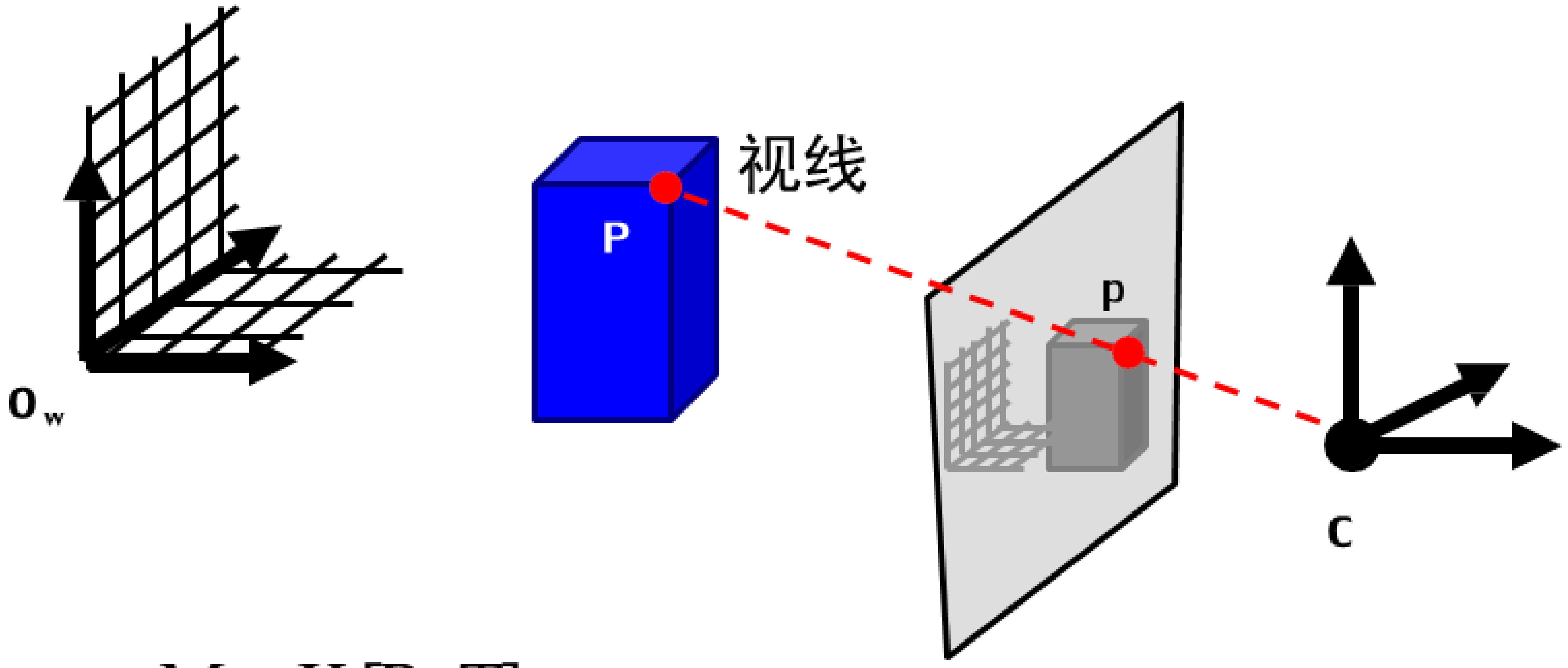
# 3. 单视图测量

- 2D变换
- 影消点与影消线
- 单视图重构

# 相机标定后…




$$M = K[R \quad T]$$

- 内部参数 K 已知，外部参数[R T] 已知
- 是否可以根据单个图像的测量值 p 去估算 P ?

  答案：一般情况不能。P可以位于C和p定义的直线上的任何位置。

# 从单张图像恢复场景结构

http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/projects/SingleView/models/hut/hutme.wrl

# 2D变换

- 等距变换
- 相似变换
- 仿射变换
- 射影变换

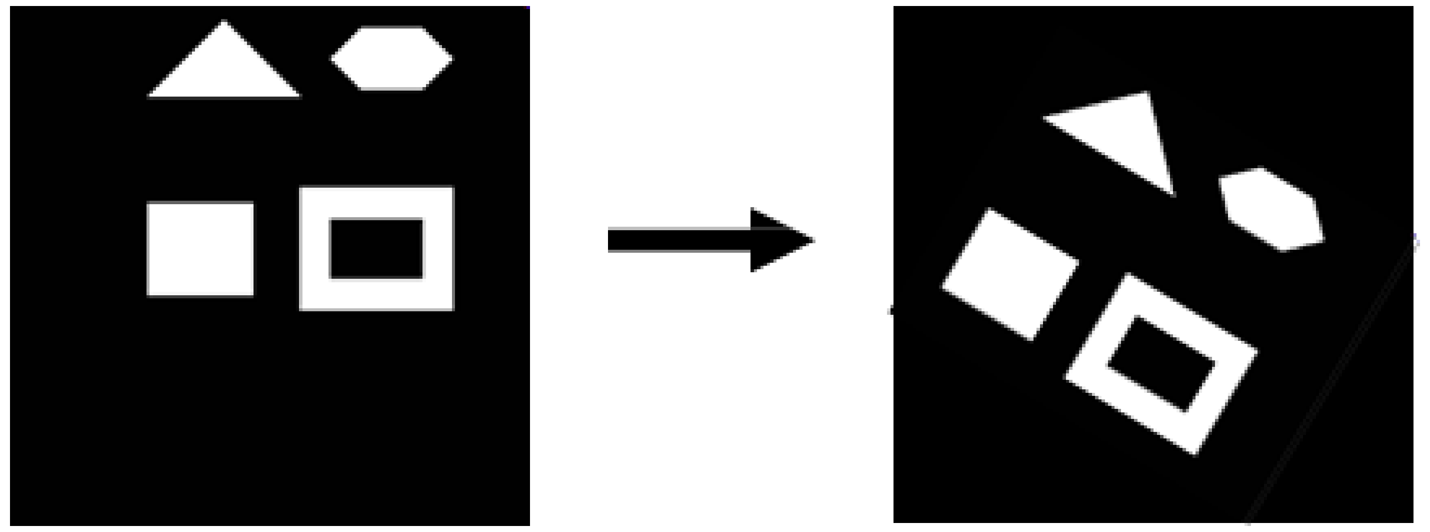
# 2D变换

等距变换:

[欧式变换]

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = H_e \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

-保留长度（面积）
-3 DOF
-刚性物体的运动



# 2D变换

相似变换：

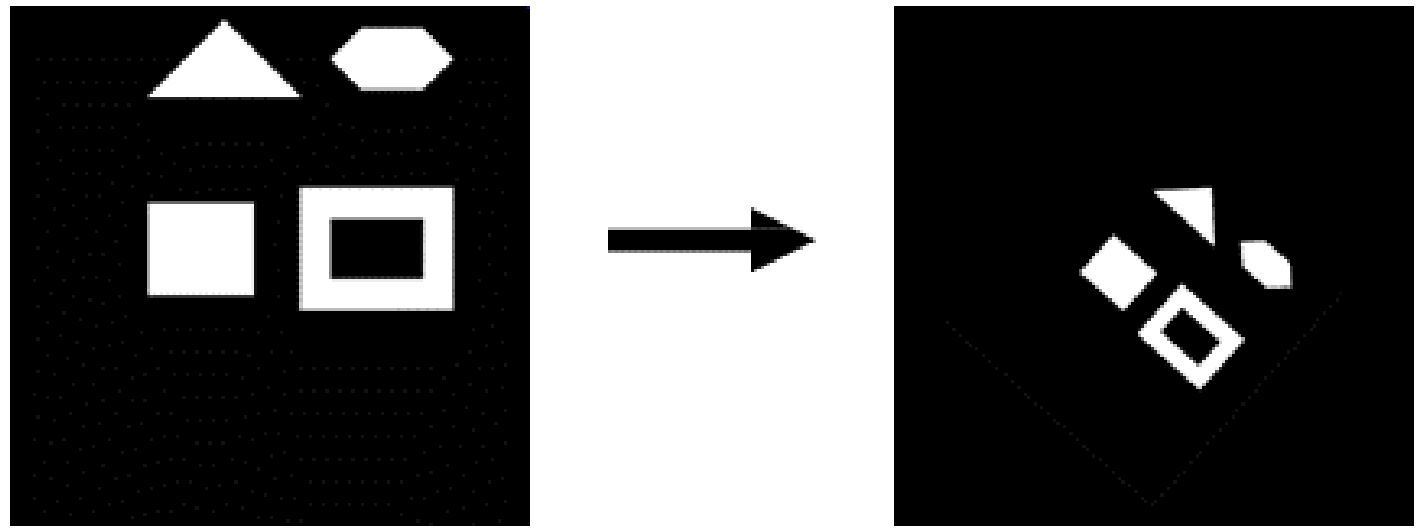
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SR & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = H_s \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

-不变量

  -长度的比值

  -角度

-4 DOF

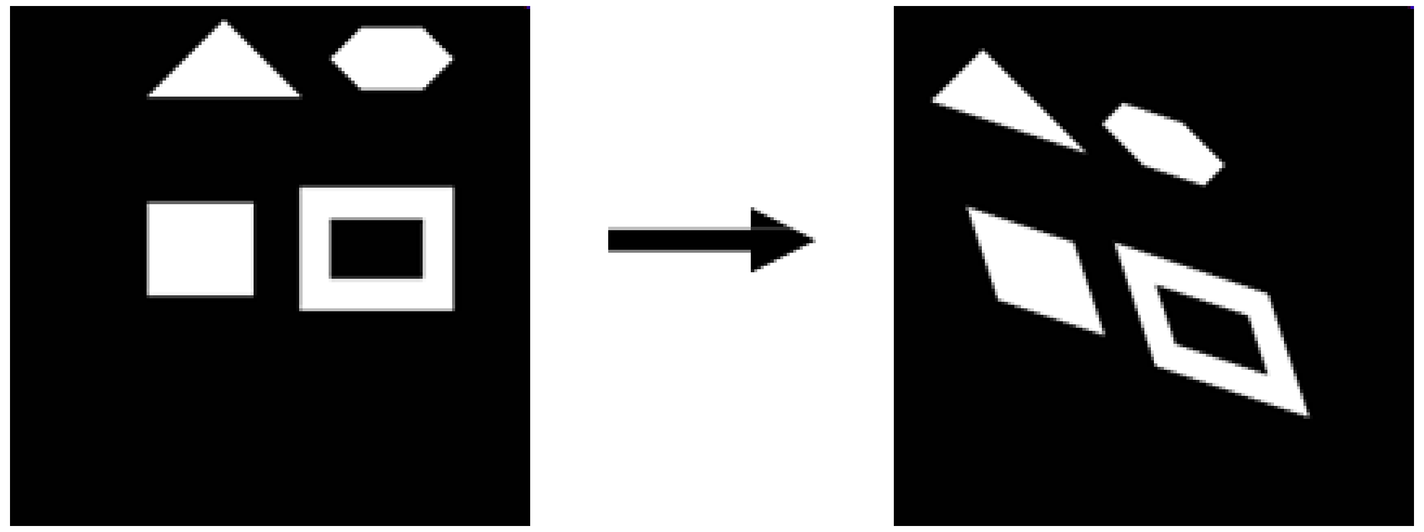


# 2D变换

仿射变换：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = H_a \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

-不变量：
 -平行线
 -面积比值
 -其他…
- 6 DOF

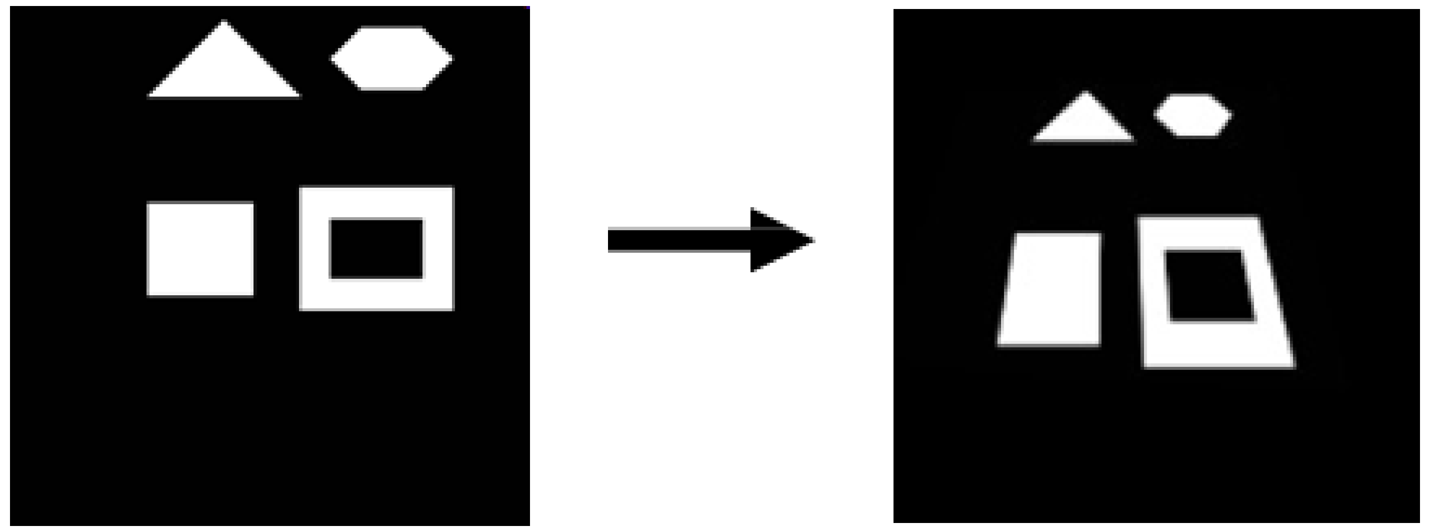


# 2D变换

射影变换：

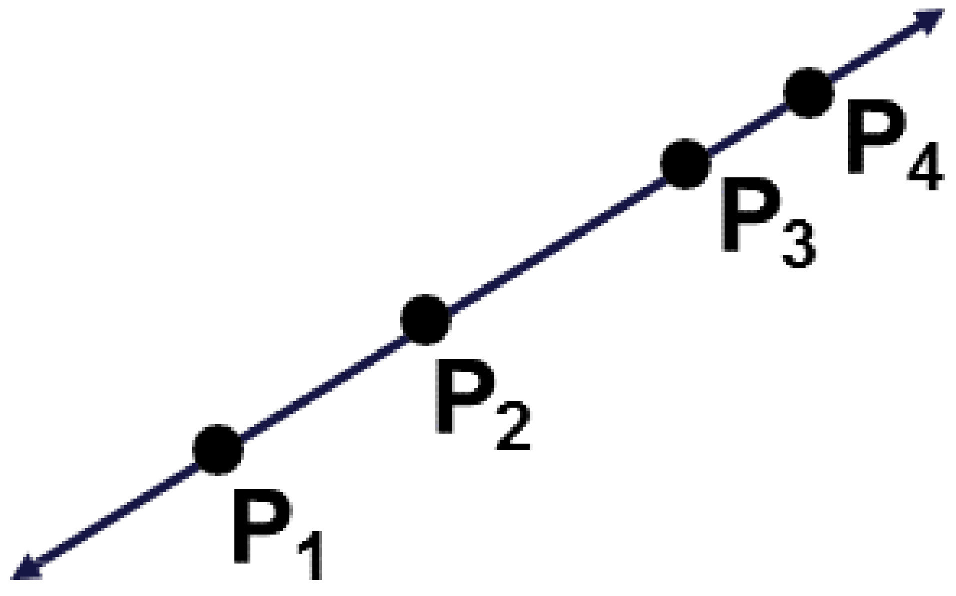
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boxed{\boldsymbol{v}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = H_p \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

