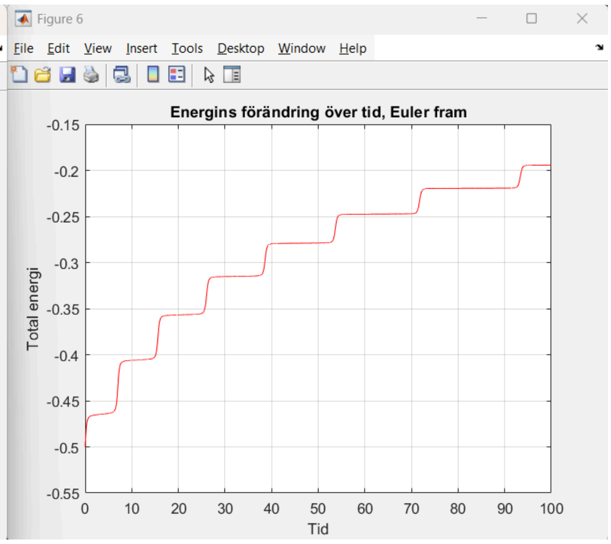
```
h=0.0005;
n=200000;
```



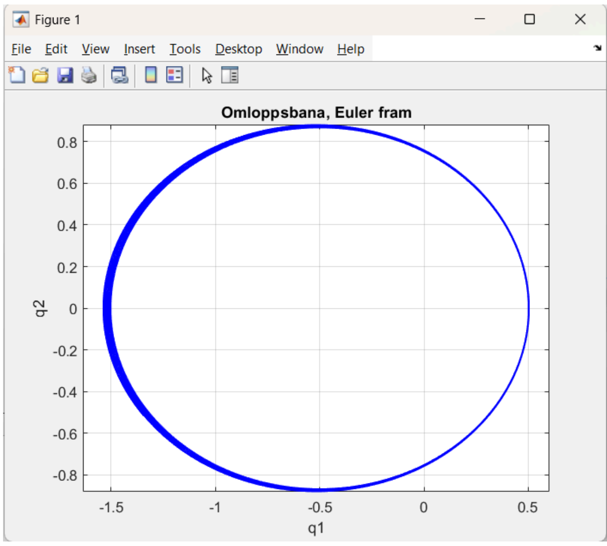


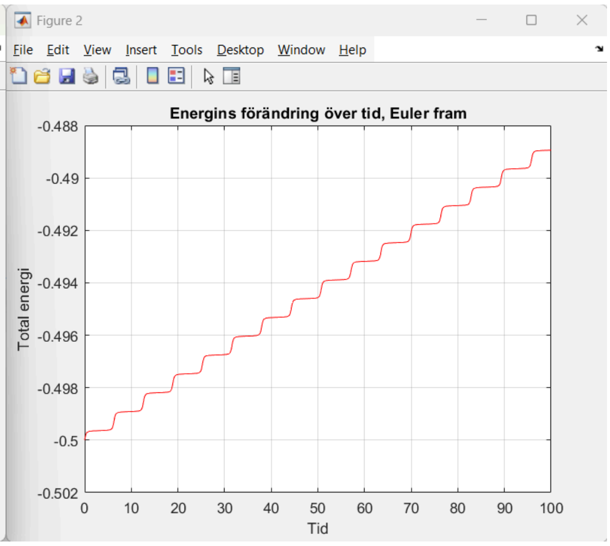

```
h=0.005;
n=20000;
```





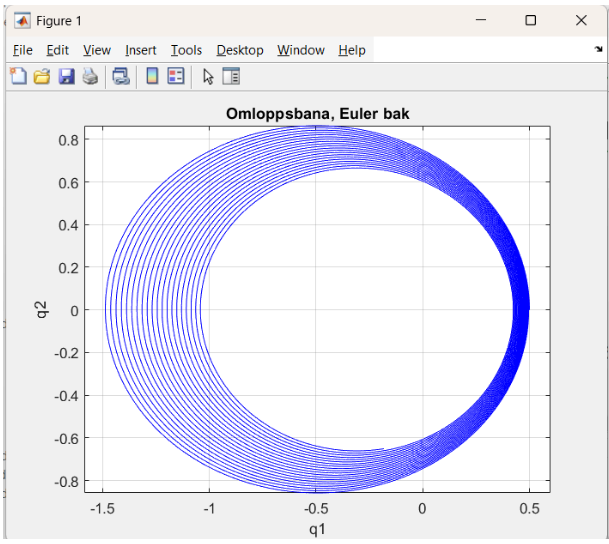
```
h=0.00005;
n=2000000;
```

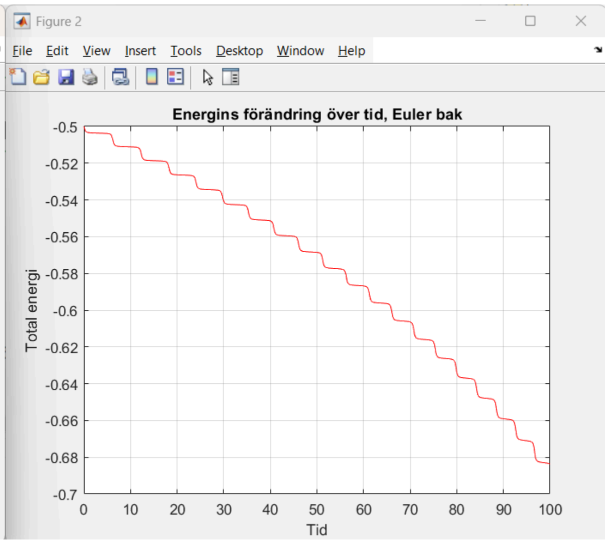




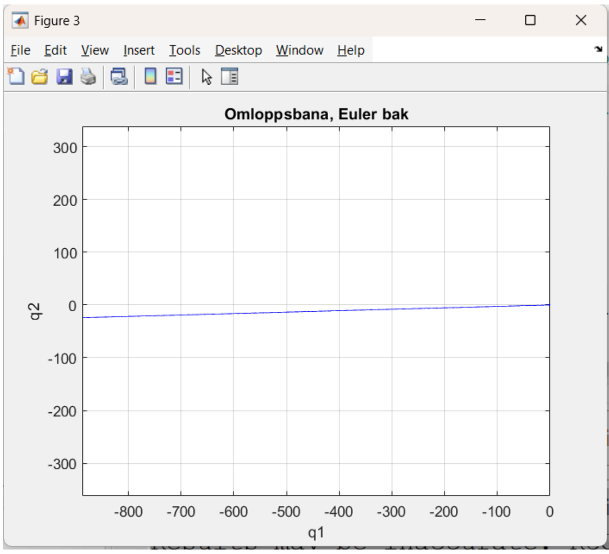
Euler bakåt:

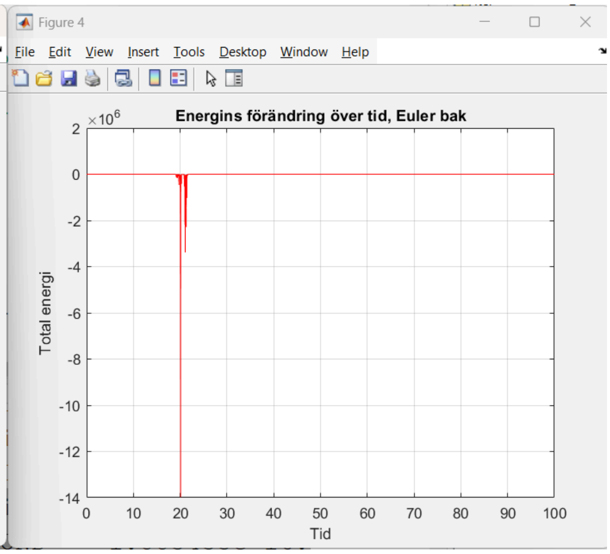
```
h=0.0005;
n=200000;
```





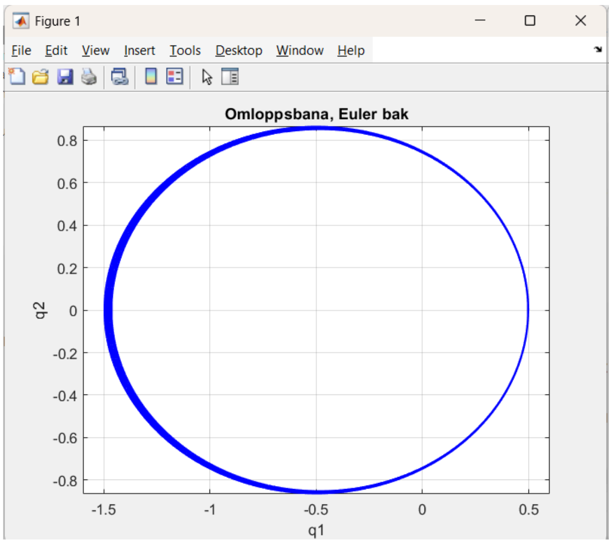
```
h=0.005;
n=20000;
```

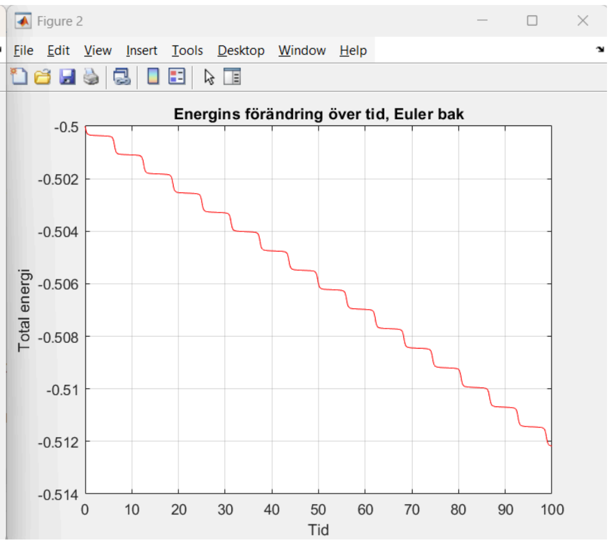




”Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
Results may be inaccurate. RCOND = 1.883435e-16.”

