UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U NOVOM SADU

Alternativne rešenje umesto inverzije matrica u praksi i optimalizacija algoritma za proračun Ward-ovog ekvivalenta

Projekat iz predmeta: Primena računara u elektroenergetici

Balaž Kereši E176/2017

Novi Sad, 2017.

SADRŽAJ

UVOD

U stručnom literaturu i popularnim interneskim blogovima implementirane računarske nauke često može se naći upozorenje: "Do not invert that matrix!"[1,2]. Ova je bila reakcija na privlačnom pristupu programera da reši jedan sistem linearnih jednačina u obliku (**A**x=**b**) na sledeći način:

$$x = A^{-1}b \tag{0.1}$$

U 1970-im godinama softverski paket LINPACK je bila naj popularnija biblioteka funkcija za rešenje problema linearne algebre. Naknadne istraživanje su pokazale da najčešće korišćen metod među programera za rešenje sistema linearnih jednačina jeste pomoću proračuna inverzne matrice i množenje te matrice sa rezultatom. Ali ovo je jako skup metod i u gledište memorijskog prostora i komputaciono vreme[1-3].

Prvi problem se nalazi u tome da inverzna matrica jedne retke matrice ne mora da bude retka [4], ova osobina već postavlja velike prepreke aplikacijama kao obične EMS aplikacije koje koriste jako velike matrice sa jako malim brojem ne-nultih elemenata. Kod ovih slučajeva tehnike retkih matrica imaju krucijalne značenje.

Drugi problem inverzije matrice i sam za sebi zahteva otprilike 3 puta više komputaciono vreme kao druge metodologije za rešenje linearnih jednačina.

U okviru ovog projekta korišćenjem funkcije iz Intel MKL softverskog paketa za C++ će biti pokazana uporedljiva analiza pojedinih pristupa za rešenje jednog konkretnog inženjerskog problema, naime proračun Ward-ovog ekvivalenta jednog prenosnog sistema.

Analizator program se koristi 3 solvera bazirano na 3 različite metodologije:

1. Proračun Ward-ovog ekvivalenta pomoću inverzije matrice korišćenjem funkcije iz mkl biblioteke.
2. Proračun Ward-ovog ekvivalenta pomoću osnovne Gausove eliminacije sa algoritmom koji je realizovana samo za ovaj projekat
3. Proračun Ward-ovog ekvivalenta pomoću LU faktorizacije korišćenjem mkl biblioteke

Ova uporedljiva analiza će uporediti samo potrebno komputaciono vreme proračuna Ward-ovog ekvivalenta. Međutim, potrebno je napomenuti da pomenute metodologije nisu direktno realizovani za retke matrice. (Mogu da se iskoriste nulte elementu, ali ni jedan nije sparse-solver). Pomoću tehnikama retkih matrica verovatno može se povećavati efikasnost, ali to će biti problem za drugu analizu.

Realizacija klasične Gauss-ove eliminacije ima posebne mogućnosti prilikom postupka proračuna Ward-ovog ekvivalneta (čije će biti pokazani u narednim poglavljama).

U prvom poglavlju je objašnjen pojam Ward-ovog ekvivalenta i njegov proračun. U drugoj glavi su pokazane alternativne metodologije umesto inverzije matrice za rešenje problema. U trećoj glavi će biti objašnjen struktura C++ programa, dok četvrta poglavlja će pokazati rezulatati simulacije i u tom poglavlju će biti izloženi osnovni zaključci. U prilogu će biti rezultati proračuna tokova snaga, ulazni i izlazni fajlovi.

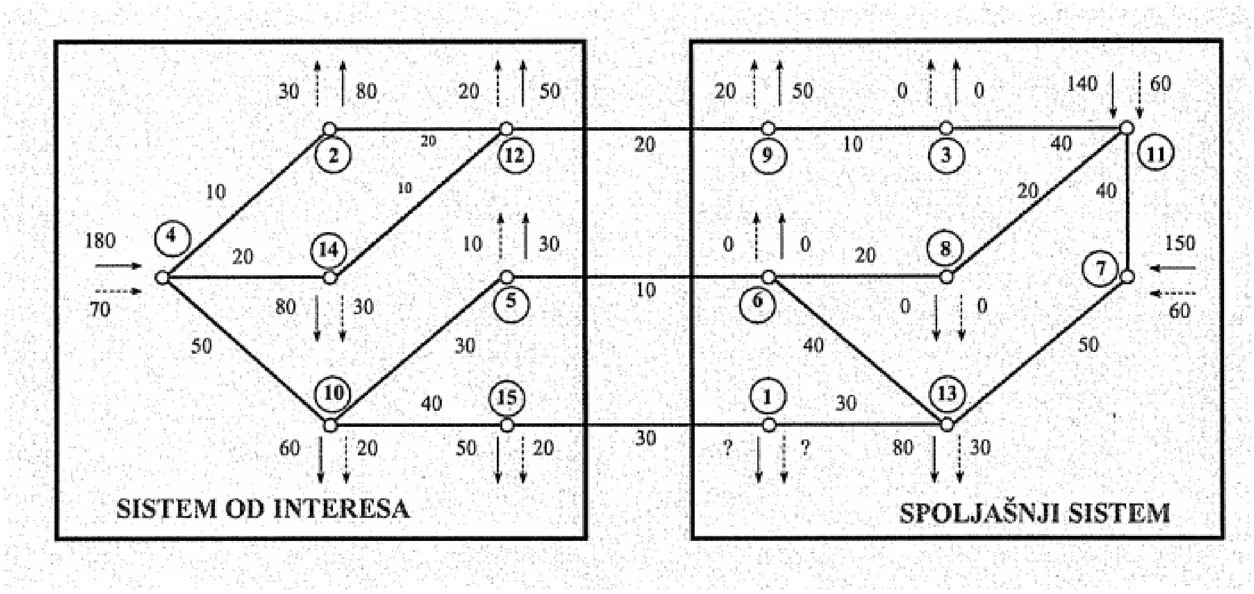
1. POSTAVKA PROBLEMA WARD-OVOG EKVIVALENTA

U elektroenergetskim sistemima dejstvo susednih sistema nije zanemarljivo prilikom proračuna tokova snaga i dodatnih EMS funkcija. Ali, modelovanja celog sistema u interkonekiji već nije moguća zbog hardverskih i vremenskih ograničenja. Zbog ovoga inventovane su se različite metodologije za smanjenje modela elektroenergetskog sistema. Ovim metodima deo sistema koji nije od interesa se ekvivalentuju sa malim elektroenergetskom sistemom čiji režim rezultuje ekvivalentne rezultate prilikom proračuna tokova snaga celokupnog sistema.

Postoje različite načine ekvivalentiranja dela elektroenergetskog sistema. Po principu se razlikuje statičke i danemičke ekvivalente. U prvom grupu spadaju ekvivalenti koje se može koristiti samo za proračun režima stacionarnog stanja, dok ekvivalenti druge grupe moraju da budu sposobni za simulaciju proračuna dinamičkih efekata.

Jedan od najjednostavnijih načina ekvivalentiranja jeste proračun Ward-ovog ekvivalenta. Taj ekvivalent se spada u grupu statičkih ekvivalenta i pogodno rešenje za pojednostavljenje proračunu tokova snaga.

Za ekvivalentiranju potrebno je deliti prenosni sistem na dva dela kao to je pokazano na slici 1.1.



