Introduktion til matematisk logik og beviser

0. Indledning

I disse noter skal vi beskæftige os med den matematiske metode samt logik og bevisteknikker. I arbejdet med matematik i såvel folkeskolen som i gymnasiet er fokusset i høj grad på udregninger og anvendelser, men matematik udgøres i lige så høj grad af argumentation og logik. Målet med disse noter er at udvikle et begrebsapparat, som gør det muligt, at formulere sig mere præcist inden for matematik. Endvidere vil det blive muligt at læse og forstå formuleringen af en matematisk sætning og dens bevis.

Vi starter med kort at beskrive den matematiske metode. Dernæst introduceres nogle vigtige logiske principper fra den aristoteliske logik, og til sidst vil vi bruge denne til at formulere, hvad vi forstår ved et bevis. Til dette vil vi knytte nogle bevisstrategier, som ikke bare er værktøjer, men som også kan bruges til at forstå beviser gennemgået i lærebøger.

1. Den matematiske metode

Den matematiske metode kaldes den aksiomatisk-deduktive metode. Den aksiomatisk-deduktive metode går i al sin enkelthed ud på, at man stedfæster en lille samling af aksiomer,[1] og ud fra disse aksiomer, kan man deducere, altså udlede, såkaldte sætninger, som er sande i kraft af deduktionen ud fra aksiomerne. En deduktion er løst sagt en logisk slutning, og vi skal definere dette præcist senere.

I modsætningen til den naturvidenskabelige metode garanterer matematikken, at dens udsagn er absolut sande - udsagnene er således ikke blot hypoteser, hvis sandhedsværdi kan sandsynliggøres gennem eksperimenter. Når vi fx skal vise, at en trekant har en vinkelsum på 180 grader, sætter vi os ikke ned og tegner 20-25 trekanter, måler deres vinkler, beregner deres vinkelsummer og tager gennemsnittet. Selvom tallet vil være tæt på 180, vil det aldrig blive præcis 180 pga. målefejl. I stedet bruger vi de geometriske aksiomer til at vise, at vinkelsummen i en trekant netop svarer til vinklen i en halvcirkel, som vi ved er 180 grader.

Det er på dette tidspunkt vigtigt at slå fast, at "absolut" sandhed i virkeligheden er en noget ukorrekt påstand. Dette skyldes, at vi tænker på sandhed i relation til de aksiomer, som matematikken er bygget på. Derfor er sandheden relativ ift. aksiomerne, og det er vigtigt at huske. Der findes mange filosofiske diskussioner om, hvorvidt matematikken er sand eller ej, men vi vil ikke tage denne diskussion i disse noter.

[1] Et aksiom er en fastlagt regel, som vi anser som værende sand. Et eksempel på et aksiom kunne være den velkendte kommutative lov for addition, dvs. alle tal a og b opfylder $a + b = b + a$.

2. Udsagn, prædikater og logiske tegn

Vi vil i dette afsnit kort introducere matematisk logik. Vi vil ikke arbejde med streng formel logik, men i stedet vil vi præcisere det matematiske sprog, der normalt anvendes i gymnasiet.

Definition (udsagn)
Et (matematisk) udsagn er en udtalelse, der enten er sand eller falsk.

Til et udsagn skal vi altså kunne knytte én sandhedsværdi: sand eller falsk. Vigtigt er dog, at udsagnet ikke er både sandt og falsk. Lad os se på et par eksempler:

Eksempel 1

Herunder er en række udtalelser:

1) $2 + 2 = 4$
2) $2 + 2 = 5$
3) $1 < 2$
4) *Ost smager dårligt*
5) $x > 2$

Udtalelse 1) er et sandt udsagn, mens udtalelse 2) er et falsk udsagn. Udtalelse 3) er et sandt udsagn. Udtalelse 4) er derimod ikke et udsagn, da udtalelsens sandhedsværdi er afhængig af subjektive holdninger. Sammenligner vi med udsagn 1), så er $2 + 2 = 4$ sandt, uanset hvem du spørger, hvorimod det ikke er alle, der synes, at ost smager dårligt. En generel tommelfingerregel er, at udtalelser, som er relative, ikke er udsagn (i logisk forstand). Udtalelse 5) er IKKE et udsagn, da vi ikke har fastlagt værdien af x, så det er umuligt at sige, om udtalelsen er sand eller falsk. Vi har dog et fint navn til udtalelser af denne type - nemlig prædikater.

Definition (prædikat)

En udtalelse, der indeholder en fri variabel, kaldes for et prædikat.

Et eksempel på et prædikat er netop udtalelse 5) i Eksempel 1. Begrebet en fri variabel betegner i bund og grund bare en ukendt variabel x. Man kan til en start tænke på x som et tal. Et prædikat kaldes også for et åbent udsagn. Andre eksempler på prædikater er $x < 0$ og $\int_0^x e^t dt > 5$.

