

Studieretningsprojekt 2022

Elev id: 3x 06
Elev: Balder Westergaard Holst

Fag:	Vejleder:
Matematik A	Jens Christian Larsen Tlf.: 26279734 Email: jl@soroeakademi.dk
Informatik C	Kristian Kjeldgaard Hoppe Tlf.: 28825466 Email: kh@soroeakademi.dk

Område: Store-O notation og sorteringsalgoritmer
<p>Opgaveformulering:</p> <p>Gør rede for kompleksitetsklasserne givet ved Store-O notation, idet du giver eksempler på repræsentanter af forskellige klasser.</p> <p>Beskriv sorteringsproblemer generelt, og forklar algoritmerne for insertion- og merge-sort. Vis at insertion-sort har en værste-tilfælde-udførelse på $O(n^2)$.</p> <p>Implementer algoritmerne insertion- og merge-sort i Python og undersøg den faktiske udførelsestid af de to algoritmer på lister af tilfældige tal af forskellig størrelse. Vurder algoritmernes udførelsestid.</p> <p>Indfør begrebet træ, og bevis relevante sætninger om træer, især højden af et træ. Bevis, at en vilkårlig sorteringsalgoritme baseret på sammenligning, vil være nedadtil begrænset af i dens værste-tilfælde-udførelsestid med $n \cdot \lg(n)$ (Stirlings formel må antages).</p> <p>Insertion-sort har en bedste-tilfælde-udførelsestid på $O(n)$: Hvorfor er det ikke et modbevis til sætningen om at den nedre grænse for sorteringsalgoritmer er $n \cdot \lg(n)$?</p> <p>Omfang 15-20 ns.</p>

Sorteringsalgoritmer og O-notation

Matematik A og Informatik C

Vejledere: Jens Christian Larsen og Kristian Kjeldgaard Hoppe

Balder Westergaard Holst

7. april 2022

Resume

Denne opgave handler om sorteringsalgoritmer, og analysen af dem ved hjælp af store-O, og test af deres reelle køretider. Store-O kan bruges til at analysere sorteringsalgoritmers tidskompleksitet. Det viste sig at insertionsort havde tidskompleksiteten $O(n^2)$ og at mergesorts altid er $\Theta(n \cdot \log n)$. I testen af algoritmernes reelle køretider viste det sig, at insertionsort gennemsnitligt var hurtigere end mergesorts, hvis $n < 37$. Denne information kunne bruges til at konstruere en hybridalgoritme, der i gennemsnit var hurtigere end mergesort. Dog kan vi ikke være sikre på, at denne hybridalgoritme altid er bedre end mergesort, da vi ikke har fortaget store-O-analysen af algoritmen.

Indhold

Resume	I
Indledning	1
1 Algoritmers Udførelsestid	2
1.1 Tid som Funktion af Inputtets Størrelse	2
1.2 Store-O-Analyse	3
1.3 Kompleksitetsklasser	4
2 Sorteringsalgoritmer	6
2.1 Hvad er sortering?	6
2.2 Insertionsort	6
2.2.1 Insertionsort Procedure	6
2.2.2 Egenskaber af Insertionsort	7
2.3 Mergesort	8
2.3.1 Mergesort Procedure	8
2.3.2 Tidskompleksiteten af Mergesort	9
2.4 Store-O-Analyse af Insertionsort	11
2.4.1 Insertionsort i Værste Tilfælde	11
3 Binære Træer	13
3.1 Hvad er et Træ	13
3.2 Et Binært Træ	13
3.3 Blade i et Fuldt Binært Træ	14
3.4 Binære Træer og Sorteringsalgoritmer	15
3.4.1 Det Mindste antal Sammenligninger	15
3.5 Højden af et Binært Træ	15
3.6 Store-O er Værste Tilfælde	16
3.7 Mergesort og Den Nedre Grænse	16
4 Implementering og Test	17
4.1 Python	17
4.2 Implementering	17
4.3 Test af Sorteringsalgoritmer	17
4.4 De Reelle Udførelsestider	19

4.4.1	Hvornår er Insertionsort Hurtigst?	19
4.5	Optimering af Mergesort	21
4.5.1	Sammenligning af Optimerede Algoritmer	22
5	Konklusion	24
	Bilag 1 - Algoritmer og Datageneration	26
	Bilag 2 - Databehandling og Plots	30

Figurer

1.1	Definition af $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ og $\Theta(f(n))$ [2, s. 26].	3
1.2	Eksempler på hvordan kompleksitetsklasserne indeholder hinanden	4
1.3	Her ses skæringspunktet n_0 , hvorefter $g(n)$ altid er højere end $f(n)$. Altså vækstraten af $g(n)$ højere end vækstraten af $f(n)$	5
2.1	Eksempel på sortering af en liste	6
2.2	Procedure for at indsætte element først i listen. Elementet er markeret med rød , og tal der allerede er sorterede er markeret med blå . Linjer refererer til koden i figur 2.4.	7
2.3	Procedure for at indsætte et element hvor det passer i den sorterede liste. Elementet er markeret med rød , og tal der allerede er sorterede er markeret med blå . Linjer refererer til figur 2.4.	7
2.4	Pseudokode til insertionsort [2, s. 104].	8
2.5	Eksempel med delfunktionen <i>merge</i> i mergesort. Her kalder vi <i>merge</i> ([3,6,6], [4,5,7,9]). I hvert trin sammenlignes de røde tal. Blå tal er en del af den færdige c liste, og lilla tal er de tal der sidst blev føjet til c . Læg mærke til at den endelige c liste er sorteret fordi listerne a og b på forhånd var sorterede. Linjer refererer til figur 2.6.	9
2.6	Pseudokode til Mergesort [2, s. 106].	10
2.7	Hvordan mergesort først opdeler, og derefter samler listen med <i>merge</i> . [2, s. 106]	10
2.8	Insertionsort: Antal køringer af koden i den indre j -løkke, hvis inputlisten har kardinaliteten n	12
3.1	Eksempel på træ.	13
3.2	Eksempel på binært træ. Træets balde er markeret med grøn , og roden med rød . [7]	14
3.3	Binært Træ. [2, s. 109]	15
4.1	Kode til test af algoritmerne. Variablen <i>functions</i> er en liste med de to algoritmer der testes ([insertionsort,mergesort]).	18
4.2	Sammenligning af insertionsort og mergesort. Til venstre ses grafen for de to algoritmer sammen med en regression. Regressionerne er henholdsvis en andengradsregression for insertionsort, og en $a \cdot n \cdot \log n$ -regression for mergesort.	20
4.3	Residualplot for modellerne i figur 4.2.	20
4.4	Dette er samme data som i figur 4.2, men zoomet ind til intervallet $n \leq 100$. Her er regressionerne erstattet af en linje der går mellem gennemsnittet af t for hver n . Det interessante ved grafen er, at man tydeligt kan se hvordan insertionsort gennemsnitligt er hurtigst, indtil $n \approx 37$ hvorefter mergesort er hurtigst.	21

4.5	Algoritme der bruger insertionsort hvis inputlisten er kortere end 37, og ellers mergesort. . .	21
4.6	Mergesort hvor lister mindre end 30 sorteres effektivt af insertionsort.	22
4.7	Reelle udførelsestider for mergesort og hybridalgoritme. Plottet til højre er samme plot som til venstre bare zoomet ind, og med en linje der gør mellem gennemsnit af t for hver n . . .	23

Indledning

Alt sorteres. Navne, bøger, lande, slik, biler, ALT. Hver gang vi søger på Google, sorteres søgeresultaterne efter relevans, og når vi scroller på Tiktok eller Facebook, er opslagene sorteret, på baggrund af tidspunktet de er postet, og den personlige data der står i deres databaser.