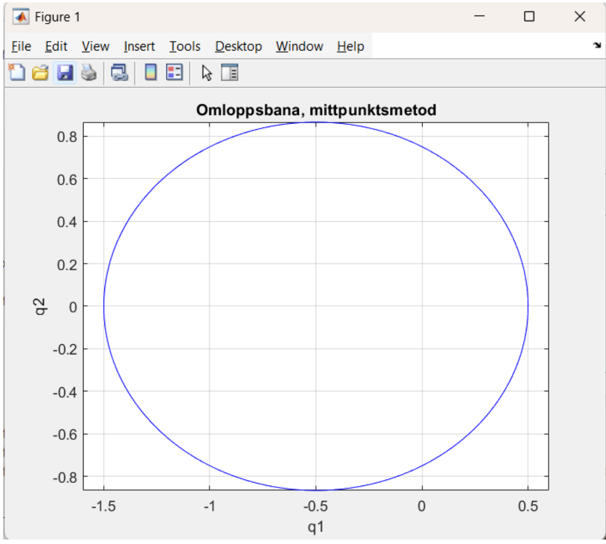
```
h=0.00005;
n=2000000;
```

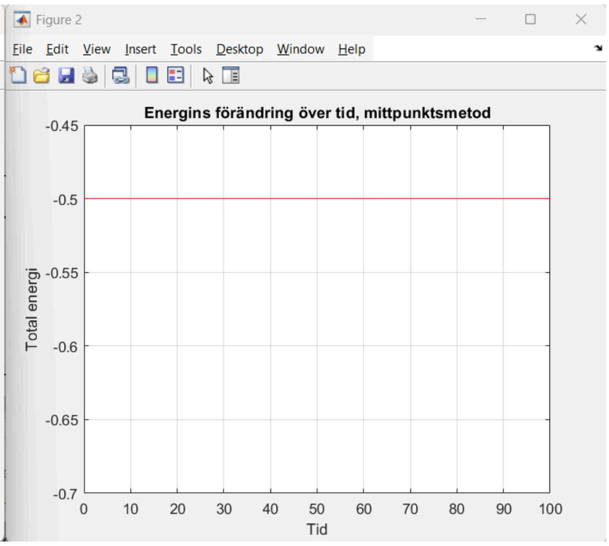




Implicita mittpunktsmetod:

```
h=0.0005;
n=200000;
```





(samma för

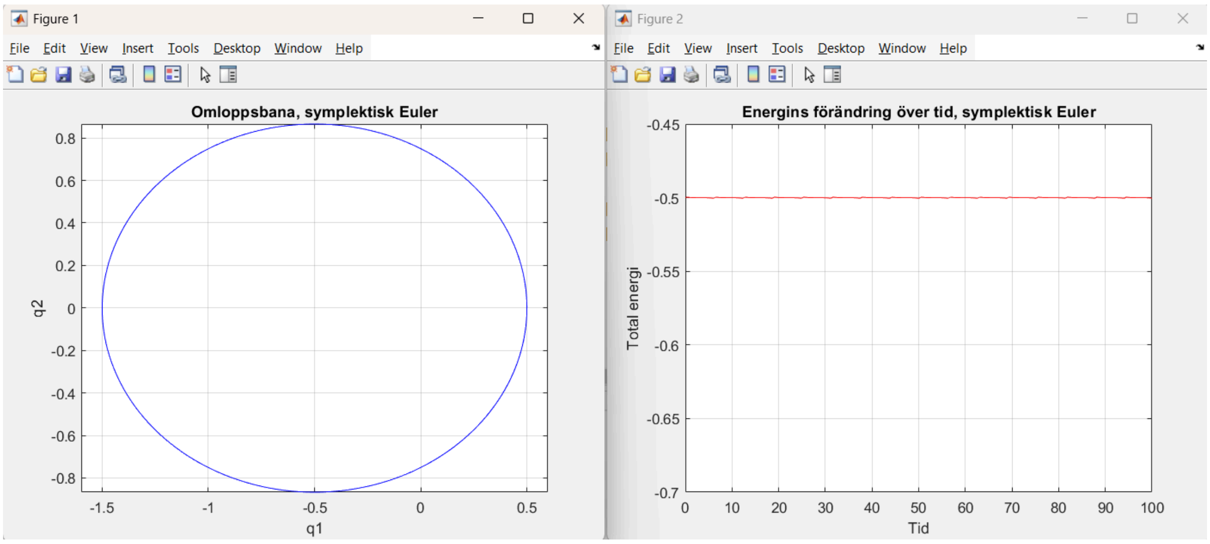
```
h=0.005;
n=20000;
```

och

```
h=0.00005;
n=2000000;)
```

Symplektisk Euler:

```
h=0.0005;
n=200000;
```



(samma för

```
h=0.005;
n=20000;
```

och

```
h=0.00005;
n=2000000;)
```

Uppgift 2

$y' = iy \quad (1)\ , \quad H(y) = \frac{|y|^2}{2} \quad (2), \quad \dot{H}(y) = |y| \cdot |y|' \quad (3)$

(*) Euler fram: $y_{n+1} = y_n + hf(y_n) \overset{(1)}{=} y_n + hiy_n =$

$= \underline{(1+hi)y_n} \quad \Leftrightarrow y_{n+1} = (1+hi)^n y_0$

(**) Euler bak: $y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}) = y_n + hiy_{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = \underline{\frac{1}{1-hi} y_n} \quad \Leftrightarrow y_{n+1} = \underset{\leq 1}{(1-hi)^{-n}} y_0$

(***) Mittpunkt: $y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right) = y_n + \frac{h}{2} i y_n + \frac{h}{2} i y_{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = \underline{\frac{1+\frac{1}{2}hi}{1-\frac{1}{2}hi} y_n} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\frac{1}{2}hi}{1-\frac{1}{2}hi}\right)^n y_0$

betraktar differens...

(*) $H_{n+1} - H_n = \frac{|y_{n+1}|^2}{2} - \frac{|y_n|^2}{2} = \frac{|(1+hi)y_n|^2 - |y_n|^2}{2} =$

$= \frac{(|1+hi||y_n|)^2 - |y_n|^2}{2} = \frac{|y_n|^2}{2}(|1+hi|^2 - 1) =$

$= H_n((1+h^2) - 1) = h^2 H_n > 0 \quad , \ h, H_n \neq 0$

(**) $H_{n+1} - H_n = \frac{|y_{n+1}|^2}{2} - \frac{|y_n|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1}{1-hi} y_n\right|^2 - |y_n|^2}{2} =$

$= \frac{\left|\frac{1}{1-hi}\right|^2 |y_n|^2 - |y_n|^2}{2} = \frac{|y_n|^2}{2}\left(\left|\frac{1}{1-hi}\right|^2 - 1\right) =$

$= H_n\left(\frac{1}{|1-hi|^2} - 1\right) = H_n\left(\frac{1}{1+h^2} - 1\right) = \frac{-h^2}{1+h^2} H_n < 0$

(***) $H_{n+1} - H_n = \frac{|y_{n+1}|^2}{2} - \frac{|y_n|^2}{2} = \frac{\left|\frac{1+\frac{1}{2}hi}{1-\frac{1}{2}hi} y_n\right|^2 - |y_n|^2}{2} =$

$= \frac{|1+\frac{1}{2}hi|^2 \frac{1}{|1-\frac{1}{2}hi|^2} |y_n|^2 - |y_n|^2}{2} = H_n\left(|1+\frac{1}{2}hi|^2 \frac{1}{|1-\frac{1}{2}hi|^2} - 1\right) =$

$= H_n\left((1+\frac{1}{4}h^2)\frac{1}{1+\frac{1}{4}h^2} - 1\right) = 0$

OBS: antar att $(\overline{y})' = \overline{y'}$

Analytiskt: $\dot{H}(t,y) = \left(\frac{|y|^2}{2}\right)^{\cdot} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y\overline{y}}{2}\right) = \frac{1}{2}(y'\overline{y} + y\overline{y'}) =$

$= \frac{1}{2}(iy\overline{y} + y\overline{iy}) = \frac{1}{2}(iy\overline{y} - yi\overline{y}) = 0$

($z \in \mathbb{C}$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (I)

$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ (II)

$|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$ (III)

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (IIII))

Uppgift 3

h=0.0005

Använder ode45:

```
options=odeset('RelTol', 1e-10,
'AbsTol', 1e-12);
```

Lösningsvektor:
q1 = -1.4472
q2 = -0.2777
p1 = 0.2176
p2 = -0.5567

ode45 tog 0.34 sekunder

Använder Mittpunktsmetod:
Felet blir 2.419732404894396

h=0.00005

Använder ode45:

```
options=odeset('RelTol', 1e-10,
'AbsTol', 1e-12);
```

Lösningsvektor:
q1 = -1.4472
q2 = -0.2777
p1 = 0.2176
p2 = -0.5567

ode45 tog 0.22 sekunder

Använder Mittpunktsmetod:
Felet blir 2.419711160225910

<u>Med (för mittpunktsmetoden)</u>

```
h = [0.5, 0.05, 0.005, 0.0005,
0.00005];
```

och n= length(0:h(i):500)
ges lösningsvektorn:

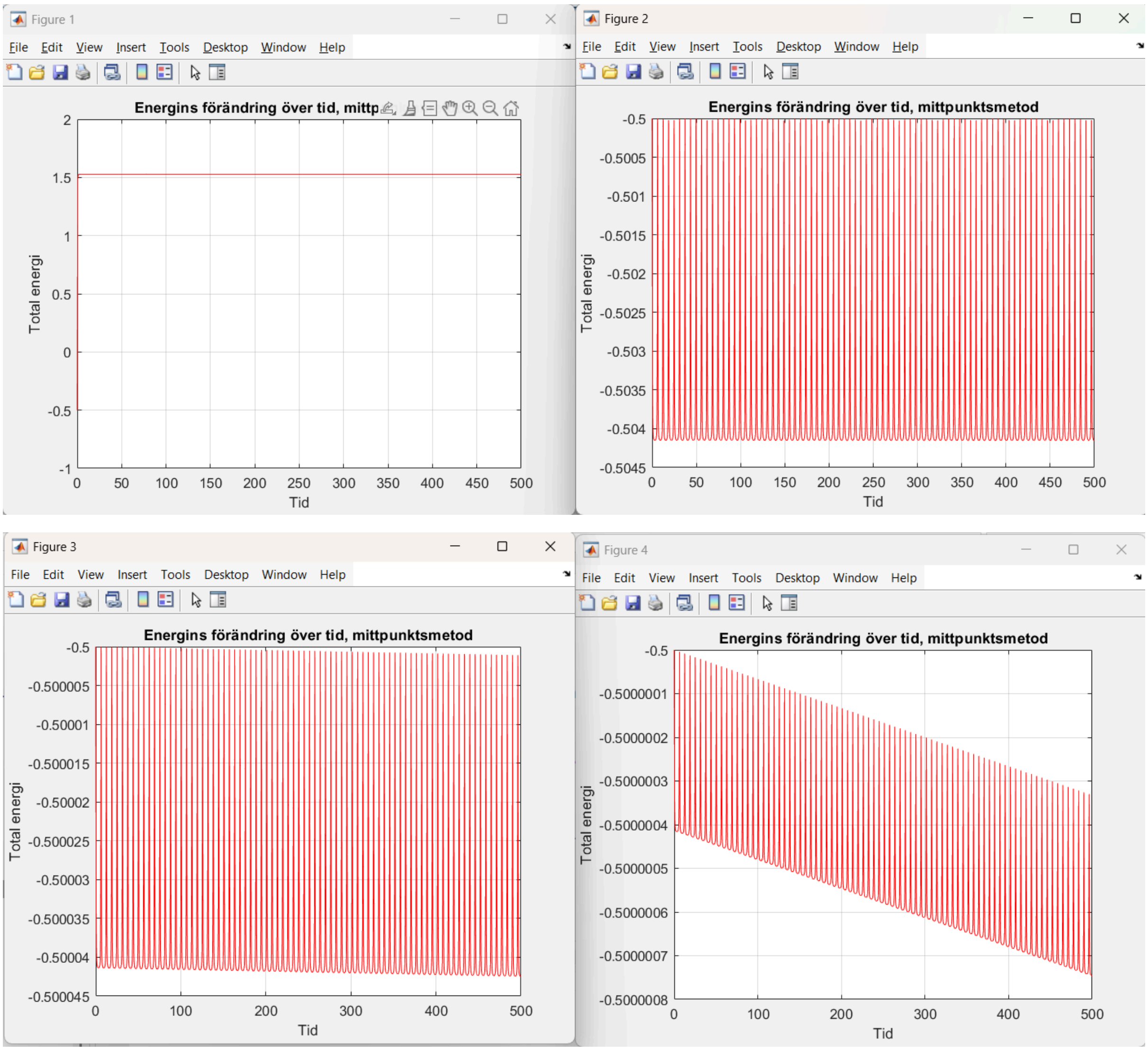
```
lösn.vektor mittpunkt
 -146.4280  863.7025   -0.2936    1.7236

lösn.vektor mittpunkt
    0.2583   -1.4472    0.5674    0.1740

lösn.vektor mittpunkt
   -1.4276   -0.3344    0.2543   -0.5471

lösn.vektor mittpunkt
   -1.4470   -0.2784    0.2181   -0.5566

lösn.vektor mittpunkt
   -1.4472   -0.2778    0.2177   -0.5566
```

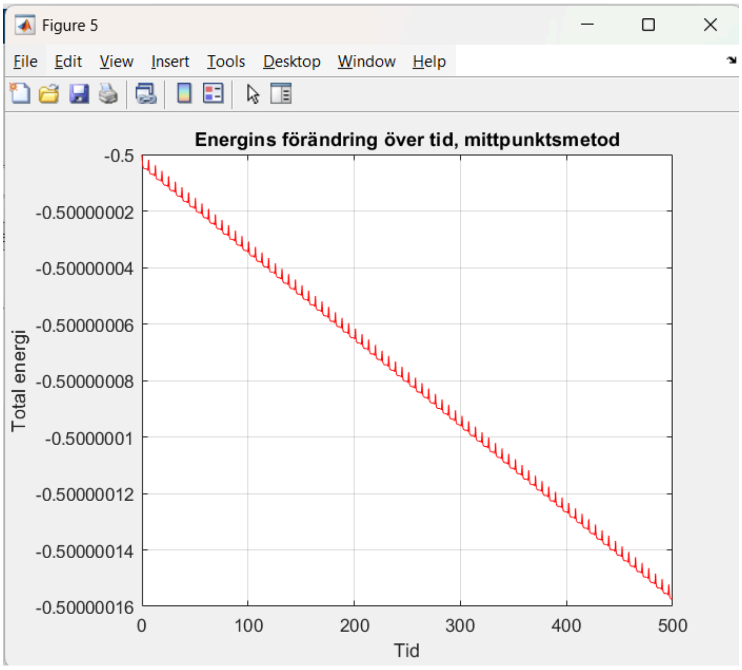
och noggrannhetsordning:

```
Implicit mittpunktsmetod, jämförelse:
 p = 2.59599250
 p = 1.49577522
 p = 1.90116864
 p = 0.97112776
```

Vilket har någorlunda grova avvikelser men varierar kring den sanna noggrannhetsordningen för implicita mittpunktsmetoden som är p = 2.