Vi betegner ofte prædikater i en variabel x med $p(x)$. For at skelne denne notation fra funktioner, skriver vi ALDRIG lighedstegn mellem $p(x)$ og prædikatet. I stedet skriver vi fx:

$$p(x): x < 0$$

Forvirringen kan nemlig opstå, hvis prædikatet er en polynomiel ulighed såsom:

$$q(x): x^2 + x - 12 > 0$$

Havde vi skrevet et lighedstegn, ville vi have skrevet noget sludder. Bemærk også notationen: Hvis vi før har brugt bogstavet p i vores prædikat, er det en god skik at skifte bogstav, hvis man skal definere et nyt prædikat i samme afsnit - ofte kan man nøjes med at bruge det næste bogstav i alfabetet. Det er ikke forkert at kalde alle sine prædikater for $p(x)$, men hvis man har defineret tre forskellige prædikater, som alle hedder $p(x)$, kan det være svært at henvise tilbage til dem. Vi skal senere se, hvordan man kan bruge prædikater til at konstruere udsagn.

Som afslutning på dette afsnit vil vi se på nogle vigtige logiske tegn, som bruges ofte i matematikken - disse kaldes logiske konnektiver. Lad p og q være udsagn. Da defineres følgende sammensatte udsagn:

- *Konjunktion*: $p \wedge q$ skal læses som ”p og q”, og dette udsagn er sandt, når både p og q er sande.
- *Disjunktion*: $p \vee q$ skal læses som ”p eller q”, og udsagnet er falsk, hvis både p og q er falske, og det er sandt ellers.
- *Negation*: $\neg p$ skal læses som ”non p”, og udsagnet er sandt, hvis p er falsk, og det er falsk, hvis p er sand.
- *Implikation*: $p \Rightarrow q$ skal læses som ”p medfører q”, eller ”hvis p så q”. Udsagnet er defineret til at være falsk, hvis p er sand, og q er falsk, ellers er det sandt. I dette tilfælde kalder vi p for hypotesen og q for konklusionen.
- *Biimplikation*: $p \Leftrightarrow q$ skal læses som ”p hvis og kun hvis q” eller ”p er ækvivalent med q”. Udsagnet er sandt, hvis p og q begge er sande eller falske, ellers er det falsk.

Det kan for mange virke underligt, at implikationen kun er falsk i ét tilfælde, og det er netop, når hypotesen er sand, men konklusionen er falsk. En anden måde at tænke på det på er, at det eneste, implikationen fortæller os, er, at hvis hypotesen er sand, så skal konklusionen også være sand.

3. Sandhedstabeller

Vi skal nu se på noget, der kaldes sandhedstabeller. En sandhedstabel er en tabel, som kan give et godt overblik over sandheden af forskellige sammensatte udsagn. De logiske tegn, som blev defineret ovenfor, kan indføres i en sandhedstabel, som er angivet i Eksempel 2.

Eksempel 2

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
S	S	S	S	F	S	S
S	F	F	S	F	F	F
F	S	F	S	S	S	F
F	F	F	F	S	S	S

Bemærk at S står for ”sand”, og F står for ”falsk”.

Sandhedstabeller kan også bruges, hvis der er flere end to udsagn i spil. Vi skal nu indføre to nye logiske begreber:

Definition

*En **tautologi** er et sammensat udsagn, som er sandt for alle sandhedsværdier af de indgående udsagn. En **modstrid** er et sammensat udsagn, som er falsk for alle sandhedsværdier af de indgående udsagn.*

Vi bemærker, at ingen af de sammensatte udsagn, vi har mødt indtil videre, er tautologier eller modstrider.

Eksempel 3

Et klassisk eksempel på en modstrid er udsagnet $p \wedge (\neg p)$ (p og non-p). Følgende sandhedstabel viser, at det er en modstrid:

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
S	F	F
F	S	F

Intuitionen bag dette udsagn er, at vi ikke kan have, at både p og dets negation (non-p) begge er sande. Er dette tilfældet, siger vi, at vi har et paradoks.

Eksempel 4

Vi skal nu se et eksempel på en sandhedstabel, hvor der indgår tre individuelle udsagn. Vi kigger på det sammensatte udsagn $\big(\neg(p \vee q)\big) \Rightarrow r$.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\big(\neg(p \vee q)\big) \Rightarrow r$
S	S	S	S	F	S
S	S	F	S	F	S
S	F	S	S	F	S
S	F	F	S	F	S
F	S	S	S	F	S
F	S	F	S	F	S
F	F	S	F	S	S
F	F	F	F	S	F

Det er vigtigt at huske, at hvis man skal bevise, at et udsagn er en tautologi eller en modstrid, så skal man lave en sandhedstabel. Hvis kolonnen med det undersøgte udsagn kun har S'er i sig, er det en tautologi, og hvis der kun er F'er, er det en modstrid. Er der både S'er og F'er, er det hverken en modstrid eller en tautologi.