Sortering er en måde at ordne data, så de er nemme at finde igen. Servere verden rundt bruger store dele af deres ydeevne på netop, at sortere den data de lagre. Optimering af disse algoritmer er derfor essentiel for det moderne samfunds gigantiske dataafhængighed, da de drastisk kan nedsætte databehandlingens udførelsestid.

Denne opgave omhandler sorteringsalgoritmer, og analysen af dem ved hjælp af store-O og kompleksitetsskasser. Først defineres store-O, og herefter tages der udgangspunkt i sorteringsalgoritmerne insertionsort og mergesort, hvis tidskompleksitet diskuteres og bevises. Blandt andet vises det at insertionsort har en værste-tilfælde-vækstrate på $O(n^2)$. Binære træer bruges i afsnittet efter, til at bevise at den nedre grænse for værste-tilfælde-vækstraten er $O(n \cdot \log n)$ for alle sorteringsalgoritmer. Det vil også forklares hvorfor det, at insertionsort har en bedste-tilfælde-vækstrate på $O(n)$, ikke overskrider denne grænse. Til sidst implementeres algoritmerne i Python og deres reelle køretider undersøges. Algoritmerne samles til en hybridalgoritme, der sammenlignes med mergesort.

1 | Algoritmers Udførelsestid

1.1 Tid som Funktion af Inputtets Størrelse

Dette afsnit bygger primært på side 24 og 25 i bogen "Algoritmer og Datastrukturer" [2]. I følgende afsnit redegøres for definitionen af store-O.

Når vi analyserer algoritmer, er det primære formål at skabe udsagn, der kort og præcist beskriver algoritmers opførsel. I vores tilfælde er vi interesserede i algoritmens udførelsestid. Vi lader \mathcal{I}_n være mængden af mulige argumenter til algoritmen, n være kardinaliteten (størrelsen) af \mathcal{I}_n og I være en instans af \mathcal{I} (altså $I \in \mathcal{I}_n$). Algoritmens udførelsestid T kan nu beskrives som funktion af instansen $T(I)$. Med det menes der, at en algoritms udførelsestid er afhængig af det input algoritmen får. Vi kan bruge dette til at beskrive tre egenskaber af algoritmens udførelsestid; algoritmens maksimale udførelsestid, algoritmens minimale udførelsestid og algoritmens gennemsnitlige udførelsestid. Den maksimale udførelsestid er udførelsestiden i værste tilfælde ($T(I_{\text{værst}})$), den minimale udførelsestid kan modsat beskrives som køretiden på det bedste tilfælde ($T(I_{\text{bedst}})$), og den gennemsnitlige udførelsestid kan findes ved at tage gennemsnittet af alle udførelsestiderne ($\frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)$). Med disse udtryk kan vi nu opskrive algoritmens mulige udførelsestider som funktion af kardinaliteten n af \mathcal{I}_n således:

$$T(n) = \begin{cases} T(I_{\text{værst}}) : I_{\text{værst}} \in \mathcal{I}_n & \text{vørste tilfælde} \\ T(I_{\text{bedst}}) : I_{\text{bedst}} \in \mathcal{I}_n & \text{bedste tilfælde} \\ \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{I \in \mathcal{I}_n} T(I) & \text{i gennemsnit} \end{cases}$$

Alle størrelserne beskriver et aspekt af algoritmens udførelsestid, dog er den mest pålidelige størrelse udførelsestiden i værste tilfælde. Det er samme koncept som når postvæsnet siger at det vil tage tre dage for din pakke at nå frem, selvom det godt kan ske hurtigere. Det værste tilfælde *garanterer* hvornår algoritmen er færdig. Dette værste tilfælde kan sammen med det bedste tilfælde bestemme variansen på udførelsestiden. Hvis en algoritme viser stor varians i dens udførelsestid, kan gennemsnitsudførelsestiden sige noget om hvordan man kan forvente at algoritmen opfører sig.

Denne form for algoritmeanalyse er dog ikke helt problemfri: for det første kan vi aldrig definere nogen fast forskrift for $T(n)$, der ville gøre det muligt at beregne den præcise udførelsestid. Tildels kan det forklares af Allan Tornings "halt problem"[5], hvor han beviste, at man aldrig kan vide om et program stopper eller ender i en uendelig løkke. Problemet i vores kontekst, hvor vi forsøger at bestemme en køretid for algoritmen, er, at hvis man kender udførelsestiden for en algoritme, så ville man vide at algoritmen stoppede før den havde kørt. Det var netop dette, Allan Turing viste, at man ikke kan. En anden forklaring er, at alle

computere vil køre den samme algoritme med forskellig hastighed pga. varians i computerens komponenter. Derudover vil selv den samme computer aldrig udføre en handling i præcis samme tidsinterval, da andre processer på computeren kan bruge dele af computerens ydeevne, eller fordi cpu'ens temperatur ændrer sig. Der er mange faktorer der kan bestemme hvor lang tid det tager en algoritme at fuldføre, hvilket gør det meget svært at bruge denne form for analyse praktisk.

Uanset hvilken forklaring man bruger, er det svært at sige meget om den faktiske køretid for en algoritme før man har kørt algoritmen. Derfor er det nemmere og mere brugbart, at forfolde sig til udførelsestedens vækstrate, og algoritmens opførsel når n bliver meget stort. Denne form for analyse hedder store-O-analyse.

1.2 Store-O-Analyse

I store-O-analyse forholder vi os til hvordan udførelsestedens stiger, når n bliver meget stort. I denne form for analyse inddeler vi grupper efter deres vækstrate. En funktions vækstrate beskriver hvor hurtigt funktionen stiger i forhold til andre funktioner ved meget høje n -værdier. Hvis en funktion $f(n)$ har en højere vækstrate end funktionen $g(n)$, betyder det at funktionen $f(n)$ altid vil være større end $g(n)$ ved store nok n -værdier. Det har ingen betydning om $f(n)$ er mindre end $g(n)$ ved små n , da $f(n)$ altid vil overstige $g(n)$ pga. dens højere vækstrate. Matematisk kan man sige at en funktion $f(n)$ har en højere vækstrate end $g(n)$, hvis $f(n) \geq c \cdot g(n)$ (hvor c er en konstant, og n er tilstrækkeligt stort). Hvis funktionerne har *samme* vækstrate gælder det at $c \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq d$ (hvor d er en konstant, og det samme gælder for n og c som før). I praksis betyder det, at funktioner som n^2 og $n^2 + 3n - 10$ har den samme vækstrate og, at deres vækstrate er højere end en funktion som $n \cdot \log(n)$.

$$\begin{aligned} O(f(n)) &= g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) \\ \Omega(f(n)) &= g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n) \\ \Theta(f(n)) &= O(f(n)) \cup \Omega(f(n)) \end{aligned}$$

Figur 1.1: Definition af $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ og $\Theta(f(n))$ [2, s. 26].

Vi kan nu bruge disse regler til at definere store-O-notation (se figur 1.1). Lad os begynde med $O(f(n))$. En funktion er del af mængden $O(f(n))$, hvis den kan sættes ind som $g(n)$. Med den matematiske definition menes der: $g(n)$ skal være sådan at der findes en værdi c , som er større end 0, sådan at der findes et positivt helt tal n_0 , sådan at der for alle n større end n_0 , gælder at $g(n)$ er mindre eller lig $c \cdot f(n)$. Dvs. $g(n)$ har mindre eller samme vækstrate som $f(n)$. I praksis betyder dette, at der altid vil være en positiv n_0 , hvorefter $f(n)$ altid vil være højere end eller lig $g(n)$ (se figur 1.3). Man kan også tænke mængden $O(f(n))$, som mængden af funktioner der *ikke vokser hurtigere end* $f(n)$.