Slika 1.1 – Podela EES-a na spoljašnji i unutrašnju podsistem

Dva dela, su provezani preko odgovarajućih graničnih čvorova. U ovom slučaju ovi čvorovi su 1, 6 i 9.

Ward-ova redukcija ima dva varijanta u zavisnosti od tretmana injektiranu proizvodnju i potrošnju čvorova. U prvom varijantu konstantnu injektiranu aktivnu i reaktivnu snagu se pretvaraju injektiranim konstantnim strujama, dok druga varijanta ove veličine pretvara u konstantnoj admitansi[1]. Ovom transformacijom model elektroenergetskog sistema je linearni i otvara se mogućnost korišćenje standardnih metoda linearne algebre za njihovo rešenje i transformaciju

U nastavku se razmatra da ulazni podaci kalkulatora Wardovog ekvivalenta jesu struje injektiranja i parametri cele električne prenosne mreže (mreža od interesa + spoljašnja mreža), koji su grupisani u matricu admitansi mreže, matricu Y_{bus}.

Model EES-a će imati sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_s \\ \hat{I}_g \\ \hat{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{ss} & \hat{Y}_{sg} & 0 \\ \hat{Y}_{gs} & \hat{Y}_{gg} & \hat{Y}_{gi} \\ 0 & \hat{Y}_{ig} & \hat{Y}_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{V}_g \\ \hat{V}_i \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Gde Y-ima su obeleženi submatrice matrica admitansi Y_{bus}, a I-ovi su subvektori struja injektiranja. I V-ovi su subvektori napona čvorova.

s – označava deo spoljašnjeg podstistema

g – granični čvorovi

i – čvorovi sistema od interesa

Važno je da submatrice Y_{si}, i Y_{is} moraju biti nulte matrice jer suprotan slučaj bi se značilo veze između nekih čvorova spoljašnjeg i unutrašnjeg sistema.

Postupkom ekvivalentiranje gornji sistem jednačina treba da se pretvara u sledeću formu:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}'_s \\ \hat{I}'_g \\ \hat{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}'_{ss} & \hat{Y}'_{sg} & 0 \\ 0 & \hat{Y}'_{gg} & \hat{Y}_{gi} \\ 0 & \hat{Y}_{ig} & \hat{Y}_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{V}_g \\ \hat{V}_i \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Gde jednačine sistema od interesa i graničnih čvorova može se tretirati potpuno samostalno, jer one ne zavise od napone V_s. Taj redukovan sistem obuhvata Ward-ov ekvivalent u vidu matrice Y_{gg}’ i I_g’.

Y_{gi}, Y_{ig}, Y_{ii} i I_i ne menjaju se tokom ekvivalentiranja, zato deo mreže od interesa ostaje nepromenjen i ne gube se informacije o unutrašnjem sistemu.

Y_{gg}’ i I_g’ se računaju na sledeći način:

$$\begin{aligned} \hat{Y}'_{gg} &= \hat{Y}_{gg} - \hat{Y}_{gs} \cdot \hat{Y}_{ss}^{-1} \cdot \hat{Y}_{sg} \\ \hat{I}'_g &= \hat{I}_g - \hat{Y}_{gs} \cdot \hat{Y}_{ss}^{-1} \cdot \hat{I}_{sg} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Redukovan sistem će imati sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_g^{'} \\ \hat{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{gg}^{'} & \hat{Y}_{gi} \\ \hat{Y}_{ig} & \hat{Y}_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_g \\ \hat{V}_s \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Na osnovu jednačine (1.3) sledilo bi da za rešenje problema potrebno je invertovati matricu Y_{SS}. Ali, ako inverzija matrica nije efikasna operacija, postavlja se pitanja da li može se nekako izbeći to?

(**NAPOMENA:** Kod obe sistema se invertuje matrica Y_{ss} algoritam za rešenje na ovakav način može se pojednostaviti, ako ova inverzija se radi samo jednom i to se koriste za oba sistema**)**

2. METODOLOGIJE ZA PRORAČUN WARD-OVOG EKVIVALENTA

Postoje različite realizacije inverzije matrica počevši od klasičnog korišćenje Cramer-ova pravila ove metodologije preko Gauss-ovog[4-5] i generalizacije Newton-ovog iterativnog algoritma i različitih dekompozicija. Prema nekih članaka[6] najbrži način inverzije matrice je bazirana na Coppersmith-Winogradovu algoritmu[7], koji je asimptetičko najbrži algorizam za množenje matrice.

LAPACK i MKL biblioteka koriste metodologije bazirano na LU faktorizaciju, jer faktorizovanu matricu je lakše invertovati. Međutim, uopšte nije neophodno naći inverznu matricu da bi bilo moguće rešenje jednog sistema linearnih jednačina. U nastavku će biti objašnjeni rešenje problema Ward-ovog ekvivalenta pomoću stadardno rešenjem LU faktorizacije i Gausove eliminacije.

2.1 Rešenje problema Ward-ovog ekvivalenta LU faktorizacijom

LU faktorizacija je jedan od standardnih načina rešenje sistem linearnih jednačina oblika:

$$Ax = b \tag{2.1}$$

Solver ovakvog reši sistem preko sledećih koraka:

1) Faktorizacija matrice na dve matrice tako da: $A=LU$, sistem postaje: $LUx=b$
2) Formulacijom $Ux = y$, rešava se sistem $Ly=b$ na y
3) Rešava se sistem $Ux=y$ na x

Gde L je jedna donja trougaona matrica dok U je gornja trougaona matrica. Ukoliko matrica A je pozitivno definisana i simetrična $U=L^T$ *ili* $U=L^H$ (T – notacija za transpoziciju, H – notacija za Hermitovu matricu) u zavisnosti da li je reč o realnom ili kompleksnom sistemu jednačina. Kada faktorizacija je izvršena na ovaj način, reč je o Cholesky-jevu faktorizaciju koja je efikasnija jer dovoljno je skladiti samo jednu trougaonu matricu umesto dve.

2. i 3. koraka rešenje sistema se zovu rešenjem unapred (forward solve) i rešenjem unazad (backward solve) respektivno. Rešenje jednog sistema linearnih jednačina koji može se opisati trougaonom matricom koeficijenata je jako jednostavna. Iterativno može se rešiti

sistem za svaki član posebno i ovakvo realizovano rešenje nije složenije od O(n^2). Najzahtevniji deo zadatka jeste izvršenje LU faktorizacije (koji ima složenost O(n^3)) ali to može se uraditi tri puta brže u odnosu inverzije matrice.

Što tiče rešenje samog zadatka, izrazi (1.3) su pokazali kako se može izračunati parametre redukovanog sistema, međutim pomenuti problem može se rešiti na osnovu sledećih koraka[8]:

1) Rešiti: $Y_{ss}W = Y_{sg}$ za W
2) Izračunati: $Y'_{gg} = Y_{gg} - Y_{gs}W$
3) Rešiti: $Y_{ss}Z = I_s$ za Z
4) Izračunati $I'_g = I_g - Y_{gs}Z$

U koracima treba se rešiti dva sistema linearnih jednačina, međutim, može se primetiti, da kod obe sistema potrebno faktorizovati matricu Y_{SS}. Nači, algoritmu može se optimizirati, ako ovu faktorizaciju se rade samo jednom i rešenje iskoristimo u koraku 3 za rešenje unapred i unazad.

