

Studieretningsprojekt 2022

Elev id: 3x 06
Elev: Balder Westergaard Holst

Fag:	Vejleder:
Matematik A	Jens Christian Larsen Tlf.: 26279734 Email: jl@soroeakademi.dk
Informatik C	Kristian Kjeldgaard Hoppe Tlf.: 28825466 Email: kh@soroeakademi.dk

Område: Store-O notation og sorteringsalgoritmer
<p>Opgaveformulering:</p> <p>Gør rede for kompleksitetsklasserne givet ved Store-O notation, idet du giver eksempler på repræsentanter af forskellige klasser.</p> <p>Beskriv sorteringsproblemer generelt, og forklar algoritmerne for insertion- og merge-sort. Vis at insertion-sort har en værste-tilfælde-udførelse på $O(n^2)$.</p> <p>Implementer algoritmerne insertion- og merge-sort i Python og undersøg den faktiske udførelsestid af de to algoritmer på lister af tilfældige tal af forskellig størrelse. Vurder algoritmernes udførelsestid.</p> <p>Indfør begrebet træ, og bevis relevante sætninger om træer, især højden af et træ. Bevis, at en vilkårlig sorteringsalgoritme baseret på sammenligning, vil være nedadtil begrænset af i dens værste-tilfælde-udførelsestid med $n \cdot \lg(n)$ (Stirlings formel må antages).</p> <p>Insertion-sort har en bedste-tilfælde-udførelsestid på $O(n)$: Hvorfor er det ikke et modbevis til sætningen om at den nedre grænse for sorteringsalgoritmer er $n \cdot \lg(n)$?</p> <p>Omfang 15-20 ns.</p>

Sorteringsalgoritmer og O-notation

Matematik A og Informatik C

Vejledere: Jens Christian Larsen og Kristian Kjeldgaard Hoppe

Balder Westergaard Holst

31. marts 2022

Indhold

1	Indledning	3
2	Resume	4
3	Algoritmers Udførelsestid	5
3.1	Tid som Funktion af Argumentets Kardinalitet	5
3.2	Store-O-Analyse	6
3.3	Kompleksetetsklasser	6
4	Sorteringsalgoritmer	8
4.1	Hvad er sortering?	8
4.2	Insertionsort	9
4.2.1	Insertionsort Procedure	9
4.2.2	Egenskaber af Insertionsort	9
4.3	Mergesort	10
4.3.1	Mergesort Procedure	10
4.4	Store-O-Analyse af Insertionsort	12
4.4.1	Insertionsort i Værste Tilfælde	12
5	Binære Træer	14
5.1	Binære Træer og Sorteringsalgoritmer	15
5.1.1	Det Mindste antal Sammenligninger	15
6	Store-O og Bedste Tilfælde	16
7	Implementering og Test	17
7.1	Python	17
7.2	Implementering	17
7.3	Test af Sorteringsalgoritmer	18
7.4	De Reelle Udførelsestider	20
7.4.1	Store-O er Værste Tilfælde	20
7.5	Optimering af Mergesort	20
7.5.1	Sammenligning af Optimerede Algoritmer	20
8	Konklusion	22
	Bilag 1 - Algoritmer og Datageneration	24
	Bilag 2 - Databehandling og Plots	27

Figurer

3.1	Definition af $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ og $\Theta(f(n))$ [1, s. 26].	6
3.2	Her ses skæringspunktet n_0 , hvorefter $g(n)$ altid er højere end $f(n)$. Altså vækstraten af $g(n)$ højere end vækstraten af $f(n)$	7
4.1	Eksempel på sortering af en liste	8
4.2	Procedure for at indsætte element først i listen. Elementet er markeret med rød , og tal der på allerede er sorterede er markeret med blå . Linjer refererer til koden i figur 4.4.	9
4.3	Procedure for at indsætte et element hvor det passer i den sorterede liste. Elementet er markeret med rød , og tal der på allerede er sorterede er markeret med blå . Linjer refererer til figur 4.4.	9
4.4	Pseudokode til insertionsort [1, s. 104].	10
4.5	Eksempel med delfunktionen <i>merge</i> i mergesort. Her kalder vi <i>merge</i> ([3,6,6], [4,5,7,9]). I hvert trin sammenlignes de røde tal. Blå tal er en del af den færdige <i>c</i> liste, og lilla tal er de tal der sidst blev føjet til <i>c</i> . Læg mærke til at den endelige <i>c</i> liste er sorteret fordi listerne <i>a</i> og <i>b</i> på forhånd var sorterede. Linjer refererer til figur 4.7.	11
4.6	Hvordan <i>mergesort</i> først splitter listen op, og derefter samler den med <i>merge</i> (se figur 4.5). Farver indikerer de par af lister der sættes ind i <i>merge</i> -funktionen.	11
4.7	Pseudokode til Mergesort [1, s. 106].	12
4.8	Insertionsort: Antal køringer af koden i den indre <i>j</i> -løkke, hvis inputlisten har kardinaliteten <i>n</i>	13
5.1	Eksempel på binært træ. Træets balde er markeret med grøn , og roden med rød . [2]	14
5.2	Binært Træ. [1, s. 109]	15
7.1	Insertionsort i Python	18
7.2	Kode til test af algoritmerne. Variablen <i>functions</i> er en liste med de to algoritmer der testes ([insertionsort,mergesort]).	19
7.3	Algoritme der bruger insertionsort hvis inputlisten er kortere end 15, og ellers mergesort.	20
7.4	Mergesort hvor lister mindre end 15 sorteres effektivt af insertionsort	21
7.5	Sammenligning af insertionsort og mergesort	21

1 | Indledning

Dette er min indledning pt.

2 | Resume

Dette er hvad jeg har skrevet og fundet ud af.
Kompleksitetsklasser

3 | Algoritmers Udførelsestid

3.1 Tid som Funktion af **Argumentets** Kardinalitet

Dette afsnit bygger primært på side 24 og 25 i bogen "Algoritmer og Datastrukturer" [1].