Når man siger at en algoritme er $O(n^2)$, menes der at vækstraten for $T(n)$ er en del af mængden $O(n^2)$, og at $T(n)$ i værste tilfælde har samme vækstrate som n^2 . Man kan også sige at algoritmens *tidskompleksitet* er $O(n^2)$ [11]. Da det kun er vækstrate vi interesserer os for, betyder det, at det kun er leddet med den højeste vækstrate, der betyder noget, fordi de små led vil være ubetydelige ved store n -værdier. En funktion som $n! + n^3 + \log n$ vil blive reduceret til tidskompleksiteten $O(n!)$, da $n!$ er leddet med den højeste vækstrate.

Selv en funktion som $100 \cdot n!$, vil også have tidskompleksiteten $O(n!)$, da konstanten foran det størst voksende led ikke ændrer funktionens tidskompleksitet.

$\Omega(f(n))$ indeholder modsat $O(f(n))$ alle funktioner der vokser *mindst lige så hurtigt som* $f(n)$.

[kilde]

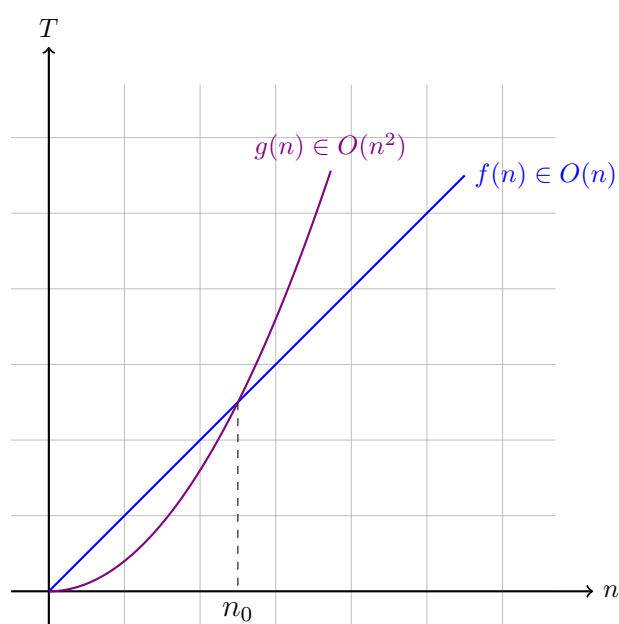
Der er en enkel vækstrate som både $O(f(n))$ og $\Omega(f(n))$ indeholder: nemlig vækstraten af $f(n)$. For at beskrive *præcis* denne mængde funktioner, bruger vi $\Theta(f(n))$. Hvis en algoritme er $\Theta(n^3)$, betyder det altså, at $T(n)$ *altid* vil have samme vækstrate som n^3 . Det ville også betyde at alle input af samme kardinalitet, vil resultere i lige lang teoretisk udførelsestid.

1.3 Kompleksitetsklasser

Med denne definition af store-O kan vi klassificere algoritmer i forhold til deres værste-tilfælde-vækstrate. Store-O inddeler algoritmer i kompleksitetsklasser efter deres tidskompleksitet [4]. Algoritmer som er en del af klassen $O(n^2)$ har i værste tilfælde samme vækstrate som n^2 . Det kunne også være at algoritmen var $O(n)$, altså ville den have en lineær vækstrate, og hvis en algoritme har konstant vækstrate, er den del af kompleksitetsklassen $O(1)$. Det er vigtigt at huske at disse kompleksitetsklasser ikke kun betegner vækstraten i værste, men at de også indeholder alle bedre vækstrater. Det vil altså sige at alle kompleksitetsklasser med en bestemt værste-vækstrate, også indeholder alle kompleksitetsklasser med lavere værste-vækstrate (se figur 1.2).

$$O(1) \subset O(n) \subset O(n \cdot \log n) \subset O(n^2) \subset O(n!)$$

Figur 1.2: Eksempler på hvordan kompleksitetsklasserne indeholder hinanden



Figur 1.3: Her ses skæringspunktet n_0 , hvorefter $g(n)$ altid er højere end $f(n)$. Altså vækstraten af $g(n)$ højere end vækstraten af $f(n)$.

2 | Sorteringsalgoritmer

2.1 Hvad er sortering?

Sortering er helt lavpraktisk, at sætte en mængde data i rækkefølge på baggrund af dataens attributter [10]. Det kunne f.eks. være alfabetisk eller efter farve eller størrelse. Når man som menneske sorterer en hånd med kort er det ikke altid, at vi tænker over hvordan vi gør. Det er dog ikke altid entydigt hvilken sorteringsstrategi, der ville være hurtigst. Disse sorterings-strategier kan også kaldes sorterings-algoritmer, og det er ikke kun mennesker, der kan benytte sorterings-algoritmer til f.eks. at sortere kort. Computere kan også, og de gør det for det meste også langt hurtigere. Resten af denne opgave omhandler to sorterings-algoritmer: insertionsort og mergesort, og deres forskellige måder at sortere en liste med tal.

Herfra vil jeg kun forholde mig til sortering af lister med tal, og sortere dem på baggrund af deres størrelse (se figur 2.1). Derudover vil algoritmernes opgave altid være, at sortere liste i stigende rækkefølge.

$$[4,2,5,3,1] \longrightarrow [1,2,3,4,5]$$

Figur 2.1: Eksempel på sortering af en liste

2.2 Insertionsort

Insertionsort er en af de mere simple sorteringsalgoritmer. Pseudokoden til algoritmen kan ses i figur 2.4 på side 8. Koden er baseret på kilde *Algoritmer og datastrukturer* [2] s. 104.

Det er ikke en tilfældighed, at denne algoritme hedder insertionsort. Den fungerer nemlig ved at gennemgå hvert element i listen, og placere det hvor det passer ind i de elementer der allerede er sorterede. Dette er nok den måde man ville sortere sin hånd i Uno eller 500.

2.2.1 Insertionsort Procedure

Vi kan allerede i linje 2, se at algoritmen gennemgår alle elementerne i listen kronologisk, da algoritmen her begynder med en for-løkke, der tæller for hvert element i listen, dog starter den ved 2. element i listen. For at gøre koden mere læsbar, sættes elementet som algoritmen er nået til ind i variabelen e i linje 3. Det næste algoritmen gør, er at checke om elementet har en mindre værdi end det første element i listen, hvis dette er sandt rykkes alt før elementet et tak til højre, og elementet sættes ind først i listen (se figur 2.2).

Forklaring	Eksempel	Linje
Liste hvor $e < \text{liste}[0]$	[5,7,9,4,6,5,2]	5
"Rykker" til højre	[5,5,7,9,6,5,2]	6-8
Sætter elementet ind først	[4,5,7,9,6,5,2]	9

Figur 2.2: Procedure for at indsætte element først i listen. Elementet er markeret med rød, og tal der allerede er sorterede er markeret med blå. Linjer refererer til koden i figur 2.4.

Det er vigtigt at pointere, at computere ikke kan "rykke" tal i en liste, men kun overskrive dem. Det er derfor at det ligner at, computeren har dubleret 5-tallet i figur 2.2. Det har den nemlig, den har taget de tre første elementer i listen, og skrevet dem over på andet, tredje og fjerde element. Computeren kan nu overskrive det første tal i listen, da det er en dublet.