2.2 Rešenje problema Ward-ovog ekvivalenta Gauss-ovom eliminacijom

Gauss-ova elminacija je opet jedna od standardnih algoritma za rešenje sistema linearnih jednačina, međutim LU faktorizacija je češće korišćena u praktičnoj realizaciji. Gauss-ova elminacija koristi množenje i sabiranje i množenje pojedniačnih jednačina sa ciljem eliminisanje zavisnosti pojedinačnih izraza od drugih promenljivih. Ovaj algoritam će biti ilustrovan u nastavku. Neka se razmatra sledeći sistem *n* linearnih jednačina sa *n* nepoznatom, reprezentovano u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Ukoliko dijagonalni članovi nisu jednaki nuli množenjem prve jednačine sa *-a_{21}/a_{11}* i sabiranjem dve jednačine prvi član drugog reda ispadne (biće jednak nuli). Postupak može se ponavljati, sve dok ne eliminišu svi elemenit prve kolone (osim prve jednačine). Postupak pokazuje relacija (2.3).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \dots \\ b_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}b_1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Matrica (2.3) reprezentuje jedan sistem od *(n-1)* jednačina i *(n-1)* nepoznatih veličina, jer u donjem sistemu je eliminasana zavisnost od promenljive x_1. Ponavljanjem postupka na donji sistem eliminiše se zavisnost od promenljiva x_2 i sistem će se smanjiti na dimenziju *(n-1)*. Cilj klasične realizacije Gauss-ovog metoda je svođenje matrica A na gornju trougaonu matricu (2.4).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21}^{'} & \dots & a_{2n}^{'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{'} \\ \dots \\ b_n^{'} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Od n-te jednačine x_n može se izraziti, kao: $x_n = \frac{b_n^{'}}{a_{nn}^{'}}$, smeštanjem rezultata u (n-1)-u jednostavno može se dobiti x_{n-1} i tako dalje. Ovaj postupak je rešenje unazad i identičan sa postupkom objašnjeno kod LU faktorizacije. Algoritam koji reši ovu zamenu ima složenost $O(n^2)$. Dok sama Gausova eliminacija ima složenosti $O(n^3)$. Postupak može se ubrzavati preskočenjem množenje prilikom nultih elemenata, ovo može da uštedi mnogo vreme u proračunu prilikom radu na jako retkoj matrici kao matrični reprezent jednog elektroenergetskog sistema. Međutim važno je znati da nekadašnji nulti elementi gornje trougaone matrice u toku Gauss-ove redukcije mogu da postaje ne-nulte. Ove elemente se zovu novogenerisanim elementima [4].

Jedno rešenje problema sa Gauss-ovom eliminacijom je rešenje identičnih sistema pokazano u delu (2.1), međutem specifično za problem Ward-ovog ekvivalenta postoji drugo rešenje, naime eliminacija veze između spoljašnjeg sistema a i graničnih čvorova. Sistem interkonektivnih sistema pre Gauss-ove eliminacije je opisana izrazom (1.1)

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_s \\ \hat{I}_g \\ \hat{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{ss} & \hat{Y}_{sg} & 0 \\ \hat{Y}_{gs} & \hat{Y}_{gg} & \hat{Y}_{gi} \\ 0 & \hat{Y}_{ig} & \hat{Y}_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{V}_g \\ \hat{V}_i \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Ali algoritam može se vršiti dok gornji levi sistem neće smanjiti na ekvivalentnom sistemom jednčaina dimenzija *gxg*. Taj sistem praktično daje Ward-ov ekvivalent opisano relacijom (1.2)

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_s^{'} \\ \hat{I}_g^{'} \\ \hat{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{ss}^{'} & \hat{Y}_{sg}^{'} & 0 \\ 0 & \hat{Y}_{gg}^{'} & \hat{Y}_{gi} \\ 0 & \hat{Y}_{ig} & \hat{Y}_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{V}_g \\ \hat{V}_i \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Dobijena matrica $Y_{gg}^{'}$ je simetrična i na osnovu njega može se rekonstruisati električno kolo ekvivalenta. Prednost ovog pristupa je u tome da se preskoči rešenje unazad čim može se uštediti značajno vreme. Dalji prednost je da sistem nije neophodno rešiti do kraja, nego može se prestati kod dobijenje matrice graničnih čvorova. Međutim, mana je da ovakvu eliminaciju je potrebno izvršiti na sistemu veličine $(s+g)\times(s+g)$ dok inverzija matrice ili rešenje problema sa četiri korakom pokazano u delu (2.1) reše sistem od s jednačina i s nepoznatih veličina. Ova razlika između dimenzije problema može da se rezultuje neefikasnost ovog pristupa u odnosu ostalih drugih, ako s (broj čvorova spoljašnjeg sistema) ili g (postaju jako velike).

3. Realizacija programa

Program za rešenje proračuna Ward-ovog ekvivalenta je kreirana pomoću programskog jezika C++.

Program očitava parametri mreže i struje injektiranja iz odgovarajućeg fajlova, ulazni model je dat u obliku jednačine (1.1). Izračuna ekvivalent i vrati ga u obliku (1.4) u izlaznim fajlovima. Jednu ulaznu jedinicu čine 2 fajla:

1. Opisuje matricu Y_{bus} interkonektivnog sistema
2. Opisuje vektor kompleksne struje injektiranja J_{inj} interkonektivnog sistema.

Izlaz programa čine slični parovi fajlove za svaki solver Ward-ovog ekvivalenta koji opisuju redukovan sistem.

Zbog jednostavnosti matrica Y_{bus} čine samo reaktanse vodova dok omski otpornosti su zanemarljeni. Međutim, ovo je relativno realna aproksimacija kod prenosnih sistema, jer prenosni vodovi imaju mnogo veće reaktanse u odnosu njihovih omskih otpora. Zbog ovo zanemarenje često koriste prilikom praktične realizacije proračuna tokova snaga prenosnih sistema.

Smisao Ward-ova ekvivalenta je smanjenje dimenzije matematičkog modela elektroenergetskog sistema za komplikovane proračune. To znači, da redukciju vrši pre poznavanja celokupnog režima EES-a, odnosno pre proračuna tokova snaga. Ovo postavlja problemu da u sistemu se javlja jedan balansni čvor gde injektirane struje nisu poznate.

Tretman balansnog čvora u ovom slučaju zavisi od toga, gde se nalazi taj čvor.