Når vi analyserer algoritmer, er det primære formål at skabe udsagn, der kort og præcist beskriver algoritmers opførsel. I vores tilfælde er vi interesserede i algoritmens udførelsestid. Vi lader \mathcal{I}_n være mængden af mulige argumenter til algoritmen, n være kardinaliteten (størrelsen) af \mathcal{I}_n og I være en instans af \mathcal{I} (altså $I \in \mathcal{I}_n$). Algoritmens udførelsestid T når kan nu beskrives som funktion af instansen $T(I)$. Vi kan bruge dette til at beskrive tre egenskaber af algoritmens udførelsestid: algoritmens maksimale udførelsestid, algoritmens minimale udførelsestid og algoritmens gennemsnitlige køretid. Den maksimale udførelsestid er udførelsestid ved det værste tilfælde ($T(I_{vrst})$), den minimale udførelsestid kan modsat beskrives som køretiden på det bedste tilfælde ($T(I_{bedst})$), og den gennemsnitlige udførelsestid kan findes ved at tage gennemsnittet af alle udførelsestiderne ($\frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)$). Med disse udtryk kan vi nu opskrive algoritmens mulige udførelsestider som funktion af kardinaliteten n af \mathcal{I}_n således:

$$T(n) = \begin{cases} T(I_{vrst}) : I_{vrst} \in \mathcal{I}_n & \text{værste tilfælde} \\ T(I_{bedst}) : I_{bedst} \in \mathcal{I}_n & \text{bedste tilfælde} \\ \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{I \in \mathcal{I}_n} T(I) & \text{i gennemsnit} \end{cases}$$

Alle disse størrelser beskriver et aspekt af algoritmens udførelsestid, dog er den mest interessante udførelsestiden i værste tilfælde. Det er samme koncept som når postvæsnet siger at det vil tage tre bankdage for din pakke at nå frem, selvom det godt kan ske hurtigere. Det værste tilfælde *garanterer* at hvornår algoritmen er færdig. Dette værste tilfælde kan sammen med det bedste tilfælde bestemme variansen på udførelsestiden. Hvis en algoritme viser stor varians i dens udførelsestid kan gennemsnitsudførelsestiden sige noget om hvordan man kan forvente at algoritmen opfører sig.

Denne form for algoritmeanalyse er dog ikke helt problemfri: for det første kan vi aldrig definere nogen fast forskrift for $T(n)$, der ville gøre det muligt at beregne den præcise udførelsestid. Dette kan tildels forklares af Allan Turlings "halt problem" [kilde] hvor han viste at man aldrig kan vide om en algoritme stopper eller ender i en uendelig lykke. Problemet med at kunne bestemme en køretid for algoritmen er at man så ville vide at algoritmen stoppede før den havde kørt. En anden forklaring er at alle computere vil køre den samme algoritme i forskellig hastighed pga. varians i computerens komponenter. Derudover vil selv den samme computer aldrig udføre en handling i præcis samme tidsinterval, da andre processer på computeren kan bruge dele af computerens ydeevne, eller fordi at cpu'ens temperatur ændre sig. Der er mange faktorer der bestemmer hvor lang tid det tager en algoritme at fuldføre, hvilket gør det meget svært at denne form for analyse praktisk.

Uanset hvilken forklaring man bruger, er det svært at sige meget om den faktiske køretid for en algoritme før man har kørt algoritmen. Derfor er det nemmere, og mere brugbart at forfølge sig til udførelsestidens vækstrate og algoritmens opførsel når n bliver meget stort. Denne form for analyse hedder store-O-analyse.

3.2 Store-O-Analyse

I store-O-analyse forholder vi os til hvordan udførelsestidens stiger, når n bliver meget stort. I denne form for analyse indeler vi grupper efter deres vækstrate. En funktions vækstrate beskriver hvor hurtigt en funktion stiger i forhold til andre funktioner ved meget høje n -værdier. Hvis en funktion $f(n)$ har en højere vækstrate end funktionen $g(n)$, betyder det at funktionen $f(n)$ altid vil være større end $g(n)$ ved store nok n . Det har ingen betydning om $f(n)$ er mindre end $g(n)$ ved små n , da $f(n)$ altid vil overstige $g(n)$ pga. dens højere vækstrate. Matematisk kan man sige at en funktion $f(n)$ har en højere vækstrate end $g(n)$, hvis $f(n) \geq c \cdot g(n)$ (hvor c er en konstant, og n er tilstrækkeligt stort). Hvis funktionerne har *samme* vækstrate gælder det at $c \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq d$ [skal jeg have den med?] (hvor d er en konstant, og det samme gælder for n og c som før). I praksis betyder dette at funktioner som n^2 og $n^2 + 3n - 10$ har den samme vækstrate og, at den er højere end en funktion som $n \cdot \log(n)$. Vi kan nu bruge disse regler til at definere store-O-notation (se figur 3.1). Lad os begynde med $O(f(n))$. En funktion er del af mængden $O(f(n))$, hvis den kan sættes ind som $g(n)$. Med den matematiske definition menes der: $g(n)$ skal være sådan at ($:$) der findes en værdi c , som er større end 0, sådan at ($:$) der findes et positivt helt tal n_0 , sådan at der for alle n større end n_0 , gælder at $g(n)$ er mindre eller lig $c \cdot f(n)$, dvs. $g(n)$ har mindre eller samme vækstrate som $f(n)$. I praksis betyder dette, at der altid vil være en positiv n_0 , hvorefter $f(n)$ altid vil være højere end eller lig $g(n)$ (se figur 3.2). Man kan også tænke mængden $O(f(n))$ som mængden af funktioner der *ikke vokser hurtigere end* $f(n)$.

Når man siger at en algoritme er $O(n^2)$, menes der altså at vækstraten for $T(n)$ er en del af mængden $O(n^2)$, og at $T(n)$ i værste tilfælde har samme vækstrate som n^2 .

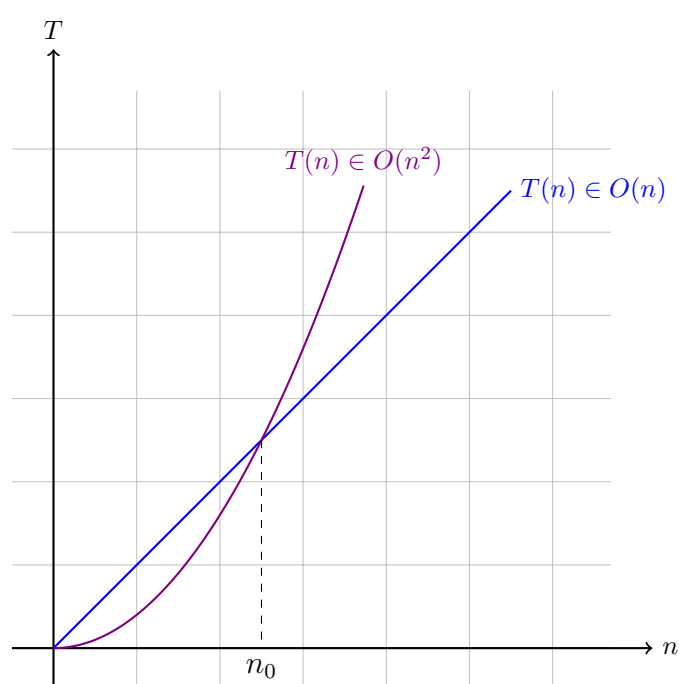
$\Omega(f(n))$ indeholder modsat $O(f(n))$ alle funktioner der vokser mindst lige så hurtigt som $f(n)$.