Vi er nu nået til linje 11. Hvis ikke elementet er mindre end det første element i listen sker følgende (se figur 2.3): Algoritmen ser på tallet før elementet og spørger: "er dette tal større end elementet". Hvis det er, rykkes det til højre. Herefter stiller algoritmen samme spørgsmål, til tallet to pladser før elementet. Hvis dette tal er mindre end elementet placerer algoritmen elementet efter dette tal i listen, hvis ikke stiller den samme spørgsmål til tallet 3 pladser før elementet og så videre. Det er vigtigt at pointere, at der altid vil være et tal der er mindre end elementet, da elementet ellers ville være blevet placeret først i listen af den første del af proceduren (linje 5-10).

Forklaring	Eksempel	Linje
Liste hvor $e \geq \text{liste}[0]$	[4,5,7,9,6,5,2]	11
Da $9 \geq 6$ rykkes tallet til højre	[4,5,7,9,9,5,2]	13-14
Da $7 \geq 6$ rykkes tallet til højre	[4,5,7,7,9,5,2]	13-14
Da $5 \not\geq 6$ sættes elementet ind efter 5	[4,5,6,7,9,5,2]	13 og 17

Figur 2.3: Procedure for at indsætte et element hvor det passer i den sorterede liste. Elementet er markeret med rød, og tal der allerede er sorterede er markeret med blå. Linjer refererer til figur 2.4.

2.2.2 Egenskaber af Insertionsort

Insertionsort er en god sorteringsalgoritme, idet at proceduren er forholdsvis nem at forstå, men også fordi listen til venstre for det element algoritmen er nået til (e), altid vil være sorteret. Hvis man stopper en insertionsort-algoritme halvvejs gennem dens køretid, vil man altid have en liste hvor den første halvdel er sorteret og den anden halvdel usorteret. Denne egenskab har mergesort ikke.

Se afsnit 2.4 for store-O analysen af insertionsort.

```

1      funktion insertionsort(liste) {
2          for i = 1 til i = n {           # her er n længden af listen
3              e = liste[i]                # dette er elementet i listen
4
5              if e < liste[0] {            # hvis elementet er større end det første element i listen
6                  for j = j til j = 0{
7                      liste[j] = liste[j-1] # ryk elementerne på pladserne 0 til j et tak frem
8                  }
9                  liste[0] = e             # sætter dette element forrest i listen
10             }
11             else{
12                 j = i                    # j er en nu tæller der starter på i
13                 while liste[j-1] > e {    # kør mens liste[j-1] er større end elementet
14                     liste[j] = liste[j-1] # ryk liste[j] et tak til højre
15                     j -= 1
16                 }
17                 liste[j] = element        # indsæt elementet hvor det passer ind
18             }
19         }
20         return(liste)                    # returnerer den sorterede liste
21     }

```

Figur 2.4: Pseudokode til insertionsort [2, s. 104].

2.3 Mergesort

Hvor insertionsort er en løkke-baseret algoritme, er mergesort rekursiv idet at den ikke benytter en løkke til at gentage instruktioner, men kalder sig selv i stedet. Dette leder til en fraktallignende sorteringsmetode, der deler problemet i mindre og mindre bidder.

2.3.1 Mergesort Procedure

Pseudokoden til denne algoritme kan findes i figur 2.6 på side 10. Koden er baseret på kilde [2, s. 106].

Mergesortalgoritmen består af to funktioner. Lad os begynde med funktionen *merge*, da det er den mest simple. Koden til funktionen kan findes på figur 2.6 linje 11-29. Funktionen tager to lister (*a* og *b*) som argumenter, og fletter dem sammen til en tredje liste (*c*) (se figur 2.5). Denne *c* liste er dog ikke nødvendigvis sorteret. Eksempelvis kunne dette være en returneret liste:

$$\text{merge}([1,2,4,8],[9,5,6,4,7]) \longrightarrow [1,2,4,8,9,5,6,4,7]$$

Her er resultatet en delvist sorteret liste bestående af flere sorterede dele. Altså kan vi ikke nøjes med *merge* for at sortere en liste. En vigtig egenskab af *merge* er dog at den kan flette to sorterede lister sammen til én samlet sorteret liste. Det kunne for eksempel være i dette tilfælde:

$$\text{merge}([1,3,4,8],[2,3,6,7,7]) \longrightarrow [1,2,3,3,4,6,7,7,8]$$

Her er begge argumenter (*a* og *b*) sorterede lister, der flettes sammen til én samlet sorteret liste.

Linjenumre i det næste afsnit refererer til pseudokoden til algoritmen på figur 2.6 på side 10.

Forklaring	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Linje
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[3,6,6]	[4,5,7,9]	[]	18-21
Da $a[0] \not\leq b[0]$ føjes $b[0]$ til c	[6,6]	[4,5,7,9]	[3]	22-25
Da $a[0] \not\leq b[0]$ føjes $b[0]$ til c	[6,6]	[5,7,9]	[3,4]	22-25
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[6,6]	[7,9]	[3,4,5]	18-21
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[6]	[7,9]	[3,4,5,6]	18-21
Da $a.length = 0$ føjes b til c	[]	[7,9]	[3,4,5,6,6]	12-14
Returnerer c	[]	[]	[4,5,3,6,1,7,9]	13

Figur 2.5: Eksempel med delfunktionen *merge* i mergesort. Her kalder vi *merge*([3,6,6], [4,5,7,9]). I hvert trin sammenlignes de røde tal. Blå tal er en del af den færdige c liste, og lilla tal er de tal der sidst blev føjet til c . Læg mærke til at den endelige c liste er sorteret fordi listerne a og b på forhånd var sorteret. Linjer refererer til figur 2.6.

Mergesorts kompleksitet kommer dog først rigtigt til udtryk, når vi tager hele algoritmen i betragtning. Mergesortfunktionen (l. 1) tager en enkel liste som argument, og checker først om listen kun indeholder ét element (l. 2). Hvis den gør, så returnerer den listen uændret (l. 3). Dette giver intuitivt mening, da en liste med et enkelt element altid vil være sorteret. Hvis listen er mere end 1 lang, gør den det, som får hele algoritmen til at fungere (l. 5-8): den deler listen i to, og kalder sig selv på hver halvdel. Herefter sættes de to dele sammen igen af *merge*-funktionen. Det er dog ikke helt så enkelt som det lyder, idet at *mergesort* rekursivt kalder sig selv. Det leder til at algoritmen splitter listen op igen og igen, indtil der kun er et element i de mange lister. Herefter samler *merge* alle de små lister til en stor liste, hvor *merge* løbende sørger for at de lister den samler er sorteret (se figur 2.7 på side 10). De lister der er samlet af *merge*, vil altid være sorteret, da udgangspunktet er lister med et enkelt element. Disse enkelt-element-lister samles af *merge* til lister med to elementer der er sorteret. Og disse sorteret lister sættes sammen med andre sorteret lister. *merge* får altid to sorteret lister som input, og spytter derfor altid en samlet sorteret liste ud som output.

[bro?]

