# 2. 摄像机标定

- 摄像机标定
- 径向畸变摄像机标定

# 为什么重要？

摄像机标定，即求解摄像机内外参数

# 为什么重要？

摄像机内、外参数描述了三维世界到二维像素的映射关系

# 标定目标

$$P' = MP_w = \underbrace{\boxed{K}}_{\text{内参数}}\underbrace{\boxed{[R\ T]}}_{\text{外参数}}P_w$$

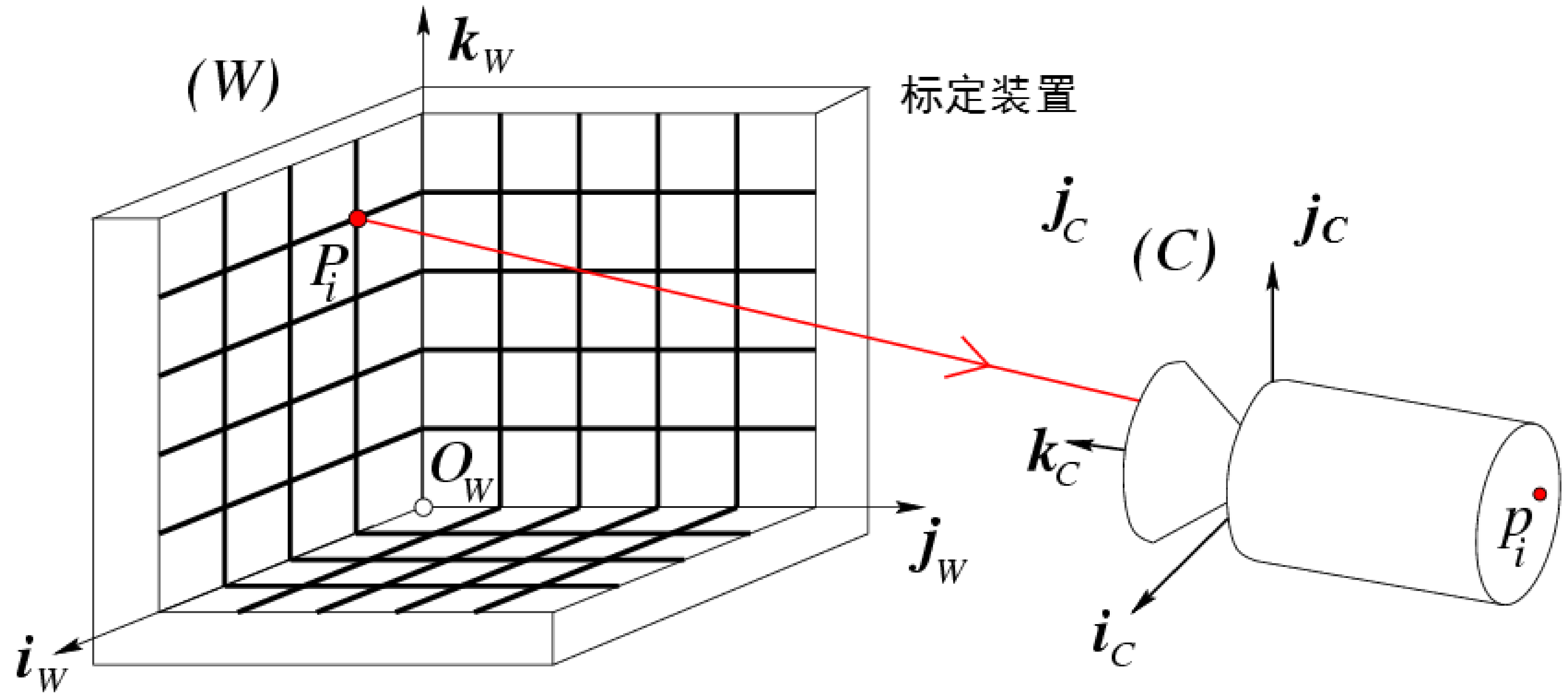
目标：从1张或多张图像中估算内外参数

更换符号：

$P = P_w$

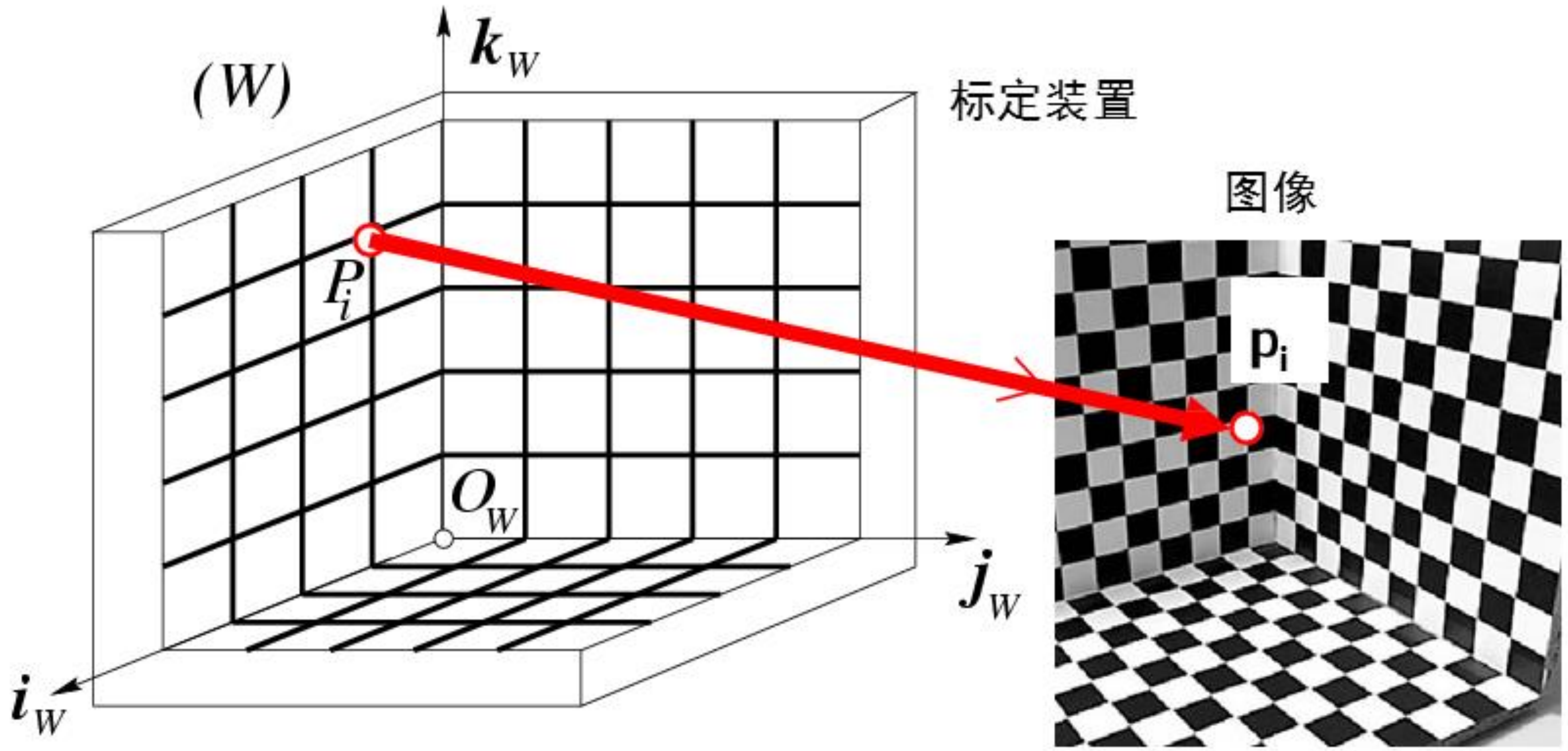