Der er dog en vækstrate som både $O(f(n))$ og $\Omega(f(n))$ indeholder: nemlig vækstraten af $f(n)$. For at beskrive præcis denne mængde funktioner bruger vi $\Theta(n)$. Hvis en algoritme er $\Theta(n^3)$ betyder det altså at $T(n)$ *altid* vil have samme vækstrate som n^3 . Det ville også betyde at alle input af samme kardinalitet vil resultere i lige lang udførelsestid.

3.3 Kompleksetetsklasser

$$\begin{aligned} O(f(n)) &= g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) \\ \Omega(f(n)) &= g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n) \\ \Theta(f(n)) &= O(f(n)) \cup \Omega(f(n)) \end{aligned}$$

Figur 3.1: Definition af $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ og $\Theta(f(n))$ [1, s. 26].



Figur 3.2: Her ses skæringspunktet n_0 , hvorefter $g(n)$ altid er højere end $f(n)$. Altså vækstraten af $g(n)$ højere end vækstraten af $f(n)$.

4 | Sorteringsalgoritmer

4.1 Hvad er sortering?

Sortering er helt lavpraktisk at sætte en mængde data en rækkefølge på baggrund af dataens attributter. Det kunne f.eks. være alfabetisk eller efter farve eller størrelse. Det er dog ikke entydigt hvilken sorteringsstrategi der ville være hurtigst. Disse sorterings-strategier kan også kaldes sorterings-algoritmer, det er ikke kun mennesker der kan benytte sorterings-algoritmer til f.eks. at sortere kort, men computere kan også, og de gør det for det meste også hurtigere. De næste to afsnit omhandler to forskellige sorterings-algoritmer, og deres måde at sortere en liste med tal.

Herfra vil jeg kun forholde mig til sortering af lister med tal, og sortere dem på baggrund af deres størrelse (se figur 4.1)

$$[4,2,5,3,1] \longrightarrow [1,2,3,4,5]$$

Figur 4.1: Eksempel på sortering af en liste

4.2 Insertionsort

Insertionsort er en af de mere simple sorteringsalgoritmer. Pseudokoden til algoritmen kan ses i figur 4.4. Det er ikke en tilfældighed at denne algoritme hedder insertionsort. Den fungerer nemlig ved at gennemgå hvert element i listen, og placere det hvor det passer ind i de elementer der allerede er sorterede. Dette er nok til dels den måde man f.eks. ville sortere sin hånd i Uno eller 500.

4.2.1 Insertionsort Procedure

At algoritmen gennemgår alle elementerne i listen kronologisk kan vi se allerede i linje 2, da algoritmen her begynder med en for-løkke, der tæller for hvert element i listen, dog starter den ved 2. element i listen. For at gøre koden mere læsbar sættes elementet som algoritmen er nået til ind i variabelen `e` i linje 3. Det næste algoritmen gør, er at checke om elementet har en mindre værdi end det første element i listen, hvis dette er sandt rykkes alt før elementet et tak til højre, og elementet sættes ind først i listen (se figur 4.2).

Forklaring	Eksempel	Linje
Liste hvor <code>e < liste[0]</code>	[5,7,9,4,6,5,2]	5
Rykker til højre	[5,5,7,9,6,5,2]	6-8
Sætter elementet ind først	[4,5,7,9,6,5,2]	9

Figur 4.2: Procedure for at indsætte element først i listen. Elementet er markeret med **rød**, og tal der på allerede er sorterede er markeret med **blå**. Linjer refererer til koden i figur 4.4.

Vi er nu nået til linje 11. Hvis ikke elementet er mindre end det første element i listen sker følgende (se figur 4.3): Algoritmen ser på tallet før elementet og spørger: "er dette tal større end elementet". Hvis det er, rykkes det hen på elementets plads. Herefter stiller algoritmen samme spørgsmål, til tallet to pladser før elementet. Hvis dette tal er mindre and elementet placerer algoritmen elementet efter dette tal, hvis ikke stiller den samme spørgsmål til tallet 3 pladser før elementet og så videre. Det er vigtigt at pointere, at der altid vil være et tal der er mindre end elementet, da elementet ellers ville være blevet placeret først i liste af den første del af algoritmen (linje 5-10).

Forklaring	Eksempel	Linje
Liste hvor <code>e >= liste[0]</code>	[4,5,7,9,6,5,2]	11
Da $9 \geq 6$ rykkes tallet til højre	[4,5,7,9,9,5,2]	13-14
Da $7 \geq 6$ rykkes tallet til højre	[4,5,7,7,9,5,2]	13-14
Da $5 \not\geq 6$ sættes elementet ind efter 5	[4,5,6,7,9,5,2]	13 og 17

Figur 4.3: Procedure for at indsætte et element hvor det passer i den sorterede liste. Elementet er markeret med **rød**, og tal der på allerede er sorterede er markeret med **blå**. Linjer refererer til figur 4.4.

4.2.2 Egenskaber af Insertionsort

Insertionsort er en god sorteringsalgoritme, idet at proceduren er forholdsvis nem at forstå, men også at listen til venstre for det element algoritmen er nået til, altid vil være sorteret. Hvis man stopper en insertionsort-algoritme halvvejs gennem dens køretid, vil man altid have en liste hvor den første halvdel er sorteret og den anden halvdel usorteret. Dette er ikke en egenskal i den næste algoritme.

(se afsnit 4.4 for store-O analysen)

```

1  funktion insertionsort(liste) {
2      for i = 1 til i = n {          # her er n længden af listen
3          e = liste[i]                # dette er elementet i listen
4
5          if e < liste[0] {            # hvis elementet er større end det første element i listen
6              for j = j til j = 0{
7                  liste[j] = liste[j-1] # ryk elementerne på pladserne 0 til j et tak frem
8              }
9              liste[0] = e              # sætter dette element forrest i listen
10             }
11         else{
12             j = i                     # j er en nu tæller der starter på i
13             while liste[j-1] > e {    # kør mens liste[j-1] er større end elementet
14                 liste[j] = liste[j-1] # ryk liste[j] et tak til højre
15                 j -= 1
16             }
17             liste[j] = element        # indsæt elementet hvor det passer ind
18         }
19     }
20     return(liste)                    # returnerer den sorterede liste
21 }

```

Figur 4.4: Pseudokode til insertionsort [1, s. 104].