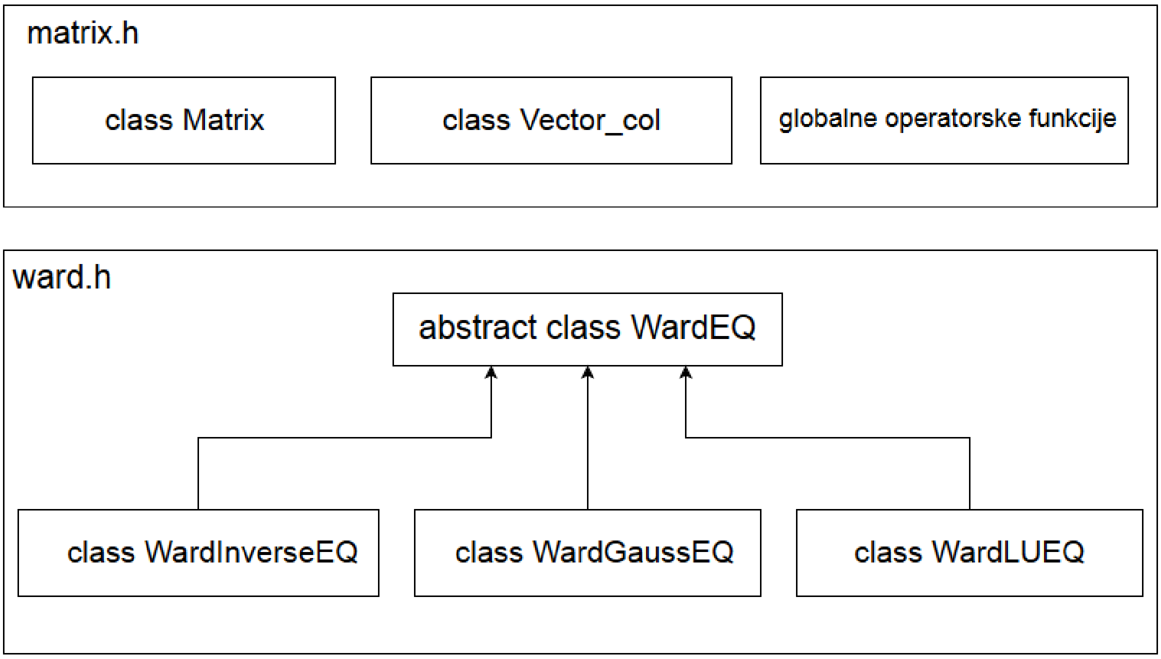
Ako balansni čvor je deo unutrašnjeg sistema ili jedan od graničnih čvorova, onda taj čvor ne utiče na struje injektiranja drugih čvorova ni pre ni posle redukcije. U ulaznom se reprezentuju oznakom upitnika(?). Injektiranje tog čvora ni posle ne sme da bude poznata zato i u izlaznom fajlu mora da se javlja jedan (?) za odgovarajući čvor. Međutim, ovo je lako rešiti programski.

U slučaju kada balansni čvor je deo spoljašnjeg sistema sledi se da zbog redukcije sistema balansni čvor će uticati na struju injektiranja svih graničnih čvorova. Ovako se narušava efikasnost matematičkog modela redukovanog sistema i problem bi prouzrokovao značajne komplikacije u programskom realizaciji. Rešenje ovog pitanja je van razmatranja ovog projekta, međutim prema nekih članaka ovaj problem se rešavaju izborom drugog balansnog čvora.

U razmatranjima ovog projekta balansni čvor sistema je deo unutrašnjeg ili graničnog kola.

3.1. Struktura programa

Program solution čine pet fajla izvornog koda koje može se deliti u tri logičkom modulu. Ovi moduli su modul klase matrice i vektora (čine ga matrix.h i matrix.cpp), modul klasa solvera i redukovanih modela (ward.h i ward.cpp), i modul glavnog programa (main.cpp). Organizacija klasa unutar pojedinih zaglavlja je pokazana na slici 3.1



Slika 3.1 – Organizacija klasa unutar zaglavlja

Klase *Vector_col* i *Matrix* čine osnovnih operanada programa, oba klasa sadrži privatan član u vidu komplexnog niza (tipa complex<double>) koji sadrži telo matrica ili vektora. Postavlja se mogućnost očitavanja i promena pojedinih elemenata tela ali ne može se pristupati adresu samog tela ni direktno uticati na alocirano mesto niza. Zbog spoljašnjeg korišćenja MKL funkcija na telu matrice postoji mogućnost kopiranja celog tela u nizu ili setovanja tela na osnovu niza (ali nizovi moraju da imaju iste veličine kao telo matrice).

Funkcije za getovanja i setovanja tela klasa i dodatne članove podataka su realizovani isključivo kao inline funkcije zbog ubrzavanja pristupa člana prilikom pokretanje programa. Unutar inline funkcije se nalazi naredba bazirano na adresnu aritmetiku, jer ovakav pristup brži od indeksiranja elemenata.

Osim neke specifične funkcije klase *Vector_col* i *Matrix* imaju sličnu strukturu u smislu organizacije polja i funkcija članica. Glavna razlika među njim je da vektorske funkcije su optimizirane za jednodimenzione vektore i nude mogućnost pristupa elemenata samo sa jednom indeksom. Druga razlika je da unutar klase matrice definisana je mogućnost izvršenje inverzije, koja operacija je definisana samo u slučaju kada matrica je kvadratna.

Zbog fleksibilnosti korišćenje memorijskog prostora telo matrica i vektora se alocira dinamičko pomoću konstruktora. Zbog toga je potrebno adekvatno definisanje konstruktora kopije i podrazumevanog konstruktora. Međutim željeni način kreiranja novog objekta se dešava preko fajla u slučaju obe klase. Ovi konstruktori nude mogućnost očitavanja matrice ili vektora od fajlova koji imaju određenu strukturu, i pomoću koordinata tačke nude mogućnost očitavanja samo submatrice Y_{bus}-a sa ciljem kreiranja objekata podsistema.

Nad klasama *Vector_col* i *Matrix* su definisani sledeće operatorske funkcije:

- Operator dodele zbog jednostavnog kopiranja sadržaja vektora i matrice
- Operatori sabiranja i oduzimanja vektora ili matrice
- Operator množenje dva matrica
- Operator množenje matrice sa vektorom
- Operator indeksiranja vektora
- Operator ispisa matrice i vektora (u fajlu ili na ekranu)

Osim operatora dodele i indeksiranja sve operatorske funkcije su realizovane kao globalne. Operatori množenje koristi funkcije iz MKL biblioteke[3]:

- **cblas_zgemv** – funkcija za množenje matrica i vektora
- **cblas_zgemm** – funkcija za množenje matrice sa matricom

Inverziju matrice radi jedan poseban metod bazirano na funkciju **LAPACKE_zgetri** koji takođe član MKL biblioteke i izvrši inverziju matrice koji je prethodno bila LU faktorizovana sa funkcijom **LAPACKE_zgetrf.**

Zaglavlja ward.h nudi tri načina rešenje problema Ward-ovog ekvivalenta bazirana na tri solvera. Te klase u toku rada programa sklađuju orignalnu matricu mreže kao i matricu redukovane mreže na takvom načinu koji najbolje odgovara za njihove proračune. Tri mogući načini rešenje problema jesu:

- Proračun ekvivalenta pomoću formule (1.3), naime inverzijom matrice Y_{ss}
- Dobijanje sistema pomoću Gauss-ove redukcije objašnjeno u delu (2.2)
- Rešenje sistema linearnih jednačina pomoću LU faktorizacije objašnjeno u delu (2.1)

Sve te klase su izvedene iz abstraktne klase *WardEQ*. Na ovakav način može se obezbediti okretanja svakog solvera pomoću pokazivača tipa *WardEQ**. Dodatno u abstraktnu klasu može se specificirati sve zajedničke osobine opšte konstruktore svih izvedenih klasa. Pored zajedničkog polja osnovne klase sve izvedene klase imaju svoje polju za sklađenje Ward-ovog ekvivalenta. Jednu metodu za rešenje (solver) i jednu metodu za ispis podataka u izlazni fajl.

Svi solveri imaju povratne vrednosti tipa double za praćenje potrebno vreme izvršenja algoritma. Važno je napomenuti da u merenju potrebnog procesorskog vremena pojedinih algoritma praćeni su samo delovi koji su neophodni za proračun Ward-ovog ekvivalenta. Dok kopiranje matrice u nizu i slične dodatne operacije nisu uključeni u ovom procesu.