-8 DOF
-不变量：
- -共线性
- -四共线点的交比
- -其他…



# 交比

–四共线点的交比定义为




$$\frac{\left|\left|P_3 - P_1\right|\right| \; \left|\left|P_4 - P_2\right|\right|}{\left|\left|P_3 - P_2\right|\right| \; \left|\left|P_4 - P_1\right|\right|}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 3. 单视图测量

- 2D变换（完）
- 影消点与影消线
- 单视图重构

## 3. 单视图测量

- 2D变换
- 影消点与影消线
- 单视图重构

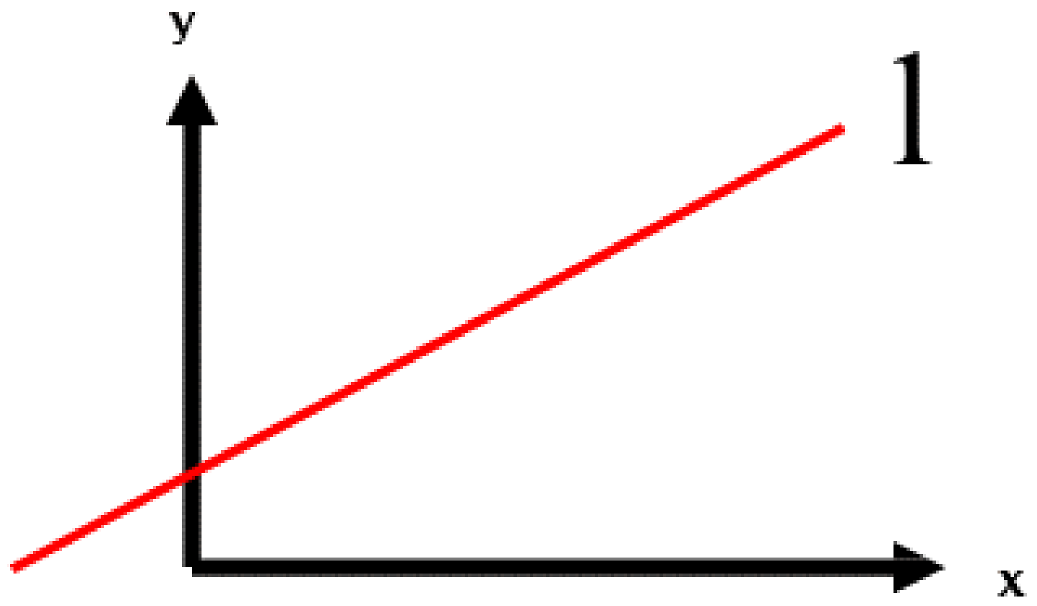
# 内容导读

- 平面上的平行线的交点、无穷远点、无穷远线
- 无穷远点与无穷远线的2D变换；
- 三维空间中的点线面、影消点与影消线，
- 影消点、影消线与三维空间中的直线的方向与面的关系

# 平面上的线

$$ax + by + c = 0$$

$$l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$



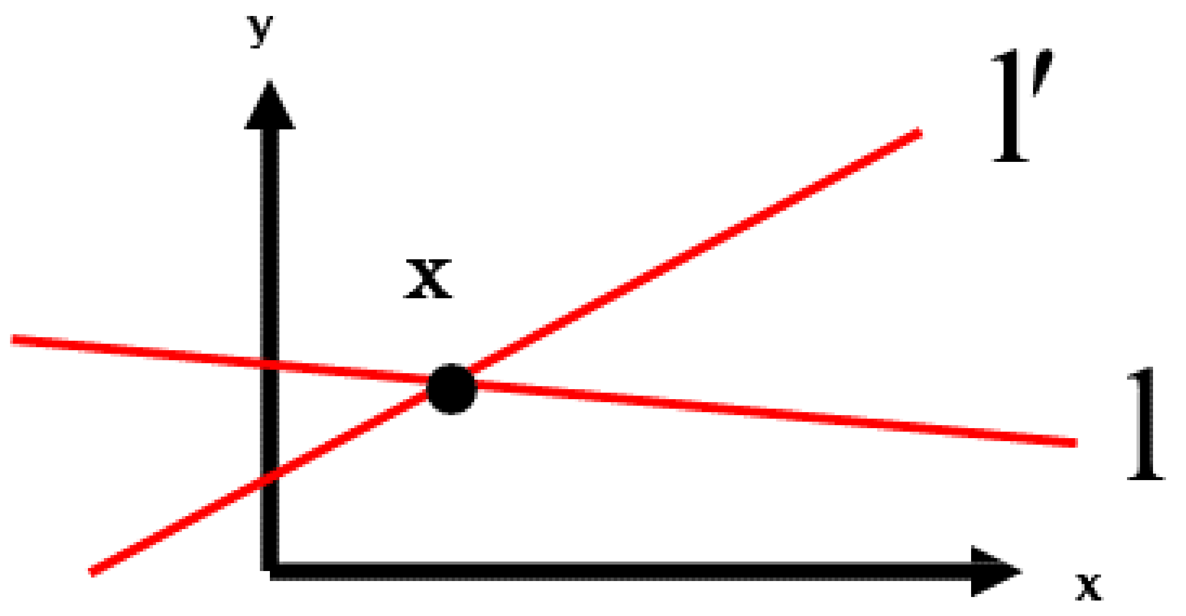

$$If\ x = [x_1, x_2]^T \in l$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

# 直线的交点

交点

$$x = l \times l'$$




**证明**

$$l \times l' \perp l \rightarrow (l \times l') \cdot l = 0 \ \rightarrow x\epsilon l$$

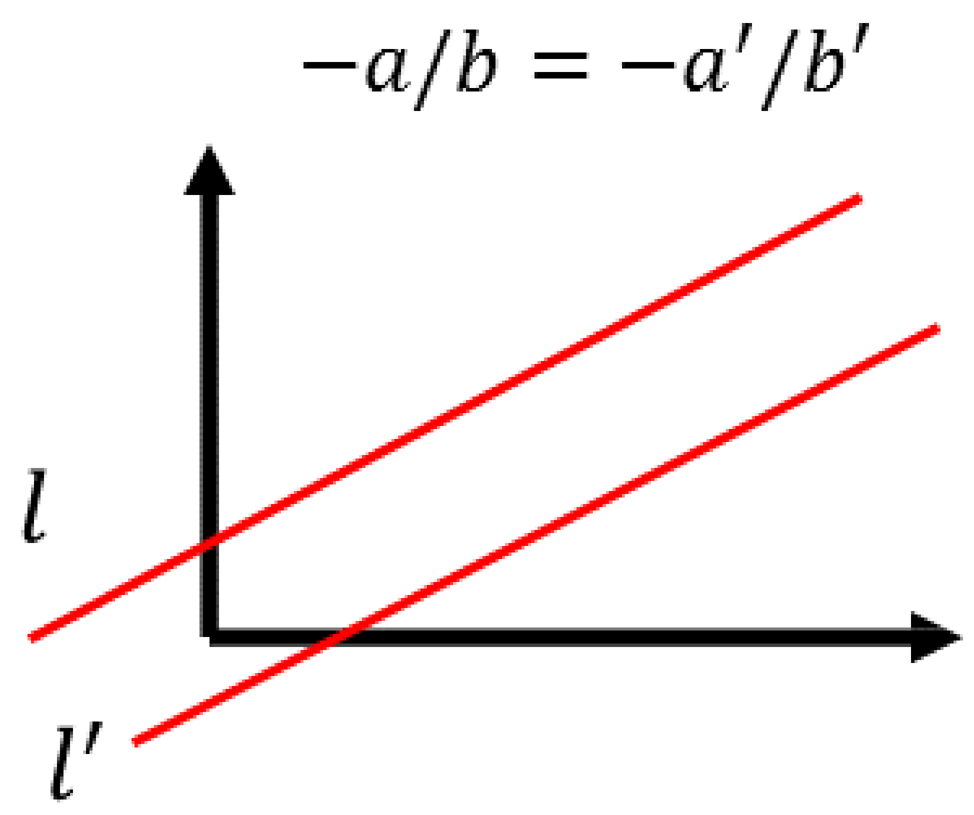
$$l \times l' \perp l \rightarrow \underbrace{(l \times l')}_{x} \cdot l = 0 \ \rightarrow x\epsilon l'$$

$\rightarrow x$ 为交点

# 2D无穷远点

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \neq 0$$

$$x_\infty = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

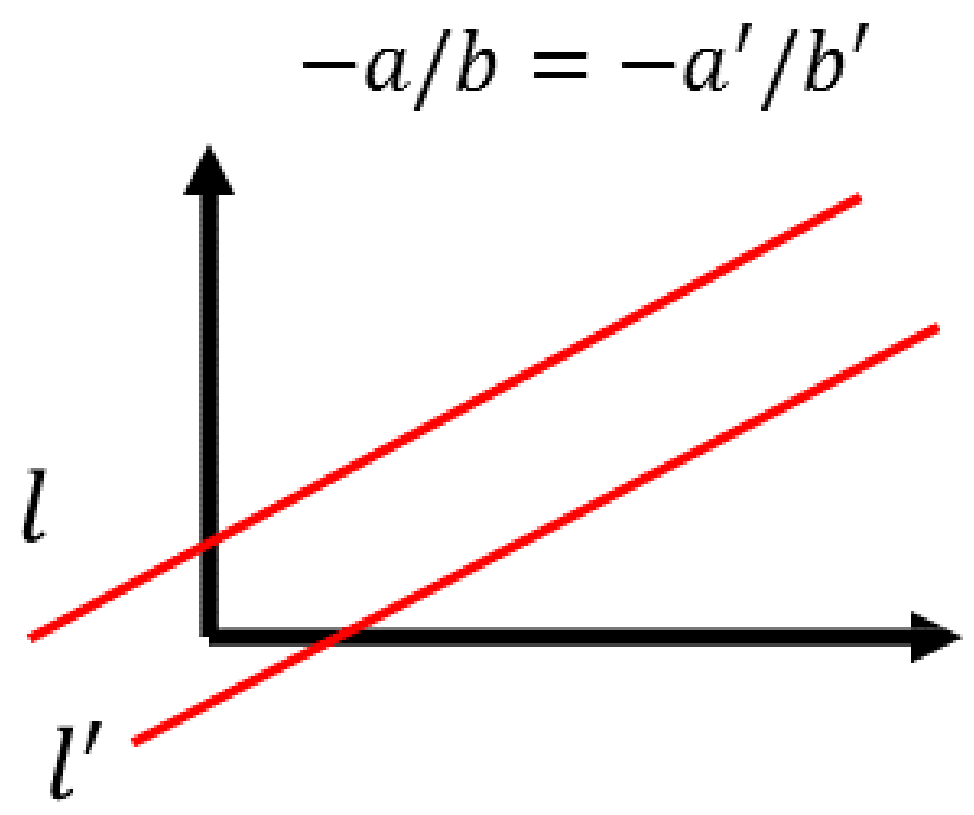
$$l' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

# 2D无穷远点

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \neq 0$$

在欧氏坐标中，此点位于无穷远处

$$x_\infty = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

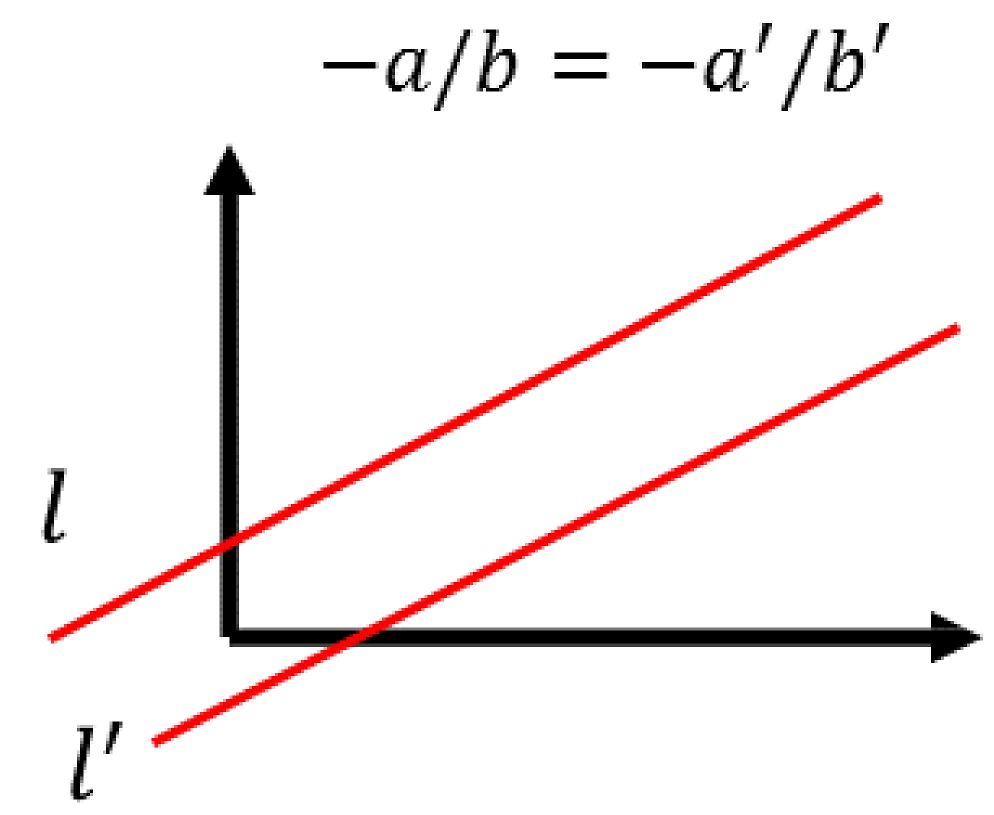



$$l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$l' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

# 2D无穷远点

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \neq 0$$




$$l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$l' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

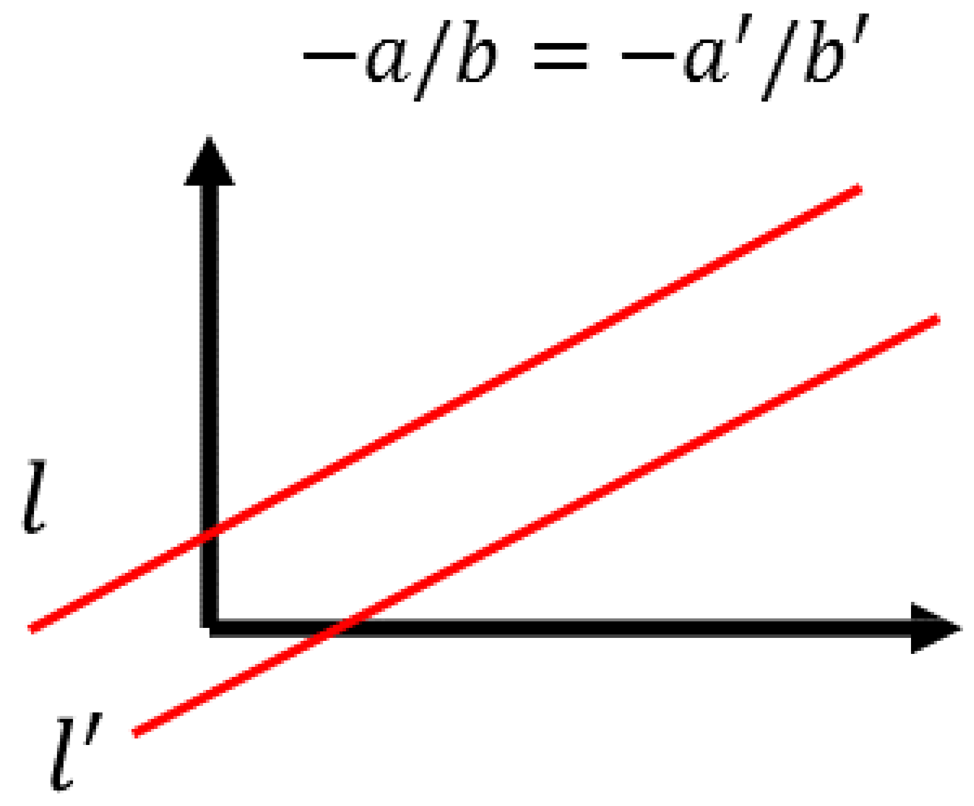
在欧氏坐标中，此点位于无穷远处

$$x_\infty = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

两条平行线的交点：$\rightarrow l \times l' \propto \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = x_\infty$