4.3 Mergesort

Hvor insertionsort er en løkke-baseret algoritme, er mergesort rekursiv idet at den ikke benytter en løkke til at gentage instruktioner, men kalder sig selv i stedet. Dette leder til en fraktallignende sorteringsmetode, der deler problemet i mindre og mindre bidder.

4.3.1 Mergesort Procedure

Pseudokode til denne algoritme kan findes i figur 4.7.

Mergesortalgoritmen består af to funktioner. Lad os begynde med funktionen *merge*, da det er den mest simple. Funktionen tager to lister (*a* og *b*) som argumenter, og fletter dem sammen til en tredje liste (*c*) (se figur 4.5). Denne *c* liste dog ikke altid sorteret. Eksempelvis kunne dette være en returneret liste:

$$\text{merge}([1,2,4,8],[9,5,6,4,7]) \longrightarrow [1,2,4,8,9,5,6,4,7]$$

Her er resultatet en delvist sorteret liste bestående af flere sorterede dele. Altså kan vi ikke nøjes med *merge* for at sortere en liste. En vigtig egenskab af *merge* er at, den kan flette to sorterede lister sammen, til én samlet liste. Det kunne for eksempel være i dette tilfælde:

$$\text{merge}([1,3,4,8],[2,3,6,7,7]) \longrightarrow [1,2,3,3,4,6,7,7,8]$$

Her er begge argumenter (*a* og *b*) sorterede lister, der flettes sammen til én samlet sorteret liste.

Mergesorts kompleksitet kommer dog først rigtigt til udtryk, når vi tager hele algoritmen i betragtning. Mergesortfunktionen tager en enkel liste som argument, og checker først om listen kun indeholder ét element. Hvis den gør, så returnerer den bare listen uændret. Dette giver intuitivt mening, da en liste med et enkelt element altid vil være sorteret. Hvis listen er *mere* end 1 lang, gør den det, som får hele algoritmen til at fungere: den deler listen på i to, og kalder sig selv på hver halvdel. Herefter sættes de to dele sammen igen af *merge*-funktionen. Det er dog ikke helt så enkelt som det lyder, idet at *mergesort* rekursivt kalder sig selv. Det leder til at algoritmen splitter listen op igen og igen, indtil der kun er et element i de mange lister. Herefter samler *merge* alle de små lister til en stor liste, hvor *merge* løbende sørger for at de lister

Forklaring	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Linje
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[3,6,6]	[4,5,7,9]	[]	18-21
Da $a[0] \not\leq b[0]$ føjes $b[0]$ til c	[6,6]	[4,5,7,9]	[3]	22-25
Da $a[0] \not\leq b[0]$ føjes $b[0]$ til c	[6,6]	[5,7,9]	[3,4]	22-25
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[6,6]	[7,9]	[3,4,5]	18-21
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[6]	[7,9]	[3,4,5,6]	18-21
Da $a.length = 0$ føjes b til c	[]	[7,9]	[3,4,5,6,6]	12-14
Returnerer c	[]	[]	[4,5,3,6,1,7,9]	13

Figur 4.5: Eksempel med delfunktionen *merge* i mergesort. Her kalder vi *merge*([3,6,6], [4,5,7,9]). I hvert trin sammenlignes de røde tal. Blå tal er en del af den færdige c liste, og lilla tal er de tal der sidst blev føjet til c . Læg mærke til at den endelige c liste er sorteret fordi listerne a og b på forhånd var sorteret. Linjer refererer til figur 4.7.

Funktion	Lister
<i>mergesort</i>	[3,6,4,7,2,7,5,2]
<i>mergesort</i>	[3,6,4,7] [2,7,5,2]
<i>mergesort</i>	[3,6] [4,7] [2,7] [5,2]
<i>merge</i>	[3] [6] [4] [7] [2] [7] [5] [2]
<i>merge</i>	[3,6] [4,7] [2,7] [2,5]
<i>merge</i>	[3,4,6,7] [2,2,5,7]
Færdig!	[2,2,3,4,5,6,7,7]

Figur 4.6: Hvordan *mergesort* først splitter listen op, og derefter samler den med *merge* (se figur 4.5). Farver indikerer de par af lister der sættes ind i *merge*-funktionen.

den samler er sorteret. De lister der er samlet af *merge*, vil altid være sorteret, da udgangspunktet er lister med et enkelt element. Disse enkelt-element-liste samles af *merge* til lister med to elementer der er sorteret. Og disse sorteret lister sættes sammen med andre sorteret lister. *merge* får altså i altid to sorteret lister som input, og spytter derfor altid en samlet sorteret liste ud som output.

tilfælde hvor med en liste med ulige længde?

```

1      funktion mergesort(liste) {
2          if liste.length == 1{
3              return(liste)
4          }
5          else {
6              return(merge(mergesort(liste[0 ... n/2]), mergesort(liste[n/2 + 1 ... n])))
7          }
8      }
9
10     funktion merge(a,b) {
11         c = []
12
13         while(true) {
14             if a.length == 0 {
15                 return(c + b)
16             }
17             elif b.length == 0 {
18                 return(c + a)
19             }
20             elif a[0] <= b[0] {
21                 tilføj a[0] til c
22                 fjern a[0] fra a
23             }
24             else {
25                 tilføj b[0] til c
26                 fjern b[0] fra b
27             }
28         }
29     }

```

Figur 4.7: Pseudokode til Mergesort [1, s. 106].

4.4 Store-O-Analyse af Insertionsort

4.4.1 Insertionsort i Værste Tilfælde

[1, s. 42]

I dette afsnit gør vi brug af tidligere definerede begreber fra afsnittet "Algoritmer Udførelsestid" på side 5. Når man analyserer en algoritme teoretisk handler det ikke om den faktiske udførelsestid, men nærmere hvor mange operationer computeren skal køre, for at fuldføre algoritmen. På den måde kan man abstrahere helt væk fra fysisk tid, og regne med teoretiske operationer, hvis reelle udførelsestid ikke har nogen indflydelse. Den eneste faktor for antallet af operationer er kardinaliteten af instansen algoritmen udføres på. Dette gør det muligt at beskrive antallet af operationer (der er proportionalt med udførelsestiden) udelukkende som funktion af n (instansens kardinalitet).