Klasa *WardInverseEQ* sadrži svi devet podmatrice uključujući i Y_{si} i Y_{is} sa ciljem provera da li datim parametrima može se kreirati ekvivalentnu šemu mreže i sve tri vektora. **Solve()** metod u ovom slučaju koristi matrične operacije i inverziju matrice za rešenje problema, međutim inverziju se vrši samo jednom jer kod obe slučaja treba se invertovati matricu Y_{ss}.

Klasa *WardGaussEQ* matrice Y_{ss}, Y_{sg}, Y_{gs} i Y_{gg} sklađuje u jednom velikom matricu kao i J_s i J_g u jednom zajedničkom vektoru na koju će vršiti Gauss-ovu eleiminaciju. Kao rezultat sačuvaće $Y_{gg}^{'}$ i $J_g^{'}$.

Klasa *WardLUEQ* čuva matrice i vektora na isti način kao *WardInverseEQ*. Ali sistem se rešava pomoću LU faktorizacije i rešenjem unazad i unapred preko četiri koraka dela (2.1). Za faktorizaciju koristi funkciju **LAPACKE_zgetrf,** a za rešenje **LAPACKE_zgetrs.** Dok, matrice se množi pomoću definisanih operacija u klasu *Matrix*.

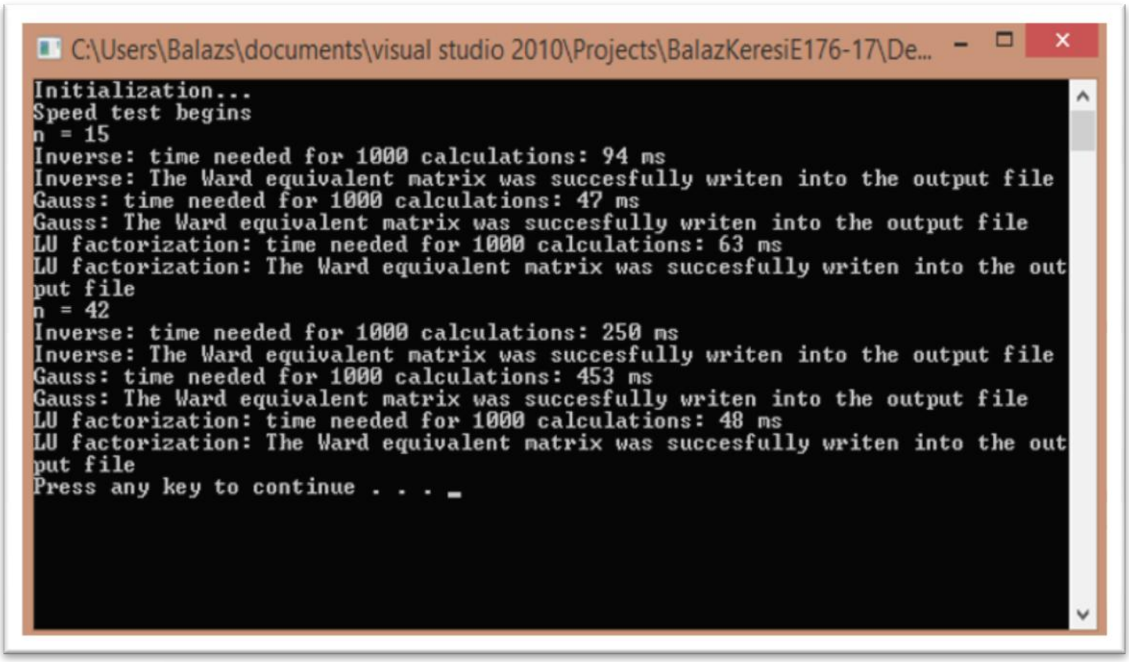
Unutar klase *WardEQ* je definisana funkcija za određivanje dimenzije matrice interkonektivnog sistema dok mesto matrice graničnih čvorova je potrebno definisati spolje i poslati objektu preko konstruktora. Objekate Ward-ovog ekvivalenta može se kreirati samo preko fajla ili preko kopiranje već postojećih objekta. Ne postoji drugi način.

3.2. Glavni program

Glavnom programu su dati parametri fajlova za inicijalizaciju objekata koji računaju Ward-ov ekvivalent. Objekti su sačuvani pomoću niza pokazivača *WardEQ**. Ovako može se kreirati različite objekte unutar iste strukture.

Program se 3 objekata od fajlova jednog sistema sa 15 čvorom i 3 objekata od fajlova jednog sistema sa 43 čvorom. Te trojke objekata su *WardInverseEQ*, *WardGaussEQ* i *WardLUEQ*.

U nastavku program se vrši merenje brzina 1000 ponavljanja svakih od ovih tri metoda na dva sistemu. Posle merenja rezultati su ispisani u izlaznim datotecima.



Slika 3.2 – Output programa

4. REZULTATI ANALIZE

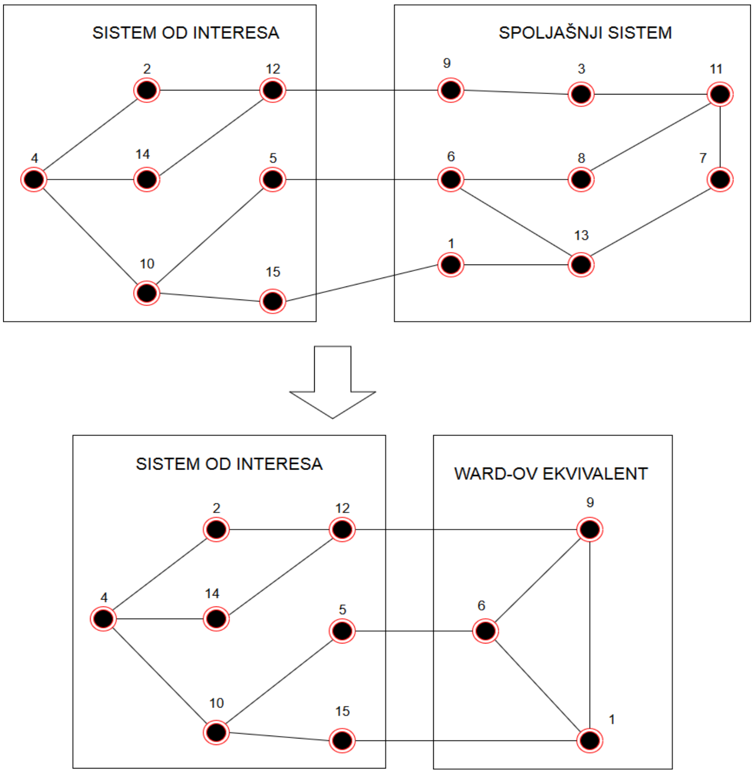
4.1. Opis sistema i način redukcije

Za testovanju programa su kreirani dva podsistemi, koje zbog nedostatka blojeg imena se zovu Sistemu 1 i Sistemu 2.

Sistem 1 se sastoji od 15 čvorova od koje 8 čvor pripada u sklopu spoljašnog sistema i 3 od njih je naglašena graničnim čvorom, ostali čvorovi su delovi unutrašnjeg sistema. Sistem 2 ima 43 čvorova od kojih 24 čvorovi su delovi spoljašnjeg sistema i 3 od njih će biti granični čvorovi, dok unutrašnji sistem čine 21 čvor. Deo 4.1.1. opisuje detalje o Sistemu 1 kao deo 4.1.2. o Sistemu 2.