Hvis man har en længere streng af logiske konnektiver, er det vigtigt, at man husker at sætte nogle parenteser. Udsagnet $p \wedge q \vee r \Leftrightarrow p \vee \neg q$ har altså ingen mening, før man har sat parenteser. Man kan nemlig læse udsagnet som $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$, såvel som $(p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow p) \vee \neg q$, hvilket er to udsagn med vidt forskellige betydninger. Derfor er tommelfingerreglen: Husk at sætte parenteser i længere sammensatte udsagn! Vi introducerer nu vores næste vigtige begreb:

Definition

To udsagn p og q kaldes logisk ækvivalente, hvis $p \Leftrightarrow q$ er en tautologi. Vi skriver $p \equiv q$, såfremt p og q er logisk ækvivalente.

Vi afslutter dette afsnit med nogle ”regneregler” for logiske tegn. Disse er praktiske at kunne huske, fordi de ofte kommer i spil ifm. bevisteknikker, som vi ser på senere.

<u>Sætning 1</u>

Lad p, q og r være udsagn. Da gælder følgende logiske ækvivalenser:

$$\neg(\neg p) \equiv p \tag{1}$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad ; \quad p \vee q \equiv q \vee p \tag{2}$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad ; \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{3}$$

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad ; \quad (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \tag{4}$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad ; \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \tag{5}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \tag{6}$$

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \tag{7}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p \tag{8}$$

<u>Bevis:</u>

Vi nøjes med at vise (1) og (2). Resten overlades som øvelse til læseren. Vi laver en sandhedstabel:

p	q	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
S	S	F	S	S	S	S	S	S	S	S
S	F	F	S	S	F	F	S	S	S	S
F	S	S	F	S	F	F	S	S	S	S
F	F	S	F	S	F	F	S	F	F	S

Da kolonne 5, 8 og 11 er lutter S’er konkluderer vi, at de logiske ækvivalenser i (1) og (2) passer. ■

I arbejdet med matematiske beviser, er det fordelagtigt at huske de logiske ækvivalenser fra Sætning 1 udenad. De vigtigste er (4), (5) og (8), fordi udsagn af disse typer er allestedsnærværende i matematikken. Faktisk er (8) så vigtig, at den har sit eget navn:

Definition

Givet en implikation $p \Rightarrow q$, så kaldes det ækvivalente udsagn (8) ¬q ⇒ ¬p for ***den kontraponerede implikation****.*

4. Kvantorer

Tidligere så vi på, hvordan vi kunne konstruere åbne udsagn, kaldet prædikater, i en fri variabel x. I dette afsnit skal vi nu se på, hvordan vi på en effektiv og kompakt måde kan gøre prædikater til udsagn. Vi skal indføre nogle tegn kaldet kvantorer. Inden vi når så langt, skal vi lige kort kigge på mængdebegrebet. Hvis M er en mængde, og vi gerne vil sige, at et element x er en del af mængden, skriver vi $x \in M$, som skal læses som ”x ligger i M” eller ”x tilhører M”. Tegnet ∈ kaldes et ”tilhørertegn”. Til at starte med kan læseren tænke på M som en mængde af tal. Vi prikker lidt til mængder her, fordi det indgår i definitionen af vores to kvantorer:

Definition

Lad $p(x)$ være et prædikat, og lad M være en mængde. Vi kan danne to nye udsagn ud fra disse. Det første udsagn kan vi skrive som:

$$\forall x \in M: p(x)$$

Dette udsagn skal læses som: ”for alle x i M gælder $p(x)$”, og udsagnet er sandt, hvis og kun hvis $p(x)$ er sand for alle elementer i M. Det andet udsagn skrives:

$$\exists x \in M: p(x)$$

Dette skal læses som: ”Der eksisterer/findes et x i M, således at $p(x)$ gælder”, og udsagnet er sandt, hvis og kun hvis et element i M opfylder $p(x)$ (der må endda gerne være flere end ét element, der opfylder $p(x)$). Tegnene ∀ og ∃ kaldes ***kvantorer****; mere specifikt kaldes ∀ for al-kvantoren og ∃ kaldes for eksistens-kvantoren.*

Eksempel 5

For at se kvantorerne i anvendelse kan vi betragte prædikatet i Eksempel 1.(5), som var $x > 2$. Hvis vi lader $M = \mathbb{R}$, [2] *kan vi danne to udsagn:*

$$\forall x \in \mathbb{R}: x > 2$$

$$\exists x \in \mathbb{R}: x > 2$$

Det første udsagn er tydeligvis noget sludder, thi tallet 0 er et reelt tal, men $2 > 0$, så prædikatet er falsk for 0 (og i øvrigt falsk for uendeligt mange elementer i $\mathbb{R}$). Det andet udsagn er sandt, idet vi kan pege på et element i $\mathbb{R}$ såsom 100, og der gælder jo, at $100 > 2$.

---

[2] $\mathbb{R}$ betragter mængden af reelle tal, som essentielt er alle de tal, man kender i gymnasiet. De indbefatter de hele tal 1,2,3 osv., negative tal, brøker og irrationale tal såsom e og $\sqrt{2}$.