$p = P'$

# 标定问题




- 世界坐标系中$P_1 \cdots P_n$位置已知

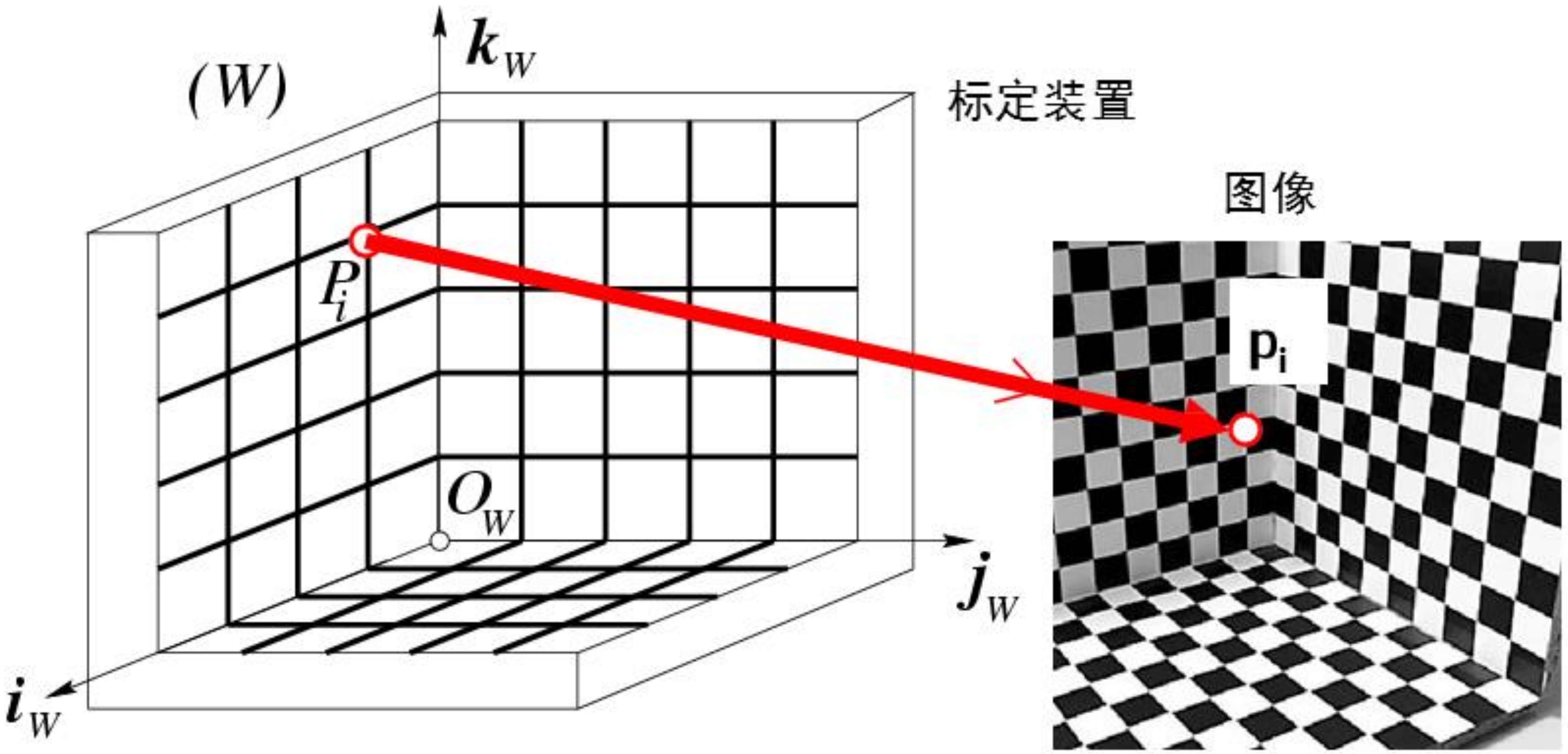
# 标定问题




- 世界坐标系中 $P_1 \cdots P_n$ 位置已知
- 图像中 $p_1 \cdots p_n$ 位置已知

目标：计算摄像机内、外参数

# 标定问题




$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \dfrac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