U fajlovima ulaznih podataka injektirane struje su reprezentovane realnim i imaginarnim delovima kompleksnih veličina, dok admitanse samo imaginarnim delovima dok realni delovi su zanemareni. Realni deo potrošene struje imaju negativne preznake, dok proizvedene pozitivne. Originalno kolo ne sadrži otočne elemente.

4.1.1 Sistem 1



Slika 4.1 – Šema pretvaranja sistema 1

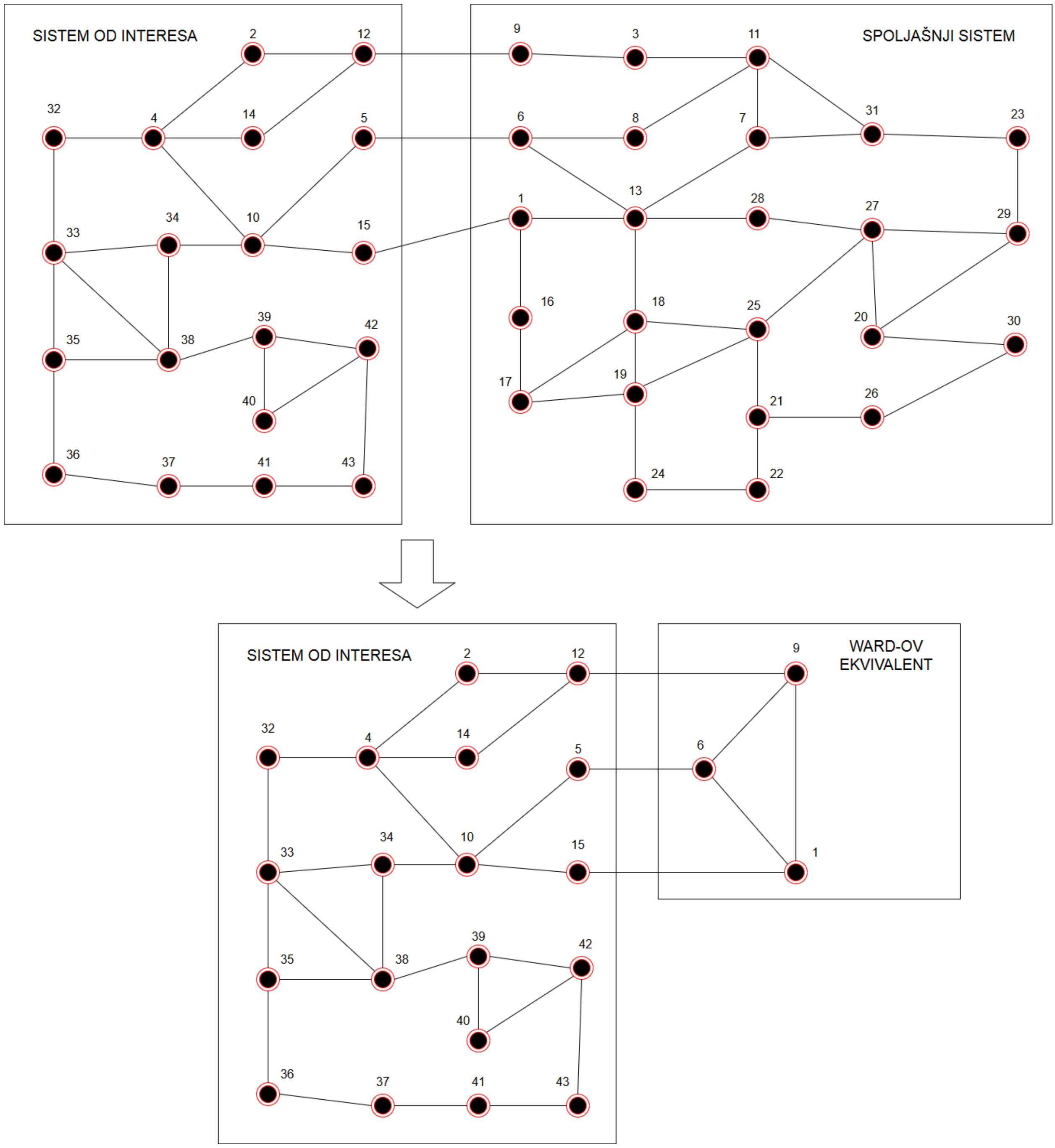
Tablea 4.1 – Struje injektiranja sistema 1

Broj čvora	Realni vrednost struje [A]	Imaginarni vrednost struje [A]
1	?	?
2	-80	30
3	0	0
4	180	-70
5	-30	10
6	0	0
7	150	-60
8	0	0
9	-50	20
10	-60	20
11	140	-60
12	-50	20
13	-80	30
14	-80	30
15	-50	20

Tabela 4.2 – Reaktansa grana sistema 1

Broj prvog čvora	Broj drugog čvora	Imaginarni vrednost admitansa [S]
1	13	30
1	15	30
2	4	10
2	12	20
3	9	10
3	11	40
4	10	50
4	14	20
5	6	10
5	10	30
6	8	20
6	13	40
7	11	40
7	13	50
8	11	20
9	12	20
10	15	40
12	14	10

4.1.2 Sistem 2



Slika 4.2 – Šema pretvaranja sistema 2

Tabela 4.3 – Struje injektiranja sistema 2 (1-37)

Broj čvora	Realni vrednost struje [A]	Imaginarni vrednost struje [A]
1	?	?
2	-80	30
3	0	0
4	180	-70
5	-30	10
6	0	0
7	150	-60
8	0	0
9	-50	20
10	-60	20
11	140	-60
12	-50	20
13	-80	30
14	-80	30
15	-50	20
16	-20	30
17	-40	10
18	130	-10
19	-40	20
20	0	0
21	-10	40
22	-60	0
23	20	-30
24	0	20
25	-80	10
26	0	0
27	0	10
28	0	0
29	0	0
30	-60	0
31	60	-10
32	-40	40
33	-30	20
34	-80	20
35	-10	30
36	-90	30
37	0	20

Tabela 4.4 – Struje injektiranja čvorova sistema 2 (38-43)

Broj čvora	Realni vrednost struje [A]	Imaginarni vrednost struje [A]
38	-30	10
39	0	0
40	0	40
41	-30	20
42	-60	0
43	-60	0

Tabela 4.5 Reaktansi grana sistema 2 (1-13)-(17-19)

Broj prvog čvora	Broj drugog čvora	Imaginarni vrednost rednost admitansa [S]
1	13	30
1	15	30
1	16	20
2	4	10
2	12	20
3	9	10
3	11	40
4	10	50
4	14	20
4	32	60
5	6	10
5	10	30
6	8	20
6	13	40
7	11	40
7	13	50
7	31	70
8	11	60
9	12	20
10	15	40
10	34	70
11	31	70
12	14	10
13	18	60
13	28	40
16	17	70
17	18	70
17	19	60

Tabela 4.6 – Reaktanse grana sistema 2 (18-19)-(42-43)

