

Transformacje Kanoniczna, funkcje Tworząca i równanie Hamiltona-Jacobiego

Insert subtitle

Jakub Mazur

Jagiellonian University

jakub.michal.mazur@student.uj.edu.pl

29 listopada 2025



Podstawowe pytanie: "Skąd brać transformacje kanoniczne?"
Jest jeden sposób...

W całości prezentacji q , p , Q oraz P to (co)wektory z \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^{n*} .
Trajektorie fizyczne to ekstremale funkcjonału:

$$(q, p) \mapsto \int_{t_0}^{t_k} p \cdot \dot{q} - H dt$$

te trajektorie, po transformacji kanonicznej, muszą być ekstremalami funkcjonału:

$$(Q, P) \mapsto \int_{t_0}^{t_k} P \cdot \dot{Q} - K dt$$

Oba funkcjonały są równoważne w szczególności jeżeli ich formy różnią się o pochodną jakiejś funkcji F po czasie:

$$(p \cdot \dot{q} - H)dt = (P \cdot \dot{Q} - K)dt + dF$$

Ktoś mógłby zapytać, "funkcją czego dokładnie jest F ?". Poprawnych odpowiedzi jest wiele, najczęstsze przypadki to funkcje od (q, Q, t) , (q, P, t) , (p, Q, t) oraz (p, P, t) .

Dla przykładu, niech $F = F(p, Q, t)$. Wówczas (dodając cichaczem dodatkowy term, który nic nie psuje pinky promise) dostaniemy:

$$dF = p \cdot dq - P \cdot dQ + (K - H)dt$$

Stąd dostajemy następujące zależności:

- $p = \frac{\partial F}{\partial q},$
- $P = -\frac{\partial F}{\partial Q},$
- $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$

Przykład:

Rozważmy tradycyjnie układ oscylatora harmonicznego:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

i funkcję tworzącą:

$$F(p, Q) = \frac{1}{2}p^2 \operatorname{ctg} Q$$

wówczas dostajemy zależności:

$$q = -p \operatorname{ctg} Q \qquad P = \frac{1}{2}p^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

które możemy uprościć do...

$$\frac{1}{2}p^2 = P \sin^2 Q \quad \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}p^2 \frac{\cos^2 Q}{\sin^2 Q} = P \cos^2 Q$$

I wsadzając te termy do Hamiltonianu otrzymujemy:

$$K(Q, P, t) = P$$

I dostajemy nasze klasyczne zmienne kąt-działanie.

Transformacje kanoniczne pochodzące z funkcji tworzących mogą posłużyć nam do drastycznego uproszczenia dynamiki. W szczególności można znaleźć taką transformację, że:

$$K(Q, P, t) = 0$$

co natychmiast sprawia, że wszystkie trajektorie są stacjonarne. Mowa tutaj o tzw. równaniu Hamiltona-Jacobiego.

W wielkim skrócie, szukamy funkcji $F(q, P, t)$ takiej, że Kamiltonian będzie się wyrażał zależnością $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$. Jak łatwo policzyć:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P} \quad 0 = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Zatem dostajemy nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe:

$$H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Dla oscylatora harmonicznego z $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ mamy:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Zakładamy, że funkcję F można zapisać jako sumę funkcji o rozdzielonych zmiennych:

$$F(q, P, t) = F_t(t, P) + F_q(q, P)$$

Ponieważ wiemy, że P są stałe, to możemy ich używać jako jakichś parametrów w trakcie rozwiązywania tego równania (więcej szczegółów później).

Używając równania $\partial_t F_t = -H$ i zauważając, że H jest stałe, zatem równe jednemu z parametrów, jaki mamy do dyspozycji, dostajemy:

$$F_t = -Pt$$

Analogicznie rozwiązując dla $\partial_q F_q = p$ dostajemy:

$$F_q = \int_0^q \sqrt{2P - \bar{q}^2} d\bar{q}$$

i natychmiastowo:

$$F = -Pt + \int_0^q \sqrt{2P - \bar{q}^2} d\bar{q}$$

Licząc $Q = \partial_P F$ dostajemy:

$$Q = -t + \arcsin \left(\frac{q}{\sqrt{2P}} \right)$$

i po algebraicznych przekształceniach:

$$q = \sqrt{2P} \sin(Q + t)$$

$$p = \sqrt{2P - q^2} = \sqrt{2P} \cos(Q + t)$$

W ten sposób rozwiązaliśmy zagadnienie oscylatora harmonicznego jedną z najbardziej skomplikowanych metod,

Weźmy trudniejszy przykład, cząstkę w \mathbb{R}^3 w potencjale centralnym:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) + U(r)$$

Zakładając rozdzielone zmienne:

$$F = R(r, P) + \Theta(\theta, P) + \Phi(\phi, P) + T(t, P)$$

Zatem równanie Hamiltona Jacobiego daje nam:

$$T' + \frac{1}{2m} \left(R'^2 + \frac{1}{r^2} \Theta'^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \Phi'^2 \right) + V(r) = 0$$

$$\frac{1}{2m} \left(R'^2 + \frac{1}{r^2} \Theta'^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \Phi'^2 \right) + V(r) = -T'$$

Jak widać, term po prawej zależy wyłącznie od t , zaś term po lewej od t nie zależy, zatem obie strony równania są stałe, co daje $T(t, P) = -tE$ (gdzie E to jeden z nowych "pędów") oraz:

$$\frac{1}{2m} \left(R'^2 + \frac{1}{r^2} \Theta'^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \Phi'^2 \right) + V(r) = E$$

Upraszczając poprzednie równanie:

$$r^2 \sin^2 \theta \cdot R'^2 + \sin^2 \theta \cdot \Theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot 2m(V(r) - E) = -\Phi'^2$$

Znów, część po prawej zależy wyłącznie od ϕ , a część po lewej nie, zatem dostajemy $\Phi = L_z \phi$ (gdzie L_z to kolejny z nowych "pędów") oraz:

$$r^2 \cdot R'^2 + r^2 \cdot 2m(V(r) - E) = -\Theta'^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}$$

Rozwiązując analogicznie jak wcześniej dostajemy:

$$R = \sqrt{2m} \int \sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}} dr \quad \Theta = \int \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} d\theta$$

Oczywiście, największą trudnością jest rozwiązanie równania:

$$H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Należy się zastanowić, czy taka funkcja istnieje zawsze (tj. dla każdego Hamiltonianu).

Wiadomo z analizy matematycznej, że:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

a z poprzednich slajdów, że:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p \quad \frac{\partial F}{\partial P} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -H$$

zatem mamy, że:

$$\dot{F} = p \cdot \dot{q} - H = \mathcal{L}$$

całkując po czasie dostajemy

$$F = \int_{t_0}^{t_k} \mathcal{L} dt = S$$

Czyli ta funkcja tworząca to po prostu działanie.

Referencje:

- <https://astro.pas.rochester.edu/~aquillen/phy411/lecture2.pdf> - można tam znaleźć przyjemne interpretacje geometryczne
- [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_\(Cline\)/15%3A_Advanced_Hamiltonian_Mechanics](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_(Cline)/15%3A_Advanced_Hamiltonian_Mechanics) - zawiera m.in. przykłady HJE dla większych układów niż oscylator harmoniczny