Insertionsort består af to løkker: en indre og en ydre. Den ydre løkke kører fra $i = 2$ til $i = n$. Altså kører koden inde i løkken $n - 1$ gange. Den indre løkke kører i værste tilfælde fra $j = i$ til $j = 1$ for hver i værdi fra den ydre løkke. Det betyder at operationerne, som den indre løkke udfører, stiger sammen med i (se figur 4.8). Vi ændrer med at kunne beskrive det totale antal gange som koden i den indre kører, som summen af alle i -værdierne, som den ydre løkke gennemgår.

$$\sum_{i=2}^n i - 1$$

Den indre løkkes kode køres $i - 1$ gange, da løkken gennemgår fra $j = i$ til og uden $j = 1$, altså kører løkken $i - 1$ gange. Vi kan nu omskrive summen således:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

For at simplificere udtrykket endnu mere kan vi bruge reglen at en sum som $1 + \dots + n - 1$ kan omskrives på denne måde. [Bevis??]

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{2} \cdot n$$

Dette er altså et udtryk for hvor mange gange koden i den indre løkke kører, som funktion af kardinaliteten af algoritmens input. Vi kunne nu begynde at gange denne funktion med hvor mange operationer der sker inde i den indre løkke, og lægge operationerne der sker n gange fordi de er med i den ydre løkke. Til sidst kunne vi lægge de operationer der kun sker én gang til, og resultatet ville se nogenlunde sådan ud:

$$a \cdot \frac{1}{2} \cdot n^2 - a \cdot \frac{1}{2} \cdot n + b \cdot n + c$$

Her er a antallet af operationer i den indre løkke, b er antallet af operationer kun i den ydre løkke, og c er operationerne som er uden for begge løkker. Det smarte ved store-O-notation er at vi faktisk ikke behøver at kende de reelle værdier for a , b og c , da de alle er konstanter, og derfor ikke har nogen indflydelse på algoritmens vækstrate. Selv ikke udførelsestiden for hver af disse operationer, har nogen indflydelse på vækstraten. Vi kan derfor sige at algoritmens udførelsestid er $O(n^2)$.

$$T_{\text{insertionsort}}(n) \in O(n^2)$$

Med det menes der at udførelsestiden i værste tilfælde stiger med vækstraten $\Theta(n^2)$.

i	j	køringer i j løkken	
2	2...1	1	
3	3...1	2	
4	4...1	3	
5	5...1	4	
⋮	⋮	⋮	
n	n...1	(n-1)	

\Rightarrow

Total antal køringer i j-løkken:

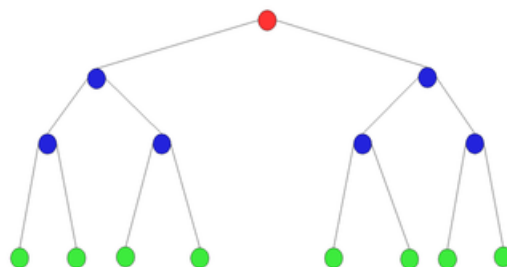
$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Figur 4.8: Insertionsort: Antal køringer af koden i den indre j -løkke, hvis inputlisten har kardinaliteten n

5 | Binære Træer

Træer som vi kender dem, har en stamme hvorfra grene springer ud. Fra grenene springer mindre grene, og på den måde ender træet med at have mange små grene, som stammer fra samme stamme, der ender hver sit sted. Binære træer er ikke langt fra denne forståelse af træer generelt: Binære træer har også en rod (eller stamme), hvorfra hele træet forgrener sig. Man tegner normalt binære træer som på figur 5.1 bestående af knudepunkter og forbindelser mellem dem. Det specielle ved *binære* træer, er at hvert knudepunkt højst må forgrene sig to gange (altså binært).

5.1 Højden af et Binært Træ



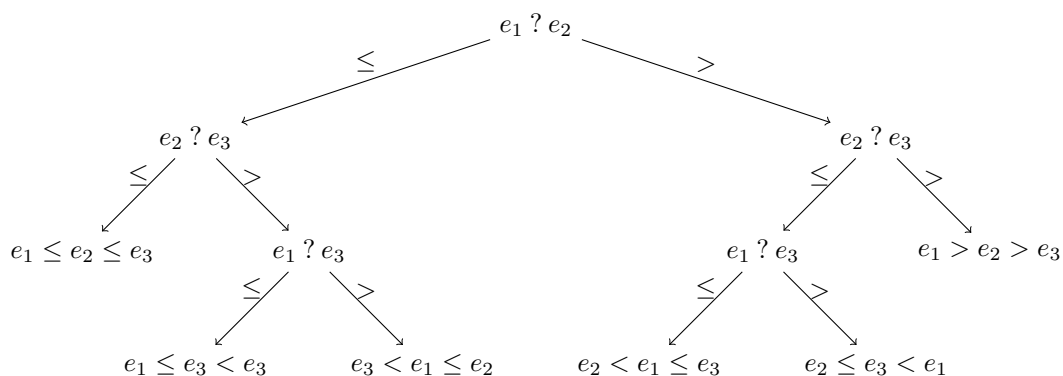
Figur 5.1: Eksempel på binært træ. Træets balde er markeret med grøn, og roden med rød. [2]

5.2 Binære Træer og Sorteringsalgoritmer

Ved første blik kunne man tilgives for ikke, at se hvordan binære træer har relevans for sorteringsalgoritmer, men det kræver bare, at man giver knudepunkterne og grenene meningsfulde betydninger. I bund og grund er det som en sorteringsalgoritme gør, at fortage en masse sammenligninger af elementerne i dens input. Algoritmen bestemmer hvilke operationer, den skal køre udelukkede på baggrund af disse sammenligninger. Hvis vi tænker hvert knudepunkt som en sammenligning af to elementer fra algoritmens input (se figur 5.2), er det jo givet, at det ene element enten vil være større end det andet eller ikke. Denne sammenligning guider algoritmens operationer og derved den næste sammenligning. Dette gentages til algoritmen har gjort nok sammenligninger, til at kunne sortere dens input. Vi kan derfor tænke alle træets blade, som en måde for algoritmen at sortere et bestemt input; hvert blad har kun en vej til det, og vejen til bladet er udelukkede givet af algoritmens input, altså er hvert af træets blade en kollektion af de sammenligninger, som algoritmen gjorde for at sortere inputtet.

5.2.1 Det Mindste antal Sammenligninger

I dette store teoretiske træ med alle dets blade kunne man jo så spørge: hvor mange sammenligninger skal der så højest til at sortere et input? eller omformuleret: hvor højt er træet? Denne oversættelse holder stik, da vi skal lave lige så mange sammenligninger for at komme ned til nederste blad, som træet er højt.