Vi ser, at udsagn med al-kvantorer generelt er stærkere, fordi man skal have alle elementer fra en mængde med. Dog volder eksistensspørgsmål også en del problemer i matematikken.

Som med udsagn kan man også sammensætte prædikater, fx $p(x) \wedge q(x)$, og kommes en kvantor foran, har man et udsagn.

Man kan selvfølgelig også snakke om et prædikat i flere variable, fx $p(x, y)$, og så kan man kvantificere dette med to kvantorer, men siden vores primære udsagn foregår i én variabel, er denne teori ikke nødvendig. Vi kommer ikke til at rende ind i et tilfælde, hvor vi skal være forsigtige med to variable.

5. Det matematiske bevis

Vi har nu fået styr på vores logik, hvorfor tiden nu er kommet til, at vi skal i gang med beviser. Men hvad er et matematisk bevis egentlig? For at få styr på det, skal vi vide, hvad en deduktion er. Den formelle definition er som følger:

Definition (deduktion)

Lad $p_1, p_2, \dots, p_n$ være udsagn og lad q være endnu et udsagn. Vi siger, at vi har sluttet q deduktivt ud fra $p_1, p_2, \dots, p_n$, hvis følgende udsagn er en tautologi:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Vi siger, at en slutning af denne type er en gyldig slutning eller en deduktion.

Vi er nu klar til formelt at definere, hvad vi forstår ved et matematisk bevis:

Det matematiske bevis[3]

Lad q være et udsagn. Et bevis for q består af en kæde af udsagn $p_1, p_2, \dots, p_n$, hvorom der skal gælde:

1) $p_n = q$
2) *For hvert $i = 1,2, \dots, n$ er udsagnet p_i enten et aksiom i vores teori eller et tidligere bevist udsagn, som er fremkommet ved deduktion ud fra udsagnene $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}$.*

Et bevist udsagn kaldes en sætning, proposition eller et teorem.

Et bevis for q er således en kæde af deduktioner, der ender i q. Det, der afgør, om et bevis er gyldigt, er derfor, om de brugte antagelser faktisk er sande. Dette skyldes vores måde at definere implikationen på: Udsagnet $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ er jo netop sandt, hvis og kun hvis p_i er sand for alle i mellem 1 og n. Dvs. implikationen $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$ er en tautologi, hvis og kun hvis q er sand, når $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ er sand. Det kan være svært at forstå dette ved første gennemlæsning, så vi tager et eksempel:

[3] Definitionen stammer fra Diskrete Matematiske Metoder af Jesper Lützen, jf. litteraturlisten [1]

Eksempel 6

Lad os give et bevis for udsagnet ”Hvis et naturligt tal n er lige, så er n^2 igen lige”. Dette er et udsagn af formen $p \Rightarrow q$, så vi skal antage, at p er sand og vise, at q nødvendigvis må være sand.

Lad os antage at n er lige. Vi skal nu vide, hvad det betyder, at et naturligt tal er lige. Per definition betyder dette, at der findes et andet naturligt tal m, sådan at $n = 2m$. Vi kan nu regne på n^2:

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$$

Da m er naturligt, er m^2 også naturlig, og således er $2m^2$ naturlig. Vi har da vist, at $n^2 = 2(2m^2)$, hvilket præcis er formen for et lige tal, og da følger det, at n^2 er lige, som ønsket. ∎

Eksempel 6 viser, at antagelse om at n af lige sammen med den resterende matematiske teori medfører at n^2 er lige. Beviset er gyldigt, fordi de regneregler, vi brugte undervejs, er gyldige. Vi brugte også, at produktet af to naturlige tal igen er naturligt. Samlet set har vi deduceret, at n^2 er lige ud fra vores teori samt antagelse om, at n er lige.

Hvornår er et bevis så ikke gyldigt? Det er generelt et svært spørgsmål at svare på, fordi det ofte afhænger af betragteren. Den generelle konsensus omkring ugyldigheden af et bevis er, at man bruger forkerte fakta undervejs eller foretager en operation i modstrid med teorien. Nogle vil endda sige, at et bevis er forkert, hvis man foretager en rigtig operation, men ikke argumenterer for, hvorfor den er lovlig. Vi vil anse et bevis som ugyldigt, hvis der bruges ”ulovlige operationer” undervejs. Vi tager et eksempel:

Eksempel 7

Vi vil gennemføre et bevis for sætningen ”Det gælder at $2 = 1$”:

Lad a og b være tal, hvor $a = b$. Så er $a^2 = ab$. Trækker vi b^2 fra på begge sider har vi:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Dette giver ligheden $(a + b)(a - b) = b(a - b)$, hvoraf det følger, at:

$$a + b = b$$

Per antagelse er $a = b$ dvs. $2b = b$ og ved division med b opnås $2 = 1$, som ønsket. ∎

Eksempel 7 er et eksempel på en sætning, hvis konklusion er falsk, og beviset er også noget hø. Der bliver nemlig divideret med 0 i overgangen fra $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ til $a + b = b$ (husk at $a = b$ medfører, at $a - b = 0$), og det er strengt forbudt at dividerer med 0!