像素

# 问题：摄像机投影矩阵有几个未知量?

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

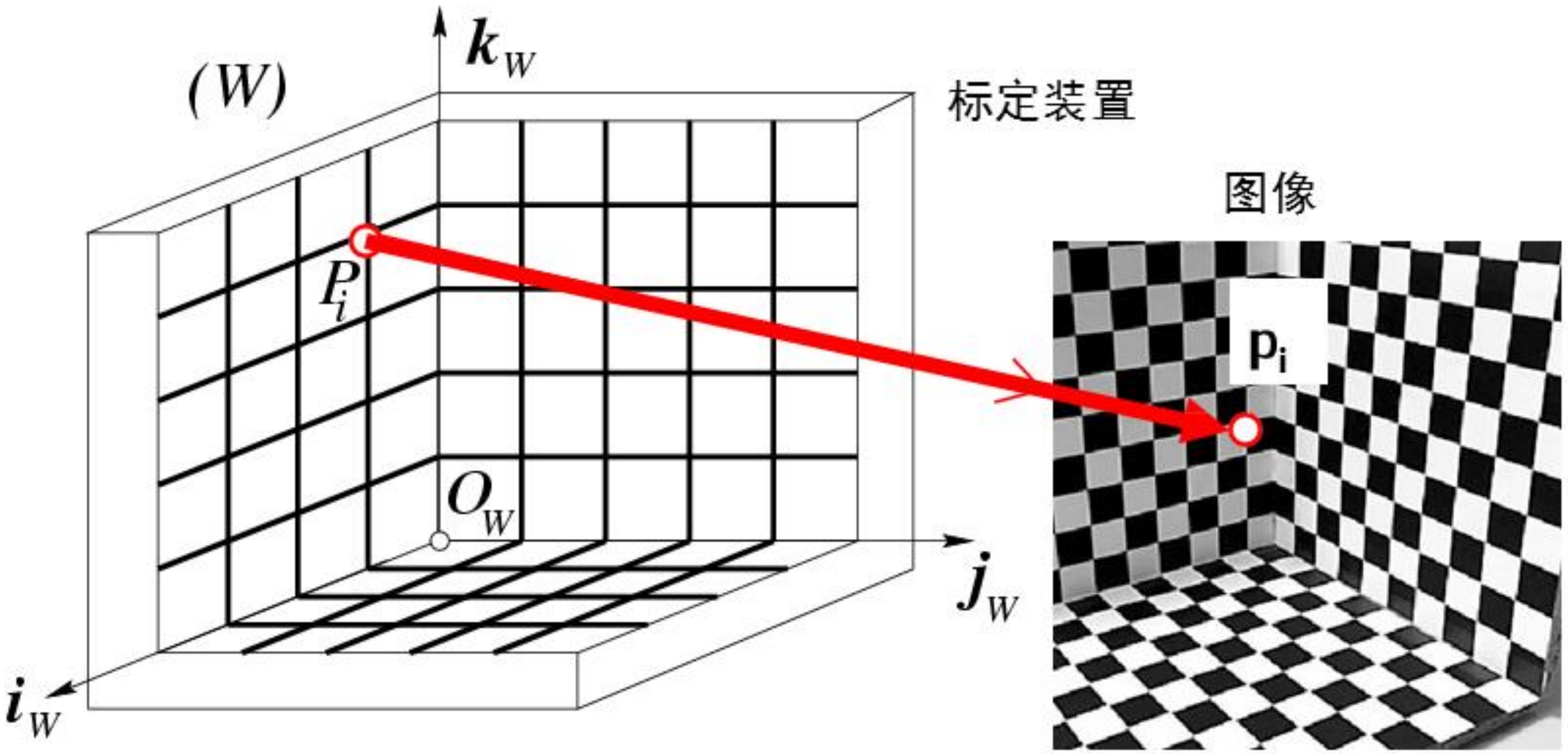
像素

# 问题：求解投影矩阵需要多少对应点?

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

像素

# 标定问题




实际操作中使用多于六对点来获得更加鲁棒的结果。

# 标定问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix}$$

$$u_i = \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \rightarrow u_i(m_3 P_i) = m_1 P_i \rightarrow u_i(m_3 P_i) - m_1 P_i = 0$$

$$v_i = \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \rightarrow v_i(m_3 P_i) = m_2 P_i \rightarrow v_i(m_3 P_i) - m_2 P_i = 0$$

# 标定问题

$$\begin{cases} u_1(m_3P_1) - m_1P_1 = 0 \\ v_1(m_3P_1) - m_2P_1 = 0 \\ \vdots \\ u_i(m_3P_i) - m_1P_i = 0 \\ v_i(m_3P_i) - m_2P_i = 0 \\ \vdots \\ u_n(m_3P_n) - m_1P_n = 0 \\ v_n(m_3P_n) - m_2P_n = 0 \end{cases}$$

# 标定问题

$$\begin{cases} -u_1(m_3P_1) + m_1P_1 = 0 \\ -v_1(m_3P_1) + m_2P_1 = 0 \\ \vdots \\ -u_n(m_3P_n) + m_1P_n = 0 \\ -v_n(m_3P_n) + m_2P_n = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\boxed{\mathbf{P}}\,\boxed{\mathbf{m}=0}}$$