# 2D无穷远点

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_{3 \neq 0}$$




$$l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

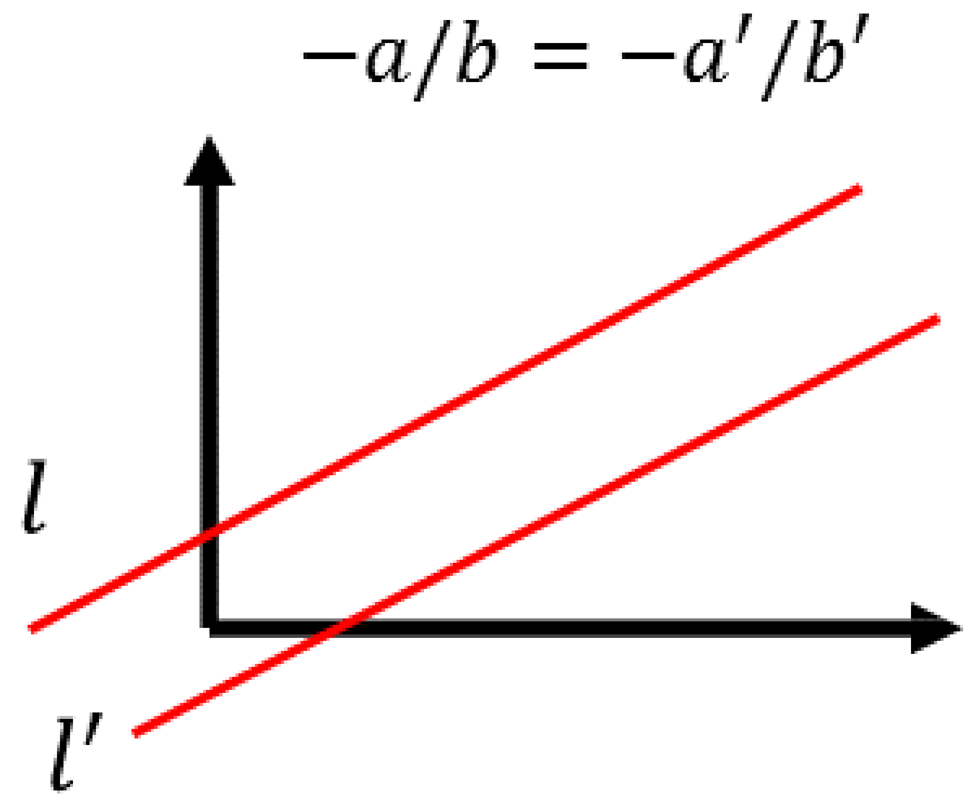
$$l' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

注意：直线 $l = [a\ b\ c]^{\mathrm{T}}$ 穿过无穷远 $x_\infty$

$$l^T x_\infty = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

# 2D无穷远点

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_{3\neq 0}$$




$$l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$l' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

注意：直线 $l = [a\ b\ c]^{\mathrm{T}}$ 穿过无穷远 $x_\infty$

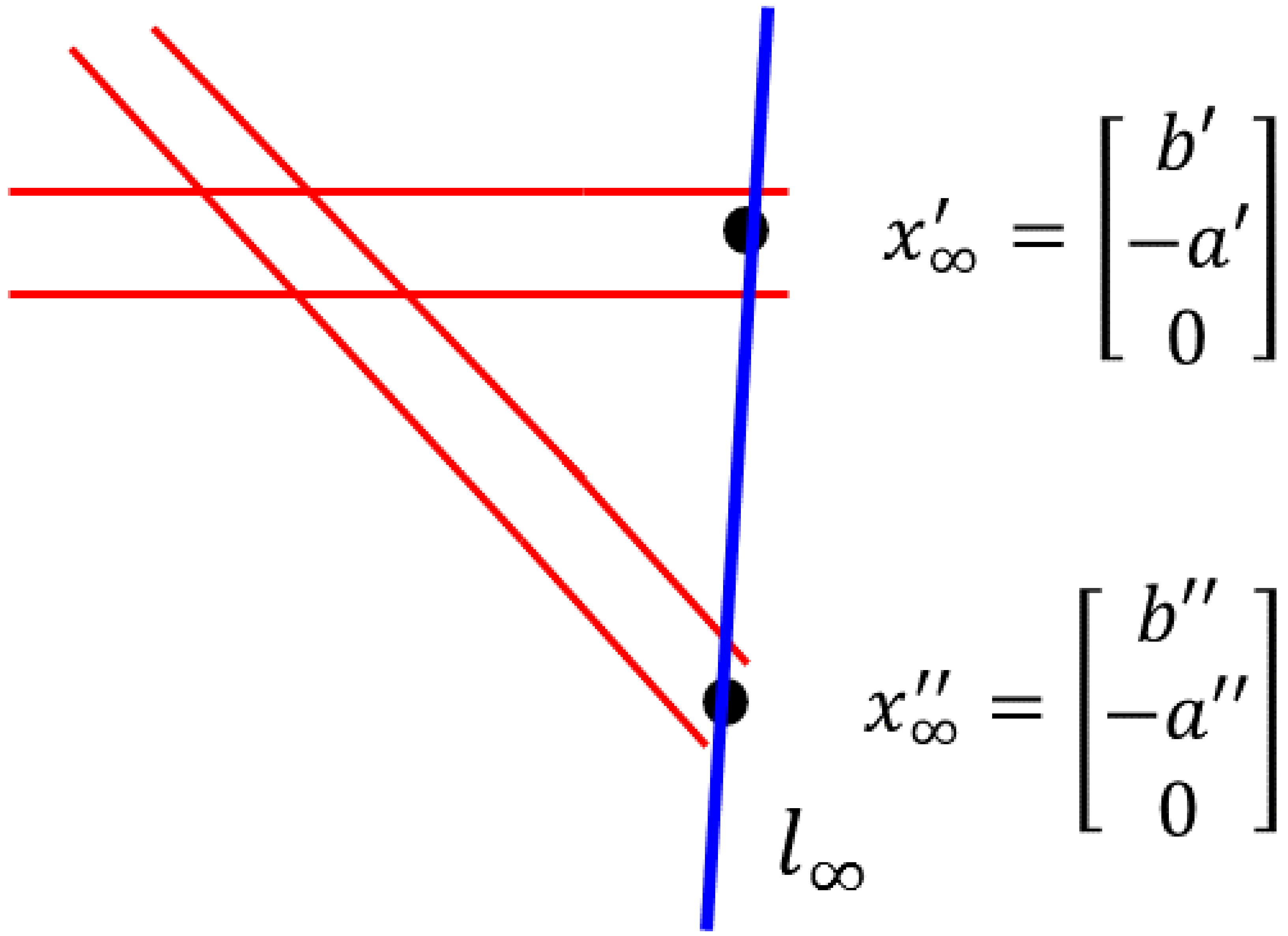
$$l^T x_\infty = [a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

同理可证明该点也位于直线 $l'$ （请同学们请自行推导）

# 无穷远直线 $l_\infty$

无穷远点集位于称为无穷远线的一条线上

$$l_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

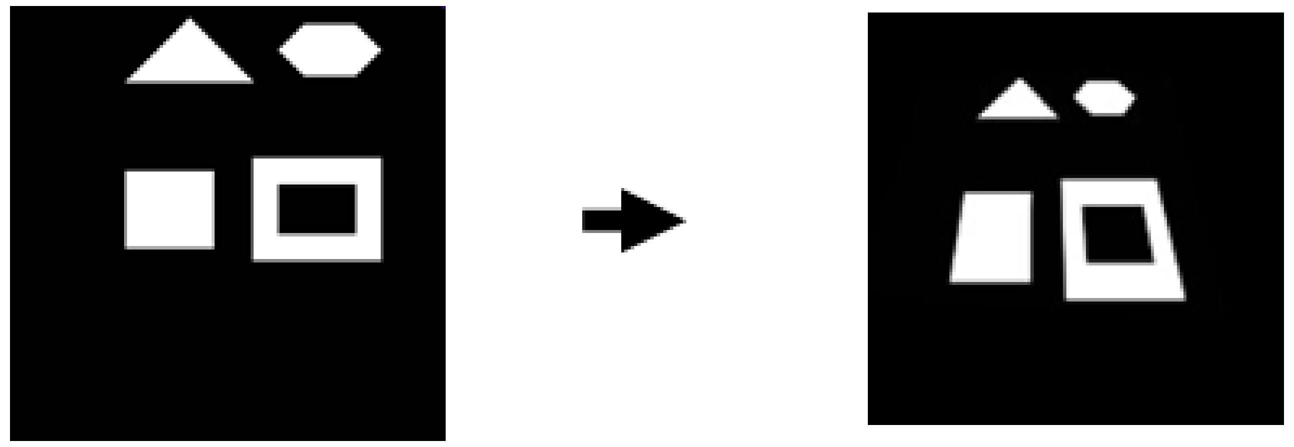



证明: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

无穷远线可以认为是平面上线的“方向”的集合

# 无穷远点的透视变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$p' = Hp$$

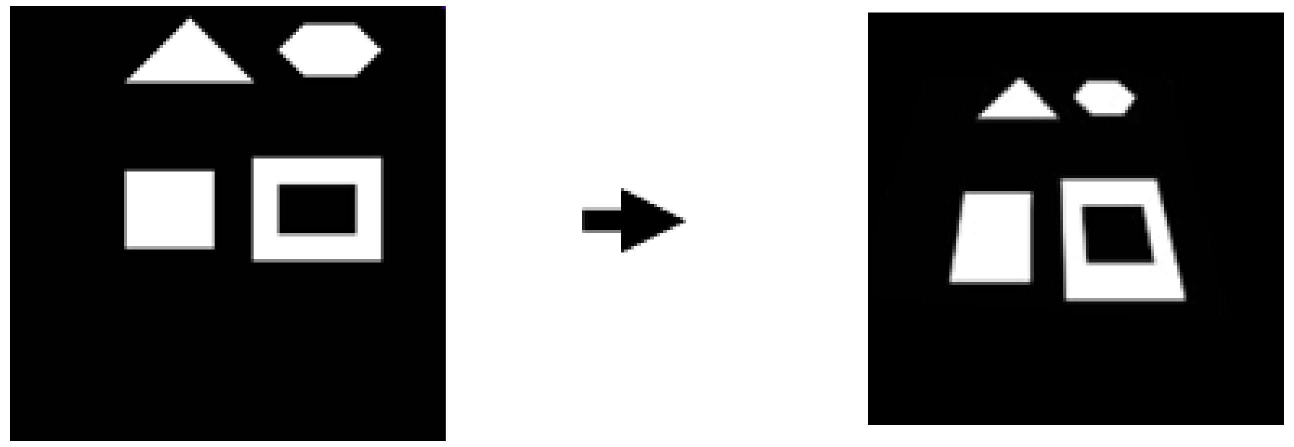
无穷远点？

$$Hp_{\infty} = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{bmatrix}$$

透视

# 无穷远点的透视变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$p' = Hp$$

无穷远点?

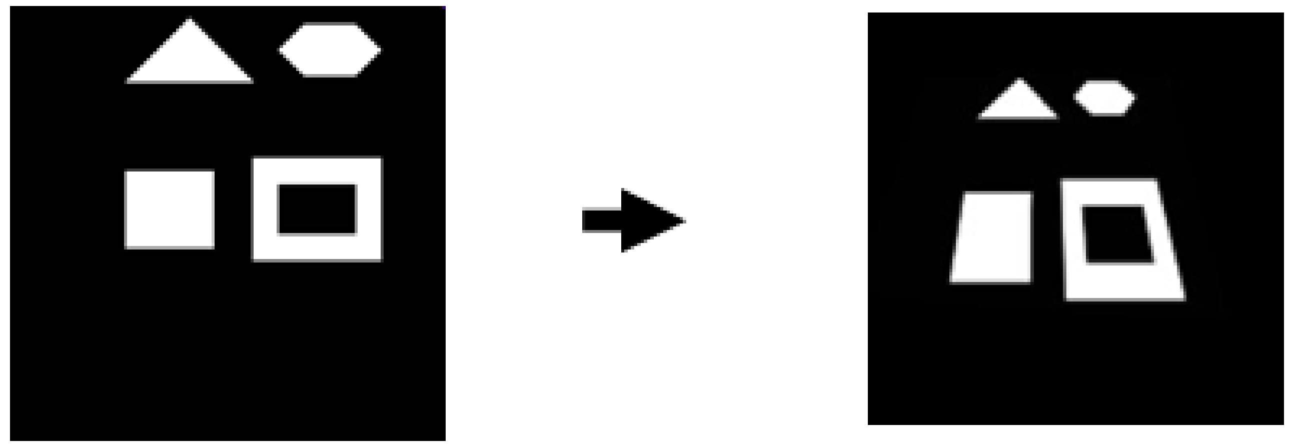
$$Hp_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{bmatrix}$$

透视

…不!