2.3.2 Tidskompleksiteten af Mergesort

Mergesort har tidskompleksiteten $O(n \cdot \log n)$ [6]. Algoritmens værste-tilfælde-vækstrate stiger med det samme som $n \cdot \log n$.

$$T_{\text{mergesort}} \in O(n \cdot \log n)$$

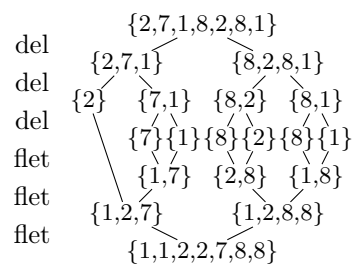
```

1  funktion mergesort(liste) {
2      if liste.length == 1{  # hvis listen har en længde på 1: returner listen uændret
3          return(liste)
4      }
5      else {
6          # Her deler algoritmen først listen i to dele. Derefter kalder den sig selv på hver
              del. Dette gør den til listerne kun er indeholder et element. Derefter samles
              dellisterne til en samlet og sorteret liste af mergefunktionen
7          return(merge(mergesort(liste[0 ... n/2]), mergesort(liste[n/2 + 1 ... n])))
8      }
9  }

10
11 funktion merge(a,b) {
12     c = []                # Listen a og b flettes ind i
13
14     while(true) {         # Lykken kører til der returneres en værdi
15         if a.length == 0 { # Hvis der ikke er mere i a
16             return(c + b)  # Returnerer c sammenføjet med b
17         }
18         elif b.length == 0 { # Ellers hvis der ikke er mere i b
19             return(c + a)  # Returnerer c sammenføjet med a
20         }
21         elif a[0] <= b[0] { # Ellers hvis det første element i a er mindre end det i b
22             tilføj a[0] til c
23             fjern a[0] fra a
24         }
25         else {             # Ellers
26             tilføj b[0] til c
27             fjern b[0] fra b
28         }
29     }
30 }

```

Figur 2.6: Pseudokode til Mergesort [2, s. 106].



Figur 2.7: Hvordan mergesort først opdeler, og derefter samler listen med *merge*. [2, s. 106]

2.4 Store-O-Analyse af Insertionsort

I dette afsnit gøres der brug af tidligere definerede begreber og koncepter fra afsnit 1.

2.4.1 Insertionsort i Værste Tilfælde

Når man analyserer en algoritme teoretisk handler det ikke om den faktiske udførelsestid, men nærmere hvor mange operationer computeren skal køre, for at fuldføre algoritmen. På den måde kan man abstrahere helt væk fra fysisk tid, og regne med teoretiske operationer, hvis reelle udførelsestid ikke har nogen indflydelse. Det er fordi udførelsestiden er proportional med antallet af operationer der kører på computerens cpu. Den eneste faktor for antallet af operationer som en sorteringsalgoritme kører, er kardinaliteten af inputtet algoritmen udføres på. Dette gør det muligt at beskrive antallet af operationer (der er proportionalt med udførelsestiden) udelukkende som funktion af n (inputtets kardinalitet). [2, s. 42]

Insertionsort består af to løkker: en indre og en ydre. Den ydre løkke kører fra $i = 1$ til (og uden) $i = n$. Altså kører koden inde i løkken $n - 1$ gange. Den indre løkke kører i værste tilfælde fra $j = i$ til $j = 1$ for hver i værdi i den ydre løkke. Det betyder at operationerne, som den indre løkke udfører, stiger sammen med i (se figur 2.8). Vi ender med at kunne beskrive det totale antal gange som koden i den indre løkke kører, som summen af alle i -værdierne, som den ydre løkke gennemgår, koden i den indre løkke køres $i - 1$ gange for hver i .

$$\sum_{i=2}^n i - 1$$

Den indre løkkes kode køres i gange, da løkken gennemgår fra $j = i$ til og med $j = 1$, altså kører løkken i gange. Vi kan nu omskrive summen således:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

For at simplificere udtrykket endnu mere kan vi bruge reglen at en sum som $1 + \dots + n - 1$ kan omskrives på denne måde. [Bevis??]

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{2} \cdot n$$

Dette er altså et udtryk for hvor mange gange koden i den indre løkke kører, som funktion af kardinaliteten af algoritmens input. Vi kunne nu begynde at gange denne funktion med hvor mange operationer der sker inde i den indre løkke. Og lægge operationerne der sker n gange til, fordi de er med i den ydre løkke. Til sidst kunne vi lægge de operationer der kun sker én gang til, og resultatet ville se nogenlunde sådan ud:

$$a \cdot \frac{1}{2} \cdot n^2 - a \cdot \frac{1}{2} \cdot n + b \cdot n + c$$

Her er a antallet af operationer i den indre løkke, b er antallet af operationer kun i den ydre løkke, og c er operationerne som er uden for begge løkker. Det smarte ved store-O-notation er at vi faktisk ikke behøver at kende de reelle værdier for a , b og c , da de alle er konstanter, og derfor ikke har nogen indflydelse på algoritmens vækstrate. Selv ikke udførelsestiden for hver af disse operationer, har nogen indflydelse på

vækstraten. Vi kan derfor sige at algoritmens udførelsestid er $O(n^2)$.

$$T_{\text{insertionsort}}(n) \in O(n^2)$$

Med det menes der at udførelsestiden i værste tilfælde har tidskompleksiteten $\Theta(n^2)$.

i	j	køringer i j løkken	
2	2...1	1	
3	3...1	2	
4	4...1	3	
5	5...1	4	
\vdots	\vdots	\vdots	
n	n...1	(n - 1)	

\Rightarrow

Total antal køringer i j-løkken:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Figur 2.8: Insertionsort: Antal køringer af koden i den indre j -løkke, hvis inputlisten har kardinaliteten n

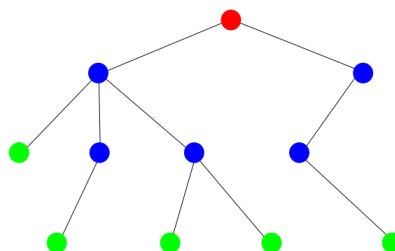
3 | Binære Træer

3.1 Hvad er et Træ

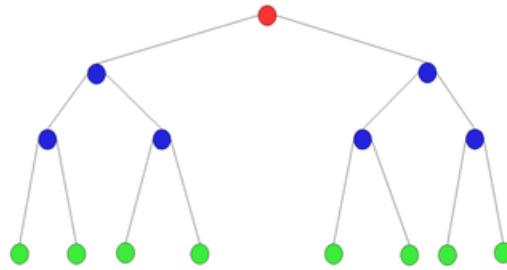
Træer som vi kender dem, har en stamme hvorfra grene springer ud. Fra grenene springer mindre grene, og på den måde ender træet med at have mange små grene, som stammer fra samme stamme. Informatikkens træer er ikke langt fra denne forståelse. I informatik er træer en datastruktur. Det er et netværk af knudepunkter forbundet af kanter. Træet starter med roden, der typisk er tegnet øverst (se figur 3.1). En rod er hvor træet begynder, og har ingen forældre. Fra roden forgrener træet sig til flere, børn der også kan have flere børn. Træstrukturen er sådan at man altid kan vælge et knudepunkt, og lave et subtræ med knudepunktet som rod. Knudepunkterne hvor træet ender kalder man blade. Informatikkens træer har også en dybde. Hvis man starter ved roden, er dybden 0. Hver gang man går et trin "ned", i træstrukturen, stiger dybden med 1. Det betyder at den maksimale dybde svarer til træets højde. [8]

3.2 Et Binært Træ

Man tegner normalt binære træer som på figur 3.2 bestående af knudepunkter og forbindelser mellem dem. Det specielle ved *binære* træer, er at hvert knudepunkt højst må forgrene sig to gange (altså binært). Denne lille specialisering er brugbar i mange sammenhænge som f.eks. som datastruktur til søgealgoritmer [1], men det viser sig også at være en snedig vej til at beskrive sorteringsalgoritmers opførsel.