已知

未知

齐次线性方程组

1x4

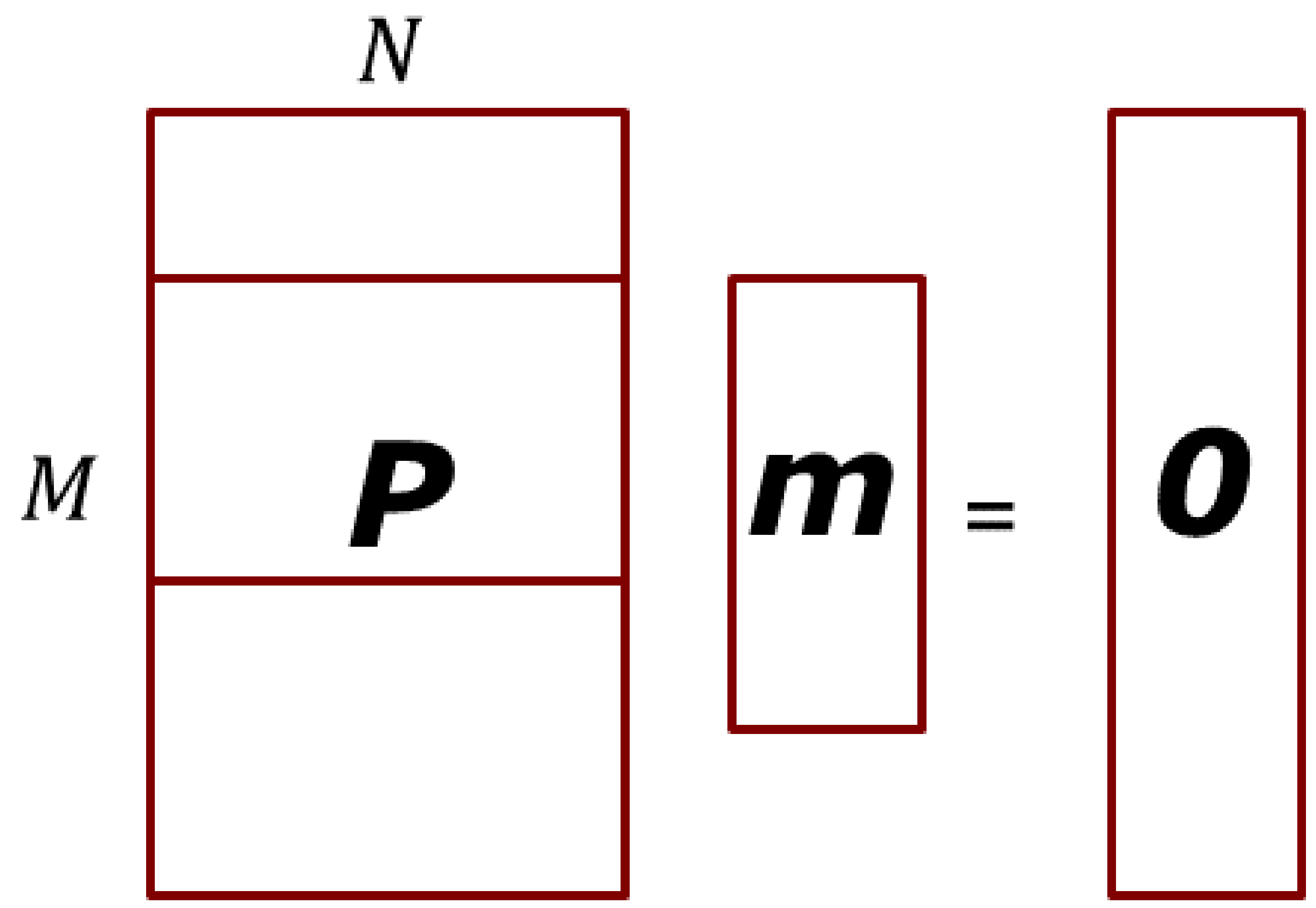
$$P \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{pmatrix} {P_1}^T & 0^T & -u_1\boxed{{P_1}^T} \\ 0^T & {P_1}^T & -v_1{P_1}^T \\ & \vdots & \\ {P_n}^T & 0^T & -u_n{P_n}^T \\ 0^T & {P_n}^T & -v_n{P_n}^T \end{pmatrix}_{2n\times 12}$$

4x1

$$m \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{pmatrix} \boxed{{\mathrm{m}_1}^T} \\ {\mathrm{m}_2}^T \\ {\mathrm{m}_3}^T \end{pmatrix}_{12\times 1}$$

# 齐次线性方程组

$M =$ 方程数 $= 2n$
$N =$ 未知参数 $= 11$




当$M > N$时，超定方程组（不少于6对点）

- 0 总是一个解，不存在非零解
- 目标：求非零解

$$\min_{\boldsymbol{m}} \|\boldsymbol{Pm}\|$$

$$s.t. \|\boldsymbol{m}\|=1$$

# 标定问题

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{gathered} \min_{\boldsymbol{m}} \|\boldsymbol{Pm}\| \\ s.t. \|\boldsymbol{m}\| = 1 \end{gathered}$$

# 标定问题

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \iff \begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{m}} \|\boldsymbol{Pm}\| \\ &s.t.\ \|\boldsymbol{m}\|=1 \end{aligned}$$

奇异值分解！！！

# 标定问题

$$\boxed{\boldsymbol{P}}\,\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{m}} \|\boldsymbol{Pm}\| \\ s.t. \|\boldsymbol{m}\|=1 \end{array}$$

奇异值分解！！！

$$\boxed{U_{2n\times12}D_{12\times12}V_{12\times12}^{T}}$$

# 标定问题

$$\boxed{\boldsymbol{P}}\,\boldsymbol{m} = \mathbf{0} \iff \begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{m}} \|\boldsymbol{P m}\| \\ s.t.\ \|\boldsymbol{m}\|=1 \end{array}$$

奇异值分解！！！

$$\boxed{U_{2n\times 12} D_{12\times 12} V_{12\times 12}^{T}}$$

结论：$\boldsymbol{m}$为P矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|\boldsymbol{m}\| = 1$

$$\boldsymbol{m} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} {m_1}^T \\ {m_2}^T \\ {m_3}^T \end{pmatrix} \Longrightarrow M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = [A\ b]$$

# 提取摄像机参数

$$P' = MP_w = \boxed{K}\,\boxed{[R\ T]}P_w$$

内参数　　外参数

$$\boxed{\mathrm{M}=\begin{pmatrix} \alpha {r_1}^T - \alpha cot\theta {r_2}^T + u_0 {r_3}^T & \alpha t_x - \alpha cot\theta t_y + u_0 t_z \\ \frac{\beta}{sin\theta} {r_2}^T + v_0 {r_3}^T & \frac{\beta}{sin\theta} t_y + v_0 t_z \\ {r_3}^T & t_z \end{pmatrix}_{3\times 4}}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} {r_1}^T \\ {r_2}^T \\ {r_3}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

# 提取摄像机参数

$$A=\begin{bmatrix} {a_1}^T \\ {a_2}^T \\ {a_3}^T \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