Broj prvog čvora	Broj drugog čvora	Imaginarni vrednost reaktansa [S]
18	19	40
18	25	30
19	24	10
19	25	60
20	27	70
20	29	10
20	30	60
21	22	70
21	25	70
21	26	10
22	24	20
23	29	70
23	31	10
25	27	50
26	30	50
27	28	30
27	29	30
32	33	60
33	34	70
33	35	20
33	38	20
34	38	60
35	36	20
35	38	30
36	37	10
37	41	50
38	39	60
39	40	10
39	42	50
40	42	40
41	43	40
42	43	50

4.1.3. Parametri Ward-ovog ekvivalenta

Prethodnim glavama je objašnjeno da proračun Ward-ovog ekvivalenta se ne menja režim unutrašnjeg sistema. Takođe, poznato je da Ward-ov ekvivalent obuhvata svih uticaja spoljašnjeg sistema. Zbog toga jedini deo matrice admitansi i struje injektiranja jeste submatrica graničnih čvorova i struje injektiranja u graničnim čvorovima. Zbog ovoga u ovom delu su prikazani samo promenjeni parametri graničnih čvorova i granama tih čvorova. (Admitanse grana između graničnih čvorova i čvorova unutrašnjeg sistema ostajuiste u toku redukcije sistema).

Potrebno je napomenuti da svi solveri su dali isto rešenje proračuna, zbog toga u ovom delu su pokazani samo tabele koje odnose na dva sistema i ne treba se kategorizovati rezultata po načinu rešenja. U prilogu 3 su pokazani rezultati tokova snaga na originalnom i redukovanom sistemu zbog cilja upoređenje.

Tablea 4.7 – Struje injektiranja i otočne admitanse ekvivalentne kole - Sistem 1

Čvor	Realni vrednost struje injektiranja [A]	Imaginarni vrednost struje injektiranja [A]	Imaginarni vrednost otočne admitanse [S]
1	?	?	91.049
6	118.3	-50.71	106.71
9	-2.398	-0.06911	18.62

Tablea 4.8 – otočni admitanse grana ekvivalentne kole - Sistem 1

Prvi čvor	Drugi čvor	Admitansa grana [S]
1	6	17.08
1	9	1.659
6	9	4.506

Tablea 4.9 – Struje injektiranja i otočni admitansi ekvivalentne kole - Sistem 2

Čvor	Realni vrednost struje injektiranja [A]	Imaginarni vrednost struje injektiranja [A]	Imaginarni vrednost otočne admitanse
1	?	?	91.049
6	4.395	-1.385	106.71
9	-46.19	18.39	18.62

Tablea 4.10 – otočni admitanse grana ekvivalentne kole - Sistem 2

Prvi čvor	Drugi čvor	Admitansa grana [S]
1	6	2.363
1	9	0.01245
6	9	0.1323

4.2. Upoređenje brzina algoritama

U glavnom programu je smešten jedan niz pokazaivača na objekat tipa *WardEQ* gde su smešteni pokazivači na 6 objekta. 3-3 po mreži i za svaku mrežu su korišćeni različiti solveri za rešenje zadatka.

Ciklusima je kontrolisan tok proračuna. Svaki solver je okrenut 1000 puta. Algoritam vraća potrebno procesorsko vreme kao povratni vrednost, koji praktično izraženo u milisekundima. Ovako može se uraditi upoređenje rezultata.

Tabela 4.11 – Potrebno vreme za 1000 ponavljanje proračuna po algoritmu – Sistem 1 (n=15)

Algoritam	Potrebno vreme za proračun [ms]
Algoritam sa inverzijom	94
Algoritam sa Gauss-ovom eliminacijom	46
Algoritam sa LU faktoritzacijom	32

Posle testa na prvom sistemu rezultati pokazuju da bilo proračun sa Gauss-ovom eliminacijom, bilo sa LU faktorizacijom brže dobije rešenje od inverzije matrice. LU faktorizacija je otprilike tri puta brže od inverzije i to se vidi i na rezultatima

Tabela 4.12 – Potrebno vreme za 1000 ponavljanje proračuna po algoritmu – Sistem 2 (n=43)

Algoritam	Potrebno vreme za proračun [ms]
Algoritam sa inverzijom	250
Algoritam sa Gauss-ovom eliminacijom	453
Algoritam sa LU faktoritzacijom	93

Na velikom sistemu opet se može primetiti slične razlike između LU faktorizacije i inverzije matrica. Šta je različita je jako dugo trajanje proračuna sa Gauss-ovom eliminacijom. U teorijskom delu je objašnjeno da Gauss-ova eliminacija rešava sistem sa većem dimenzijom sa graničnim čvorovima u odnosu ostalog drugog. Prilikom proračuna na sistemu sa veće dimenzije ova činjenica se čini velike prekpreke ispred ovog algoritma zbog toga to je manje efikasan na velikim sistemima.

Pored ovoga potrebno je napomenuti da algoritam na Gauss-ovu eleiminaciju nije deo MKL biblioteke i možda ne uključuje sve optimalizacije koje ostali algoritmi mogu da imaju.

ZAKLJUČAK

U okviru ovog projekta je objašnjen značaj metodologije za ekvivalentiranju prenosne mreže i pokazano je način kreiranja Ward-ovog ekvivalenta mreže u obliku modela nezavisnih potencijala.

Metodologija za kreiranje Ward-ovog ekvivalenta zahteva inverziju jedne matrice ili alternativno rešenje jednog sistema linearne jednačine. Objašnjeno je zašto nije efikasno korišćenja inverzije matrice i pokazani su metodologije LU faktorizacije ili Gauss-ove eliminacije kao moguće alternative.

Rešenje zadatka je realizovana C++ programom koji očitava matricu admitanse i na različitim načinima rešava sistem Ward-ovog ekvivalenta. Metodologije su testirane na sistemu sa 15 čvorom i na 43 čvorom i mereno je potrebno vreme proračuna. Algoritmi za LU faktorizaciju i inverziju matrice su realizovani pomoću funkcije MKL biblioteke, dok Gauss-ova elminacija se realizovana samo za ovu demonstraciju.

Svaki algoritam dao isti vrednost proračuna ekvivalentnog kola obe mreže. Rezultati pokazuju da LU faktorizacija je otprilike tri puta brže od inverzije matricie. Gauss-ova eliminacija se čini bržim od inverzije matrice u slučaju malog sistema ali sporijim od LU faktorizacije.

Povećanjem dimenzije sistema Gauss-ova eliminacija postaje mnogo sporije u odnosu drugih metoda. Razlog ovoga je veća dimenzija proračuna sa Gauss-ovom metodom, i to da taj solver nije optimiziran u tolikoj meri kao specijalne funkcije MKL biblioteke.

Na osnovu rezultata može se zaključiti da ako se može bolje izbegavati inverziju matrice i koristit alternativnu metodologiju. LU faktorizacija je efikasan način rešenje sistema linearnih jednačina i da najčešće bolje koristiti profesionalne solvere umesto pisati jedno.