Energin blir:





För alla tidssteg bevaras energin nästan exakt.

Med (för symplektiska Eulermetoden)

```
h = [0.5, 0.05, 0.005, 0.0005,
0.00005]
```

så ges lösningsvektorn:

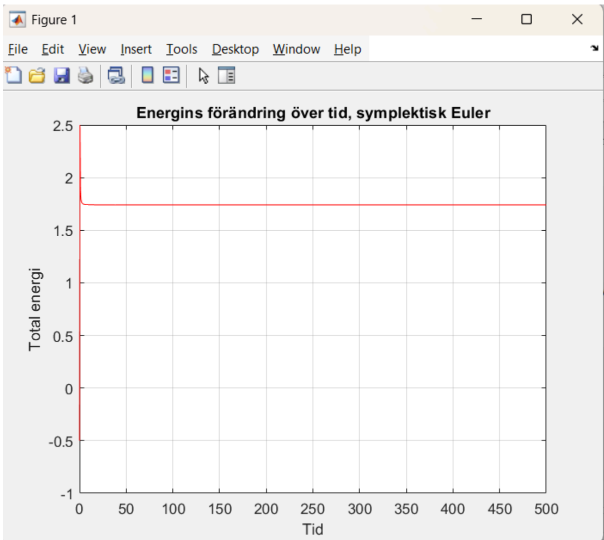
```
 lösn.vektor symplektisk Euler
 -760.8828  542.8837   -1.5198    1.0832

lösn.vektor symplektisk Euler
   -1.4022     0.5003   -0.0676   -0.5935

lösn.vektor symplektisk Euler
   -1.4699    -0.2190    0.1636   -0.5648

lösn.vektor symplektisk Euler
   -1.4471    -0.2791    0.2176   -0.5565

lösn.vektor symplektisk Euler
   -1.4472    -0.2779    0.2177   -0.5566
```

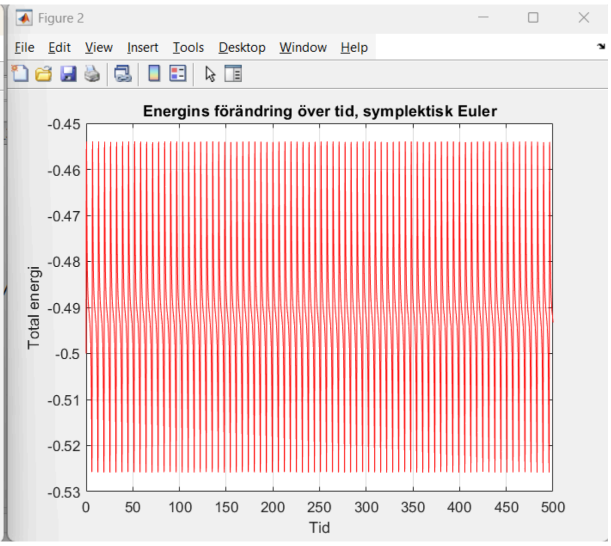
och noggrannhetsordning:

```
För symplektisk Euler, jämförelse:
p = 3.05075446
p = 0.99879591
p = 1.76267598
p = 0.80052194
```

Som trots några avvikelser rör sig kring den sanna noggrannhetsordningen för symplektiska Eulermetoden som är p = 1.

Energin blir:





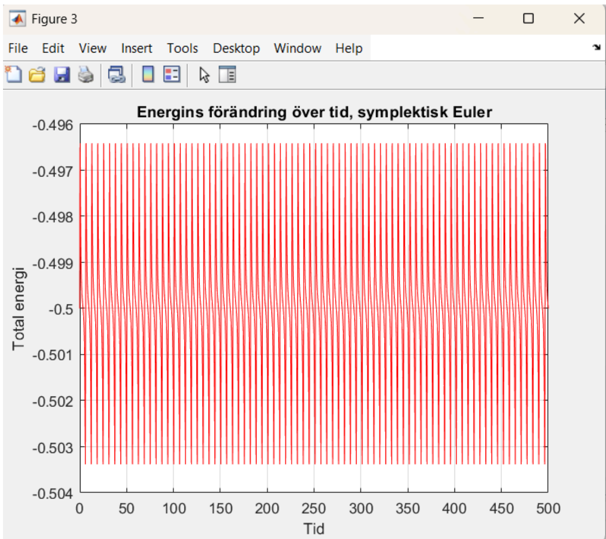


Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Energins förändring över tid, symplektisk Euler
Total energi
-0.496
-0.497
-0.498
-0.499
-0.5
-0.501
-0.502
-0.503
-0.504
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500
Tid

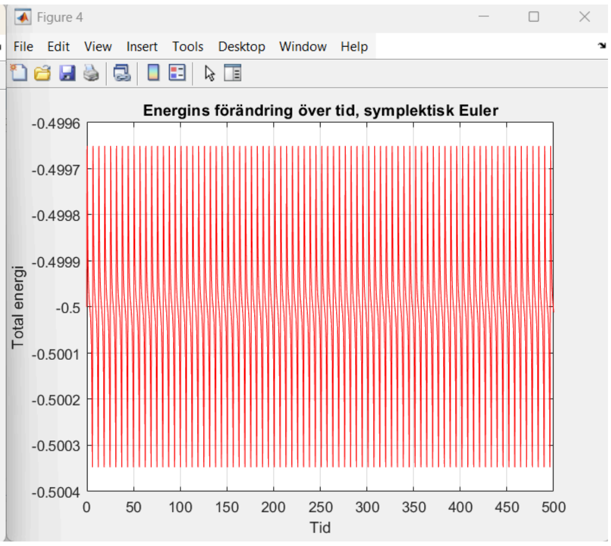


Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Energins förändring över tid, symplektisk Euler
Total energi
-0.4996
-0.4997
-0.4998
-0.4999
-0.5
-0.5001
-0.5002
-0.5003
-0.5004
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500
Tid

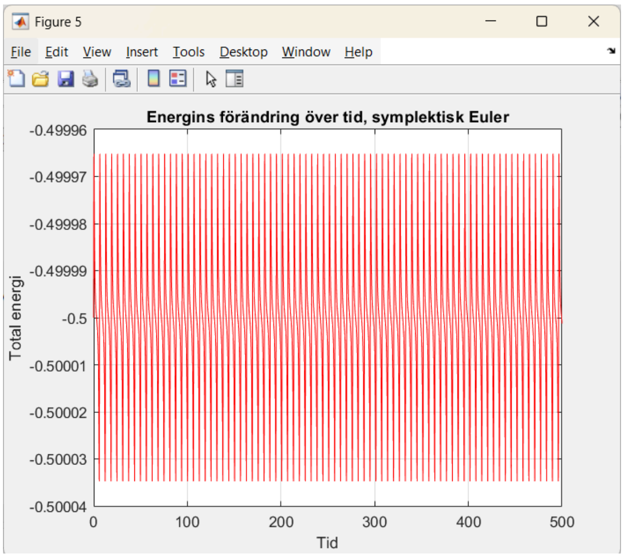


Figure 5
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Energins förändring över tid, symplektisk Euler
Total energi
-0.49996
-0.49997
-0.49998
-0.49999
-0.5
-0.50001
-0.50002
-0.50003
-0.50004
0 100 200 300 400 500
Tid

Uppgift 4

a):

4. a) $\dot{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right|^2}{2} - \frac{c^2 \hat{u}\cdot A\hat{u}}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - c^2\hat{u}\cdot A\hat{u}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\cdot A\hat{u} - c^2\hat{u}\cdot A\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\cdot\underbrace{c^2A\hat{u}}_{\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}} - c^2\hat{u}\cdot A\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right) =$

$= \{A \text{ symmetrisk} \Rightarrow A \text{ självadj.} \Rightarrow \underline{x}\cdot A\underline{y} = A\underline{y}\cdot\underline{x}\} =$

$= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - \underbrace{c^2A\hat{u}}_{\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}}\cdot\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - 2\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}\right) = 0$

$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$ Hamiltonianskt om det kan skrivas som $\begin{cases}\dot{q}(t) = \nabla_p H(p,q)\\ \dot{p}(t) = -\nabla_q H(p,q)\end{cases}$

$\nabla_p H(p,q) = \nabla_{\hat{u}_t} E(\hat{u}_t, \hat{u}) = \frac{d}{d\hat{u}_t}\left(\frac{\left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right|^2}{2} - \frac{c^2\hat{u}\cdot A\hat{u}}{2}\right) =$

$= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \dot{q}$

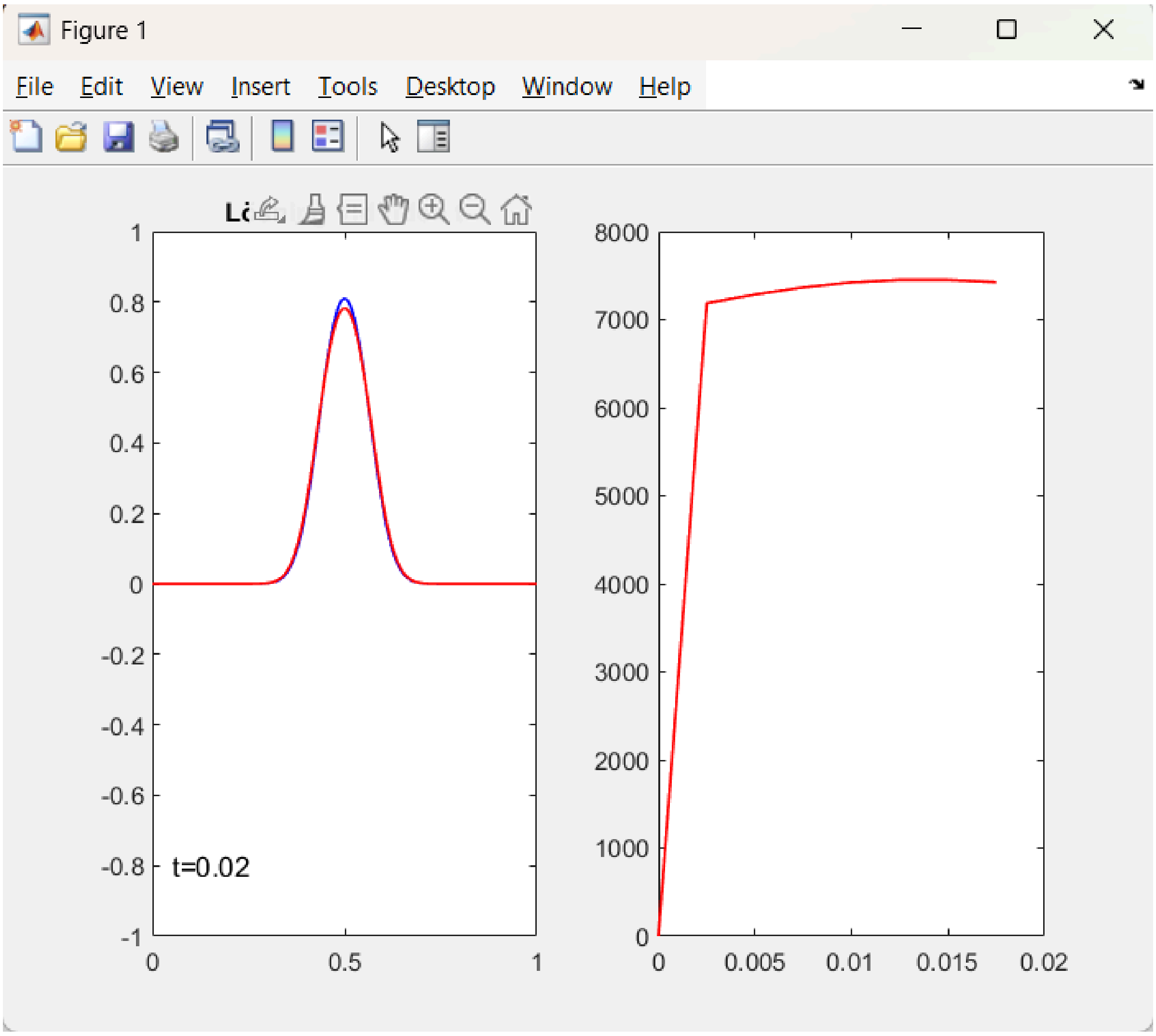
$-\nabla_q H(p,q) = -\nabla_u E(\hat{u}_t, \hat{u}) = -\frac{d}{d\hat{u}}\left(\frac{\left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right|^2}{2} - \frac{c^2\hat{u}\cdot A\hat{u}}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}c^2(\underline{1}\cdot A\hat{u} + \hat{u}\cdot A\underline{1}) \underbrace{=}_{A \text{ självadj.}} \frac{1}{2}c^2(A\hat{u} + A\hat{u}) = c^2A\hat{u} =$

$= \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \dot{p}$

b) T.ex. Implicita mittpunktsmetoden då denna har noggrannhetsordning 2 precis som vår approximation av andraderivatan. Implicita mittpunktsmetoden uppfyller bevarande av energi någorlunda bra då denna metod är implicit, alltså den kan hantera större tidssteg dt utan att metoden blir instabil (Energin ändras).

c) (Lösning visas till vänster, energi till höger. Blå kurva är approx. lösningen , röd kurva är d’Alemberts lösning.)