Eksempel 8

Vi vil bevise, at funktionen $f(x) = x$ har afledt $f'(x) = 1$:

Vi bemærker, at $f'(x) = \frac{d}{dx}$ *hvoraf det følger:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{d} = 1$$

Således er $f'(x) = 1$*, som ønsket.* ■

Eksempel 8 illustrerer et eksempel på en sætning, som er sand, men hvor beviset er fuldstændig tåbeligt! Fejlen, der begås, er, at $\frac{d}{dx}$ ikke er en brøk men en operation. Man skal i stedet opskrive differenskvotienten og undersøge, om den har en grænseværdi for $h \to 0$.

6. Bevisstrategier

Vi skal i dette afsnit give nogle værktøjer til at bevise udsagn af forskellige typer. Nogle strategier vil basere sig på logikken fra tidligere, mens andre har karakter af udledninger.

Strategi 1 (direkte bevis)

Et udsagn på formen ”vis at x opfylder egenskaben $p(x)$”:

For at vise dette, skal man have fat i definitionen for $p(x)$. Udsagnet vises da, når man ved deduktion viser, at x opfylder definitionen af $p(x)$. Da definitioner har mange forskellige karakterer, kan disse beviser afvige meget fra hinanden. Fx ”vis at 2 er lige” gøres ved at skrive $2 = 2 \cdot 1$, og så er man færdig. Anderledes er det, hvis man skal vise, at $f(x) = ax^n$ er differentiabel med afledt $f'(x) = nax^{n-1}$. Fælles for de to eksempler er dog, at de har karakter af en udregning, hvilket er karakteristisk for de definitioner, man møder i gymnasiet.

Strategi 2 (implikation)

Et udsagn af typen $p \Rightarrow q$ kan vises på følgende måder:

1° Man kan følge proceduren fra Eksempel 6: Antag at p gælder, og vha. eventuelt andre resultater deducerer man sig frem til q. Hvordan man går frem, afhænger af udsagnet q, men typisk må man ty til strategi 1 eller bedre endnu: Finde en ækvivalent karakterisering af den definition, man vil vise. Tag fx udsagnet ”Hvis n er ulige, så er n^2 igen ulige”. Definitionen af et ulige tal er, at tallet ikke er lige. Denne definition er svær at arbejde med, men man kan vise, at et ulige tal n er karakteriseret ved, at der findes et naturligt tal m (hvor vi tillader $m = 0$), sådan at $n = 2m + 1$. Med denne karakterisering kan vi vise udsagnet på denne måde:

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 2m + 1 = 2(2m^2 + m) + 1$$

Hvoraf det nu følger, at n^2 er ulige.

2° En anden måde at vise $p \Rightarrow q$ på er ved *kontraposition*. Den opmærksomme læser (med god hukommelse) vil tænke tilbage til Sætning 1 punkt (8), og det er lige præcis den logiske ækvivalens, vi skal have fat i. Vi ved da, at implikationen $p \Rightarrow q$ er ækvivalent med $\neg q \Rightarrow \neg p$. Tag udsagnet

”hvis n^2 er ulige, så er n ulige”. Det er ikke klart, hvordan vi viser dette direkte, men det kontraponerede udsagn bliver ”hvis n er lige, så er n^2 lige”, og dette udsagn har vi vist før! Derfor konkluderer vi, at udsagnet er sandt. Kontraposition er en meget smart teknik, hvis den bruges på det rigtige tidspunkt. En ulempe kan dog være, at man skal rode sig ud i negationer af udsagn, hvilket ikke altid er helt let (vi slap godt afsted med det, fordi negationen af ”ulige” er ”lige”). Et bevis ved kontraposition kaldes til tider for et indirekte bevis.

Strategi 3 (biimplikation)

Et udsagn af formen $p \Leftrightarrow q$:

Udsagnet har en bekvem logisk ækvivalens:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Det overlades til læseren at lave en sandhedstabel. Ækvivalensen har den konsekvens, at man kan vise en biimplikation ved at vise hver inklusion for sig[4]. Bemærk at kontraposition medfører, at vi lige så godt kan bevise $\neg p \Leftrightarrow \neg q$ i stedet. Kontraposition må også anvendes, når man viser inklusionerne hver for sig.