Figur 3.1: Eksempel på træ.



Figur 3.2: Eksempel på binært træ. Træets balde er markeret med grøn, og roden med rød. [7]

3.3 Blade i et Fuldt Binært Træ

Beviset er baseret på kilden [3].

Et fuldt binært træ, er et binært træ, hvor alle bladene har samme dybde. Træet på figur 3.2, er et fuldt binært træ.

Intuitivt giver det mening, at hvert knudepunkt har to børn, og at antallet af blade derfor er givet ved 2^d , hvor d er træets dybde. Dette udtryk kan bevises således:

Vi antager at et træ med en maksimal dybde d , har 2^d blade.

Hvis vores dybde er $d + 1$, skal antallet af blade være 2^{d+1} .

I et fuldt binært træ fordobles antallet af blade, hver gang dybden stiger med 1. Det er fordi alle knudepunkter i et fuldt binært træ, altid forgrener sig til to børn. Altså må antallet af blade ved dybden $d + 1$, være det dobbelte af antallet af blade ved dybden d .

$$2 \cdot (2^d)$$

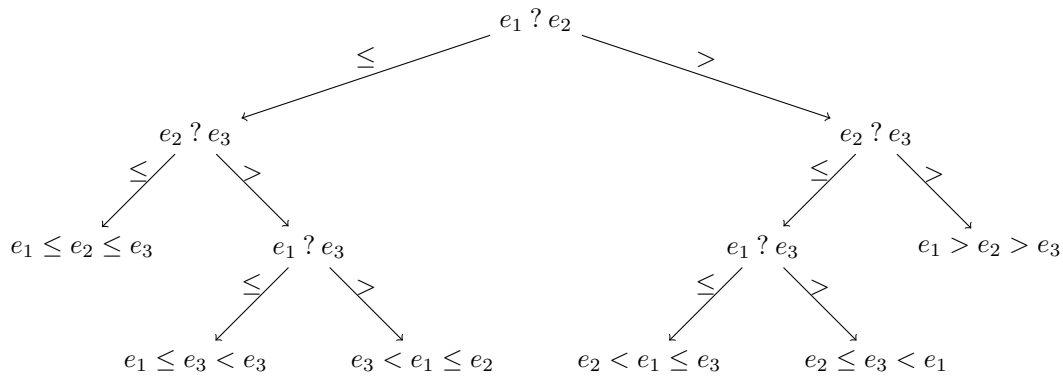
Vi kan nu omskrive udtrykket således:

$$2 \cdot (2^d) = 2^1 \cdot 2^d = 2^{d+1}$$

Altså er antagelsen, at antallet af blade i et fuldt binært træ er 2^d , bekræftet. ■

Det er vigtigt at pointere at alle binære træer med dybden d , maksimalt har lige så mange blade, som det fulde træ med samme dybde. Altså er 2^d også det maksimale antal blade for et generelt binært træ, med dybden d .

æ



Figur 3.3: Binært Træ. [2, s. 109]

3.4 Binære Træer og Sorteringsalgoritmer

Ved første blik kunne man tilgives for ikke, at se hvordan binære træer har relevans for sorteringsalgoritmer, men det kræver bare, at man giver knudepunkterne og grenene meningsfulde betydninger. I bund og grund er det som en sorteringsalgoritme gør, at fortage en masse sammenligninger af elementerne i dens input. Algoritmen bestemmer hvilke operationer, den skal køre udelukkede på baggrund af disse sammenligninger. Hvis vi tænker hvert knudepunkt som en sammenligning af to elementer fra algoritmens input (se figur 3.3), er det jo givet, at det ene element enten vil være større end det andet eller ikke større. Denne sammenligning guider algoritmens operationer og derved den næste sammenligning. Dette gentages til algoritmen har gjort nok sammenligninger, til at kunne sortere dens input. Vi kan derfor tænke alle træets blade, som en måde for algoritmen at sortere et bestemt input; Hvert blad har kun en specifik vej, og vejen til bladet er udelukkede givet af algoritmens input. Altså er hvert af træets blade en kollektion af de sammenligninger, som algoritmen gjorde for at sortere inputtet. [2, s. 109]

3.4.1 Det Mindste antal Sammenligninger

I dette store teoretiske træ med alle dets blade kunne man jo så spørge: Hvor mange sammenligninger skal der så højest til at sortere et input? eller omformuleret: Hvor højt er træet? Denne oversættelse holder stik, da vi skal lave lige så mange sammenligninger for at komme ned til nederste blad, som træet er højt.

3.5 Højden af et Binært Træ

Dette bevis er baseret på kilden [2, s. 109].

Bevis: I et sammenligningstræ for en sorteringsalgoritme med input længden n , hvor π og σ er permutationer af listen $\{1 \dots n\}$, er bladene der svarer til π og σ (l_π og l_σ) forskellige.

Dette er et modstridsbevis hvilket betyder, at vi starter med at antage det modsatte, af det vi prøver at bevise: vi antager altså at π og σ , leder til samme blad i sammenligningstræet; l_π og l_σ er ens.

Under denne antagelse kan to forskellige lister $\{e_1 \dots e_n\}$ og $\{e'_1 \dots e'_n\}$, gennemgå de præcis samme operationer og derved sortere listen. Dette er en modstrid, da man aldrig vil kunne benytte præcis de samme

operationer, til at sortere to forskellige permutationer af $\{1 \dots n\}$. ■

Alle permutationer af listen $\{1 \dots n\}$ har altså et tilsvarende blad, derfor må sammenligningstræet have mindst $n!$, da der skal være et for hver permutation.

Det maksimale antal blade på et binært træ er 2^d , hvor d er træets dybde (som vi beviste i afsnit 3.3). Vi kan nu opstille denne ligning:

$$2^d \geq n! \Leftrightarrow d \geq \log n!$$

For at bygge videre kan vi nu bruge regnereglen $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$d \geq \log n! \geq \log \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

Ved hjælp af logaritmeregneregler kan vi omskrive udtrykket længst til højre således:

$$\log \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = n \cdot \log \left(\frac{n}{e}\right) = n \cdot \log n - n \cdot \log e$$

Dette er altså et udtryk for højden af et sammenligningstræ:

$$d \geq n \cdot \log n - n \cdot \log e$$

Da d er træets dybde, er det også det maksimale antal sammenligninger en given sortering algoritme skal gøre, for at sortere en liste. Udtrykket siger at den nedre grænse for d er $n \cdot \log n - n \cdot \log e$. Det er altså ikke muligt at sortere en liste med færre sammenligninger i værste tilfælde. Da antallet af sammenligninger er proportionalt med algoritmens udførelsestid, må det være sandt at alle sorteringsalgoritmer har en nedre værste-tilfælde-vækstrategrænse på $O(n \cdot \log n)$.

3.6 Store-O er Værste Tilfælde

Det er en vigtig detalje, at denne nedre grænse er for vækstraten i *værste* tilfælde. Insertionsort kan i bedste tilfælde sortere en liste med $O(n)$ [6], men det er værste tilfælde som vækstraten-gælden gælder for. Det er muligt at sortere en liste hurtigere end $O(n \cdot \log n)$, det kræver bare at det ikke er det værste tilfælde, og at algoritmen (som insertionsort) kan sortere listen hurtigere i bedste tilfælde. Man burde hellere tænke grænsen således: Man kan aldrig lave en sortering algoritme, der virker ved hjælp af sammenligninger, som vi kan være sikrer på, er hurtigere end $O(n \cdot \log n)$.