# 无穷远点的仿射变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$p' = Hp$$

$$Hp_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{bmatrix}$$

…不！

透视

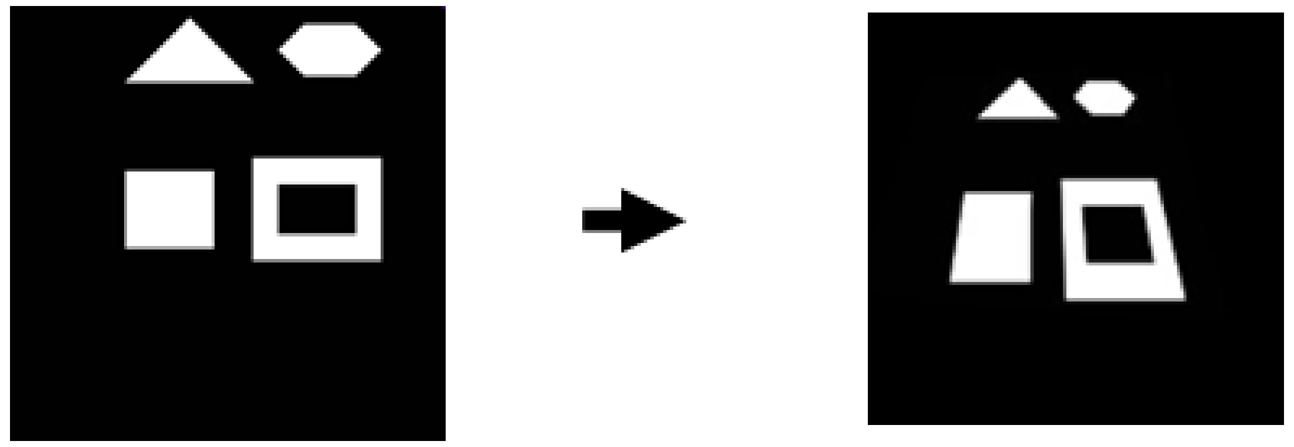
无穷远点？

$$H_A p_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ 0 \end{bmatrix}$$

仿射

# 无穷远点的仿射变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$p' = Hp$$

$$Hp_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x{}' \\ p_y{}' \\ p_z{}' \end{bmatrix}$$

…不！

透视

无穷远点？

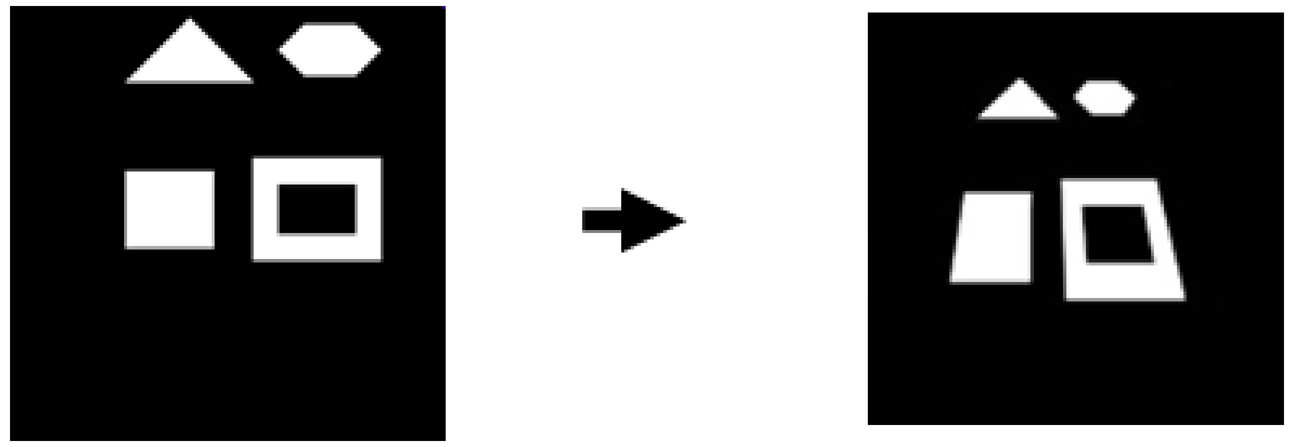
$$H_A p_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x{}' \\ p_y{}' \\ 0 \end{bmatrix}$$

…是！

仿射

# 无穷远线的透视变换（2D）

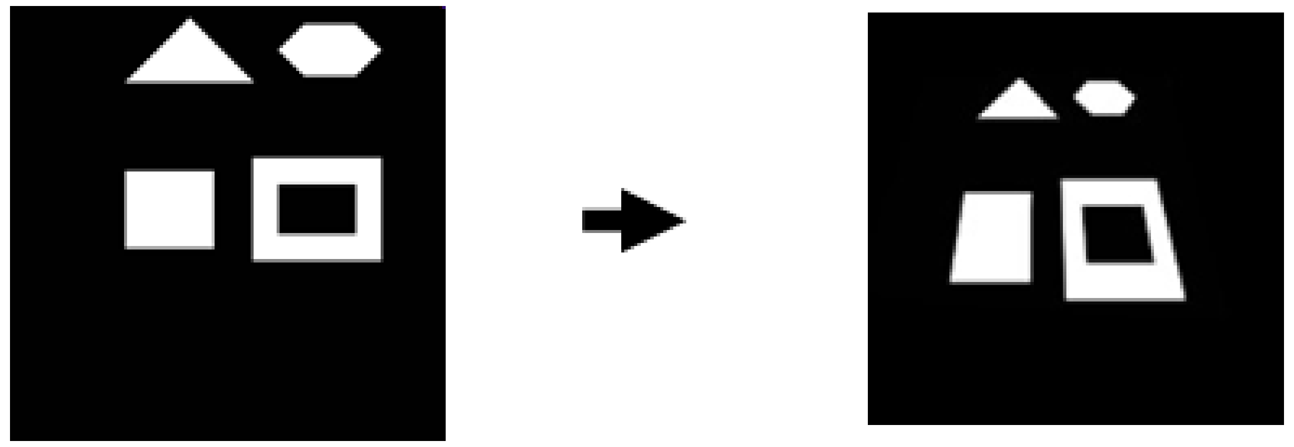
$$H=\begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$l' = H^{-T} l$$

# 无穷远线的透视变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$l' = H^{-T} l$$

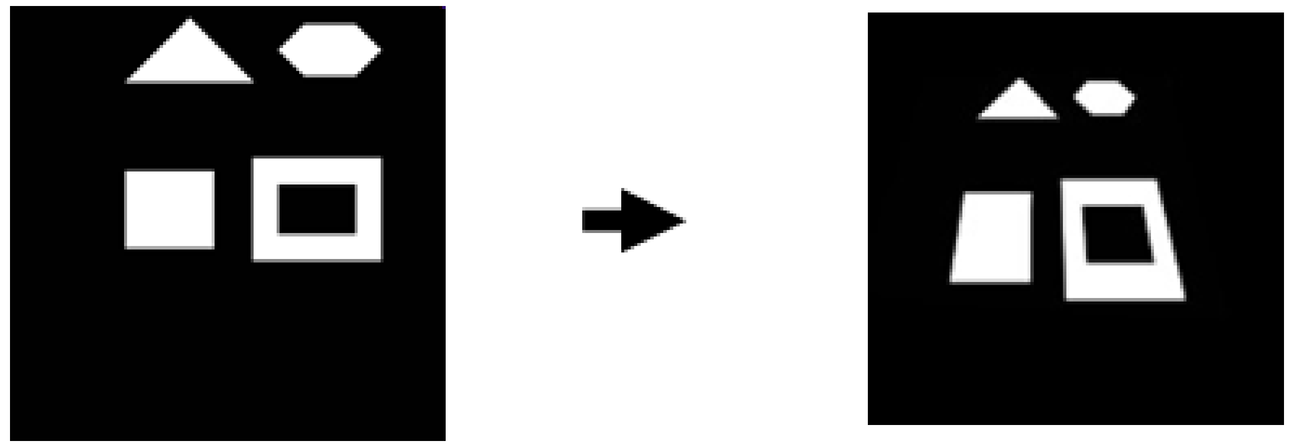
无穷远线？

$$H^{-T} l_{\infty} = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ b \end{bmatrix}$$

透视

# 无穷远线的透视变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$l' = H^{-T} l$$

无穷远线？

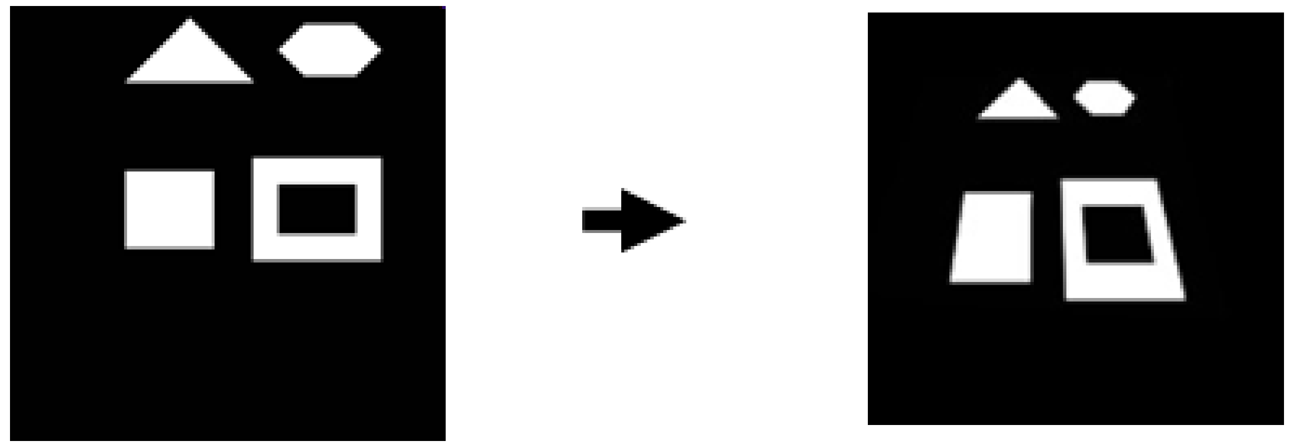
$$H^{-T} l_{\infty} = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ b \end{bmatrix}$$

透视

…不！

# 无穷远线的仿射变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$l' = H^{-T} l$$

$$\underset{\text{透视}}{H^{-T}} l_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ b \end{bmatrix}$$

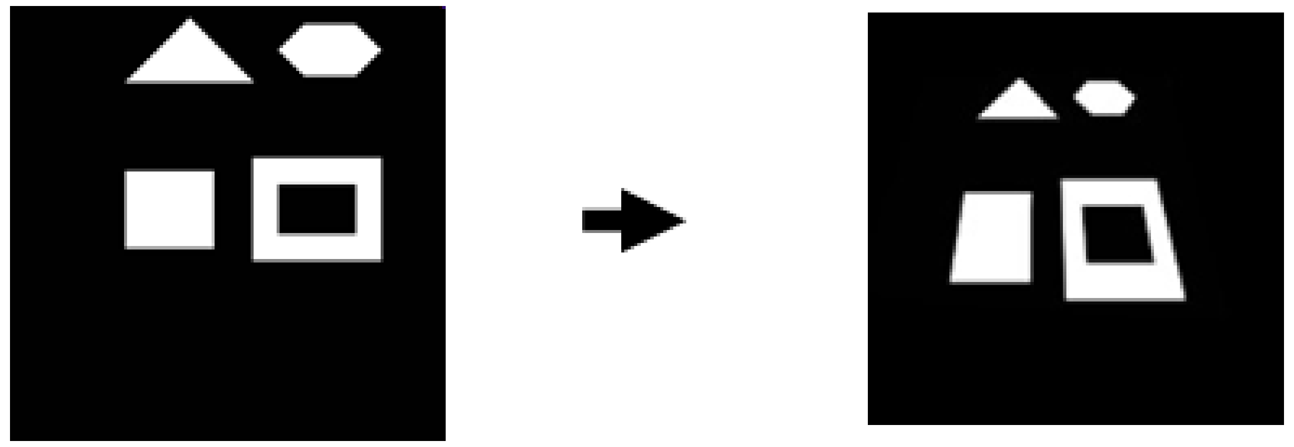
…不！

无穷远线？

$$\underset{\text{仿射}}{H_A^{-T}} l_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-T} & 0 \\ -t^T A^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 无穷远线的仿射变换（2D）

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$



$$l' = H^{-T} l$$

$$H^{-T} l_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ b \end{bmatrix}$$

透视

…不!

无穷远线?

$$H_A^{-T} l_\infty = ? = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-T} & 0 \\ -t^T A^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

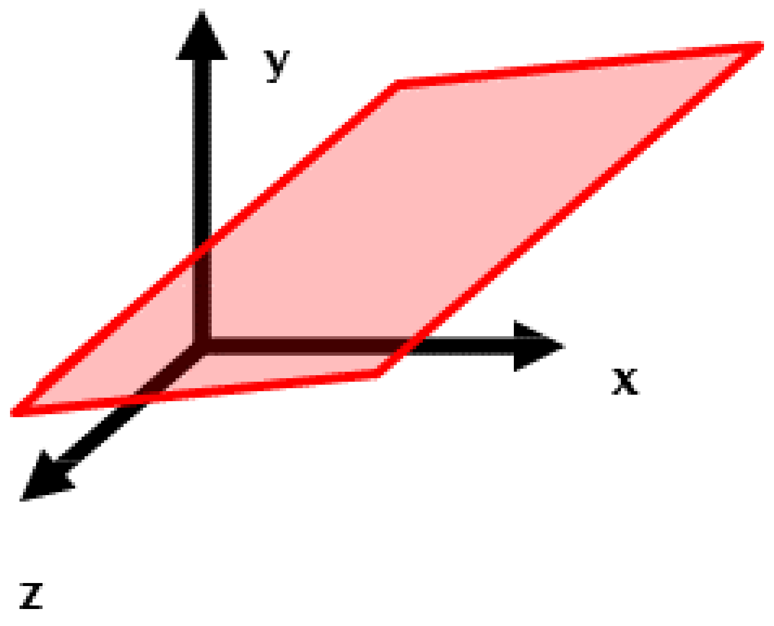
仿射

…是!

