Transformacje Kanonicznowa, funkcje Tworząca i równanie Hamiltona-Jacobiego

Insert subtitle

Jakub Mazur

Jagiellonian University

jakub.michal.mazur@student.uj.edu.pl

27 listopada 2025

Transformacje Kanonicznowa

Podstawowe pytanie: "Skąd brać transformacje kanoniczne?"
Jest jeden sposób…

Trajektorie fizyczne to ekstremale funkcjonału:

$$(q, p) \mapsto \int_{t_0}^{t_k} p \cdot \dot{q} - H dt$$

te trajektorie, po transformacji kanonicznej, muszą być ekstremalami funkcjonału:

$$(Q, P) \mapsto \int_{t_0}^{t_k} P \cdot \dot{Q} - K dt$$

Oba funkcjonały są równoważne w szczególności jeżeli ich formy różnią się o pochodną jakiejś funkcji F po czasie:

$$(\mathrm{p} \cdot \dot{\mathrm{q}} - \mathrm{H})\mathrm{dt} = (\mathrm{P} \cdot \dot{\mathrm{Q}} - \mathrm{K})\mathrm{dt} + \mathrm{dF}$$

Ktoś mógłby zapytać, "funkcją czego dokładnie jest F?". Poprawnych odpowiedzi jest wiele, najczęstsze przypadki to funkcje od $(\mathrm{q}, \mathrm{Q}, \mathrm{t})$, $(\mathrm{q}, \mathrm{P}, \mathrm{t})$, $(\mathrm{p}, \mathrm{Q}, \mathrm{t})$ oraz $(\mathrm{p}, \mathrm{P}, \mathrm{t})$.

Dla przykładu, niech $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathrm{p}, \mathrm{Q}, \mathrm{t})$. Wówczas (dodając cichaczem dodatkowy term, który nic nie psuje pinky promise) dostaniemy:

$$\mathrm{dF} = \mathrm{p} \cdot \mathrm{dq} - \mathrm{P} \cdot \mathrm{dQ} + (\mathrm{K} - \mathrm{H})\mathrm{dt}$$

Stąd dostajemy następujące zależności:

- $\mathrm{p} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{q}}$,
- $\mathrm{P} = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Q}}$,
- $\mathrm{K} = \mathrm{H} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}$.

Przykład:
Rozważmy tradycyjnie układ oscylatora harmonicznego:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

i funkcję tworzącą:

$$F(p, Q) = \frac{1}{2}p^2 \operatorname{ctg} Q$$

wówczas dostajemy zależności:

$$q = -p \operatorname{ctg} Q \qquad P = \frac{1}{2}p^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

które możemy uprościć do...

$$\frac{1}{2}\mathrm{p}^2 = \mathrm{P}\,\mathsf{sin}^2\,\mathrm{Q} \qquad \frac{1}{2}\mathrm{q}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2\frac{\mathsf{cos}^2\,\mathrm{Q}}{\mathsf{sin}^2\,\mathrm{Q}} = \mathrm{P}\,\mathsf{cos}^2\,\mathrm{Q}$$

I wsadzając te termy do Hamiltonianu otrzymujemy:

$$\mathrm{K}(\mathrm{Q},\mathrm{P},\mathrm{t}) = \mathrm{P}$$

I dostajemy nasze klasyczne zmienne kąt-działanie.

Transformacje kanoniczne pochodzące z funkcji tworzących mogą posłużyć nam do drastycznego uproszczenia dynamiki. W szczególności można znaleźć taką transformację, że:

$$\mathrm{K}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}, \mathrm{t}) = 0$$

co natychmiast sprawia, że wszystkie trajektorie są stacjonarne. Mowa tutaj o tzw. równaniu Hamiltona-Jacobiego.

W wielkim skrócie, szukamy funkcji $F(q, P, t)$ takiej, że Kamiltonian będzie się wyrażał zależnością $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$. Jak łatwo policzyć, nowe i stare pędy wyrażają się pochodnymi F:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}$$

Pierwsze n równań, wraz z równaniem H-J $0 = H + \frac{\partial F}{\partial t}$, zadaje układ $n + 1$ równań różniczkowych cząstkowych, gdzie Q są parametrami, a nie prawdziwymi zmiennymi funkcji F. Dla przykładu wykorzystamy oscylator harmoniczny.

Zaczynamy od $\mathrm{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2)$. Zakładamy, że funkcję F można zapisać jako sumę rozdzielonych zmiennych:

$$\mathrm{F}(\mathrm{q}, \mathrm{P}, \mathrm{t}) = \mathrm{F_t}(\mathrm{t}, \mathrm{P}) + \mathrm{F_q}(\mathrm{q}, \mathrm{P})$$

Używając równania $\partial_\mathrm{t} \mathrm{F_t} = -\mathrm{H}$ i zauważając, że H jest stałe, zatem równe jedynemu z parametrów, jaki memy do dyspozycji, dostajemy:

$$\mathrm{F_t} = -\mathrm{Pt}$$

Analogicznie rozwiązując dla $\mathrm{F_q}$ dostajemy:

$$\mathrm{F_q} = \int_0^\mathrm{q} \sqrt{2\mathrm{P} - \overline{\mathrm{q}}^2} \mathrm{d}\overline{\mathrm{q}}$$

i natychmiastowo:

$$\mathrm{F} = -\mathrm{Pt} + \int_0^\mathrm{q} \sqrt{2\mathrm{P} - \overline{\mathrm{q}}^2} \mathrm{d}\overline{\mathrm{q}}$$

Licząc $\mathrm{Q} = \partial_{\mathrm{P}}\mathrm{F}$ dostajemy:

$$\mathrm{Q} = -\mathrm{t} + \arcsin\left(\frac{\mathrm{q}}{\sqrt{2\mathrm{P}}}\right)$$

i po algebraicznych przekształceniach:

$$\mathrm{q} = \sqrt{2\mathrm{P}}\sin\left(\mathrm{Q} + \mathrm{t}\right)$$

$$\mathrm{p} = \sqrt{2\mathrm{P} - \mathrm{q}^2} = \sqrt{2\mathrm{P}}\cos\left(\mathrm{Q} + \mathrm{t}\right)$$

W ten sposób rozwiązaliśmy zagadnienie oscylatora harmonicznego jedną z najbardziej skomplikowanych metod,