Strategi 4 (dele op i tilfælde)

Et udsagn af typen $(p \vee q) \Rightarrow r$

Et udsagn af denne type vil kræve, at man deler op i tilfælde. ”Hvorfor det?” kan du spørge, men det skyldes følgende logiske ækvivalens:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

Igen bør læseren selv lave en sandhedstabel. Et bevis, hvor denne strategi kan anvendes, er fx, hvis man betragter en situation, hvor udregningerne afhænger af, om et tal er ulige eller lige. Således laver man to ”cases”, hvor man først regner med et lige tal og dernæst med et tal, som er ulige. På den måde får man dækket alle tænkelige tilfælde. Andre eksempler på disse situationer er, hvis man skal være opmærksom på, om et tal er positivt, negativt eller 0. Helt konkret kan vi tage følgende eksempel: Vi ønsker at bestemme stamfunktionen til funktionen $f(x) = ax^n$. Siden en stamfunktion, F, til f per definition skal opfylde $F' = f$, vil et kvalificeret gæt på en stamfunktion være $F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k$. Denne funktion er veldefineret for alle n undtagen $n = -1$. Når $n \neq -1$ ser vi, at $F'(x) = \frac{(n+1)a}{n+1}x^{n+1-1} = ax^n$, og vi er glade! For $n = -1$ husker vi, at $ax^{-1} = \frac{a}{x}$, så et gæt på F kunne være $F(x) = a \cdot ln(x) + k$ idet $F'(x) = a \cdot \frac{1}{x} = \frac{a}{x}$, hvilket viser, at F er en stamfunktion i dette tilfælde. Således at vi fundet en stamfunktion for alle værdier af n.

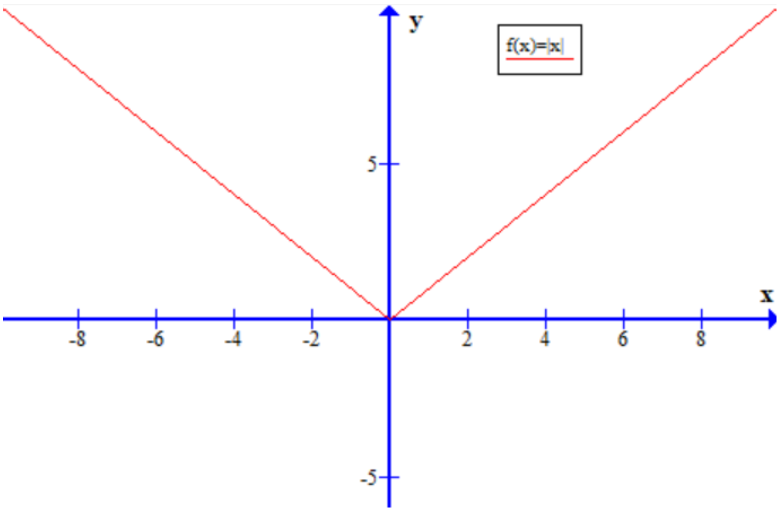
[4] Med ”hver implikation” menes naturligvis $p \Rightarrow q$ og $q \Rightarrow p$.

Strategi 5 (modbevis)

Vores sidste strategi knytter sig ikke til et bestemt udsagn, men i stedet handler den om, hvordan vi griber opgaven an med at modbevise et udsagn. Et modbevis kan foregå på mange forskellige måder, men der er netop ét fællestræk: Find et modeksempel! Det lyder banalt, men det er faktisk ikke altid så let, som det lyder.

For at illustrere et modbevis kan vi tage sætningen ”for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at $n^2 > n$”. Sætningen synes måske sand, men den er falsk, thi $1 \in \mathbb{N}$, og da $1^1 = 1$ kan sætningen umuligt være sand. Således har vi modbevist sætningen ved et konkret modeksempel.

Et andet eksempel er følgende ”Funktionen $|x|$ er differentiabel”. Sætningen er falsk, da en differentiabel funktion specielt er differentiabel over alt, men $|x|$ er faktisk ikke differentiabel i $x = 0$. Vi vil vise dette ved et heuristisk[5] argument. Grafen for $|x|$ er skitseret herunder:



Figur 1

Grafen for funktionen: $f(x) = |x|$

Hvis vi kigger på grafen til venstre for $x = 0$, ser vi, at den afledte må have værdi -1, thi funktionen er en ret linje med hældning -1. Til højre for 0 er situationen en anden, for her er den afledte lig 1, da funktionen har hældning lig 1. I $x = 0$ kan funktionen derfor ikke beslutte sig, om den skal have afledt lig -1 eller 1, og derfor findes der ikke en entydig værdi for $|x|$'s afledte i $x = 0$, hvorfor den ikke eksisterer. Altså har vi modbevist, at $|x|$ er differentiabel overalt.

Dette afslutter hermed disse noter. Der henvises til [1] i litteraturlisten herunder for videre læsning, hvor man bl.a. kan læse om nogle teknikker, vi ikke fik dækket såsom induktions- og modstridsbeviser.

[5] Med et heuristisk argument menes et argument som bygger på intuition. Argumentet er således ikke er formelt bevis, men det tjener det formål at overbevise os om, at udsagnet må være sandt (eller falskt).

7. Øvelser

Øvelse 1

Bevis de resterende logiske ækvivalenser (3)-(8) i Sætning 1 vha. sandhedstabeller. I (4) kan man nøjes med blot at vise én af ækvivalenserne.