求解得到的$\boldsymbol{M}$

$$\rho\boxed{[A\ b]} = K[R\ \mathrm{T}]$$

$$\Downarrow$$

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix} {a_1}^T \\ {a_2}^T \\ {a_3}^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha {r_1}^T-\alpha cot\theta {r_2}^T+u_0{r_3}^T \\ \frac{\beta}{sin\theta}{r_2}^T+v_0{r_3}^T \\ {r_3}^T \end{pmatrix}=KR$$

$$K[R\ \mathrm{T}]=\begin{pmatrix} \alpha {r_1}^T-\alpha cot\theta {r_2}^T+u_0{r_3}^T & \alpha t_x-\alpha cot\theta t_y+u_0t_z \\ \frac{\beta}{sin\theta}{r_2}^T+v_0{r_3}^T & \frac{\beta}{sin\theta}t_y+v_0t_z \\ {r_3}^T & t_z \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} {r_1}^T \\ {r_2}^T \\ {r_3}^T \end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

# 提取摄像机参数

$$A=\begin{bmatrix}a_1{}^T\\a_2{}^T\\a_3{}^T\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}a_1{}^T\\a_2{}^T\\a_3{}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha r_1{}^T-\alpha cot\theta r_2{}^T+u_0r_3{}^T\\\frac{\beta}{sin\theta}r_2{}^T+v_0r_3{}^T\\r_3{}^T\end{pmatrix}=KR$$

$$K=\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha cot\theta & u_0\\0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}r_1{}^T\\r_2{}^T\\r_3{}^T\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{bmatrix}$$

内参数

$$\rho=\frac{\pm1}{|a_3|}\qquad u_0=\rho^2(a_1\cdot a_3)\qquad v_0=\rho^2(a_2\cdot a_3)$$

# 提取摄像机参数

$$A=\begin{bmatrix}a_1{}^T\\a_2{}^T\\a_3{}^T\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}a_1{}^T\\a_2{}^T\\a_3{}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha r_1{}^T-\alpha cot\theta r_2{}^T+u_0r_3{}^T\\ \frac{\beta}{sin\theta}r_2{}^T+v_0r_3{}^T\\ r_3{}^T\end{pmatrix}=KR$$

$$\begin{cases}\rho^2\,(a_1\times a_3)=\alpha r_2-\alpha cot\theta r_1\\ \rho^2\,(a_2\times a_3)=\dfrac{\beta}{sin\theta}r_1\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho^2\,|a_1\times a_3|=\dfrac{|\alpha|}{sin\theta}\\ \rho^2\,|a_2\times a_3|=\dfrac{|\beta|}{sin\theta}\end{cases}$$

**内参数**

$$cos\theta=-\frac{(a_1\times a_3)\cdot(a_2\times a_3)}{|a_1\times a_3|\cdot|a_2\times a_3|}$$

$$K=\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha cot\theta & u_0\\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}r_1{}^T\\r_2{}^T\\r_3{}^T\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{bmatrix}$$

# 定理（Faugeras，1993）

$$M = K[\,R\ T\,] = [KR\ KT] = [A\ b] \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令 $M = (A \quad b)$ 为3×4的矩阵，$a_i^T\,(i = 1,2,3)$ 表示由矩阵 $A$ 的行

- $M$是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- $M$是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- $M$是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

# 提取摄像机参数

$$A=\begin{bmatrix}a_1{}^T\\a_2{}^T\\a_3{}^T\end{bmatrix}\qquad \text{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}a_1{}^T\\a_2{}^T\\a_3{}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha r_1{}^T-\alpha cot\theta r_2{}^T+u_0r_3{}^T\\ \dfrac{\beta}{sin\theta}r_2{}^T+v_0r_3{}^T\\ r_3{}^T\end{pmatrix}=KR$$

$$\begin{cases}\rho^2\,(a_1\times a_3)=\alpha r_2-\alpha cot\theta r_1\\ \rho^2\,(a_2\times a_3)=\dfrac{\beta}{sin\theta}r_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\rho^2\,|a_1\times a_3|=\dfrac{|\alpha|}{sin\theta}\\ \rho^2\,|a_2\times a_3|=\dfrac{|\beta|}{sin\theta}\end{cases}$$

内参数

$$\alpha=\rho^2|a_1\times a_3|sin\theta$$

$$\beta=\rho^2|a_2\times a_3|sin\theta$$

$$K=\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha cot\theta & u_0\\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}r_1{}^T\\r_2{}^T\\r_3{}^T\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{bmatrix}$$

# 定理（Faugeras，1993）

$$M = K[\ R\ T\ ] = [KR\ KT] = [A\ b] \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令 $M = (A \quad b)$ 为3×4的矩阵，$a_i^T (i = 1,2,3)$ 表示由矩阵 $A$ 的行

- $M$是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- $M$是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- $M$是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

# 提取摄像机参数

$$A=\begin{bmatrix}a_1{}^T\\ a_2{}^T\\ a_3{}^T\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$\rho A=\rho\begin{pmatrix}a_1{}^T\\ a_2{}^T\\ a_3{}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha r_1{}^T-\alpha cot\theta r_2{}^T+u_0 r_3{}^T\\ \frac{\beta}{sin\theta}r_2{}^T+v_0 r_3{}^T\\ r_3{}^T\end{pmatrix}=KR$$

$$\begin{cases}\rho^2\,(a_1\times a_3)=\alpha r_2-\alpha cot\theta r_1\\ \rho^2\,(a_2\times a_3)=\dfrac{\beta}{sin\theta}r_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\rho^2\,|a_1\times a_3|=\dfrac{|\alpha|}{sin\theta}\\ \rho^2\,|a_2\times a_3|=\dfrac{|\beta|}{sin\theta}\end{cases}$$

外参数

$$r_1=\frac{(a_2\times a_3)}{|a_2\times a_3|}\qquad r_3=\frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2=r_3\times r_1$$

$$K=\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha cot\theta & u_0\\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}r_1{}^T\\ r_2{}^T\\ r_3{}^T\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}t_x\\ t_y\\ t_z\end{bmatrix}$$

# 提取摄像机参数

$$A=\begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

求解得到的$\boldsymbol{M}$

$$\rho\boxed{[A\ b]} = K[R\ \mathrm{T}]$$

外参数

$$T = \rho K^{-1} b$$

$$K=\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

# 提取摄像机参数

求解得到的$\boldsymbol{M}$

$$\rho\boxed{[A\ b]} = K[R\ \mathrm{T}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b}= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