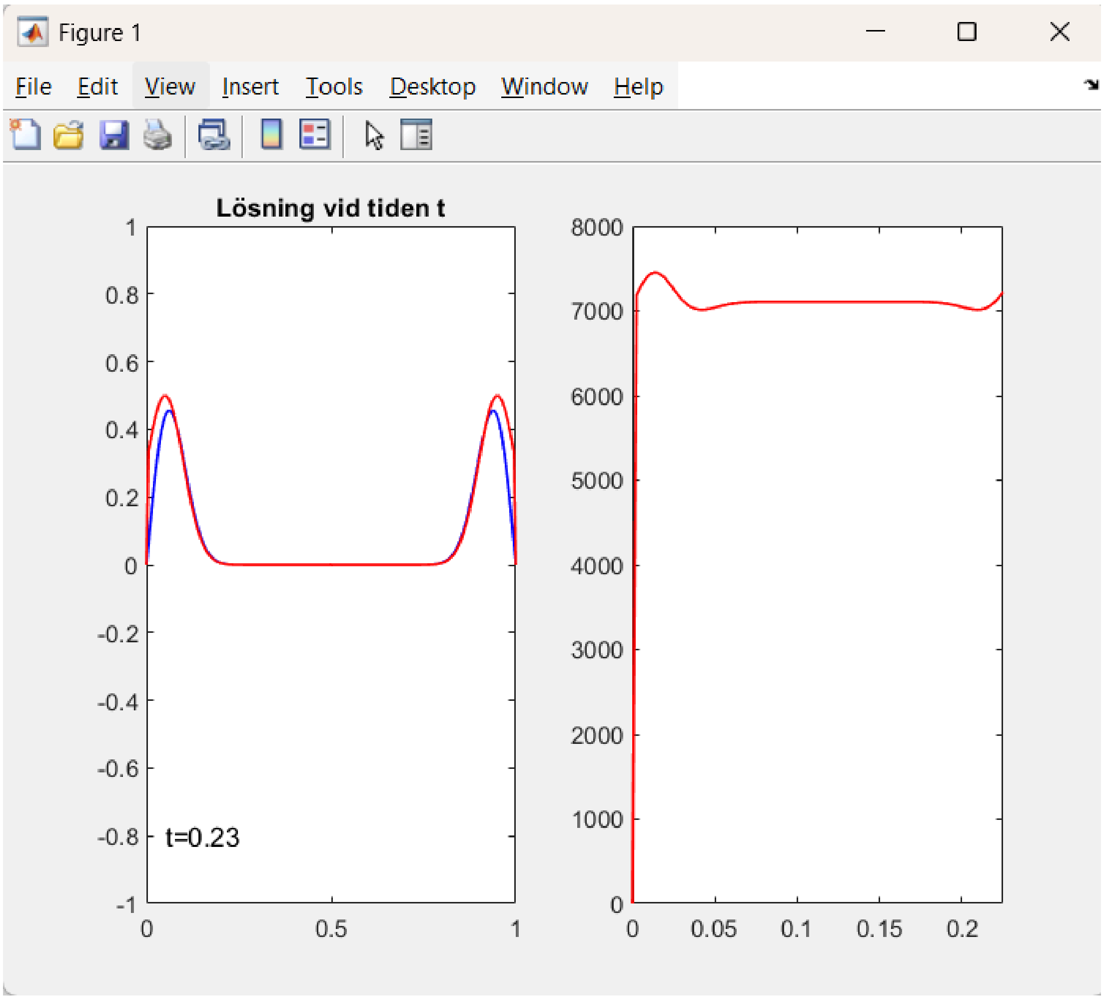
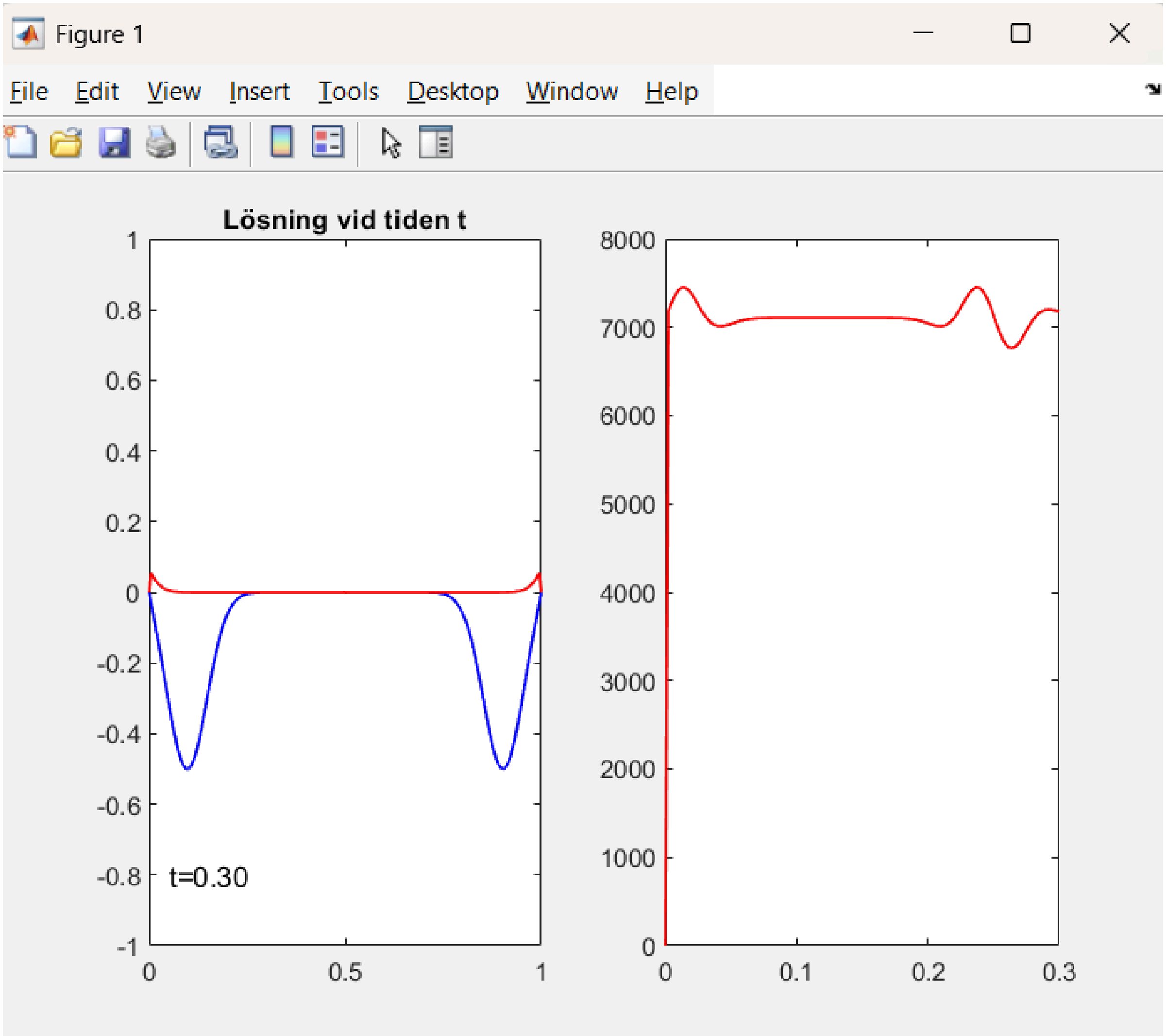


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.23
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2



(För att jämvikt ska behållas så speglas vågen neråt vid ändpunkterna när vågen sitter fast i noder i ändarna som den gör då vi har Dirichletvillkor. Detta skiljer sig från Neumannvillkor då krav endast ställ på rumsderivatan för vågen vid ränderna så vågens infallsvinkel mot änderna behöver vara ett specifikt värde men själva positionen u - kan ändras vilket gör att den vertikala ändringen inte är konstant där. Fysikaliska tolkningen är som att vågen sitter ihop med vertikalt, fritt rörliga inspänningar i ändarna)