Figur 5.2: Binært Træ. [1, s. 109]

6 | Store-O og Bedste Tiilfælde

7 | Implementering og Test

I dette afsnit testes algoritmerne fra afsnit 4. Algoritmerne implementeres i python.

7.1 Python

Sproget Python har et højt abstraktionsniveau, og kan på mange punkter ligne vores pseudokode fra tidligere [1, s. 68]. Det betyder at vi på mange punkter opgiver lidt kontrol til compileren, for at gøre koden mere læsbar og tilgængelig. Det betyder også at vi aldrig helt kan vide hvilke instruktioner computeren udfører. Derudover er Python et relativt langsomt sprog, da koden kompiles samtidigt med at programmet kører. Dette gør at sproget ikke egner sig særligt godt til at skrive optimerede algoritmer, der skal køre på meget store datasæt. Heldigvis kan vi se bort fra dette, da vi med store-O-analyse er ligeglade med den reelle udførelsestid, og i stedet er interesseret i vækstrater. Vækstraten for en algoritme er nemlig egns for en algoritme, ligegyldigt hvor langsomt hvert skridt er. På nogle punkter er det måske endda en fordel, at algoritmerne køre langsommere, da det vil gøre forskellen i udførelsestiderne større, og lettere at forholde sig til.

7.2 Implementering

Implementering i Python er relativt simpelt. Den største forskel er at man tæller fra 1 i pseudokode, og fra 0 i Python (ligesom de fleste andre sprog). Det betyder for eksempel at det første element i en liste i Python er `liste[0]`, hvor det i pseudokode ville være `liste[2]`. Lykken i insertionsort der starter på $i = 2$ (se linje 2 figur 4.4), starter derfor i stedet på $i = 1$ i python. En anden forskel er at Python bruger dynamiske variable [4]; det er ikke nødvendigt at fortælle Python, om en variabel f.eks. er et heltal eller en liste.

```

1 def insertionsort(l):
2     for i in range(1,len(l)):
3         element = l[i]
4
5         if element < l[0]:
6             for j in range(i,0,-1):
7                 l[j] = l[j-1]
8                 l[0] = element
9         else:
10            j = i
11            while(l[j-1]>element):
12                l[j] = l[j-1]
13                j -= 1
14            l[j] = element
15    return(l)

```

Figur 7.1: Insertionsort i Python

7.3 Test af Sorteringsalgoritmer

For at teste sorteringsalgoritmerne fra afsnit 4, og se hvordan deres reelle udførelsestid som funktion af n , relaterer til deres teoretiske væksthastighed og store-O-analyse. På figur 7.2 ses koden til test af algoritmerne. Variablen *functions* på linje 1 indeholder en liste med de algoritmer der skal testes. I vores tilfælde indeholdt den *[insertionsort,mergesort]*. Inde in denne lykke tester vi funktionerne. Dette sikrer at algoritmerne bliver testet på samme måde. Det næste vi gør er at definere lister til opbevaring af kardinaliteten af den liste som algoritmen sorterer (l. 4), og en til den reelle tid det tog for algoritmen at sortere listen (l. 9). I linje 9 sætter vi frøet for de pseudotilfældige tal [3], som vi senere skal bruge til at generere listerne som vi får sorteringsalgoritmerne til at sortere. Det er vigtigt af vi her sætter frøet til den samme værdi, før vi tester hver algoritme, da vi på den måde sikrer os at det er de samme pseudotilfældige lister, som algoritmerne sorterer. På den måde kan vi med god vilje sammenligne algoritmernes køretider, da vi er sikre på at deres input, var det samme under testen. Efter denne **initialisering** begynder vi to løkker (l. 12 og 15). Den første sørger for at vi gentager den samme test flere gange. I vores tilfælde er variablen *trials* sat til 15, hvilket resulterer i at vi tester sorteringen af en n lang liste 15 gange. Den indre løkke tæller fra $i = 0$ til $i = 80$. Vi bruger herefter i -værdien til at generere vores n -værdier i linje 18. Her bruges formelen $n = \lfloor 1.1^i \rfloor$. Valget at test med eksponentielt stigende n , er af to grunde: det kan tage lang tid for en algoritme, at sortere lister med store n , så gør hele processen meget hurtigere, hvis man ikke tester så mange sorteringer med store n . Den anden og nok bedre grund, er at vi er meget interesseret i at se hvordan algoritmerne måles med hinanden, når n ikke er stort. Det ville jo være interesseret, hvis vi kunne identificere et n_0 som i afsnit 3. Til dette skal vi bruge en punkttæthed der ved store n ville være overflødig. Nu er det hele sat op, og vi kan time algoritmen på en n lang liste med tilfældige tal. n -værdien og den tid sorteringen tog, gemmes i listerne, og eksporteres til en csv fil til brug i databehandlingen (se bilag 1 og 2).

```

1      # i denne liste gennes den tid det tager at sorterer listen med n elementer
2      times = []
3
4      # Bruger det samme seed til test at hver algoritme. på den måde er det de samme
5      # pseudo-tilfældige liste som algoritmerne sorterer
6      random.seed(seed)
7
8      # Vi laver testen et antal (trials) gange pr. n-værdi
9      for trial in range(0,trials):
10
11         # En lykke der køre et abitrært antal gange (jo højere en i-værdi jo højere maks antal
12         # elementer i listen)
13         for i in range(0,80):
14
15            # Jeg bruger en potensfunktion til at fa flere datapunkter tættere på y-aksen og færre
16            # lange operationer (pga. lange liste)
17            n = round(pow(1.1,i))
18
19            # lidt feedback
20            print(f"function=\"{function.__name__}\": Trial: [{trial+1}/{trials}] {i=},{n=}")
21
22            # genererer en tilfældig liste med længden n
23            l = createRandomList(n)
24
25            # gem størrelsen af listen der skal sorteres
26            ns.append(n)
27            # gem den tid det tager at sortere listen
28            times.append(test(function,l))
29
30            # gemmer data
31            data = {

```

Figur 7.2: Kode til test af algoritmerne. Variablen *functions* er en liste med de to algoritmer der testes ([insertionsort,mergesort]).

7.4 De Reelle Udførelsestider

Algoritmernes udførelsestider er plottet i figur 7.5.

7.4.1 Store-O er Værste Tilfælde

...grunden til at bruge algoritmens gennemsnitlige udførelsestid er...