3.7 Mergesort og Den Nedre Grænse

Vi ved nu at alle sorteringsalgoritmers værste-tilfælde-vækstrate, er afgrænset af $O(n \cdot \log n)$. Vi ved også at mergesort har tidskompleksiteten $O(n \cdot \log n)$. Mergesort har altså den teoretisk bedste tidskompleksitet for en sammenlignings-sortering algoritme. Ikke nok med det betyder det også at mergesort både i bedste og værste tilfælde er $O(n \cdot \log n)$. Mergesort er altså $\Theta(n \cdot \log n)$.

$$T_{\text{mergesort}}(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$$

4 | Implementering og Test

I dette afsnit testes algoritmerne fra afsnit 2. Algoritmerne implementeres i python.

4.1 Python

Sproget Python har et højt abstraktionsniveau, og kan på mange punkter ligne vores pseudokode fra tidligere [2, s. 68]. Det betyder at vi på mange punkter opgiver lidt kontrol til compileren, for at gøre koden mere læsbar og tilgængelig. Det betyder også at vi aldrig helt kan vide hvilke instruktioner computeren udfører. Derudover er Python et relativt langsomt sprog, da koden kompileres samtidigt med at programmet kører [12]. Dette gør at sproget ikke egner sig særligt godt til at skrive optimerede algoritmer, der skal køre på meget store datasæt. Heldigvis kan vi se bort fra dette, da vi med store-O-analyse er ligeglade med den reelle udførelsestid, og i stedet er interesseret i vækstrater. Vækstraten for en algoritme er nemlig egns, ligegyldigt hvor langsomt hvert skridt er. På nogle punkter er det måske endda en fordel, at algoritmerne kører langsommere, da det vil gøre forskellen i udførelsestiderne større, og lettere at forholde sig til.

4.2 Implementering

Implementering i Python er relativt simpelt. Python bruger dynamiske variable [12], derfor er det ikke nødvendigt at fortælle Python, om en variabel f.eks. er et heltal eller en liste.

4.3 Test af Sorteringsalgoritmer

For at teste sorteringsalgoritmerne fra afsnit 2, og se hvordan deres reelle udførelsestid som funktion af n , relaterer til deres teoretiske væksthastighed og store-O-analyse, skal algoritmerne køres på en kontrolleret måde hvor vi systematisk kan tage tid på algoritmens udførelsestid ved forskellige input.

På figur 4.1 på side 18 ses koden til test af algoritmerne. Variablen *functions* på linje 1 indeholder en liste med de algoritmer, der skal testes. I vores tilfælde indeholder den [*insertionsort*,*mergesort*]. Inde i denne løkke tester vi funktionerne. Det at vi behandler algoritmerne ens, sikrer at de bliver testet på samme måde. Det næste vi gør er at definere lister til opbevaring af kardinaliteten af den liste som algoritmen sorterer (l. 4), og en til den reelle tid det tager for algoritmen at sortere listen (l. 6). I linje 9 sætter vi frøet for de pseudotilfældige tal [9], som vi senere skal bruge til at generere listerne som sorteringsalgoritmerne skal sortere. Det er vigtigt af vi sætter frøet til den samme værdi, før vi tester hver algoritme, da vi på den måde sikrer os, at det er de samme pseudotilfældige lister, som algoritmerne sorterer. Vi kan derfor med god vilje

```

1  for function in functions:
2
3      # i denne liste gemmes antallet af elementer at den liste som algoritmen sorterer for hvert
      datapunkt.
4      ns = []
5      # i denne liste gemmes den tid det tager at sorterer listen med n elementer
6      times = []
7
8      # Bruger det samme seed til test at hver algoritme. på den måde er det de samme
      pseudo-tilfældige liste som algoritmerne sorterer
9      random.seed(seed)
10
11     # Vi laver testen et antal (trials) gange pr. n-værdi
12     for trial in range(0,trials):
13
14         # En lykke der køre et abitrært antal gange (jo højere en i-værdi jo højere maks antal
         elementer i listen)
15         for i in range(0,80):
16
17             # Jeg bruger en potensfunktion til at fa flere datapunkter tættere på y-aksen og færre
             lange operationer (pga. lange liste)
18             n = round(pow(1.1,i))
19
20             # lidt feedback
21             print(f"function=\"{function.__name__}\": Trial: [{trial+1}/{trials}] {i=},{n=}")
22
23             # genererer en tilfældig liste med længden n
24             l = createRandomList(n)
25
26             # gem størrelsen af listen der skal sorteres
27             ns.append(n)
28             # gem den tid det tager at sortere listen
29             times.append(test(function,l))

```

Figur 4.1: Kode til test af algoritmerne. Variablen *functions* er en liste med de to algoritmer der testes ([insertionsort,mergesort]).

sammenligne algoritmernes køretider, da vi er sikre på at deres input, var det samme under testen. Efter denne pegerer (l. 12 og 15). Den første sørger for at vi gentager den samme test flere gange. I vores tilfælde er variablen *trials* sat til 15, hvilket resulterer i at vi tester sorteringen af hver *n* lange liste 15 gange. Den indre løkke tæller fra $i = 0$ til $i = 80$. Vi bruger herefter *i*-værdien til at generere vores *n*-værdier i linje 18. Til det bruges formlen $n = \lfloor 1.1^i \rfloor$. Valget at test med exponentielt stigende *n*, er af to grunde: For det første kan det tage lang tid for en algoritme, at sortere lister med store *n*, så det gør hele processen meget hurtigere, hvis man ikke tester så mange sorteringer med store *n*. Den anden og nok bedre grund, er at vi er meget interesserede i at se hvordan algoritmerne måles med hinanden, når *n* ikke er stort. Det ville jo være interessant, hvis vi kunne identificere et n_0 som i afsnit 1. Til dette skal vi bruge en punkttæthed, der ved store *n* ville være overflødig.

Nu er det hele sat op, og vi kan teste algoritmen på en *n* lang liste med tilfældige tal. *n*-værdien og den tid sorteringen tog, gemmes i listerne, og eksporteres til en csv fil til brug i databehandlingen (se koden i bilag 1 og 2).

4.4 De Reelle Udførelsestider

Algoritmernes udførelsestider er plottet i figur 4.2 på side 20.

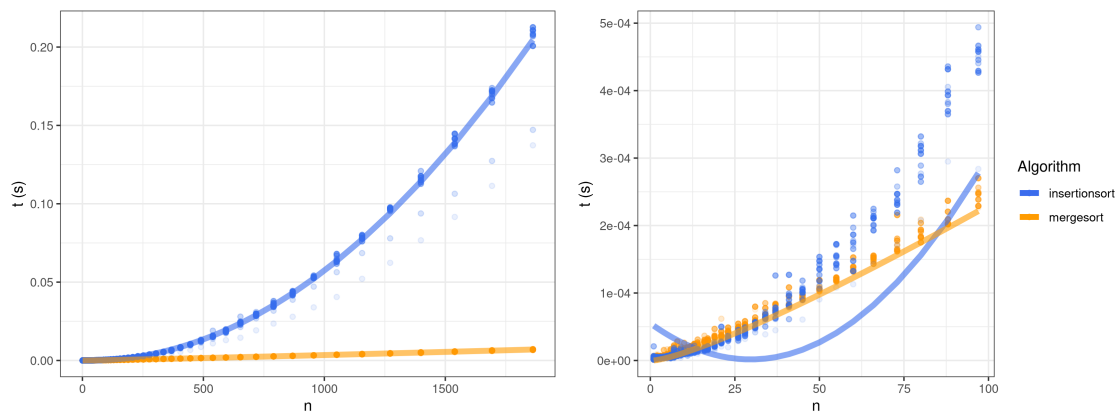
Som det tydeligt fremgår på graferne, er mergesort langt hurtigere end insertionsort ved store n . Vi kan også se at algoritmerne nogenlunde følger deres regressioner, men hvorfor egentlig det? Det er kun i værste tilfælde at $T_{\text{insertionsort}}(n) \in \Theta(n^2)$ ikke? Jo, men det lader til at insertionsorts gennemsnitlige vækstrate, er tættere på $\Theta(n^2)$ end på $\Theta(n)$. Det er dog alligevel tydeligt at andengradsregression ikke passer helt på insertionsorts gennemsnitlige køretid, hvis vi zoomer ind på plottet til højre på figur 4.2. Faktisk passer regressionen slet ikke på punkterne på dette stykke af grafen, hvilket tyder på at algoritmens udførelsestid ikke bare kan beskrives med et andengradspolynomie. Hvad angår mergesort følger den regressionen rigtig godt. Det tyder på at antagelsen at mergesorts vækstrate altid er $\Theta(n \log n)$ fra afsnit 3.7 må være sand.