内参数

$$\rho = \frac{\pm 1}{|a_3|}$$

$$u_0 = \rho^2(a_1 \cdot a_3)$$

$$v_0 = \rho^2(a_2 \cdot a_3)$$

$$cos\theta = -\frac{(a_1 \times a_3)\cdot(a_2 \times a_3)}{|a_1 \times a_3|\cdot|a_2 \times a_3|}$$

$$\alpha = \rho^2|a_1 \times a_3|sin\theta$$

$$\beta = \rho^2|a_2 \times a_3|sin\theta$$

外参数

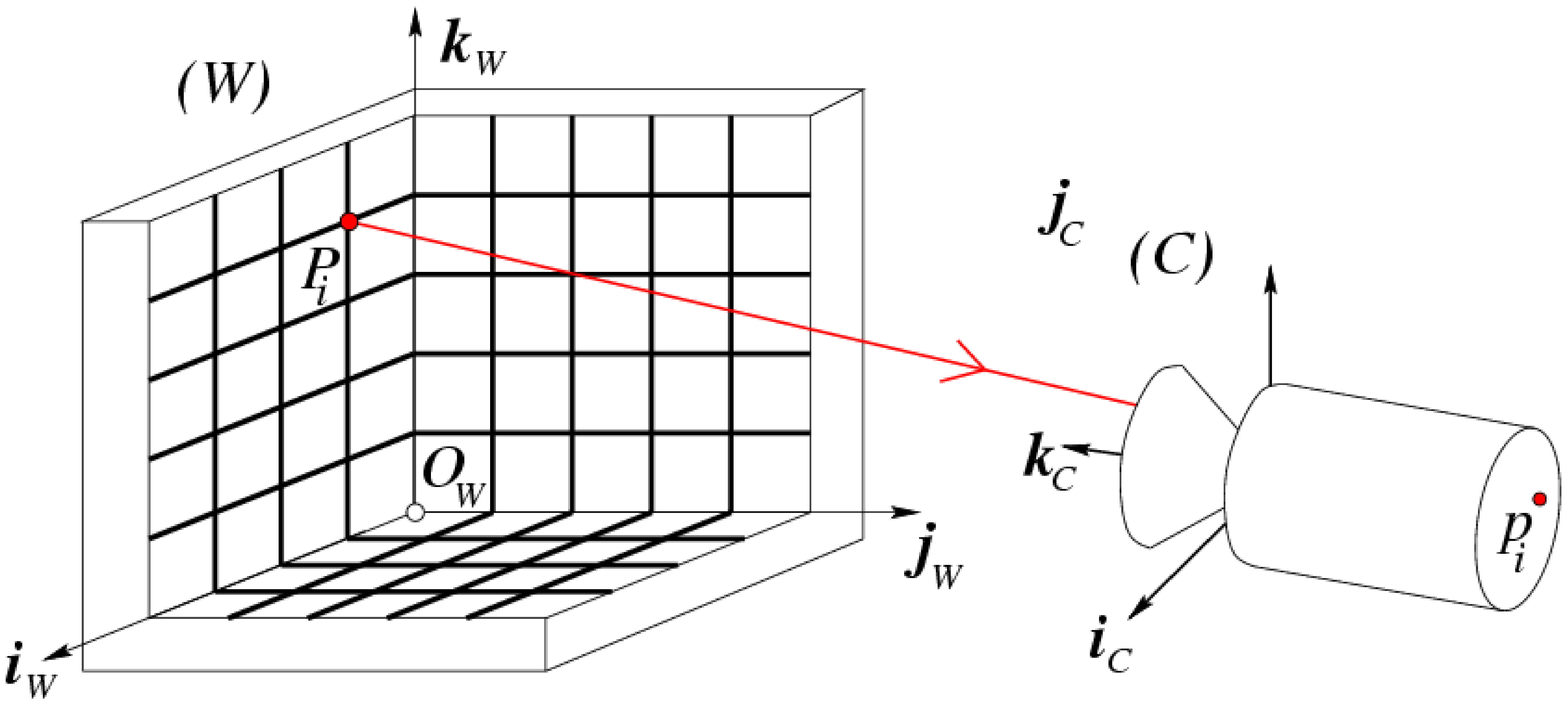
$$r_1 = \frac{(a_2 \times a_3)}{|a_2 \times a_3|}$$

$$r_3 = \frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2 = r_3 \times r_1$$

$$T = \rho K^{-1} b$$

# 退化示例




- $P_i(i = 1, \cdots, n)$不能位于同一平面!!!