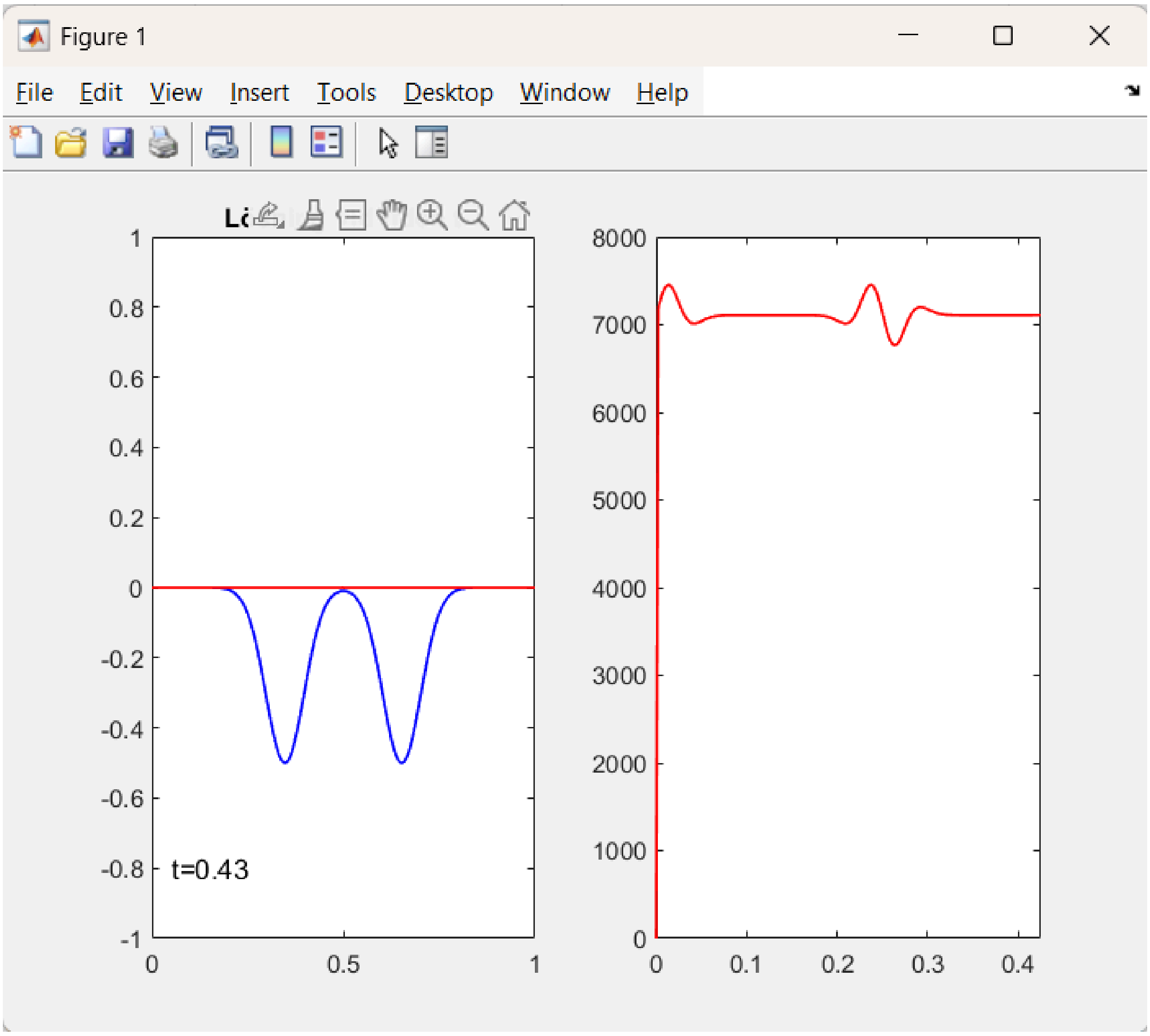
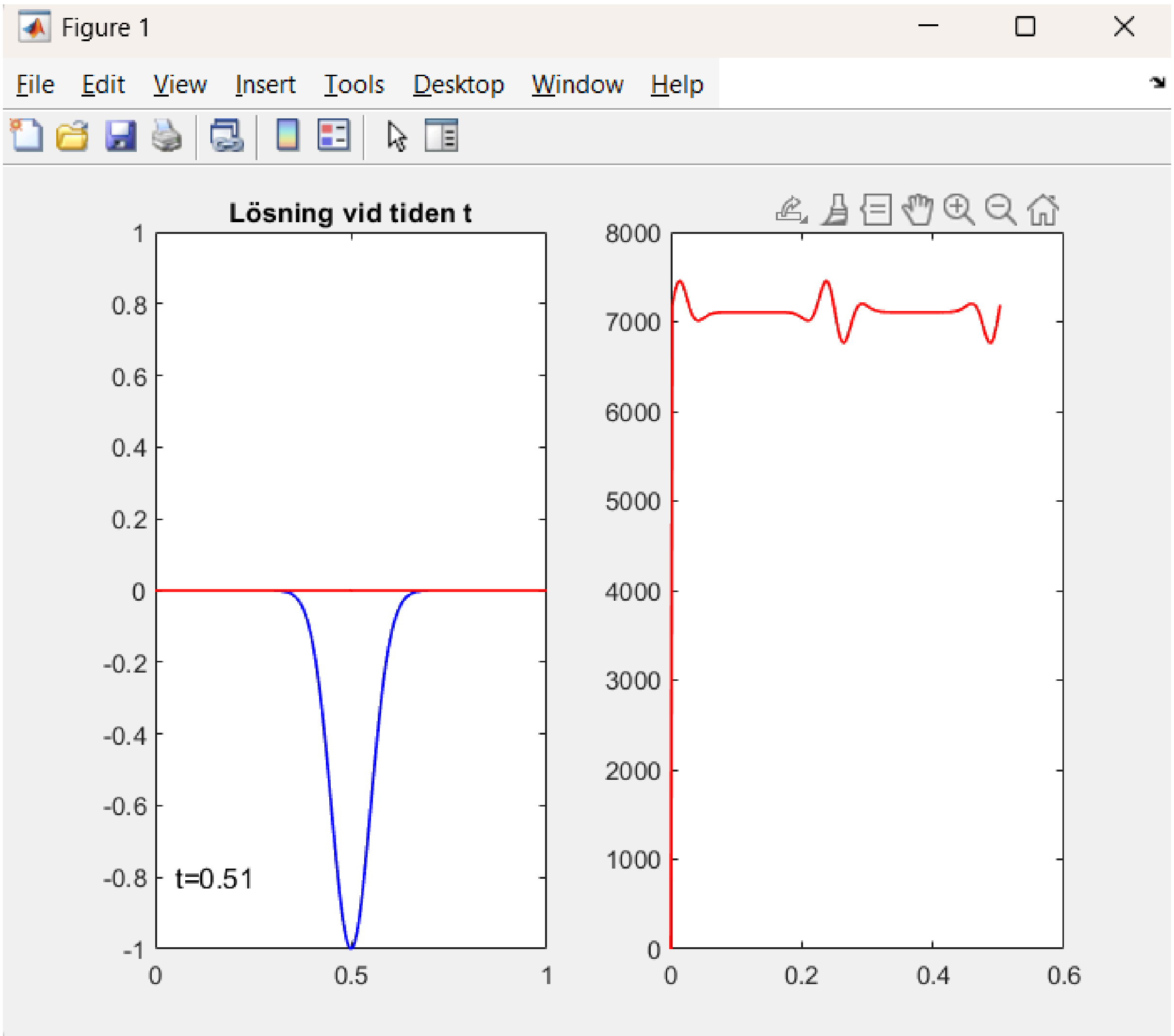


Figure 1
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
t=0.43



(Energins bevarande störs vid reflektionspunkterna och i mitten där de möts, förmodligen på grund av att vågorna får mycket stor vertikal ändring av u för samma tidssteg då i vid ändpunkterna påverkar reflektionen och i mitten superpositioneras vågorna.)

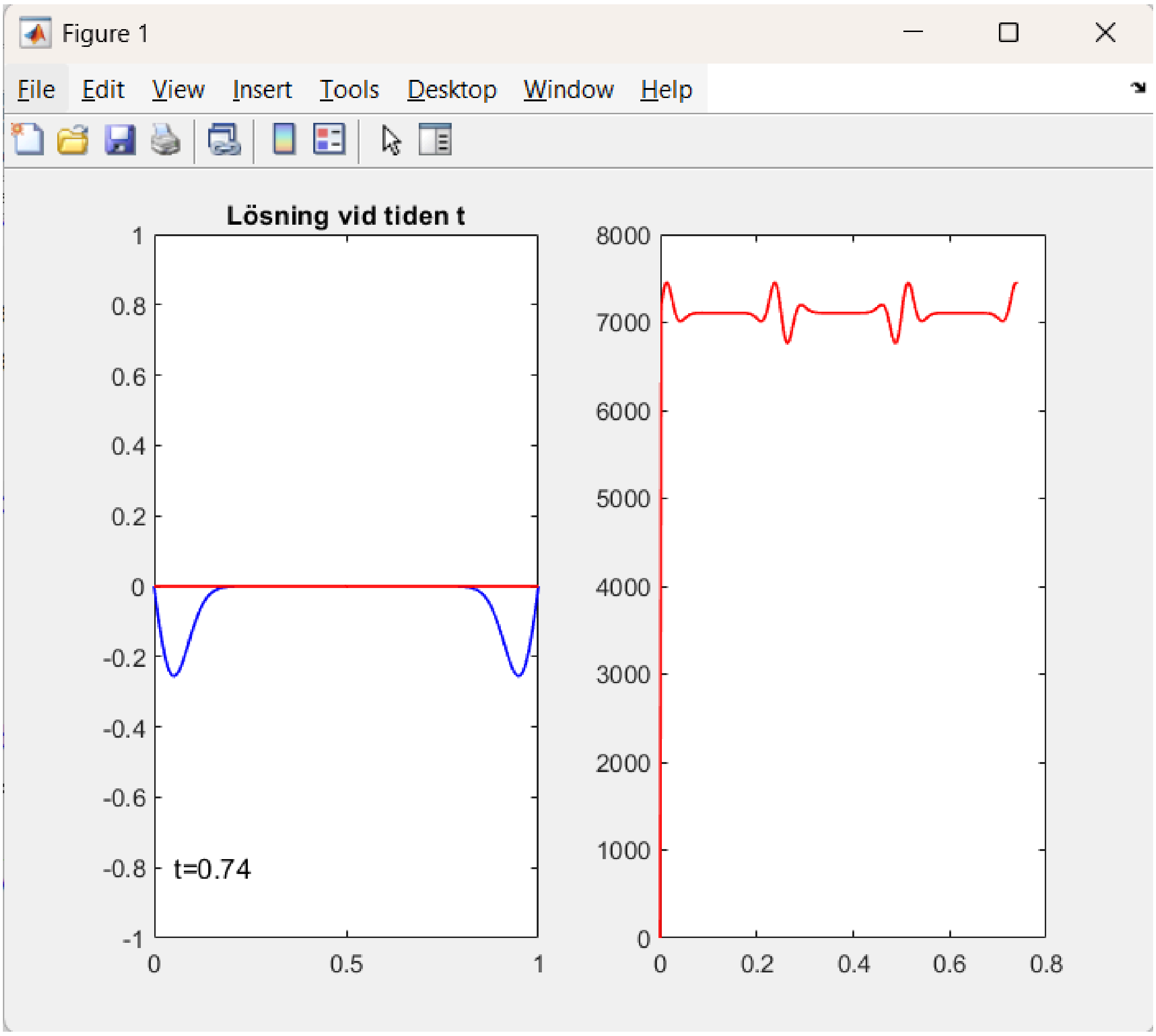
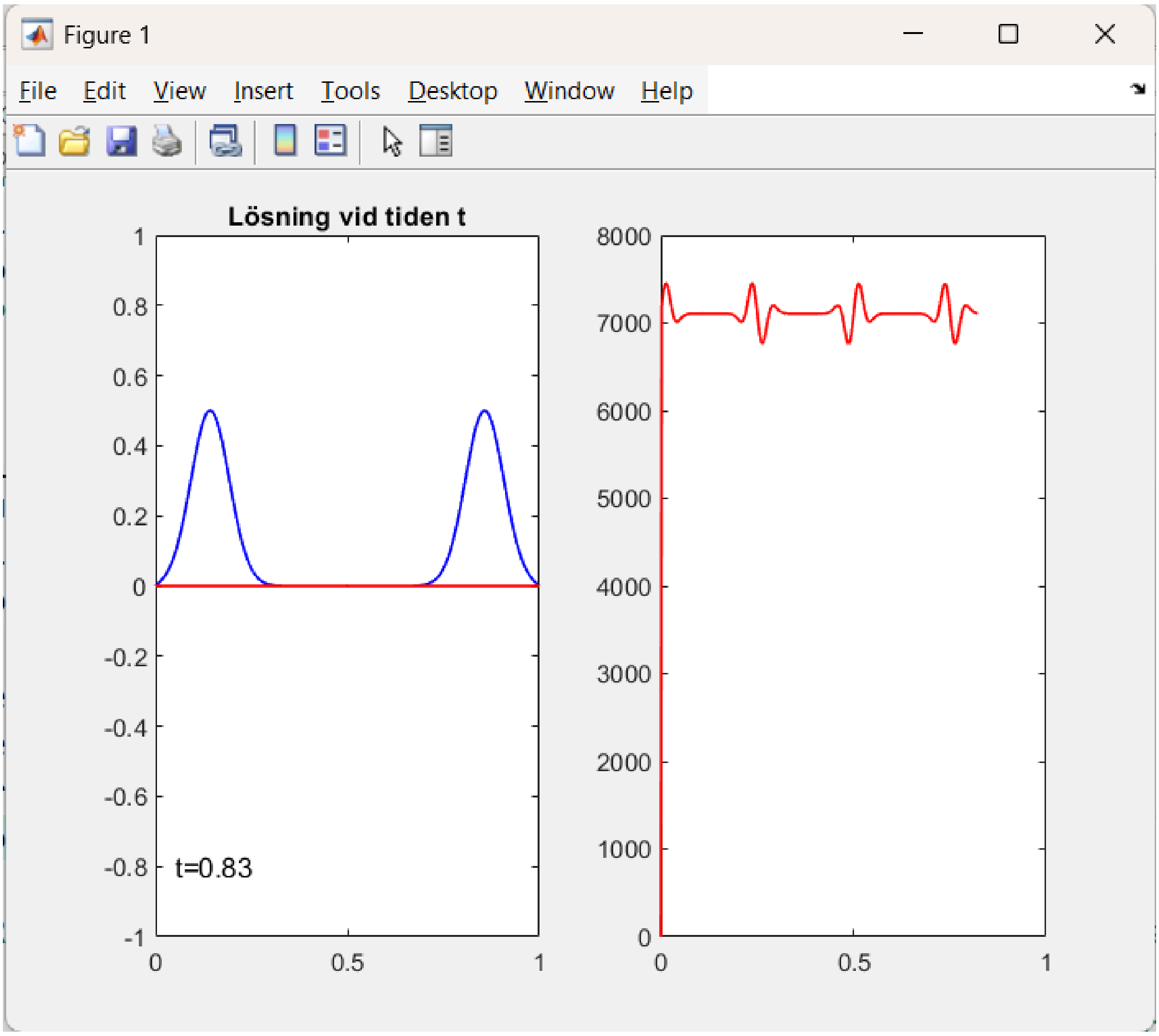


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.74



d) (Lösning visas till vänster, energi till höger. Blå kurva är approx. lösningen , röd kurva är d'Alemberts lösning.)