# 空间中的点和面

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$




$$x \in \Pi \leftrightarrow x^T \Pi = 0$$

$$\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + \mathrm{d} = 0$$

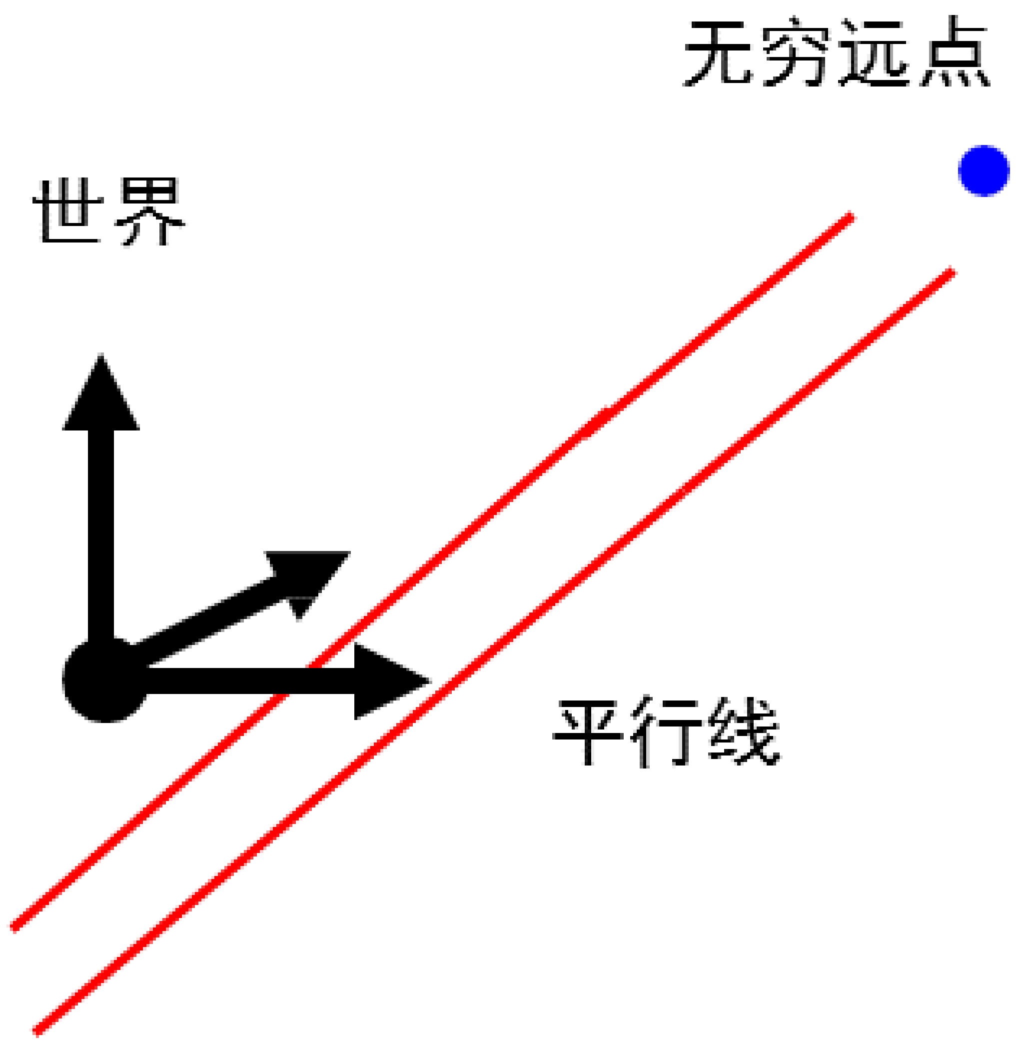
# 空间中的线

- 直线具有4个自由度 – 难以在空间中表示
- 可以定义为两平面的交线

$$\mathbf{d} = \text{直线方向} = [a, b, c]^T$$

# 无穷远点

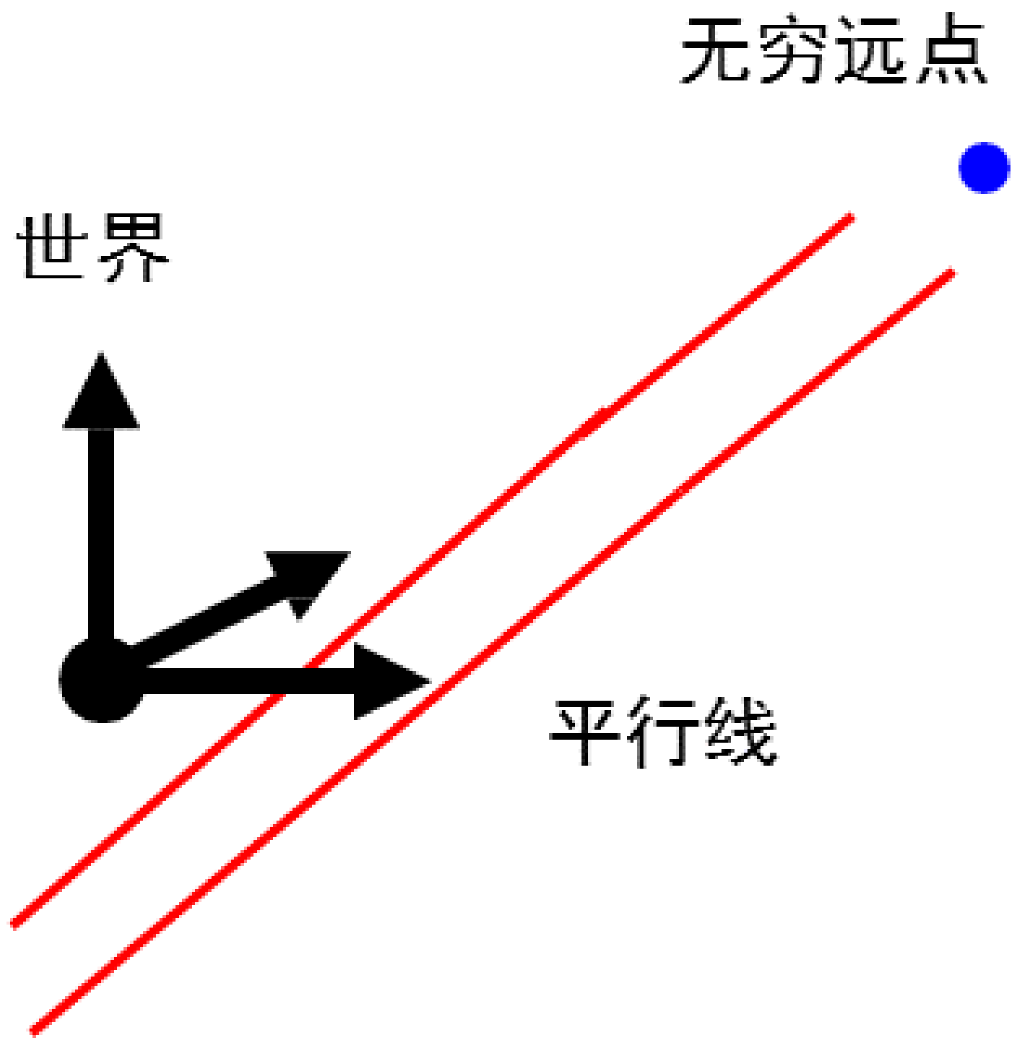
空间中平行线的交点



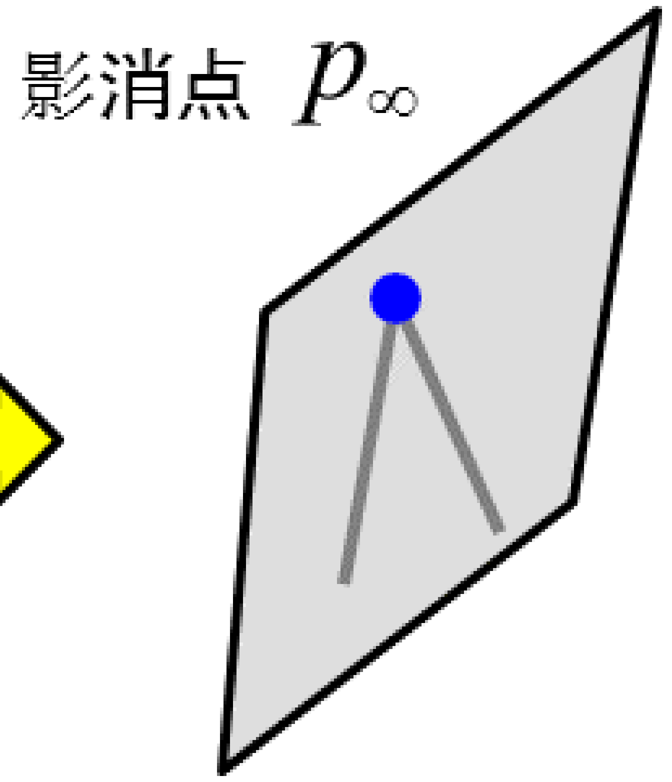

$$x_\infty = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 影消点

影消点：无穷远点在图像平面上的投影点




$$x_\infty = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{M}}$$



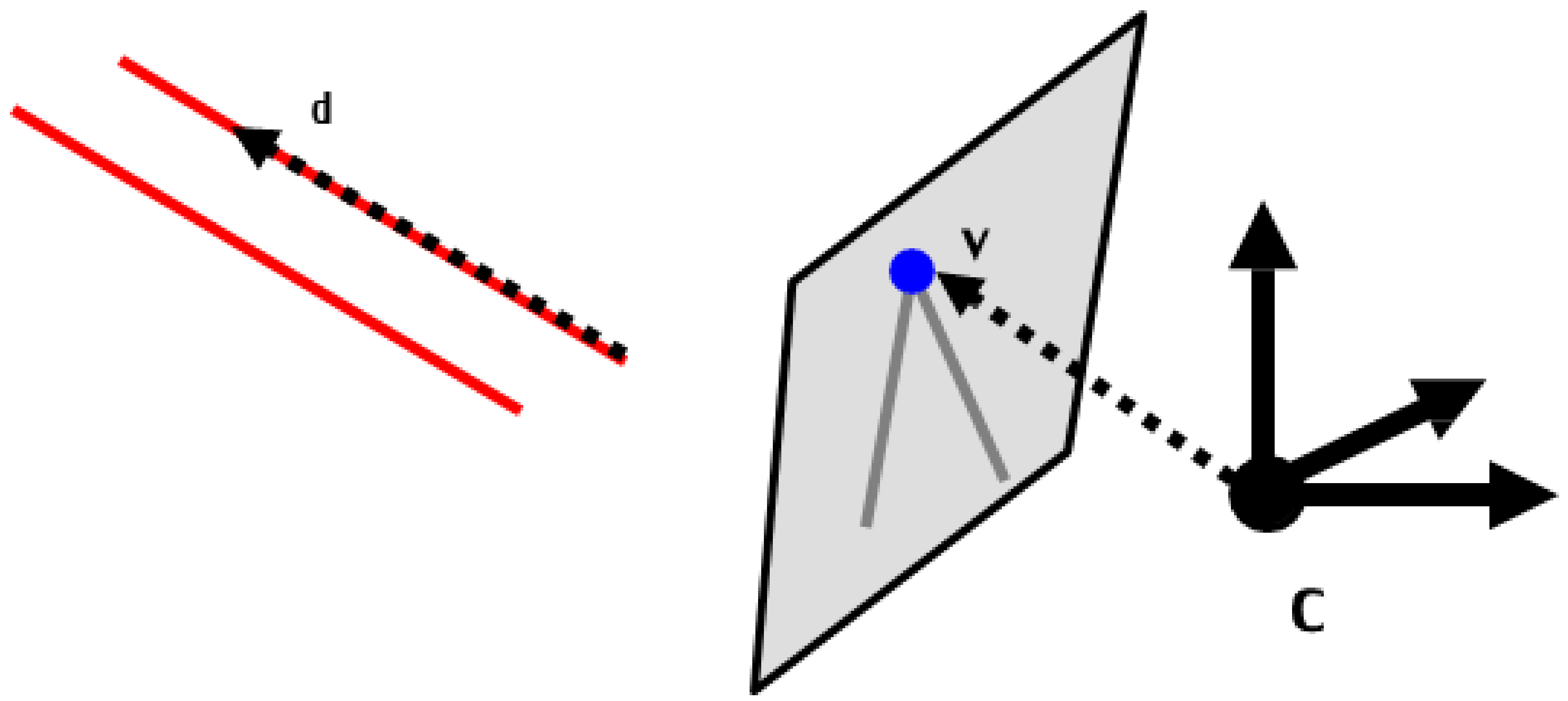

$[a,b,c]^T$ 为平行线的方向

影消点 $p_\infty = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$

# 影消点和直线方向

**d** ＝直线方向

＝[a, b, c]$^T$

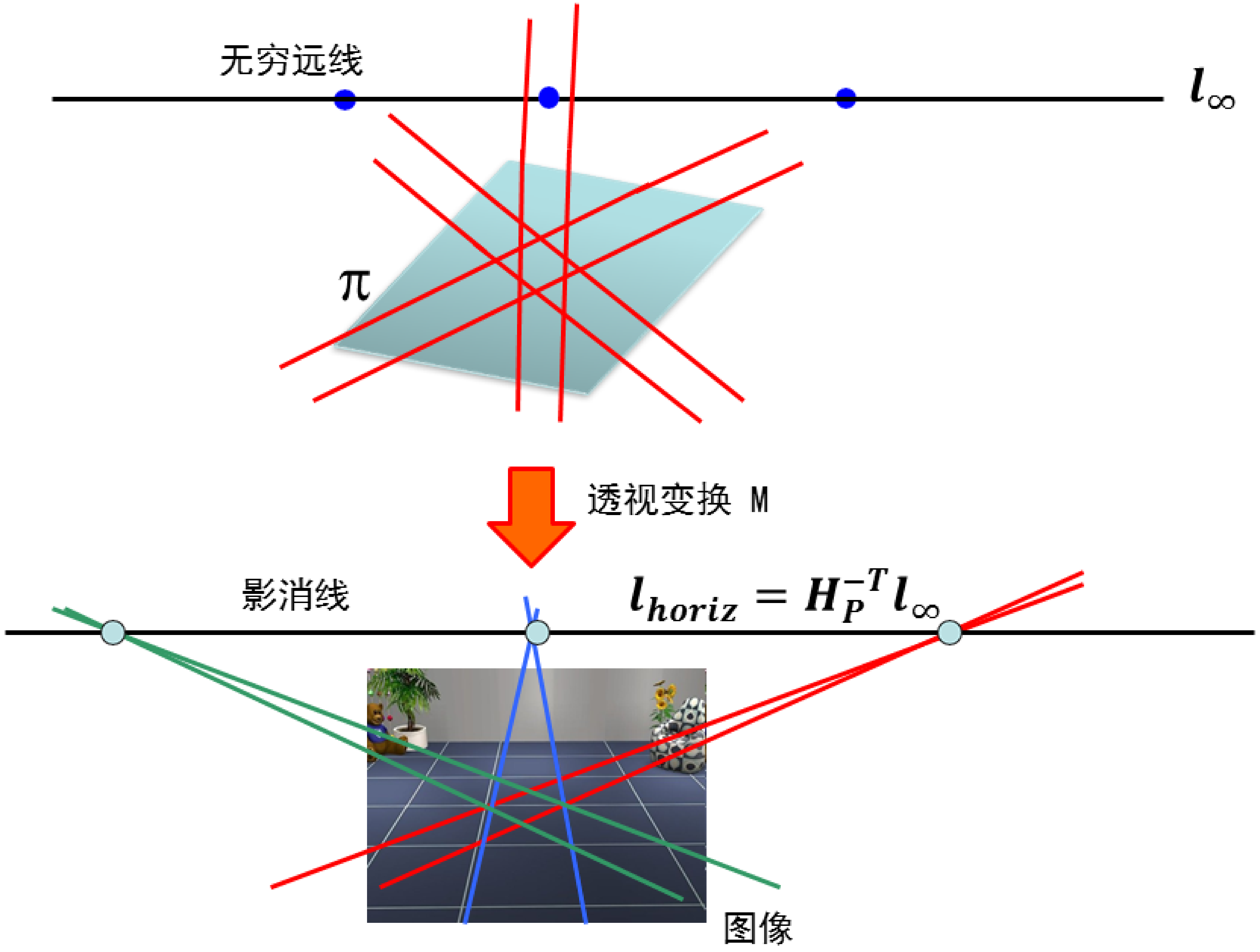



$$\boldsymbol{v = Kd} \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{K^{-1}v}{||K^{-1}v||}$$