7.5 Optimering af Mergesort

Det er tydeligt at mergesort er langt bedre, til at sortere store lister, men ved små n kan vi også se at insertionsort, ikke er langt bagefter. Faktisk er den *gennemsnitlige* sortering hurtigere eller nogenlunde egens før $n = 15$. Dette punkt er hvad svarer til n_0 fra afsnit 3. At insertionsort faktisk normalt er hurtigere end mergesort hvis $n < n_0$, betyder at den mest hurtigste måde at sortere en liste afhænger af listens længde: Her listen på under n_0 elementer? så brug insertionsort. Er listen over n_0 elementer? så er mergesort gennemsnitligt hurtigere. Dette kunne lede os til at lave en ny sorteringsalgoritmerne således:

```
1  def sort(liste) {
2      if liste.length <= 15 {
3          return(insertionsort(liste))
4      }
5      return(mergesort(liste))
6  }
```

Figur 7.3: Algoritme der bruger insertionsort hvis inputlisten er kortere end 15, og ellers mergesort.

Her bruger vi insertionsort hvis listens længde er under eller lig 15, og mergesort hvis ikke. Det er en forbedrig af algoritmen. Dog er der en endnu mere snedig måde at inkorporere denne ide. Hvis vi tænker tilbage på mergesorts procedure fra afsnit 4, ved vi at algoritmen deler en usorterede liste op indtil der kun er lister med enkle elementer tilbage. Funktionen *merge* sætter herefter listerne sammen igen, og sørger for at den samlede liste altid vil være sorteret, da den altid for sorterede lister som input. Vi ved dog nu at denne process, ikke er effektiv ved n -værdier under 15. Det er derfor en smart ide at bruge insertionsort til at sortere listerne når mergesort har opdelt listen i tilstrækkeligt små bidder. Koden for denne hybrid algoritme kan ses på figur 7.4. I stedet for at opdele listen helt til der kun er et enkelt element i hver deliste, stopper denne algoritme opdelingen så snart insertionsort kan sortere listen hurtigere.

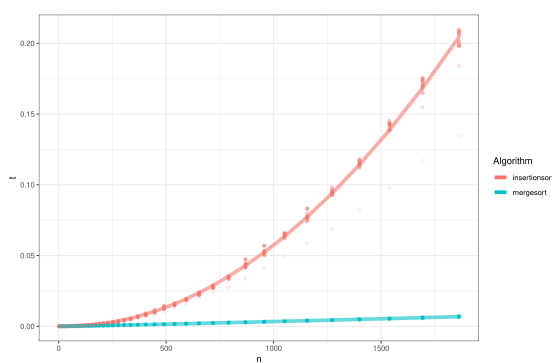
7.5.1 Sammenligning af Optimerede Algoritmer

```

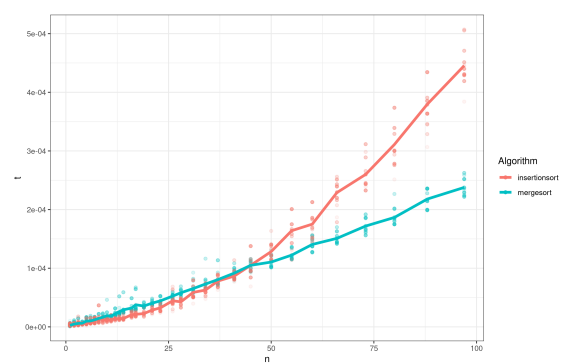
1 from insertionsort import *
2
3 n0 = 10
4
5 def hybrid_2(l):
6     if len(l) <= n0:
7         return(insertionsort(l))
8     else:
9         return(merge(hybrid_2(l[:len(l)//2]),hybrid_2(l[len(l)//2:])))
10
11 def merge(a,b):
12     c = []
13     while True:
14         if (len(a) == 0):
15             return(c + b)
16         elif (len(b) == 0):
17             return(c + a)
18         elif (a[0] <= b[0]):
19             c.append(a[0])
20             a.pop(0)
21         else:
22             c.append(b[0])
23             b.pop(0)

```

Figur 7.4: Mergesort hvor lister mindre end 15 sorteres effektivt af insertionsort



(a) $y = 0.941$



(b) $y = 3\sin x$

Figur 7.5: Sammenligning af insertionsort og mergesort

8 | Konklusion

Her er mine konkluderende sætninger

Litteraturliste

1. Dietzfelbinger, M. & Mehlhorn, K. *Algoritmer og datastrukturer* <https://github.com/thorehusfeldt/algoritmer-og-datastrukturer/blob/master/ad-book.pdf> ().
2. Leclaire nathan, n. *Build a Linked List For Each Layer in a Binary Tree* mar. 2014. <https://nathanleclaire.com/blog/2014/03/01/build-a-linked-list-for-each-layer-in-a-binary-tree>.
3. random — Generate pseudo-random numbers. <https://docs.python.org/3/library/random.html>.
4. What is Python? Executive Summary. <https://www.python.org/doc/essays/blurb>.

Bilag 1 - Algoritmer og Datageneration

Insertionsort Algoritmen

```
1 def insertionsort(l):
2     for i in range(1,len(l)):
3         element = l[i]
4
5         if element < l[0]:
6             for j in range(i,0,-1):
7                 l[j] = l[j-1]
8             l[0] = element
9         else:
10            j = i
11            while(l[j-1]>element):
12                l[j] = l[j-1]
13                j -= 1
14            l[j] = element
15    return(l)
```

Mergesort Algoritmen

```
1 def mergesort(l):
2     if len(l) <= 1:
3         return(l)
4     else:
5         return(merge(mergesort(l[:len(l)//2]),mergesort(l[len(l)//2:]))
6
7 def merge(a,b):
8     c = []
9     while True:
10        if (len(a) == 0):
11            return(c + b)
12        elif (len(b) == 0):
13            return(c + a)
14        elif (a[0] <= b[0]):
15            c.append(a[0])
16            a.pop(0)
17        else:
18            c.append(b[0])
19            b.pop(0)
```

