Transformacje Kanonicznowa, funkcje Tworząca i równanie Hamiltona-Jacobiego

Insert subtitle

Jakub Mazur

Jagiellonian University

jakub.michal.mazur@student.uj.edu.pl

27 listopada 2025

Podstawowe pytanie: "Skąd brać transformacje kanoniczne?"
Jest jeden sposób...

Trajektorie fizyczne to ekstremale funkcjonału:

$$(\mathrm{q}, \mathrm{p}) \mapsto \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_\mathrm{k}} \mathrm{p} \cdot \dot{\mathrm{q}} - \mathrm{H} \mathrm{d}\mathrm{t}$$

te trajektorie, po transformacji kanonicznej, muszą być ekstremalami funkcjonału:

$$(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) \mapsto \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_\mathrm{k}} \mathrm{P} \cdot \dot{\mathrm{Q}} - \mathrm{K} \mathrm{d}\mathrm{t}$$

Oba funkcjonały są równoważne w szczególności jeżeli ich formy różnią się o pochodną jakiejś funkcji F po czasie:

$$(\mathrm{p} \cdot \dot{\mathrm{q}} - \mathrm{H})\mathrm{dt} = (\mathrm{P} \cdot \dot{\mathrm{Q}} - \mathrm{K})\mathrm{dt} + \mathrm{dF}$$

Ktoś mógłby zapytać, "funkcją czego dokładnie jest F?". Poprawnych odpowiedzi jest wiele, najczęstsze przypadki to funkcje od $(\mathrm{q}, \mathrm{Q}, \mathrm{t})$, $(\mathrm{q}, \mathrm{P}, \mathrm{t})$, $(\mathrm{p}, \mathrm{Q}, \mathrm{t})$ oraz $(\mathrm{p}, \mathrm{P}, \mathrm{t})$.

Dla przykładu, niech $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathrm{p}, \mathrm{Q}, \mathrm{t})$. Wówczas (dodając cichaczem dodatkowy term, który nic nie psuje pinky promise) dostaniemy:

$$\mathrm{dF} = \mathrm{p} \cdot \mathrm{dq} - \mathrm{P} \cdot \mathrm{dQ} + (\mathrm{K} - \mathrm{H})\mathrm{dt}$$

Stąd dostajemy następujące zależności:

- $\mathrm{p} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{q}}$,
- $\mathrm{P} = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Q}}$,
- $\mathrm{K} = \mathrm{H} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}$.

Przykład:
Rozważmy tradycyjnie układ oscylatora harmonicznego:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{q}^2$$

i funkcję tworzącą:

$$\mathrm{F}(\mathrm{p}, \mathrm{Q}) = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 \operatorname{ctg} \mathrm{Q}$$

wówczas dostajemy zależności:

$$\mathrm{q} = -\mathrm{p} \operatorname{ctg} \mathrm{Q} \qquad \mathrm{P} = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 \frac{1}{\sin^2 \mathrm{Q}}$$

które możemy uprościć do...

$$\frac{1}{2}\mathrm{p}^2 = \mathrm{P}\sin^2\mathrm{Q} \qquad \frac{1}{2}\mathrm{q}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2\frac{\cos^2\mathrm{Q}}{\sin^2\mathrm{Q}} = \mathrm{P}\cos^2\mathrm{Q}$$

I wsadzając te termy do Hamiltonianu otrzymujemy:

$$\mathrm{K}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}, \mathrm{t}) = \mathrm{P}$$

I dostajemy nasze klasyczne zmienne kąt-działanie.

Transformacje kanoniczne pochodzące z funkcji tworzących mogą posłużyć nam do drastycznego uproszczenia dynamiki. W szczególności można znaleźć taką transformację, że:

$$\mathrm{K}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}, \mathrm{t}) = 0$$

co natychmiast sprawia, że wszystkie trajektorie są stacjonarne. Mowa tutaj o tzw. równaniu Hamiltona-Jacobiego.

Równanie Hamiltona-Jacobiego, wraz z