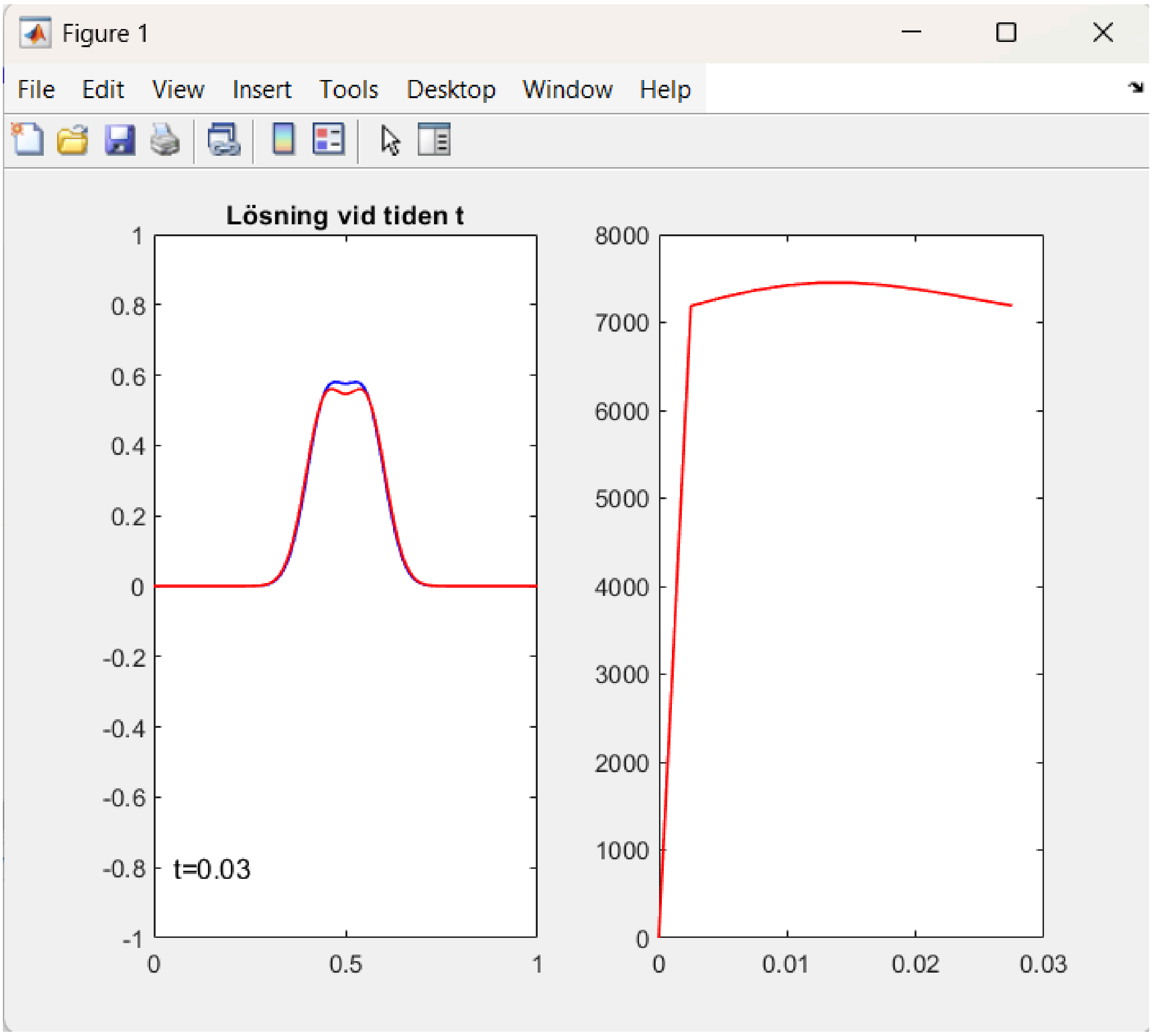


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.03
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.01
0.02
0.03

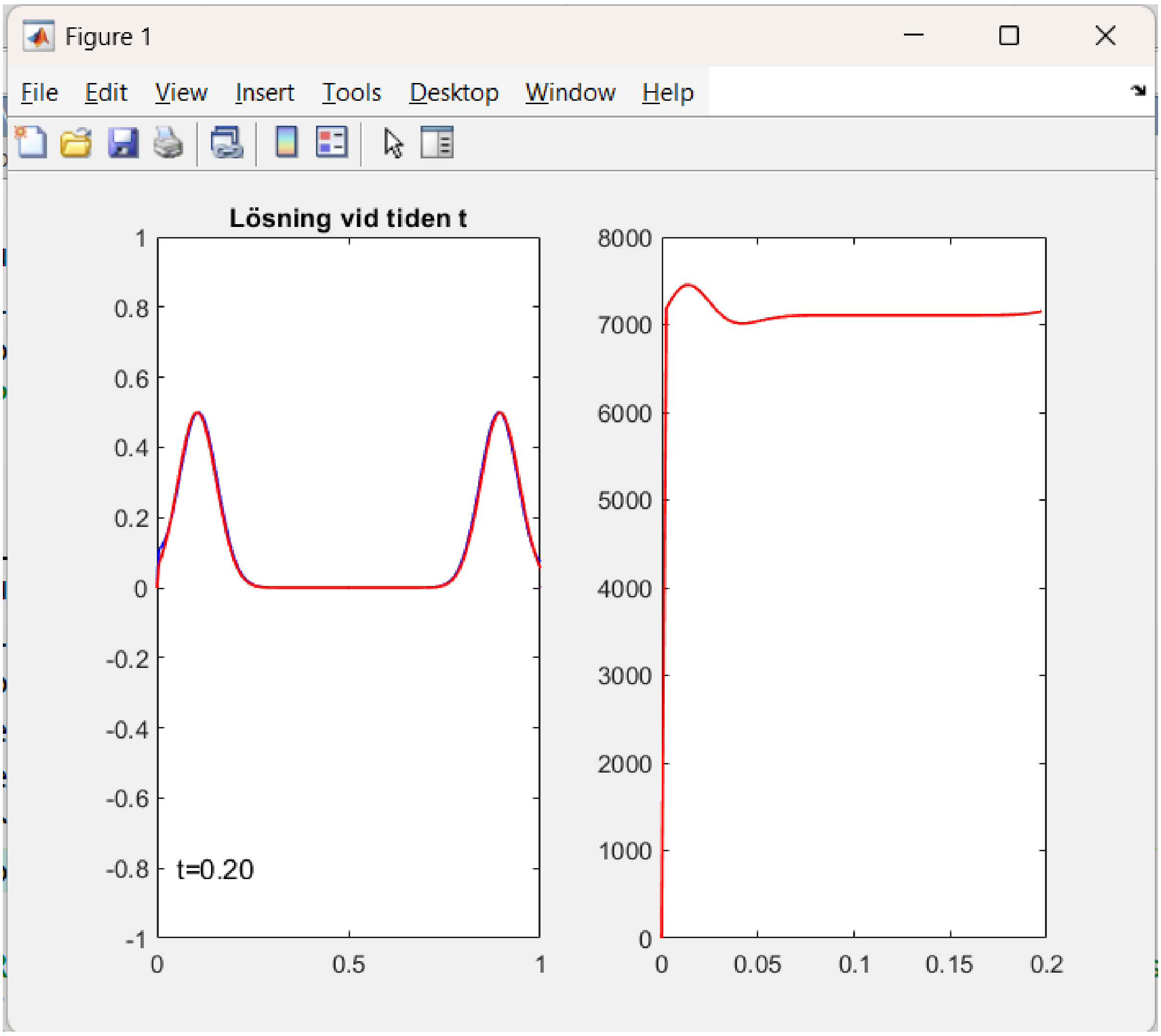


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.20
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2

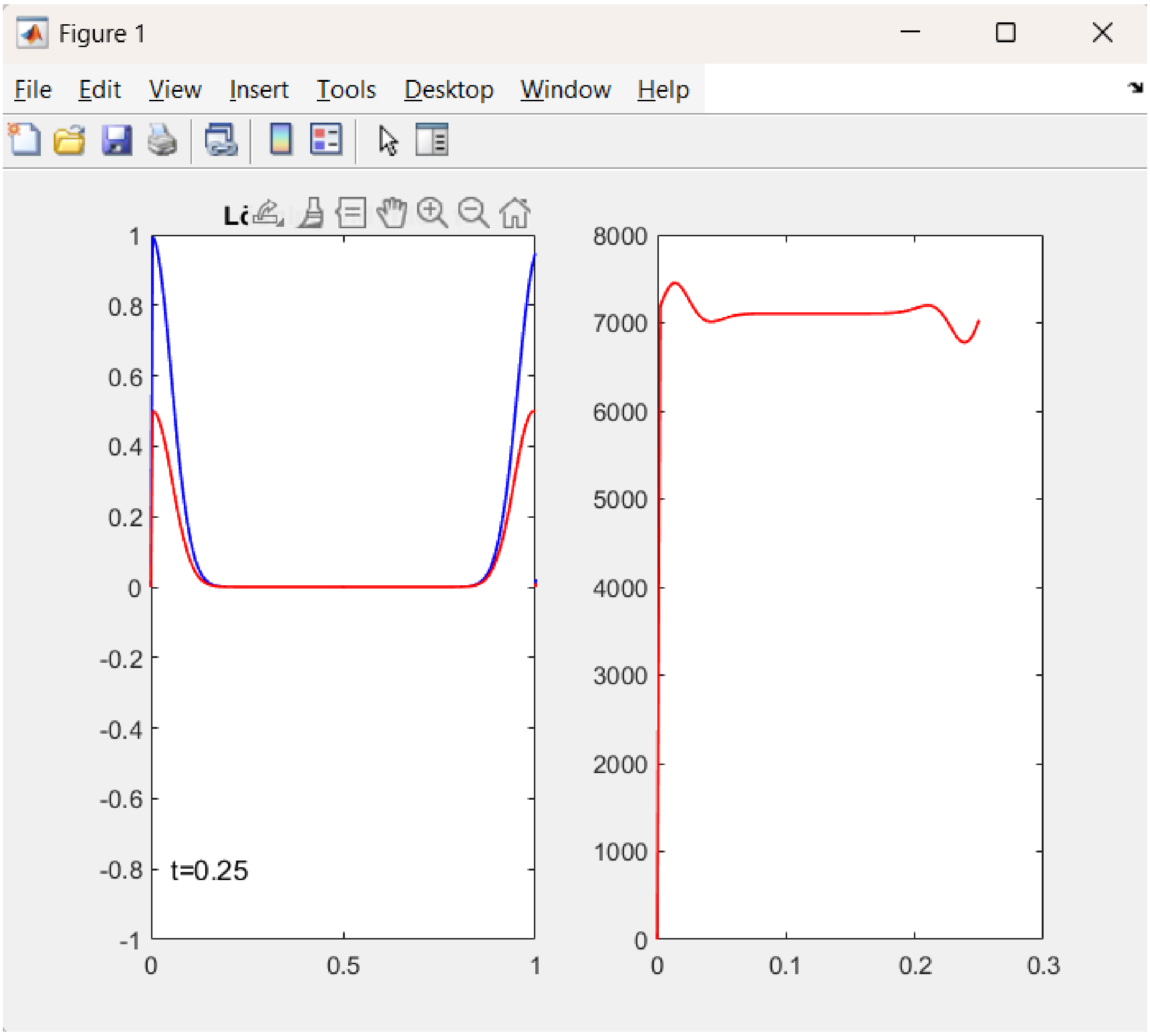


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
t=0.25
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.1
0.2
0.3