Øvelse 2

a) *Vis at udsagnet* $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *er en tautologi, og forklar intuitionen bag udsagnet.*
b) *For en given implikation* $p \Rightarrow q$ *kan vi betragt den såkaldte omvendte implikation* $q \Rightarrow p$. *Find et modeksempel i dagligdagens logik (eller matematikken), der viser, at en implikation ikke er logisk ækvivalent med dens omvendte implikation.*
c) *Vis at* $(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$ *er en tautologi.*
d) *Angiv det kontraponerede udsagn til følgende implikation: "Hvis* x *er lige, så er* x^2 *lige".*

Øvelse 3

Afgør hvilke udsagn der er sande (intet bevis skal gives). Hvis et udsagn er falsk, skal du komme med et modeksempel.

1) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x - y = y - x$
5) *For ethvert reelt tal* x *gælder det, at der findes et andet reelt tal* x^{-1} *sådan at:*
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$
6) $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

Øvelse 4

a) *Giv et bevis eller modbevis for følgende påstand: "For alle naturlige tal* n *vil* $n^2 + n$ *være lige".*
b) *Afgør om følgende udsagn er sandt: "Hvis man har et kvadrat med sidelængde* a*, vil kvadratet med sidelængde* $2a$ *have et areal, som er dobbelt så stort som det forrige"*
Bevis udsagnet, hvis du mener, at det er sandt, eller kom med et modeksempel, hvis du mener, at det er falsk.

Øvelse 5

Denne øvelse fokuserer på differential- og integralregning.

a) *Gengiv definitionen af, at en funktion $f(x)$ er differentiabel. Hvad vil det sige, hvis f har en stamfunktion?*
b) *Kan du forklare forskellen på de to definitioner? Hvordan finder man den afledte til f? Hvordan vil du bevise, at en funktion f har en stamfunktion?*
c) *Bevis at hvis $f = \sqrt{x}$ så er $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ for $x > 0$ (prøv at nå så langt du kan uden at kigge i dine noter). Vis at funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ har en stamfunktion for $x \neq 0$, og angiv den eksplicit (igen helst uden at kigge i noter/lærebogen).*
d) *Giv et intuitivt argument for at f' kan bruges til at sige noget om monotonien af en differentiabel funktion f.*
e) *Hvordan vil du bevise, at en funktion er en løsning til en differentialligning?*

Øvelse 6

Argumentér for at følgende ækvivalenser er sande:

$$\neg\big(\forall x \in M : p(x)\big) \equiv \exists x \in M : \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \in M : p(x)) \equiv \forall x \in M : \neg p(x)$$

Her er M en mængde og $p(x)$ er et prædikat. Der skal ikke gives et formelt bevis. (Hint: Det kan være en fordel at læse udsagnene højt for sig selv).

Øvelse 7

Afgør om følgende udsagn er sande (hvis udsagnet er falsk, skal der gives et modeksempel, hvis udsagnet er sandt, skal du kunne komme med et argument for det (ikke nødvendigvis et bevis)):

i) *Hvis f er en funktion, hvorom det vides, at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så gælder at $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.*
ii) *Givet tre forskellige punkter i planen kan der altid konstrueres en trekant af linjestykkerne, som forbinder punkterne med hinanden.*
iii) *$n \in \mathbb{N}$ er lige, hvis og kun hvis n^2 er lige.*
iv) *$\sqrt{4} = 2$.*
v) *Ligningen $x^2 + 1 = 0$ har løsninger i $\mathbb{R}$.*
vi) *Lad n være ulige, og sæt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ hvor $a_i \in \mathbb{R}$ for alle $i \in \{0,1,2,3, \ldots, n\}$ og $a_n \neq 0$. Da har $p(x) = 0$ altid en løsning i $\mathbb{R}$ (hint: tegn graferne for x, x^3 og x^5).*

Øvelse 8

i) *Vi vil nu betragte et "bevis" for at* $2+2=5$*:*
"Lad os regne på $2+2$*:*

$$2+2=2+2-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=\left(2+2-\frac{9}{2}\right)+\frac{9}{2}=\sqrt{\left(2+2-\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$=\sqrt{16+\left(\frac{9}{2}\right)^2-36}+\frac{9}{2}=\sqrt{-20+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}=\sqrt{-20+45-45+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$=\sqrt{25-45+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}=\sqrt{(5)^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$

Vi genkender nu kvadratsætningen $5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$*, og så fås*:

$$2+2=\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=5$$

Således har vi at $2+2=5$*".* ■
Er dette bevis gyldigt?

ii) *Vi vil vise, at* $\frac{\infty}{\infty}=1$*:*
"Betragt funktionen $f(x)=\frac{x}{x}$ *for* $x>0$*.* f *er kontinuert, så vi får i grænsen* $x\to\infty$*:*

$$\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

Dette viser udsagnet". ■
Udsagnet er falsk (og faktisk noget sludder)! Forklar hvorfor.