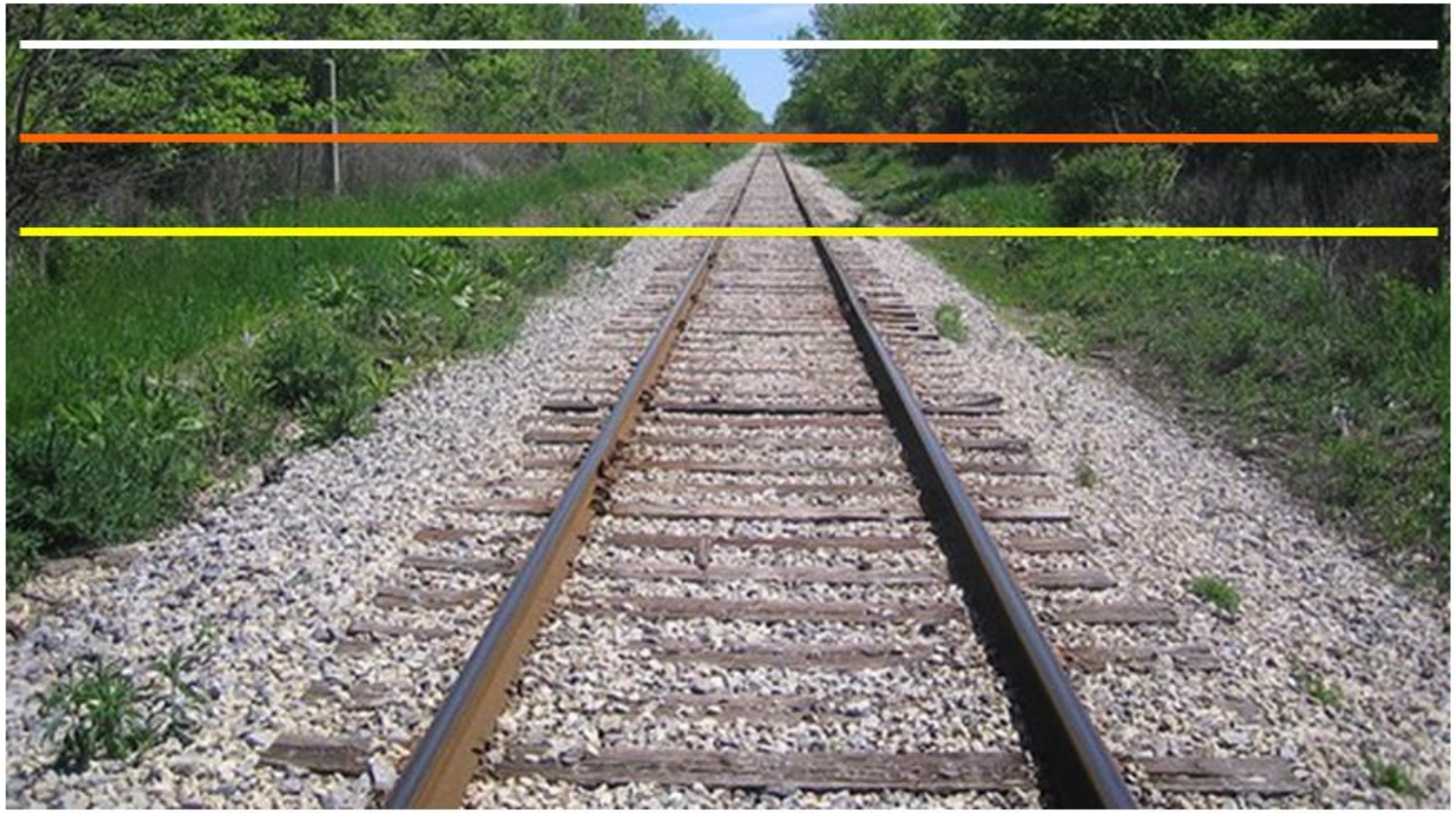
证明:

$$X_\infty = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} v = MX_\infty = K[\,I \;\; 0\,]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

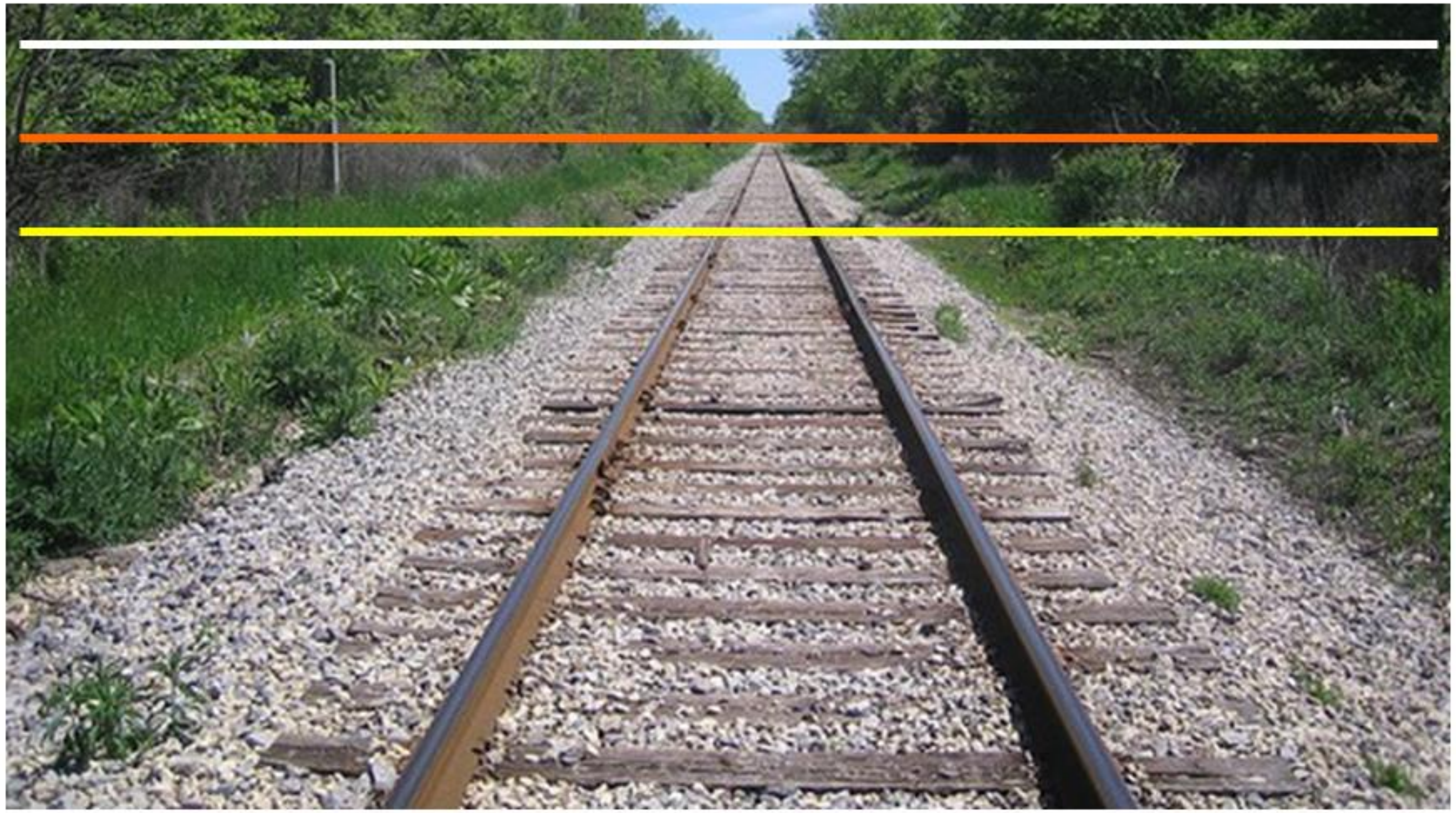
# 影消线（视平线）



# 影消线例子



# 影消线例子

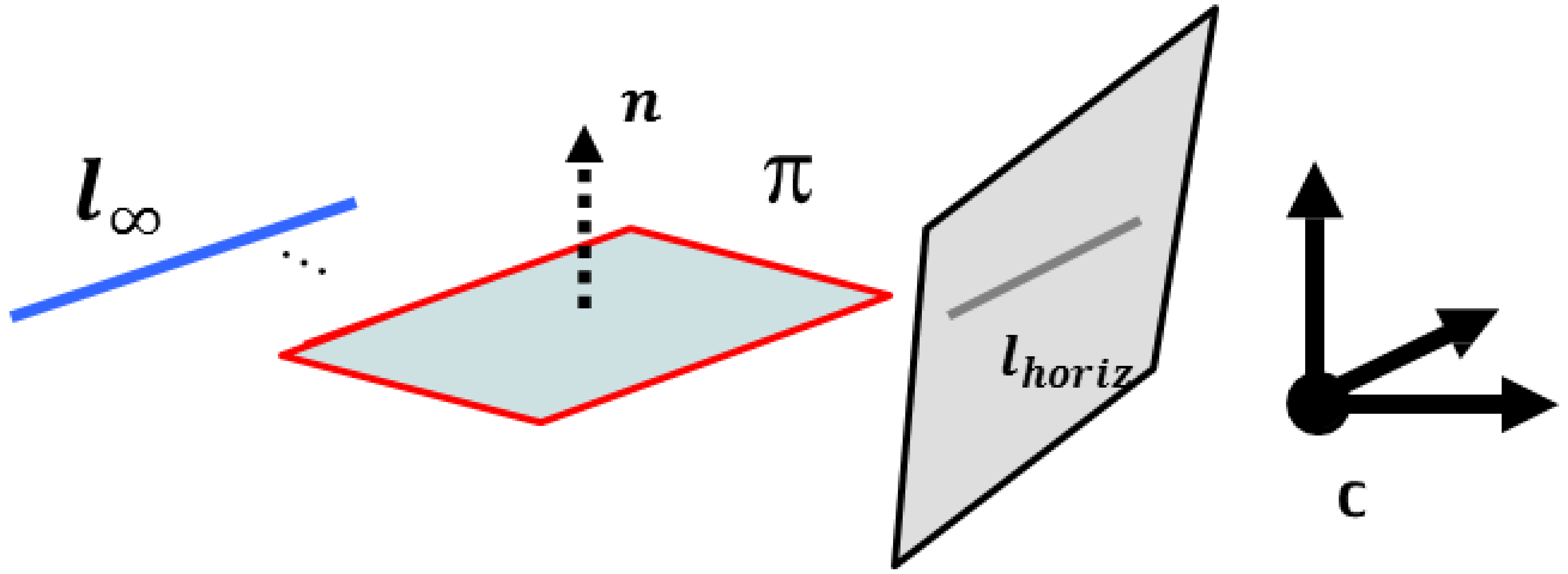


橙色的线是影消线！

# 这两条线是否平行？

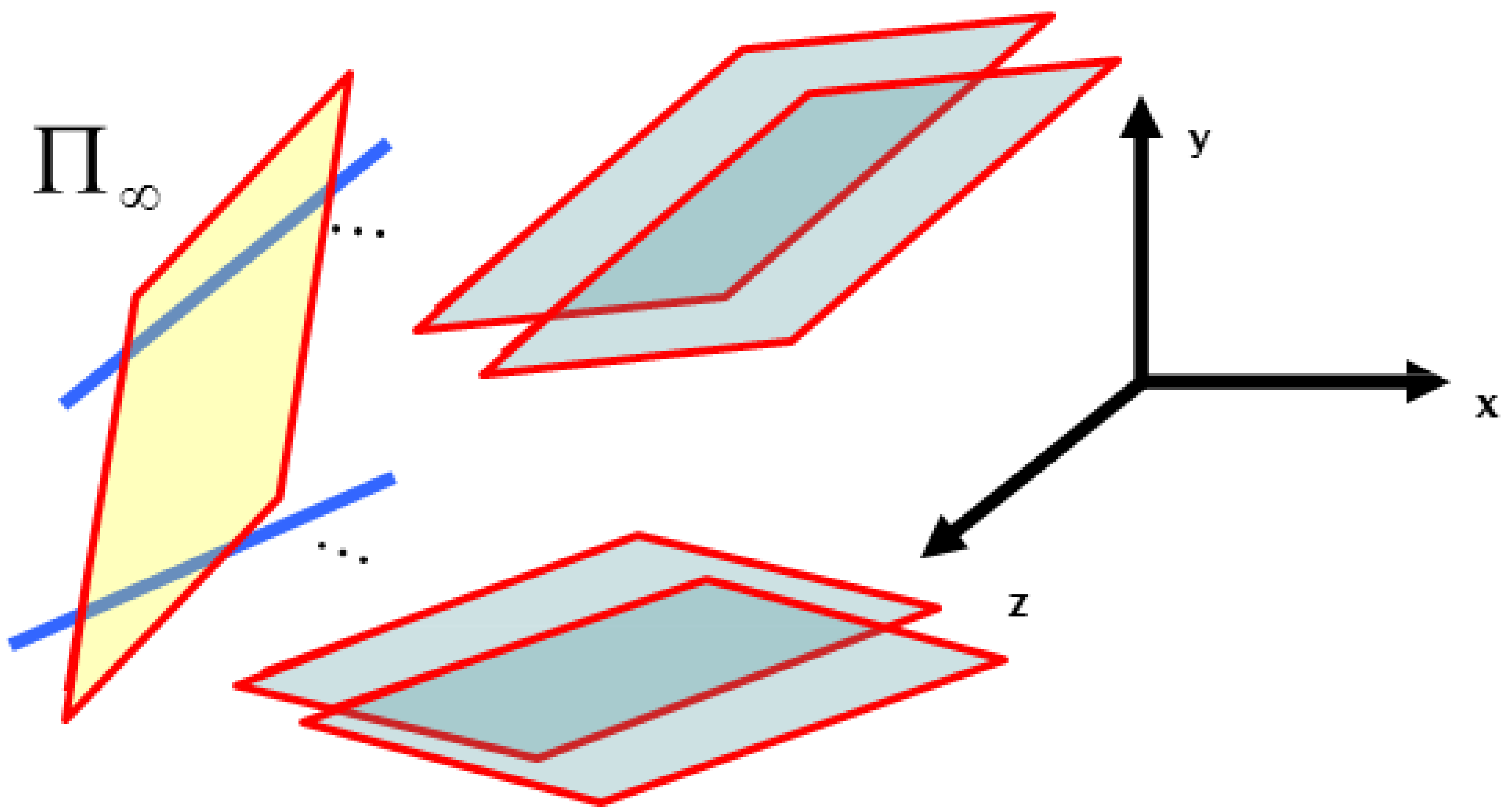

-图像中两条直线的交点是否在影消线上
-如果是，这两条线是3D空间中的平行线

# 影消线和平面法向量




$$n = K^T l_{horiz}$$

# 无穷远平面



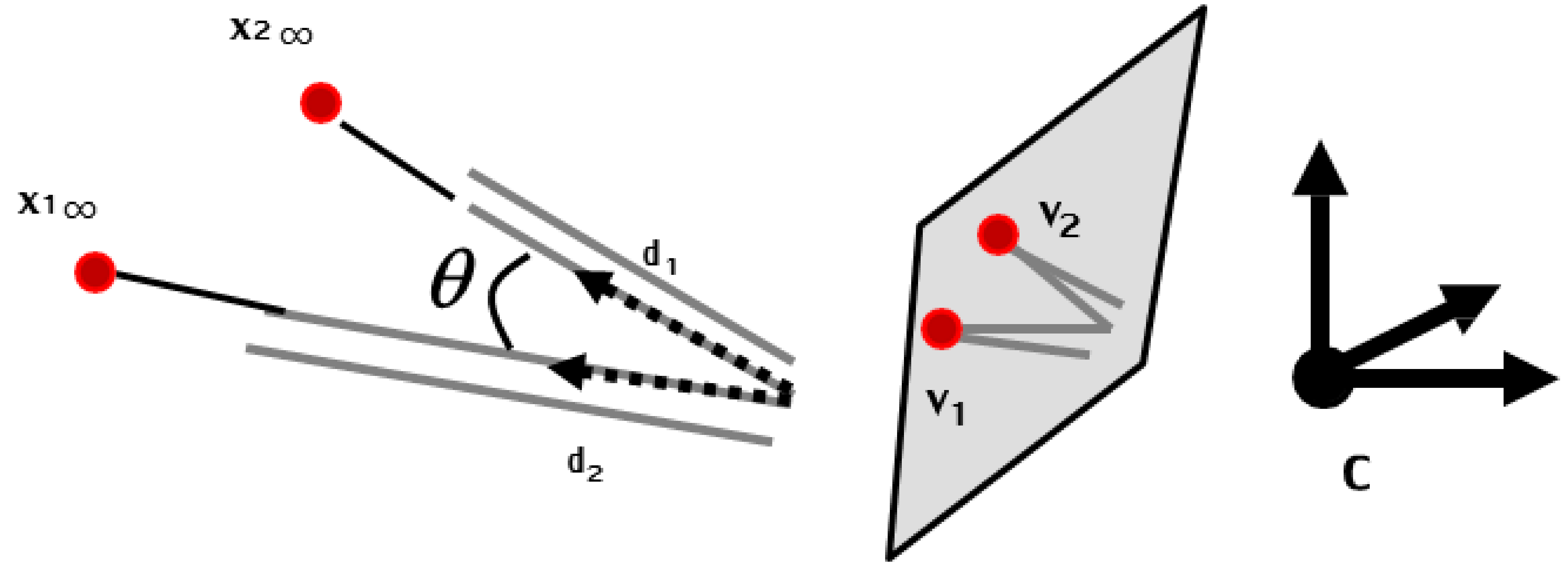

$$\Pi_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

无穷远平面

- 平行平面在无穷远处交于一条公共线 – **无 穷 远 直 线**
- 2条或多条无穷远直线的集合定义为无穷远平面$\Pi_\infty$

# 两组平行线的夹角与影消点

$$d = \frac{K^{-1}v}{||K^{-1}v||}$$




$$cos\theta = \frac{d_1 \cdot d_2}{|d_1||d_2|} = \frac{v_1^T \omega v_2}{\sqrt{v_1^T \omega v_1}\sqrt{v_2^T \omega v_2}}$$

$$\omega = (K\,K^T)^{-1}$$

如果 $\theta = 90^\circ$ $\rightarrow$ $\boxed{v_1{}^T \omega v_2 = 0}$

# $\omega$的性质

$$\boxed{\omega = (KK^T)^{-1}} \qquad M = K[\ R \quad T\ ]$$

- $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_5 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix}$ 对称
- $\omega_2 = 0$ 零倾斜
- $\begin{matrix} \omega_2 = 0 \\ \omega_1 = \omega_3 \end{matrix}$ 方形像素
- $\omega$只有5个自由度（因为$K$有5个自由度）