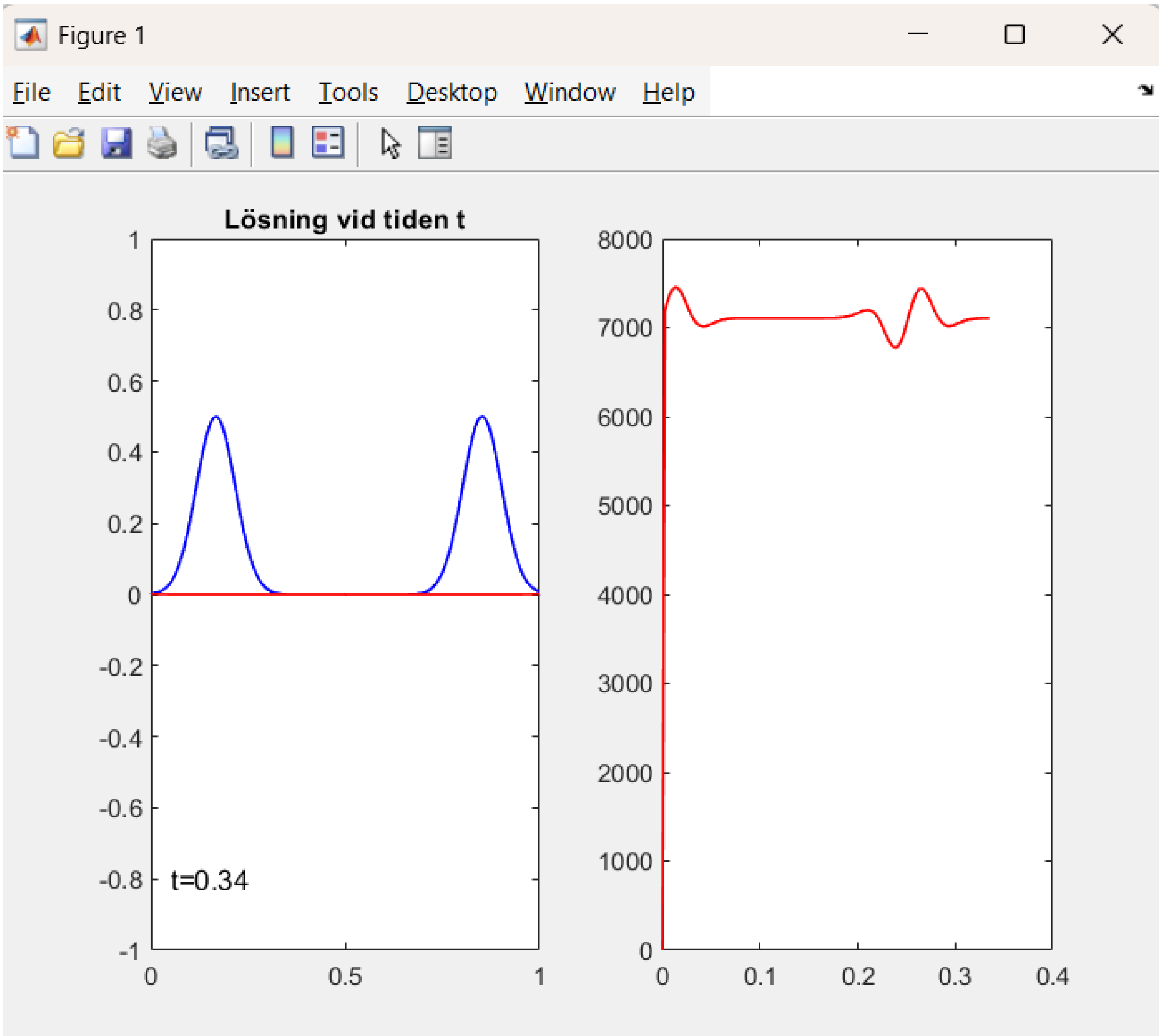


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.34
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4

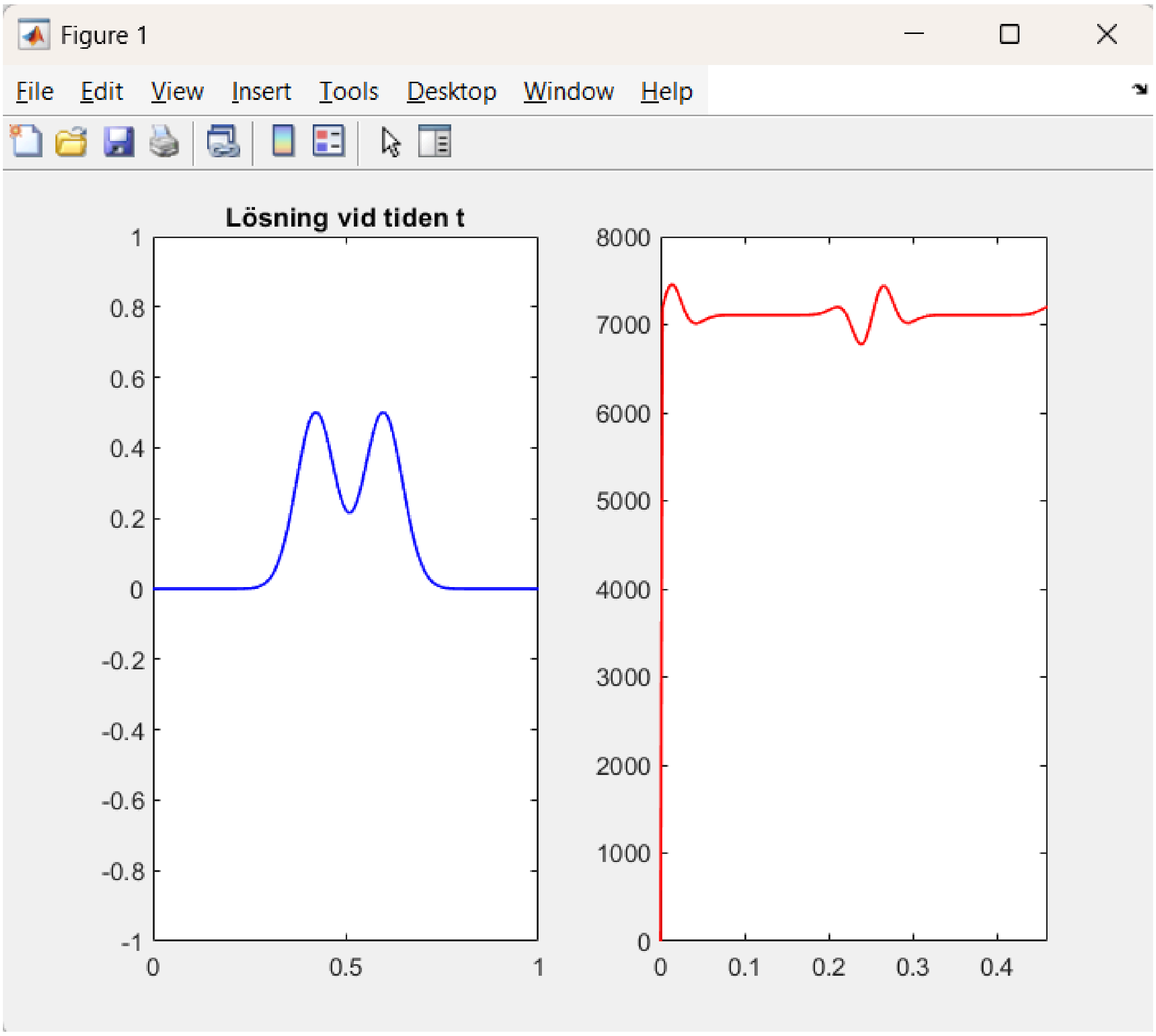


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4

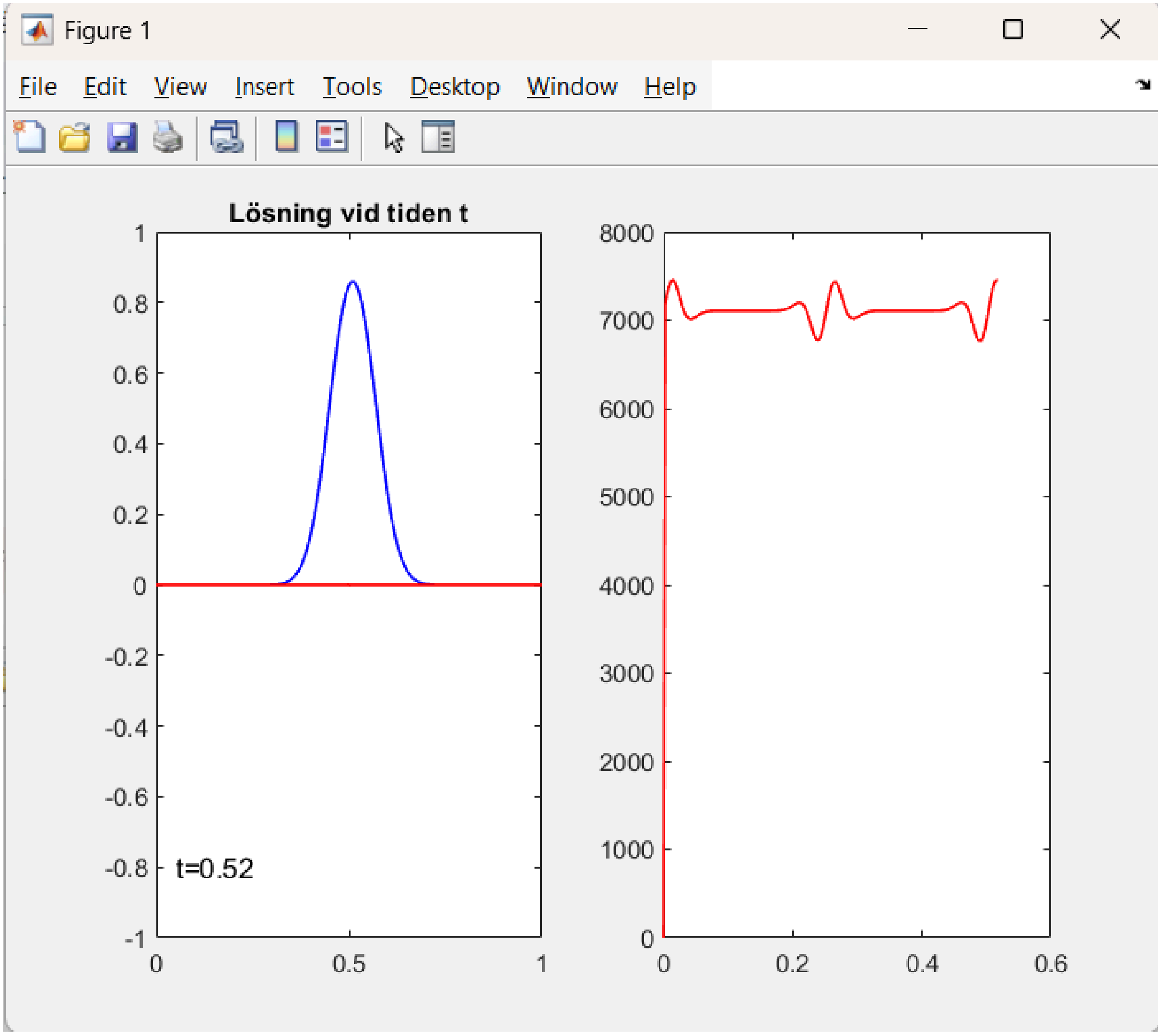


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.52
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.2
0.4
0.6