# 2. 摄像机标定

- 摄像机标定（完）

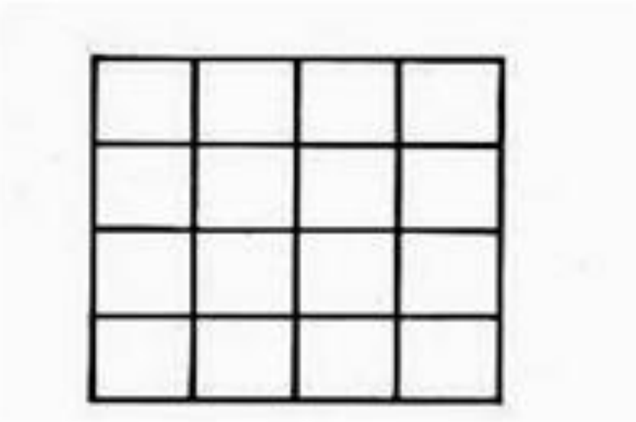
- 径向畸变摄像机标定

## 2. 摄像机标定

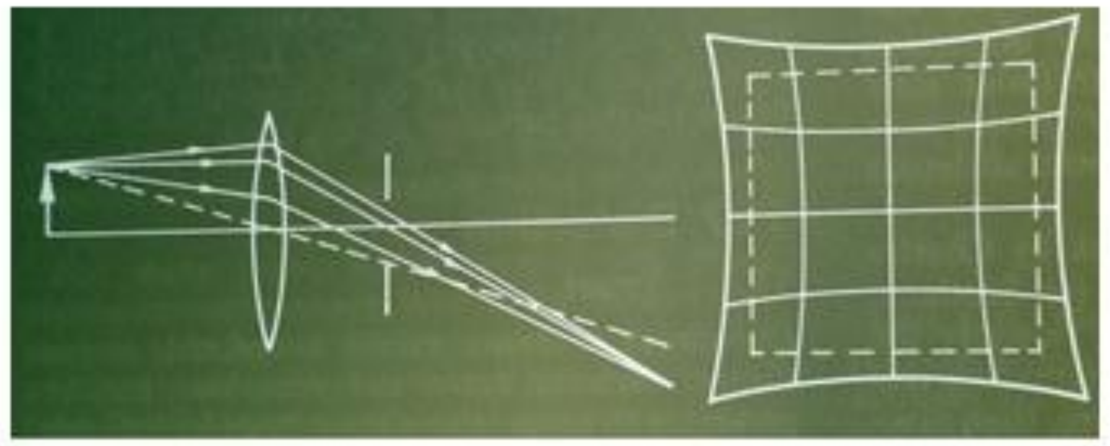
- 摄像机标定
- 径向畸变摄像机标定

# 透镜问题：径向畸变

- 径向畸变：图像像素点以畸变中心为中心点，沿着径向产生的位置偏差，从而导致图像中所成的像发生形变

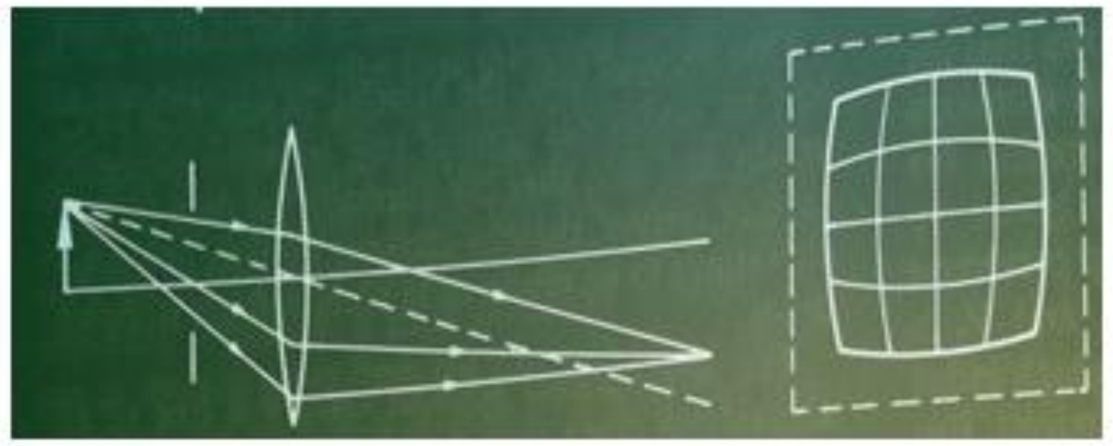


没有畸变



枕形

畸变像点相对于理想像点沿径向向外偏移，远离中心



桶形

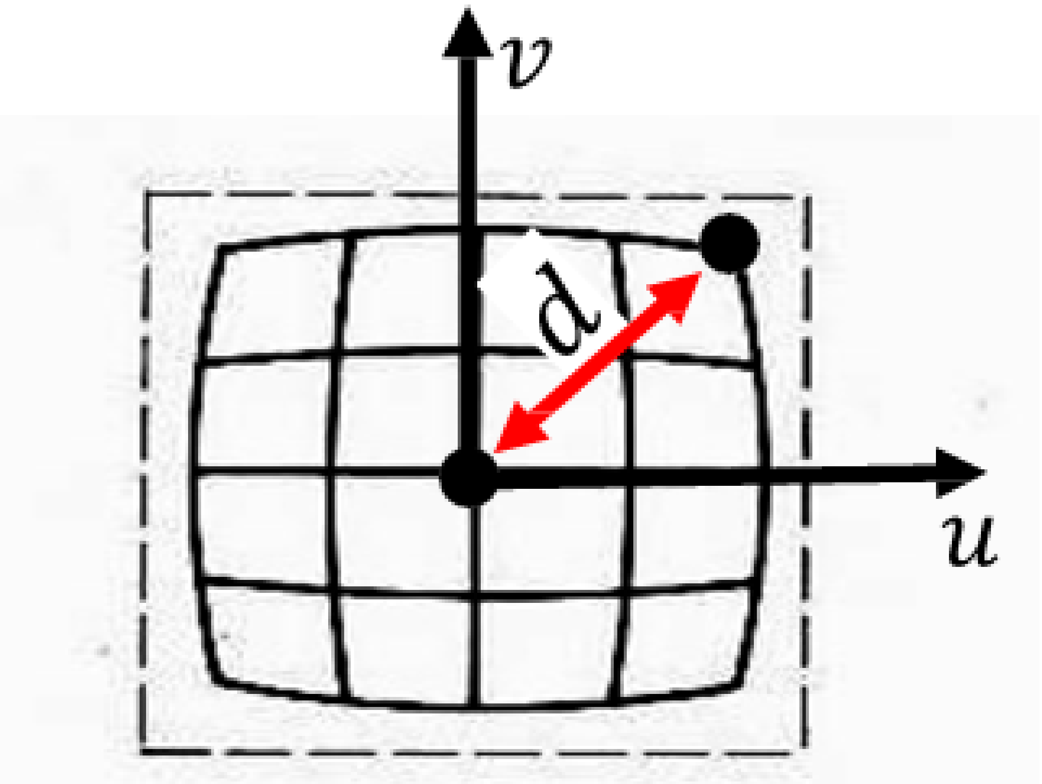
畸变像点相对于理想点沿径向向中心靠拢


产生原因：光线在远离透镜中心的地方比靠近中心的地方更加弯曲

# 径向畸变

图像放大率随距光轴距离的增加而减小

如何建模？




$$\overset{S_\lambda}{\boxed{\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}} MP_i \rightarrow \begin{bmatrix}u_i \\ v_i\end{bmatrix} = p_i$$

$$\lambda = \underbrace{1 \pm \sum_{p=1}^{3} \overset{\text{畸变因子}}{\boxed{K_p}} d^{2p}}_{\text{多项式函数}}$$

$$d^2 = u^2 + v^2$$

建模径向特性

# 径向畸变

$$\overset{Q}{\boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} M P_i \to \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \dfrac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