# 总结

$$\boldsymbol{v = Kd}$$

$$\boldsymbol{n = K^T l_h}$$

$$\cos\theta = \frac{v_1{}^T \omega v_2}{\sqrt{v_1{}^T \omega v_1}\sqrt{v_2{}^T \omega v_2}} \xrightarrow{\theta = 90^\circ} \boxed{v_1{}^T \omega v_2 = 0}$$

$$\boxed{\omega = (KK^T)^{-1}}$$

有助于:

- 估计相机参数
- 恢复三维场景结构

# 3. 单视图测量

- 2D变换
- 影消点与影消线（完）
- 单视图重构

# 3. 单视图测量

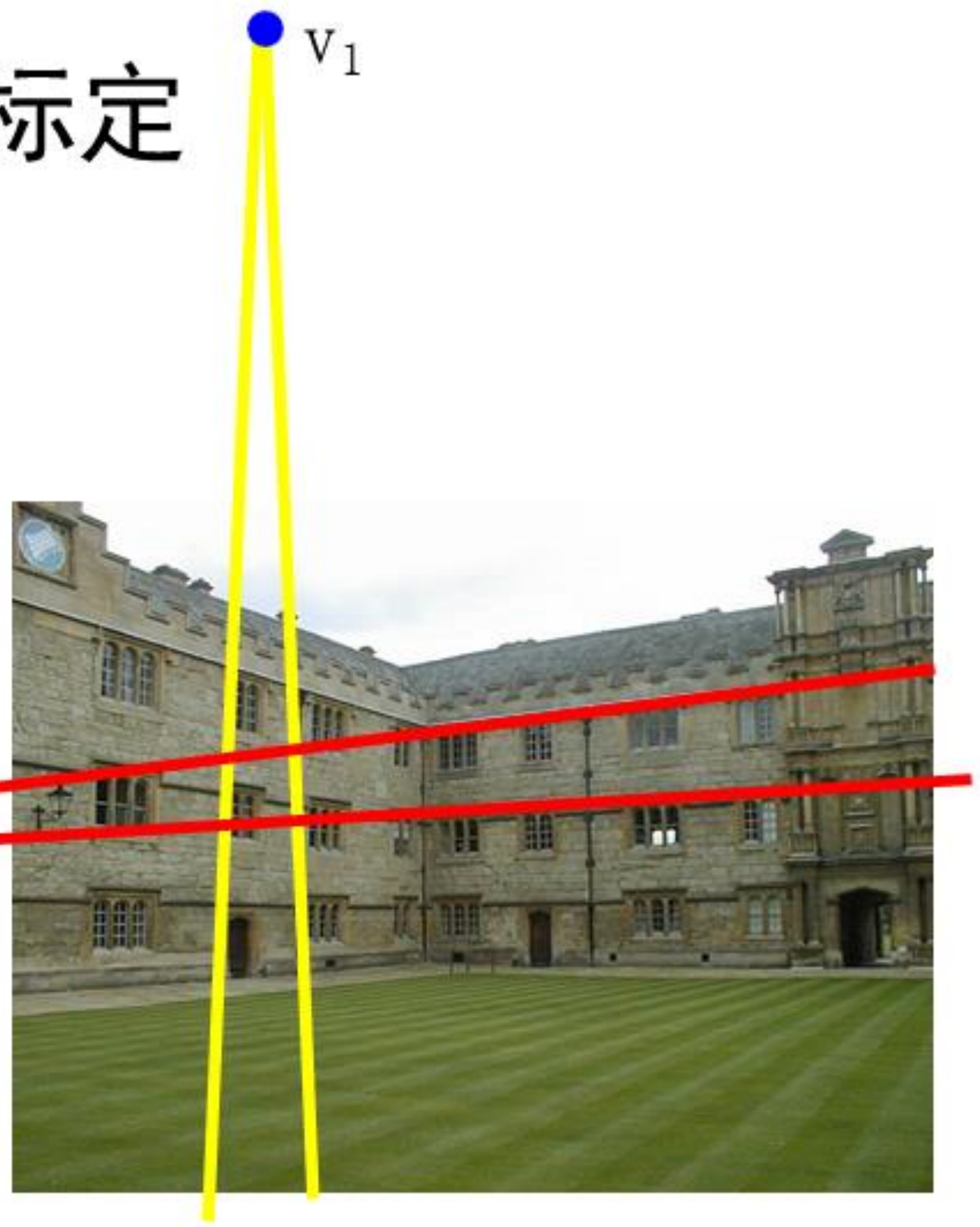
- 2D变换
- 影消点与影消线
- 单视图重构

# 单视图标定

$$cos\theta = \frac{{v_1}^T \omega v_2}{\sqrt{{v_1}^T \omega v_1}\sqrt{{v_2}^T \omega v_2}}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_5 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix}$$

$v_2$




$$\theta = 90^\circ$$

$$\begin{cases} {v_1}^T \omega v_2 = 0 \\ \omega = (KK^T)^{-1} \end{cases}$$

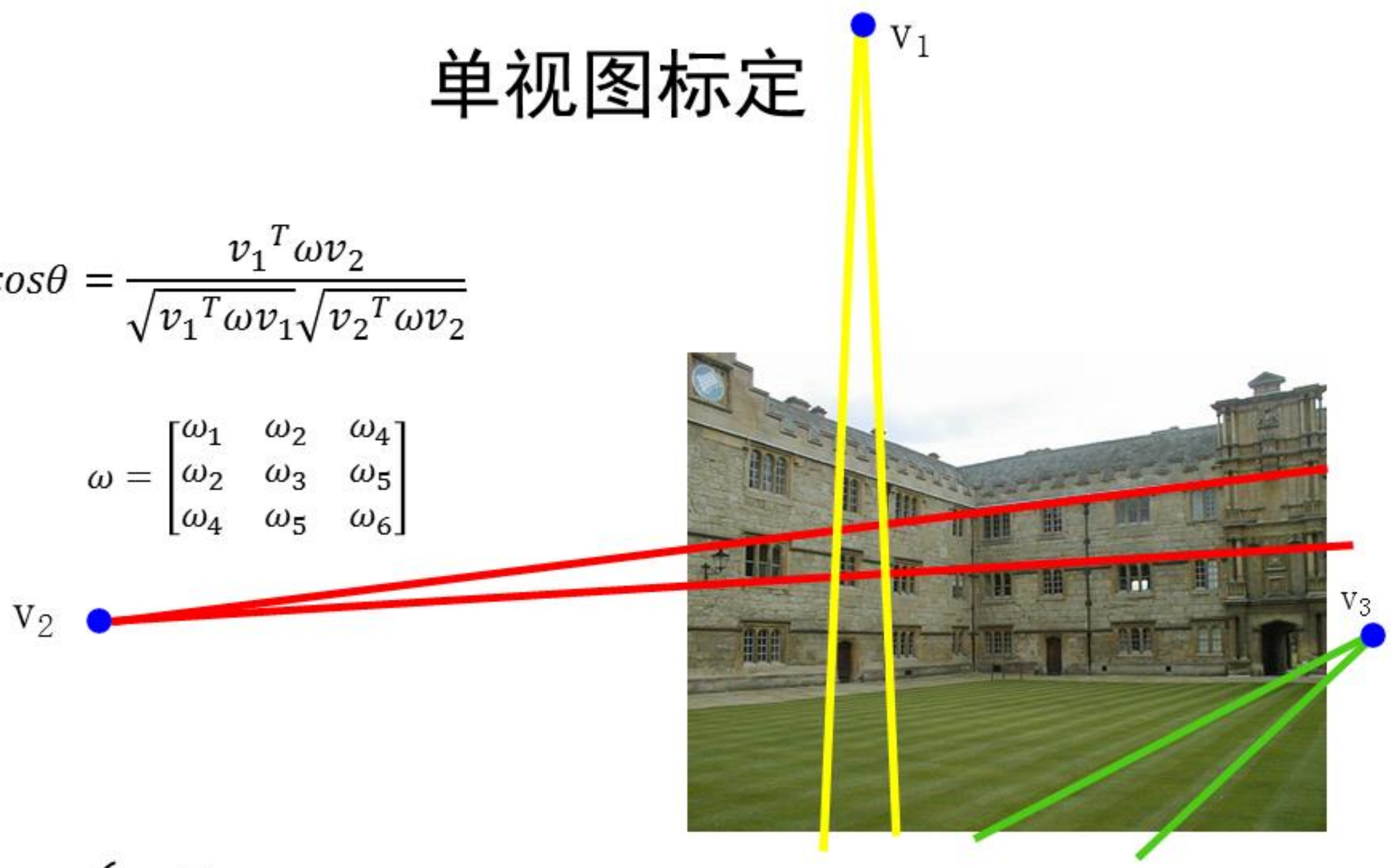
有足够的约束条件去估计K吗？

K有5自由度

# 单视图标定

$$cos\theta = \frac{{v_1}^T \omega v_2}{\sqrt{{v_1}^T \omega v_1}\sqrt{{v_2}^T \omega v_2}}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_5 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix}$$

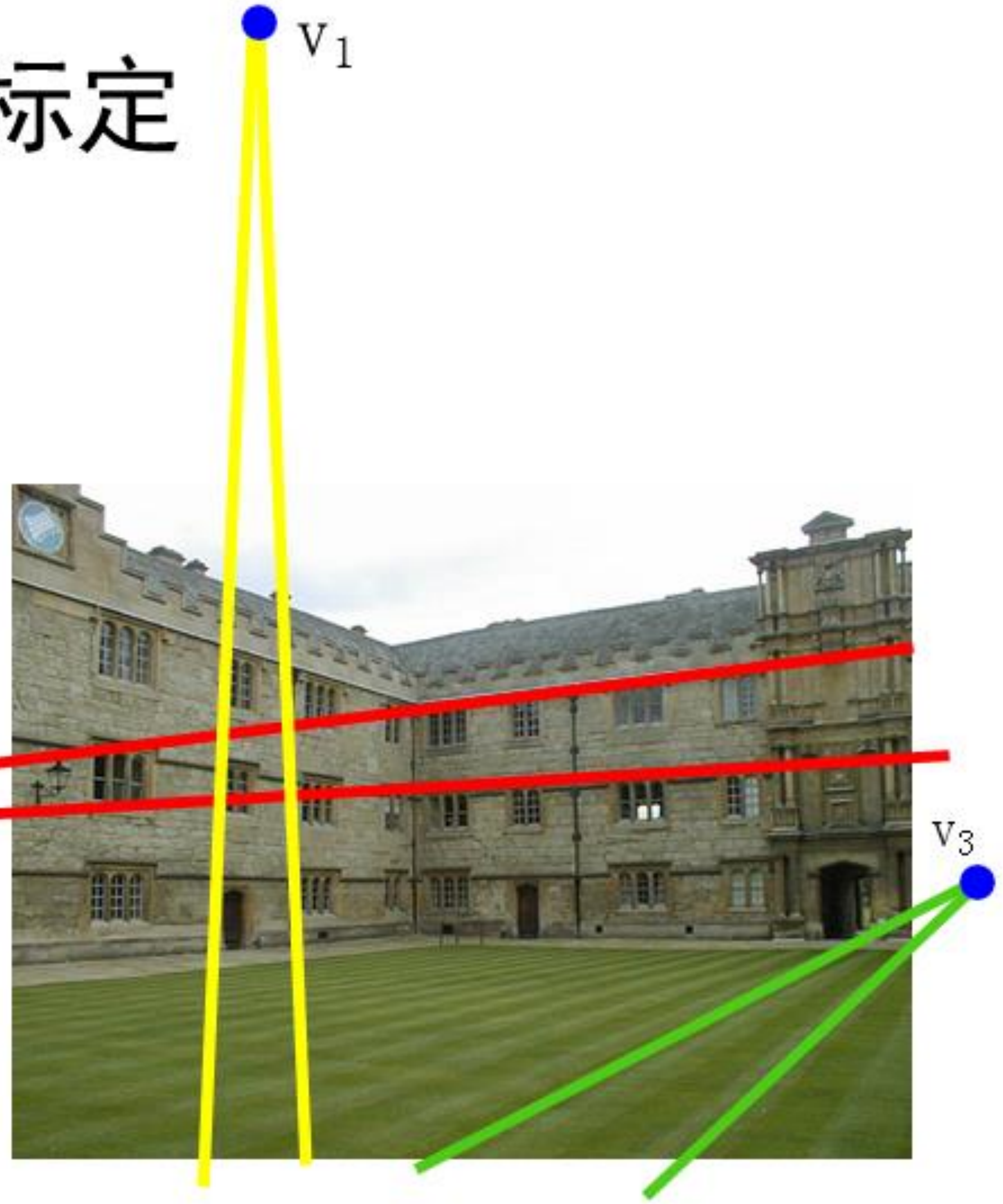



$$\begin{cases} {v_1}^T \omega v_2 = 0 \\ {v_1}^T \omega v_3 = 0 \\ {v_2}^T \omega v_3 = 0 \end{cases}$$

# 单视图标定

$$\cos\theta = \frac{{v_1}^T \omega v_2}{\sqrt{{v_1}^T \omega v_1}\sqrt{{v_2}^T \omega v_2}}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_5 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix}$$