iii) *Vi vil vise, at differentialligningen* $f'=k\cdot f$ *har den entydige løsning* $f(x)=ce^{kx}$ *hvor* $c,k\in\mathbb{R}$ *er konstanter:*
"Det ses, at $f'(x)=cke^{kx}$*, og idet* $kf(x)=cke^{kx}$ *ser vi, at* f *er en løsning til differentialligningen. Vi skal nu vise entydighed. Bemærk at* $f(x)=ce^{kx}$ *er ækvivalent med, at* $f(x)e^{-kx}=c$*, hvilket kan give os en idé om, hvordan vi skal bevise entydigheden. Antag at* $f'=k\cdot f$*. Vi viser, at* $(f\cdot e^{-kx})'=0$*. Husk produktreglen:*

$$(f\cdot e^{-kx})'=f'\cdot e^{-kx}-f\cdot ke^{-kx}$$

Siden $f'=k\cdot f$ *har vi:*

$$(f\cdot e^{-kx})'=k\cdot f\cdot e^{-kx}-k\cdot f\cdot e^{-kx}=0$$

Dette betyder, at $f\cdot e^{-kx}$ *må være konstant! Altså er* $f\cdot e^{-kx}=c$ *for et* $c\in\mathbb{R}$*. Ved at gange med* e^{kx} *på begge sider af ligheden opnås* $f=ce^{kx}$*, som ønsket".* ■
Er dette bevis korrekt?

Øvelse 9 (for de interesserede)

*I denne opgave skal vi introducere **komplekse tal**. Vi kalder mængden af komplekse tal for $\mathbb{C}$, og den er en udvidelse af $\mathbb{R}$. Formelt skriver vi:*

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}\}$$

*Her står: "mængden af tal på formen $x + yi$ hvor $x, y \in \mathbb{R}$". Hvad er "i" så for noget? Tallet i er den såkaldte **imaginære enhed**, hvorom der gælder $i^2 = -1$. I $\mathbb{C}$ er det således tilladt at tage kvadratrødder af negative tal! Bemærk at $i \notin \mathbb{R}$. For et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ skriver vi $z = x + yi$, og vi siger, at realdelen af z er x og skriver $x = Re(z)$, mens imaginærdelen af z betegnes med $Im(z) = y$.*

a) *Lad $z = a + bi$ og $w = c + di$. Vis at $z + w = (a + c) + i(b + d)$ og vis at.*
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
b) *Vis at $z \in \mathbb{C}$ er reelt hvis og kun hvis $Im(z) = 0$.*

*Til et komplekst tal $z = x + yi$ associerer vi dets **komplekst konjugerede** $\bar{z} = x - yi$, dvs. imaginærdelen skifter fortegn. Vi kan også knytte en størrelse til z kaldet **modulus**, som er givet ved:*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Hvilket svarer til længden af en vektor i 2D.

c) *Vis at $z + \bar{z} = 2Re(z)$ og at $z - \bar{z} = 2Im(z)$.*
d) *Vis følgende: $|z| = 0 \Leftrightarrow (Im(z) = 0 \wedge Re(z) = 0)$. Konkludér, at hvis $Re(z) \neq 0$ eller $Im(z) \neq 0$, så er $|z| \neq 0$. (Hint: Siden $i^2 = -1$ kan vi skrive $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$)*

Vi vil nu give de komplekse tal en geometrisk betydning. Man kan forestille sig $\mathbb{C}$ som et 2-dimensionelt rum, og for hvert $z = x + yi \in \mathbb{C}$ kan man tænke på z som vektoren $\binom{x}{y}$. $\mathbb{C}$ kaldes ofte for den komplekse plan.

e) *Hvilken figur i $\mathbb{C}$ opfylder $|z| = 1$? Hvilken kurve er vektorfunktionen $\gamma(t) = t + i$ for $t \in \mathbb{R}$? Hvilken kurve er $\delta(t) = \pi + \sqrt{2}ti$ for $t \in \mathbb{R}$? Hvordan ligger $z = x + yi$ og $z = x - yi$ ift. hinanden i den komplekse plan?*

Vi introducerer nu den komplekse eksponentialfunktion. Lad $x \in \mathbb{R}$. Størrelsen e^{ix} er defineret ved:
$$e^{ix} = cos(x) + isin(x)$$
Dette kaldes den komplekse eksponentialfunktion.

f) *Vis at $|e^{ix}| = 1$. Vis at $e^{-ix} = \overline{(e^{ix})}$. Vis nu formlerne:*
$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

8. Litteratur

[1] Lützen, Jesper, ”Diskrete matematiske metoder”, 2. udgave, 2019, Københavns Universitet, sider 1-27.

[2] Johansen, Mikkel W. & Sørensen, Henrik K. ”Invitation til matematikkens videnskabsteori”, 1. udgave 3. oplag, 2015, Samfundslitteratur, sider 65-95.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_fallacy (sidst besøgt d. 29. januar 2021)

Opgavekreditering: Øvelserne i disse noter er til dels produceret af mig selv (Øvelse 5, 6, 7 og 9), mens Øvelse 1 og 2 samt dele af Øvelse 3 og 4 er taget fra [1]. Øvelse 8 er inspirereret af [3]. Eksempler undervejs i noterne er også inspireret af [1]. Al tekst undtagen definition af deduktioner og det matematiske bevis er udarbejdet af mig selv.