Kode til test af algoritmerne

```
1 import random
2 import time
3 import pandas as pd
4 import os
5
6
7 # Denne funktion timer køretiden af en funktion med input l og returnerer funktionen køretid i
  # millisekunder
8 def test(fun,l):
9     start_time = time.perf_counter()
10
11     fun(l)
12
13     return(time.perf_counter() - start_time)
14
15 # Denne funktion returnerer en liste af tilfældige tal mellem 0 og 1000, med n elementer
16 def createRandomList(n):
17     return([random.randint(0,1000) for i in range(n)])
18
19 # Laver en mappe i filsystemet hvis der ikke allerede er en med stien
20 def makeIfNeeded(dir_path):
21     if(os.path.isdir(dir_path) == False):
22         print(f"made dir: {dir_path}")
23         os.mkdir(dir_path)
24     return(dir_path)
25
26 # Finder det næste versionsnummer for til navngivning af fil på baggrund af indholdet i en folder
27 def newVersionNumber(dir_path,extention):
28     file_names = os.listdir(dir_path)
29     version = 0
30
31     thisfilename = f"{version}{extention}"
32
33     while(thisfilename in file_names):
34         version += 1
35         thisfilename = f"{version}{extention}"
36
37     return(thisfilename)
38
39 # Dette er funktionen der tester en liste med funktioner og gemmer deres køretider
40 def fullTest(functions):
41
42
43     data_dir = "../data/"
44     version_number = newVersionNumber(data_dir,"")
45
46     # hvor mange datapunkter pr. n-værdi
47     trials = 10
48
49     # Bruger tidspunkt som frø til pseudotilfældige tal.
50     seed = time.time()
51     print(f"Seed: {seed}")
52
53     for function in functions:
54
```

```
55     # i denne liste gemmes antallet af elementer at den liste som algoritmen sorterer for hvert
56     # datapunkt.
57     ns = []
58     # i denne liste gemmes den tid det tager at sorterer listen med n elementer
59     times = []
60
61     # Bruger det samme seed til test at hver algoritme. på den måde er det de samme
62     # pseudo-tilfældige liste som algoritmerne sorterer
63     random.seed(seed)
64
65     # Vi laver testen et antal (trials) gange pr. n-værdi
66     for trial in range(0,trials):
67
68         # En lykke der køre et abitrært antal gange (jo højere en i-værdi jo højere maks antal
69         # elementer i listen)
70         for i in range(0,80):
71
72             # Jeg bruger en potensfunktion til at fa flere datapunkter tættere på y-aksen og færre
73             # lange operationer (pga. lange liste)
74             n = round(pow(1.1,i))
75
76             # lidt feedback
77             print(f"function=\"{function.__name__}\": Trial: [{trial+1}/{trials}] {i=},{n=}")
78
79             # genererer en tilfældig liste med længden n
80             l = createRandomList(n)
81
82             # gem størrelsen af listen der skal sorteres
83             ns.append(n)
84             # gem den tid det tager at sortere listen
85             times.append(test(function,l))
86
87         # gemmer data
88         data = {
89             "n": ns,
90             "t": times
91         }
92
93         version_dir = makeIfNeeded(data_dir + version_number + "/")
94         algorithm_dir = makeIfNeeded(version_dir + function.__name__ + "/")
95         full_path = algorithm_dir + newVersionNumber(algorithm_dir,".csv")
96
97         print(f"\ndata saved to \"{full_path}\"")
98
99         pd.DataFrame(data).to_csv(full_path,index = False)
```

Bilag 2 - Databehandling og Plots

Kode til databehandling og generering af plots

```
1 library(ggplot2)
2 library(plyr)
3 #library(tikzDevice)
4
5 #working dir
6 setwd("/home/Balder/Documents/Skole/Gym/SRP/data/the_one")
7
8 #dir = "1"
9 algorithm_dirs = list.files()
10
11 M = NULL
12 for (j in 1:length(algorithm_dirs)){
13   algorithm_dir = algorithm_dirs[j]
14
15   files = list.files(algorithm_dir)
16
17   for (i in 1:length(files)){
18     file_path = paste(algorithm_dir,files[i],sep="/")
19     print(file_path)
20     m = read.csv(file_path,header=TRUE,sep=",")
21     m$Algorithm = algorithm_dirs[j]
22     M = rbind(M, m)
23   }
24 }
25
26
27 M$algorithm = factor(M$Algorithm)
28 summary(M)
29
30 # punktmængder for hver algoritme
31 m_merge = subset(M,M$algorithm=="mergesort")
32 m_insertion = subset(M,M$algorithm=="insertionsort")
33
34 # laver modeller
35 model_merge = nls(t~a*n*log2(n), data=m_merge, start=list(a=0.000001))
36 model_insertion = nls(t~a*n^2 + b*n + c, data=m_insertion, start=list(a=1,b=1,c=1))
37
38
39 # Sætter ny path til hvor outputtet skal være
40 setwd("/home/Balder/Documents/Skole/Gym/SRP/img")
41
42 # gemmer r2-værdierne i to filer
43 writeLines(toString(round(with(m_merge,cor(t,n)),digits=3)),"r2-merge.txt")
```

```

44 writeLines(toString(round(with(m_insertion,cor(t,n)),digits=3)), "r2-insertion.txt")
45 print("r2 saved to files")
46
47
48 # laver modelerede v?rdier for hver n
49 m_merge$model = predict(model_merge)
50 m_insertion$model = predict(model_insertion)
51
52 m_merge$residual = resid(model_merge)
53 m_insertion$residual = resid(model_insertion)
54
55 # kombinerer de to
56 M = rbind(m_merge,m_insertion)
57
58 summary(M)
59
60
61 ggplot(M, aes(x=n, y=t, colour=Algorithm)) +
62   geom_point(size=1.5,alpha=0.1,shape=19) +
63   geom_line(aes(x=n, y=model,color=Algorithm), size=2, alpha=0.6) +
64   theme(legend.position = c(.9, .9)) + # virker ikke!!
65   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
66   theme_bw()
67
68 ggsave("toAlgoritmer.png")
69
70 ggplot(M, aes(x=log10(model), y=residual, colour=Algorithm)) +
71   geom_point(size=1.5,alpha=0.1,shape=19) +
72   labs(title="Residualer") +
73   facet_wrap(~algorithm,scales="free",ncol=1) +
74   theme_bw() +
75   theme(legend.position="none")
76 ggsave("toAlgoritmerResidual.png")
77
78 C = data.frame(
79   Algorithm = unique(M$Algorithm),
80   R2 = c(with(m_merge, cor(t,n)), with(m_insertion, cor(t,n)))
81 )
82
83 f = function(x) {
84   data.frame(
85     t = mean(x$t)
86   )
87 }
88
89 gns = ddply(subset(M,n <= 100), .(Algorithm, n), f)
90
91
92 ggplot(subset(M,n <= 100), aes(x=n, y=t, colour=Algorithm)) +
93   geom_point(size=1.5,alpha=0.08,shape=19) +
94   geom_line (size=1.5, data=gns) +
95   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
96   theme_bw()
97
98 ggsave("toAlgoritmerZoomed.png")

```