LITERATURA

[1] https://www.johndcook.com/blog/2010/01/19/dont-invert-that-matrix/

[2]https://www.youtube.com/watch?v=MqU5tf2VZyM&t=139s&index=8&list=PLsuJCpwOZxZylmjdPhQlgD4xBocdmRVd2

[3] Intel Math Kernel Library - developer reference 2018 edition

[4] Vladimir Strezorski – Analiza elektroenergetskih sistema

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination#Finding_the_inverse_of_a_matrix

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_mathematical_operations

[7] Don Coppersmith, Shamuel Winograd, *Matrix multiplication wia arithmetic progression*, 1990

[8] Di Shi, *Power System Network Reduction for Engineering and Economic Analysis*, 2012

PRILOG 1 – Ime i sadržaj ulaznih i izlaznih fajlova

Tabela P1.1 – Ulazni i izlazni fajlovi

Ime fajla	Sadržaj
Ybus.txt	Matrica admitansa originalnog sistema (Sistem 1)
Ybigbus.txt	Matrica admitansa originalnog sistema (Sistem 2)
Jinj.txt	Vektor struje injektiranja ulaznog sistema (Sistem 1)
Jbiginj.txt	Vektor struje injektiranja ulaznog sistema (Sistem 1)
Ybus_Ward_wGauss.txt	Matrica admitansa redukovanog sistema dobijena Gauss-ovom eliminacijom (Sistem 1)
Ybus_Ward_wInverse.txt	Matrica admitansa redukovanog sistema dobijena inverzijom matrice (Sistem 1)
Ybus_Ward_wLUfactorization.txt	Matrica admitansa redukovanog sistema dobijena LU faktorizacijom (Sistem 1)
Ybigbus_Ward_wGauss.txt	Matrica admitansa redukovanog sistema dobijena Gauss-ovom eliminacijom (Sistem 2)
Ybigbus_Ward_wInverse.txt	Matrica admitansa redukovanog sistema dobijena inverzijom matrice (Sistem 2)
Ybigbus_Ward_wLUfactorization.txt	Matrica admitansa redukovanog sistema dobijena LU faktorizacijom (Sistem 2)
Jinj_Ward_wGauss.txt	Vektor struja injektiranja redukovanog sistema dobijena Gauss-ovom eliminacijom (Sistem 1)
Jinj_Ward_wInverse.txt	Vektor struja injektiranja redukovanog sistema dobijena inverzijom matrice (Sistem 1)
Jinj_Ward_wLUfactorization.txt	Vektor struje injektiranja redukovanog sistema dobijena LU faktorizacijom (Sistem 1)
Jbiginj_Ward_wGauss.txt	Vektor struja injektiranja redukovanog sistema dobijena Gauss-ovom eliminacijom (Sistem 2)
Jbiginj_Ward_wInverse.txt	Vektor struja injektiranja redukovanog sistema dobijena inverzijom matrice (Sistem 2)
Jbiginj_Ward_wLUfactorization.txt	Vektor struje injektiranja redukovanog sistema dobijena LU faktorizacijom (Sistem 2)
Ybus_MATLAB.m	Sadrži MATLAB skript generisano sa strane programa koji reši tokove snaga (Sistem 1)
Ybigbus_MATLAB.m	Sadrži MATLAB skript generisano sa strane programa koji reši tokove snaga (Sistem 2)

PRILOG 2 – Rezultati proračuna tokova snaga

Tabela P2.1 - Naponi čvorova originalnog i redukovanog sistema – Sistem 1

Čvor	Moduo napona originalnog kola [V]	Ugao napona originalnog kola [rad]	Moduo napona redukovanog kola [V]	Ugao napona originalnog kola [rad]	Greška napona [r.j.]	Greška uglova [rad]
1	110	0	110	0	0	0
6	102.79	2.1516e-02	102.79	2.1516e-02	1.3359e-6	-1.0587e-7
9	162.09	-5.0232e-02	162.09	-5.0232e-02	3.0404e-6	-1.3820e-9
2	188.94	-6.2950e-02	188.93	-6.2950e-02	2.1738e-6	2.6317e-8
4	209.75	-2.6729e-02	209.75	-2.6729e-02	1.6968e-6	-4.1176e-8
5	58.717	-2.0041e-02	58.717	-2.0041e-02	1.4020e-6	-4.7363e-8
10	133.11	-2.9440e-02	133.11	-2.9440e-02	1.4400e-6	-3.1217e-8
12	179.84	-6.1346e-02	179.84	-6.1346e-02	2.4359e-6	2.5725e-8
14	198.88	-5.0702e-02	198.87	-5.0702e-02	1.9278e-6	-4.049e-10
15	122.92	-2.4028e-02	122.92	-2.4028e-02	8.9095e-7	-2.4139e-8

Tabela P2.2 - Naponi čvorova originalnog i redukovanog sistema – Sistem 2

Čvor	Moduo napona originalnog kola [V]	Ugao napona originalnog kola [rad]	Moduo napona redukovanog kola [V]	Ugao napona redukovanog kola [rad]	Greška napona [r.j.]	Greška uglova [rad]
1	110	0	110	0	0	0
6	13.077	8.0819e-03	13.077	8.0819e-03	8.3943e-07	1.5136e-08
9	2.6267	-1.9852e+00	2.6267	-1.9852e+00	1.5574e-07	1.6097e-07
2	1.5723	-2.6527e+00	1.5723	-2.6527e+00	8.6827e-10	1.2709e-08
4	0.62149	6.0557e-01	0.62149	6.0557e-01	3.5590e-09	-4.5795e-09
5	0.098856	-3.0684e-01	0.098856	-3.0684e-01	3.0281e-07	1.0459e-07
10	0.25285	-8.2682e-02	0.25285	-8.2682e-02	7.0479e-09	6.8748e-10
12	0.54726	-2.1228e+00	0.54726	-2.1228e+00	2.9803e-08	4.1142e-08
14	0.87403	-1.8478e+00	0.87403	-1.8478e+00	5.6623e-09	5.5579e-09
15	0.70381	-1.7429e-02	0.70381	-1.7429e-02	2.2963e-10	7.3464e-12
32	0.35033	-1.5672e+00	0.35033	-1.5672e+00	3.7041e-09	1.3653e-08
33	0.15648	-1.5322e+00	0.15648	-1.5322e+00	4.4043e-10	5.0882e-09
34	0.21257	-5.7614e-01	0.21257	-5.7614e-01	5.8117e-09	3.8753e-09
35	1.3033	-2.1964e+00	1.3033	-2.1964e+00	-5.7782e-10	8.7256e-10
36	0.20033	-1.9982e+00	0.20033	-1.9982e+00	-5.4839e-11	1.3465e-10
37	0.32939	-2.4756e+00	0.32939	-2.4756e+00	-5.8359e-11	4.9795e-11
38	1.7096	-1.6615e+00	1.7096	-1.6615e+00	-2.2611e-10	2.4832e-09
39	0.37444	-2.1182e+00	0.37444	-2.1182e+00	-5.7621e-10	9.4526e-10
40	2.0311	-2.5874e+00	2.0311	-2.5874e+00	-1.3279e-10	8.2186e-11
41	0.74706	-2.0081e+00	0.74706	-2.0081e+00	-3.8111e-12	8.7801e-12
42	1.2262	-1.7290e+00	1.2262	-1.7290e+00	-5.8586e-12	3.6840e-11
43	6.5989	-1.7064e+00	6.5989	-1.7064e+00	-1.1796e-12	9.1613e-12

VAŽNA NAPOMENA: Obe sistemi su generisani korišćenjem generatora slučajnih brojeva. To je razlog toga da naponi i struje rezultata ne liču naponima i struje jednog realnog prenosnog sistema. Međutim, cilj ovog projekta je bila generisanja ekvivalenta jednog sistema. Znajući ovo, najvažnija osobina je da rezulati redukovanog sistema liču rezultatima originalnog.