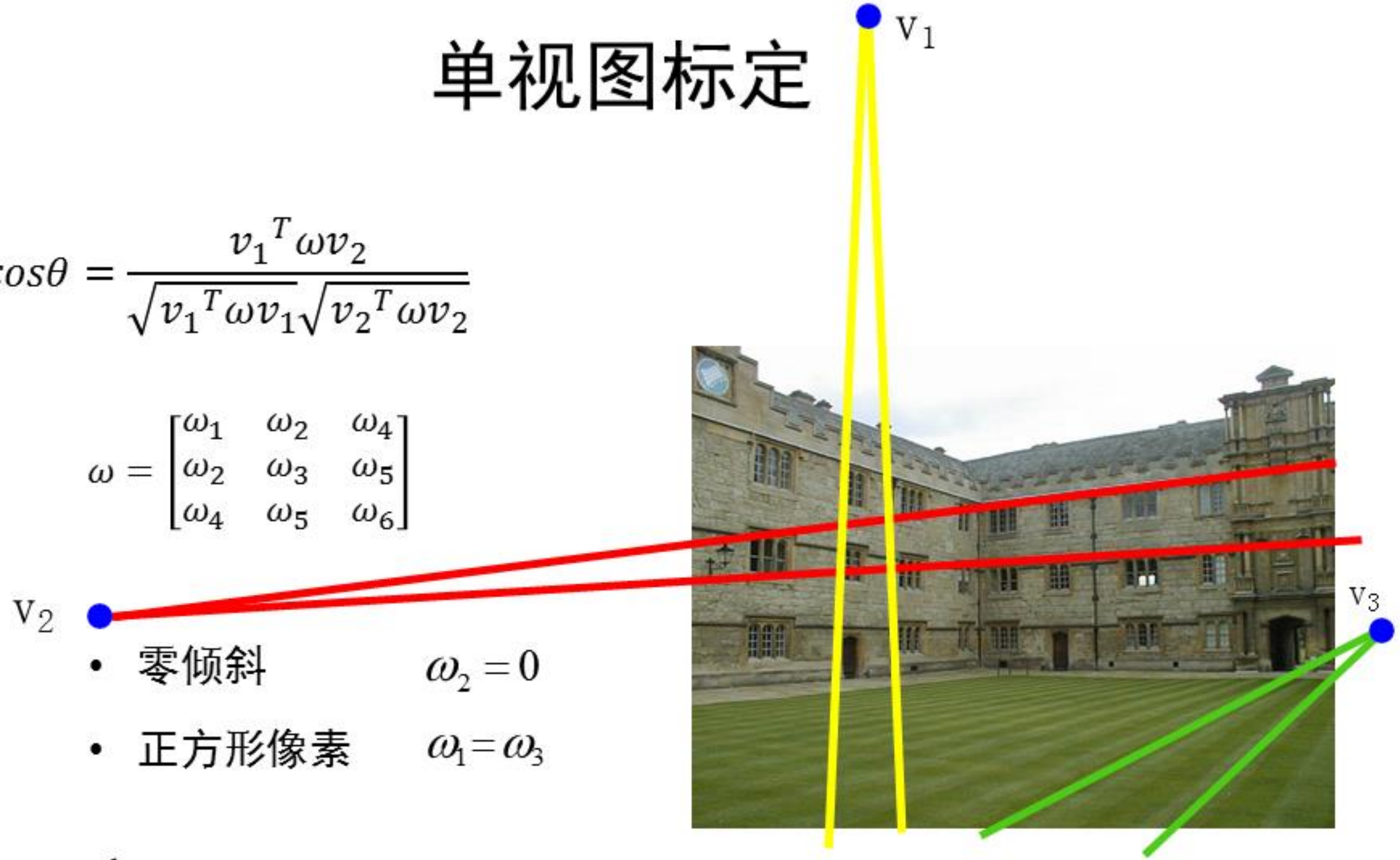

- 零倾斜 $\omega_2 = 0$
- 正方形像素 $\omega_1 = \omega_3$

$$\begin{cases} {v_1}^T \omega v_2 = 0 \\ {v_1}^T \omega v_3 = 0 \\ {v_2}^T \omega v_3 = 0 \end{cases}$$

# 单视图标定

$$cos\theta = \frac{v_1{}^T \omega v_2}{\sqrt{v_1{}^T \omega v_1}\sqrt{v_2{}^T \omega v_2}}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_5 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix}$$



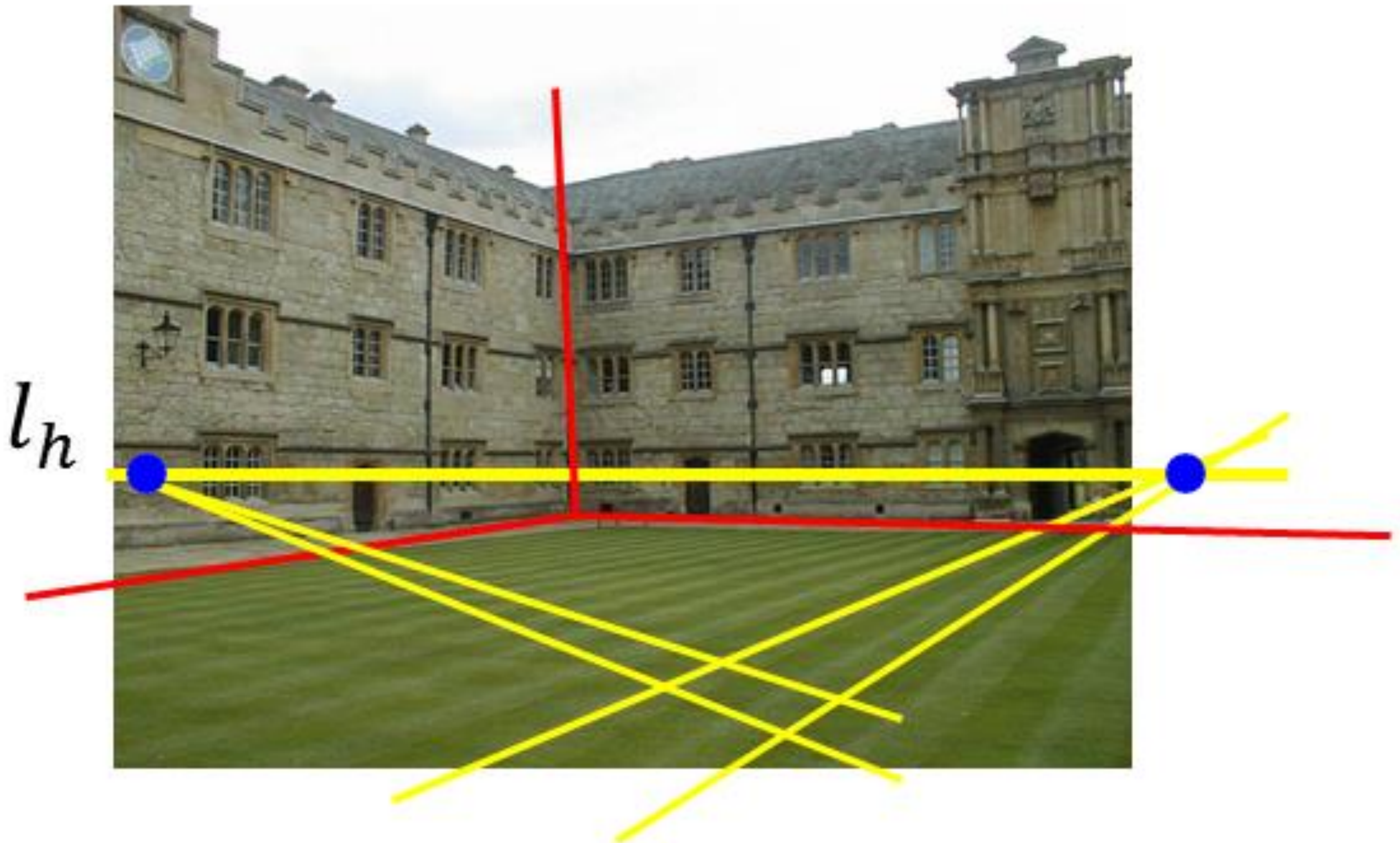

- 零倾斜 $\omega_2 = 0$
- 正方形像素 $\omega_1 = \omega_3$

$$\begin{cases} v_1{}^T \omega v_2 = 0 \\ v_1{}^T \omega v_3 = 0 \\ v_2{}^T \omega v_3 = 0 \end{cases}$$

计算 $\omega$ ，然后

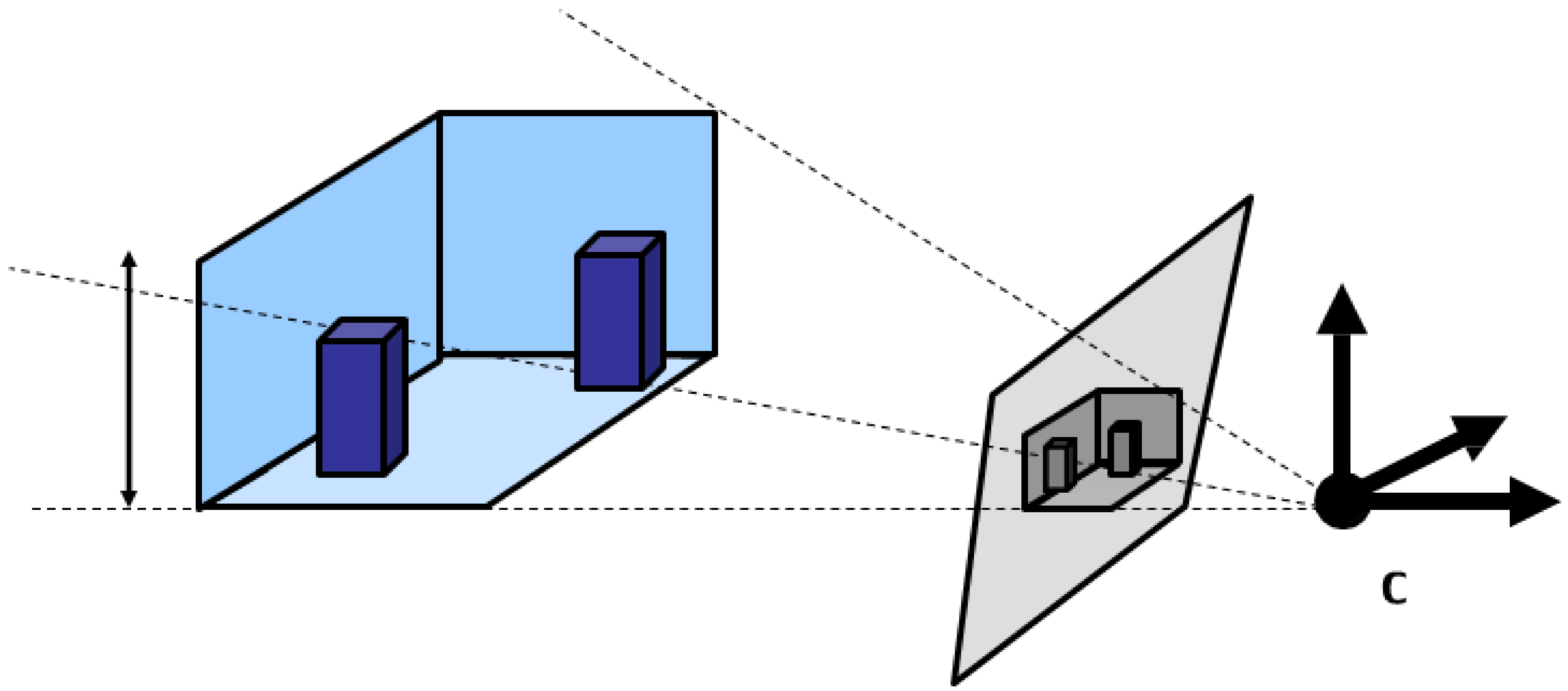
可以得到 $K$： $\omega = (K K^T)^{-1} \longrightarrow \mathrm{K}$

# 单视图重构




$\boldsymbol{K}$ 已知 $\longrightarrow$ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{K}^{T}\boldsymbol{l_h}$ = 相机参考系中的场景平面方向

# 单视图重构

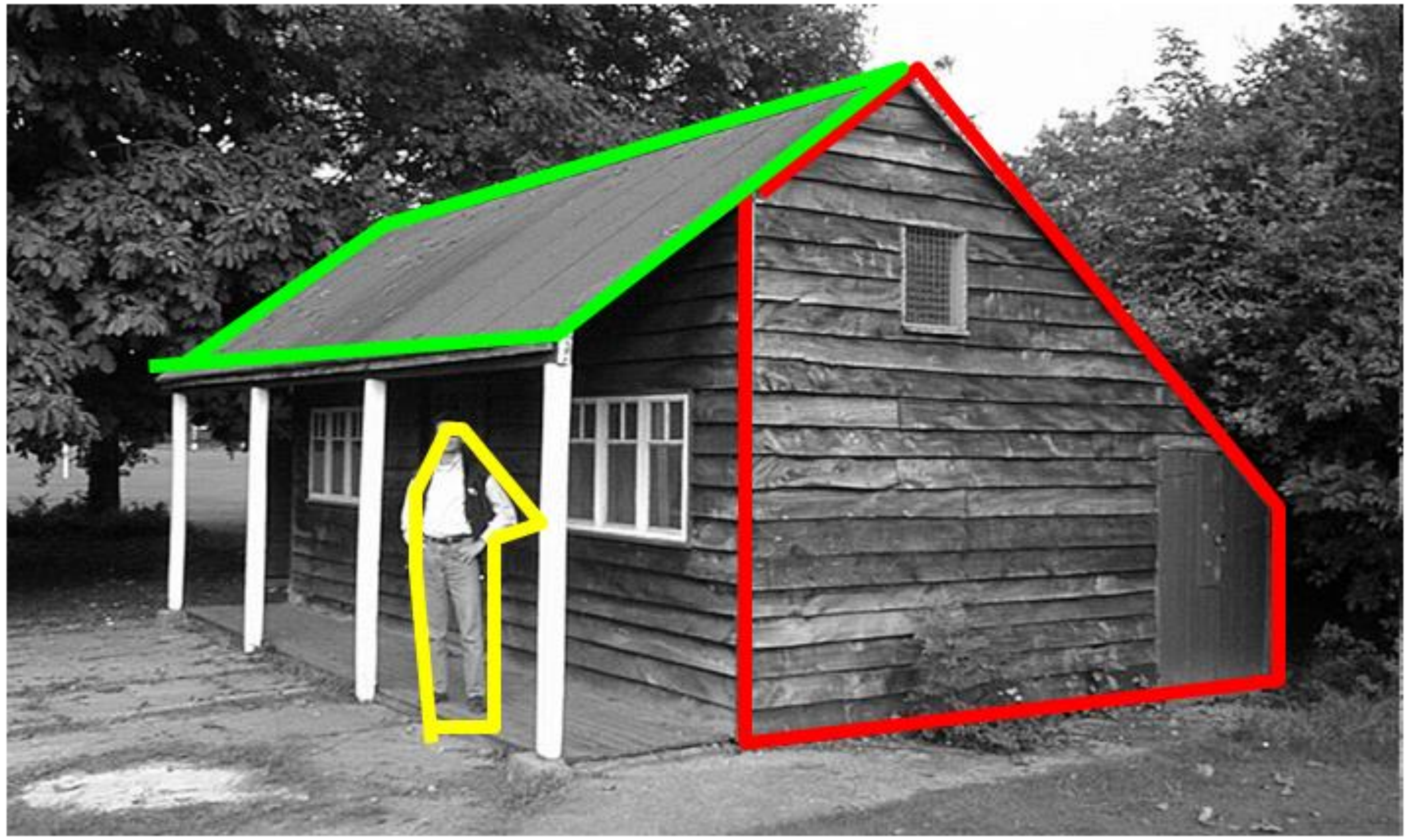



单视图恢复摄像机坐标系下的三维场景结构

注意：场景的实际比例无法恢复


http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/projects/SingleView/models/merton/merton.wrl

# 单视图重构 - 弊病



手动选择：

影消点与影消线；

场景先验信息（点对应关系，线、面几何信息等等）

## 3. 单视图测量

- 2D变换
- 影消点与影消线
- 单视图重构（完）