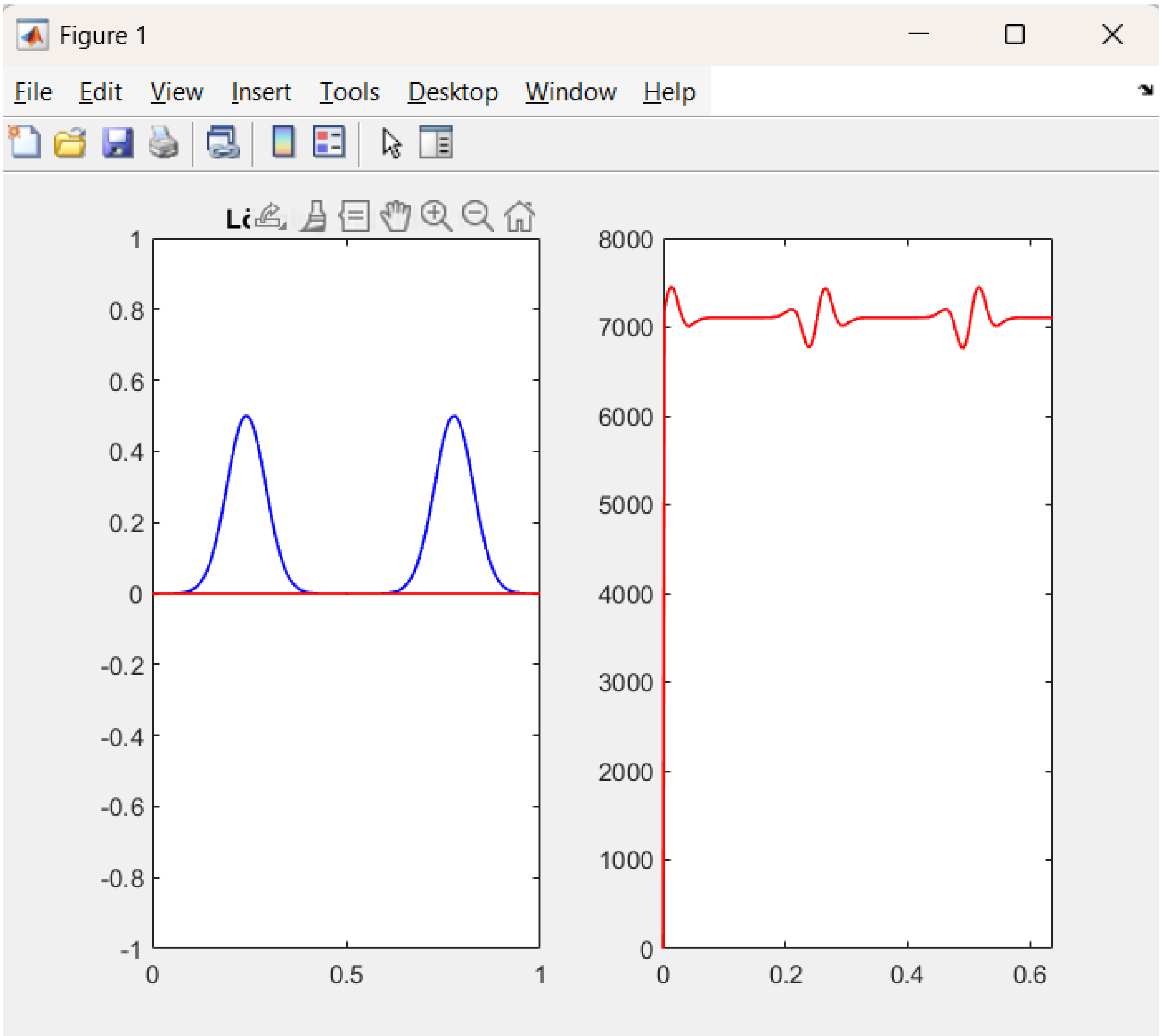


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.2
0.4
0.6

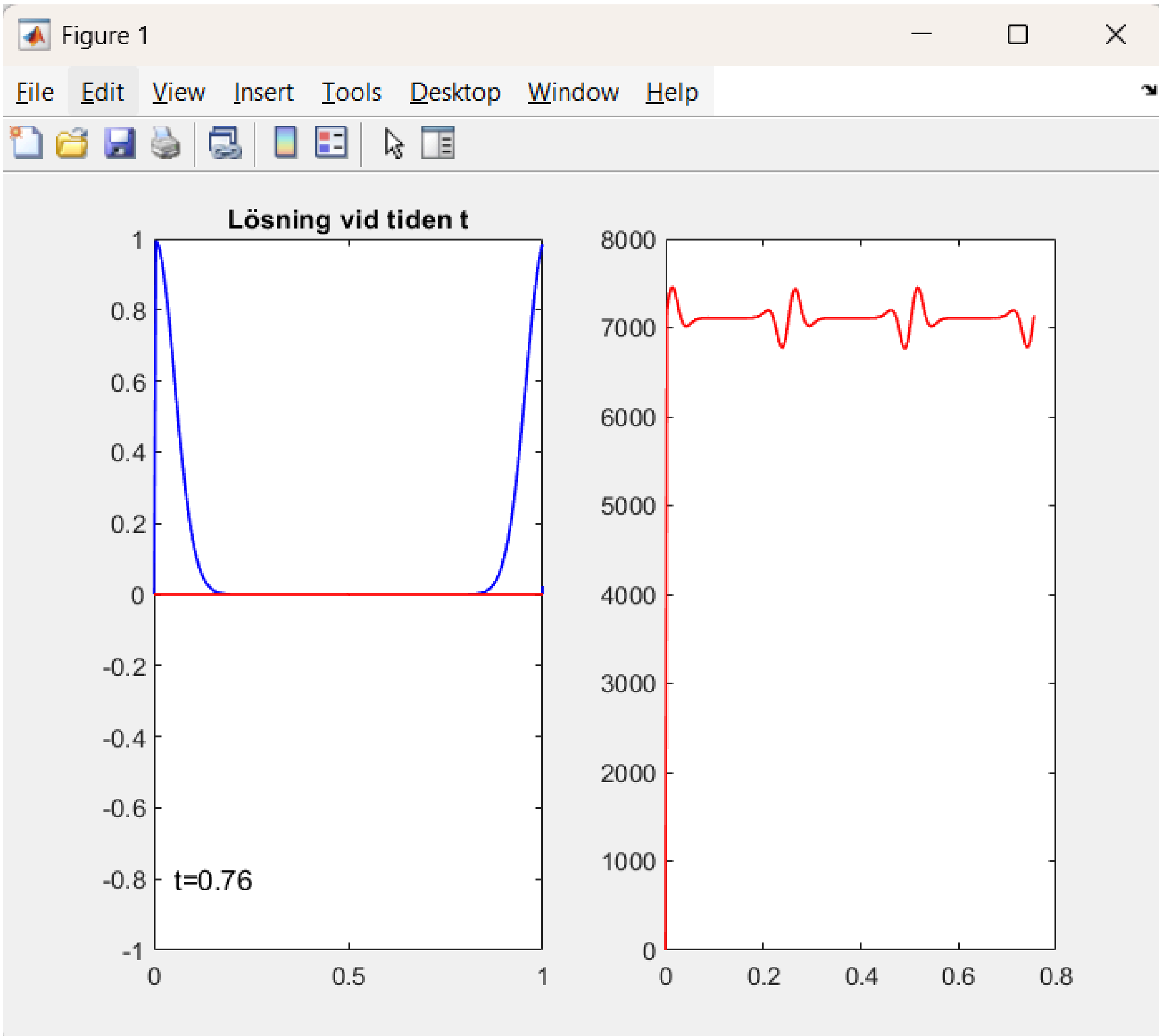
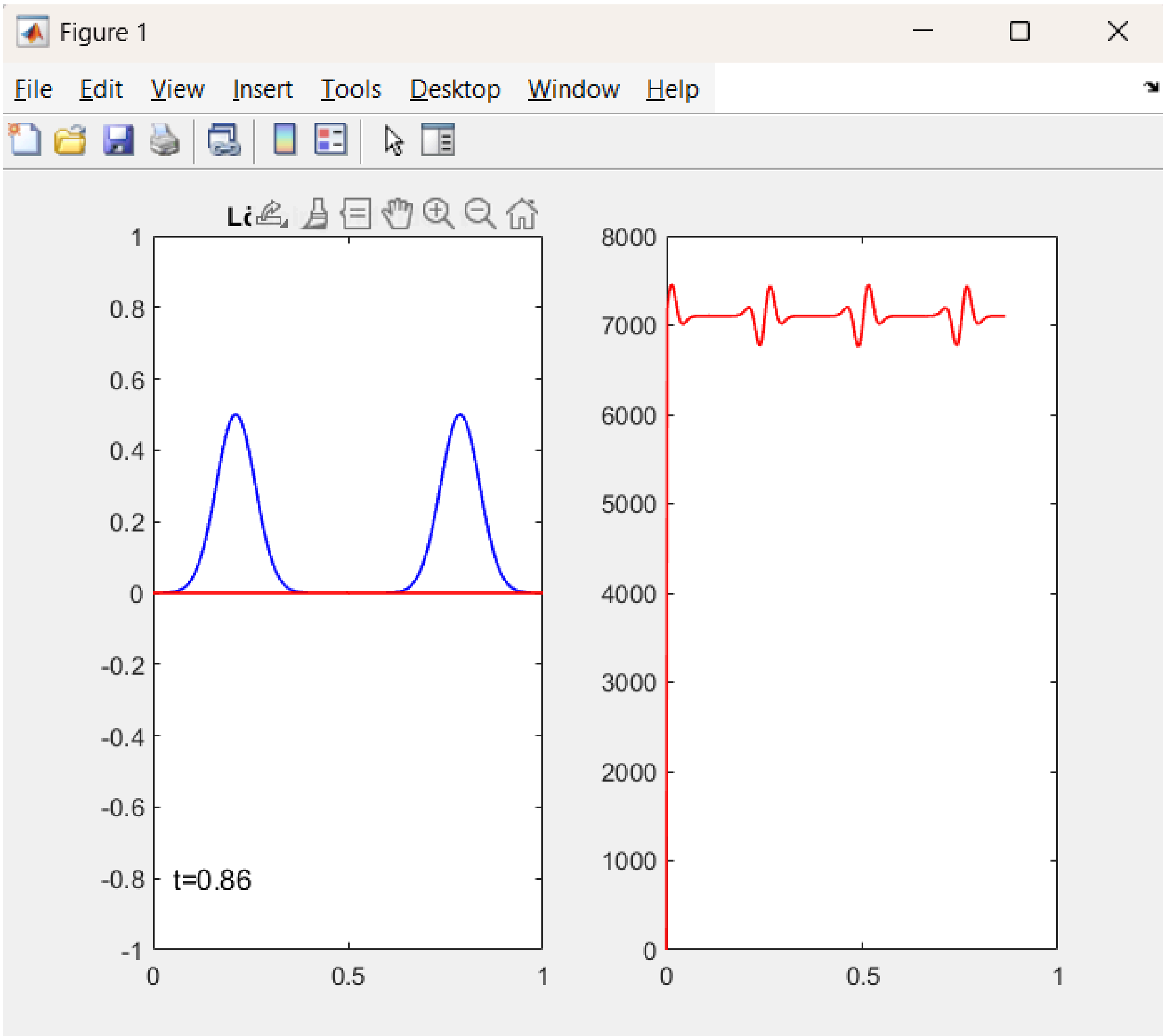


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Lösning vid tiden t
t=0.76
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8



Tankar: (ode45 verkar till synes vara mycket bra då denna kombinerar 4:e- och 5:e ordningens metoder för att få ut lösningsvektorn så om du skulle använda denna i samband med många andra metoder har denna ofta tillräckligt hög noggrannhetsordning för att användas effektivt då den metod med lägst noggrannhetsordning dominerar det totala felet. samt att du kan mycket lätt justera vilken relativa- och absoluta feltolerans du vill ha. Däremot är ofta denna metod för hög noggrannhetsordning jämfört med andra metoder och kan ödsla beräkningskraft. Dessutom är högre ordningens metoder som denna ofta mer känsliga för små störningar i indata och kan lätt bli instabil.)

“Givet att du vill uppnå en viss noggrannhet i lösningsvektorn, vilken av de tre metoderna är mest effektiv?”

Tidsberäkning av metoder:

```
ode45 tog 0.48 sekunder
```

```
Implicita mittpunktsmetoden tog 57.69 sekunder.
```

```
Symplektisk euler tog 1.72 sekunder.
```

Symplektiska Eulermetoden verkar mest effektiv då denna bara tog ca 3 gånger så mycket tid men har 4-5 gånger så liten noggrannhetsordning!

Uppgift 5

5. $$\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} = -f(q_n)$$

vill visa ~~att~~ detta gäller även för

$$q_{n+1} = q_n + h \nabla_p H(p_{n+1}, q_n)$$

$$H = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|} \qquad p_{n+1} = p_n - h \nabla_q H(p_{n+1}, q_n)$$

(*) Gäller för Hamiltonska system

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -f(q) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{q_{n+1} - q_n}{2h} = p_{n+1} \quad (i)$$

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{h} = -\frac{q_n - 2q_n + q_n}{h^2} \quad (ii)$$

$$(i): \ q_{n+1} = q_n + h p_{n+1} \approx q_n + h \dot{q}_{n+1} \overset{(*)}{=} q_n + h \nabla_p H(p_{n+1}, q_n)$$

$$(ii) \ \ p_{n+1} = p_n - h f(q_{n+1}) \approx p_n - h \ddot{q}_{n+1} \overset{(*)}{=} p_n - h \dot{p}_{n+1} = p_n - h \nabla_q H(p_{n+1}, q_n)$$

$\Rightarrow$ Symplektisk Eulermetod gäller Verlets metod.