# 径向畸变

$$\overset{Q}{\boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

问题：这是线性方程组吗？

# 径向畸变

$$\overset{Q}{\boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

问题：这是线性方程组吗？

不是！

# 标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \frac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \longrightarrow X = f(Q)$$

测量值 参数

$i = 1 \dots n$

$f(\,)$ 为非线性映射

# 标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \frac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \longrightarrow X = f(Q)$$

测量值　　参数

$i = 1 \ldots n$　　$f(\,)$ 为非线性映射

- 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）
  - 从初始解开始迭代
  - 若初始解与实际相距较远，可能会很慢
  - 估计解可能是初始解的函数（由于局部最小值）
  - 牛顿法需要计算一阶导矩阵J（雅可比矩阵），二阶导矩阵H（海塞矩阵）
  - L-M算法不用计算H

# 标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \dfrac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \longrightarrow X = f(Q)$$

测量值　参数

$$i = 1 \dots n$$

$f(\,)$ 为非线性映射

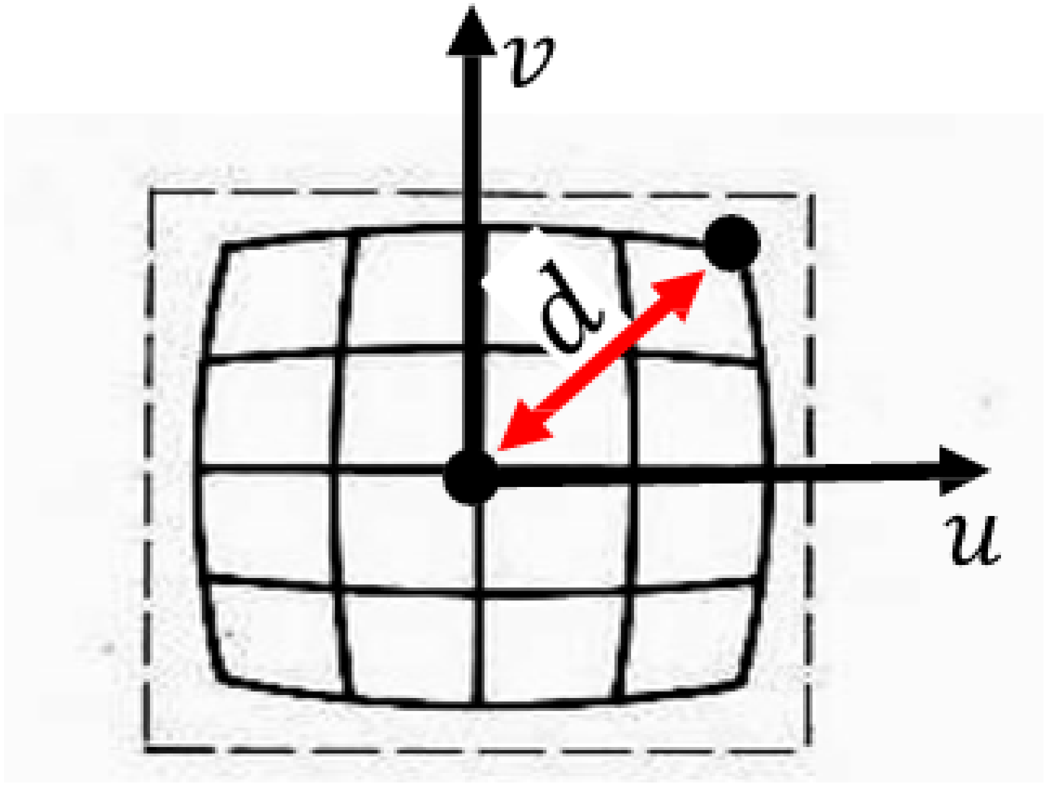
一种可能算法

1. 求解系统的线性部分以找到近似解
2. 使用该解作为整个系统的初始条件
3. 使用牛顿法或 L-M 算法求解整个系统

# 求解线性部分

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \dfrac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 p_i}{m_3 p_i} \\ \dfrac{m_2 p_i}{m_3 p_i} \end{bmatrix}$$

我们能估计出 $m_1$ 和 $m_2$ 并忽视径向畸变吗?



# 求解线性部分

估计 $m_1$ 和 $m_2$ ···

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 p_i}{m_3 p_i} \\ \dfrac{m_2 p_i}{m_3 p_i} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{u_i}{v_i} = \frac{\frac{1}{\lambda}\frac{(m_1 P_i)}{(m_3 p_i)}}{\frac{1}{\lambda}\frac{(m_2 p_i)}{(m_3 p_i)}} = \frac{m_1 p_i}{m_2 p_i}$$

$$\begin{cases} v_1(m_1 P_1) - u_1(m_2 P_1) = 0 \\ v_i(m_1 P_i) - u_i(m_2 P_i) = 0 \\ \vdots \\ v_n(m_1 P_n) - u_n(m_2 P_n) = 0 \end{cases}$$

$$L\boldsymbol{n} = 0 \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 {p_1}^T & -u_1 {p_1}^T \\ v_2 {p_2}^T & -u_2 {p_2}^T \\ \vdots & \vdots \\ v_n {p_n}^T & -u_n {p_n}^T \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

通过SVD求得 $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} {m_1}^T \\ {m_2}^T \end{bmatrix}$

# 求解线性部分

一旦估计出 $m_1$ 和 $m_2$ ···

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 p_i}{m_3 p_i} \\ \dfrac{m_2 p_i}{m_3 p_i} \end{bmatrix}$$

**$\boldsymbol{m_3}$ 是关于 $\boldsymbol{m_1}$，$\boldsymbol{m_2}$，$\boldsymbol{\lambda}$ 的非线性函数**

- 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

## 2. 摄像机标定

- 摄像机标定
- 径向畸变摄像机标定（完）