En anden finurlighed kan findes i residualplottet (figur 4.3). Residualplottet for begge grafer er rigtig flot, med en jævn punktfordeling på begge sider af regressionen, men til aller sidst er der et par af insertionsorts punkter, der er langt under regressionen. Det kan være af flere grunde blandt andet at computerens styresystem lige i dette tilfælde, tildelte flere ressourcer til programmet. En anden grund kunne være at algoritmen netop i disse tilfælde, var heldig at få en delvist sorteret liste, der gjorde at listen kunne sorteres langt hurtigere end $O(n^2)$. Dog tyder det tydelige nedadgående mønster i outlier-residualerne på, at afvigelsen ikke er en tilfældighed.

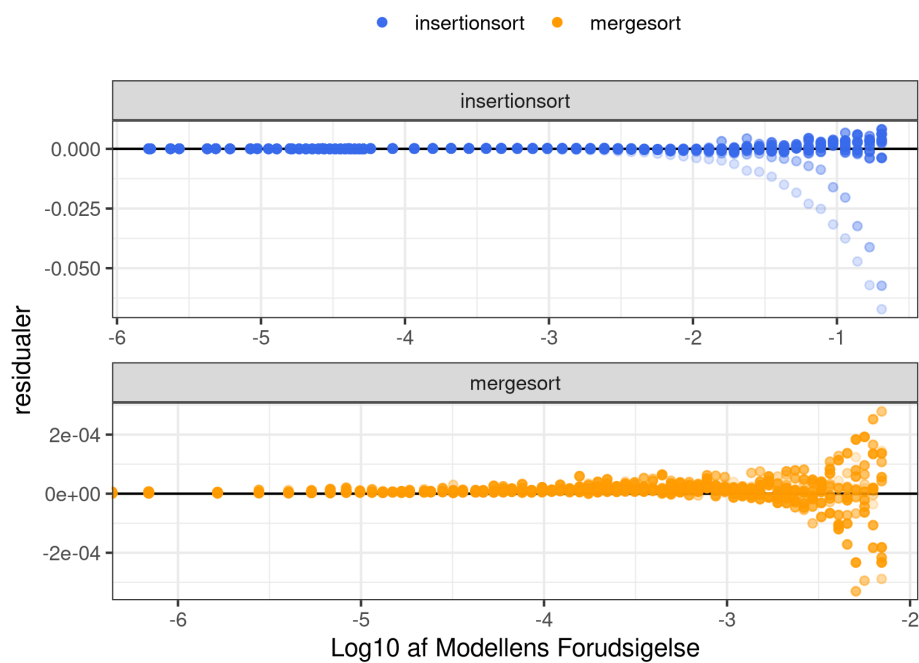
Når man ser på residualplottene er et andet mønster også tydeligt: variansen stiger. Udførelsestiderne har større og større usikkerhed, jo større n er. Dette giver intuitivt mening hvis man sætter det i kontekst. Hvis 10 personer løber et 50m løb, vil alle løbere afslutte inden for et forholdsvist lille tidinterval. Hvis vi herefter bad dem om at løbe et maraton, ville deres tider ikke bare variere med sekunder og minutter, men med timer. Variansen i deres tider, øges altså af størrelsen på opgaven. Det samme er sandt for vores sorteringsalgoritmer, hvilket tydeliggøres af residualplottene.

4.4.1 Hvornår er Insertionsort Hurtigst?

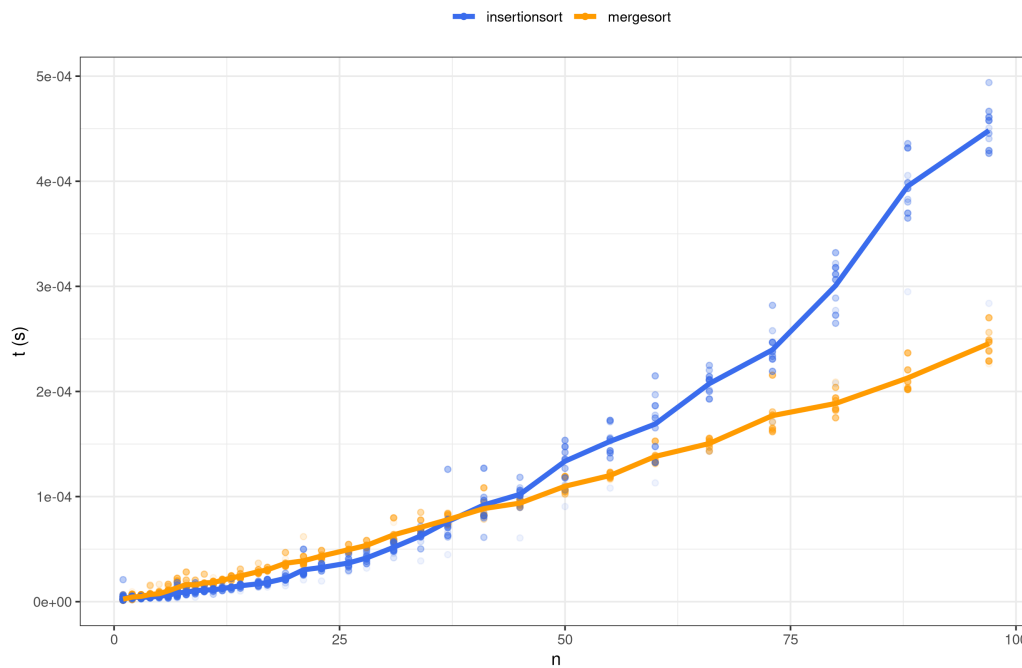
Det er tydeligt at mergesort er langt bedre, til at sortere store lister, men ved små n kan vi også se at insertionsort, ikke er langt bagefter. Faktisk er den gennemsnitlige sortering hurtigere eller nogenlunde ens før $n = 37$ (se figur 4.4). Det bekræfter teorien fra afsnit 1, idet at store-O ikke siger noget om algoritmens opførsel ved små n , men kun ved meget store. Her er det tydeligt at en sådan form for analyse ikke er tilstrækkeligt for at bedømme, hvilken algoritme der er bedst til hvilke problemer. Store-O analyse er også blind overfor den gennemsnitlige udførelsestid. Ved små n er den gennemsnitlige køretid brugbar, da den maksimale køretid aldrig bliver astronomisk stor, og vi kan derfor med god vilje bruge gennemsnitlig udførelsestid i disse overvejelser. Det ville gennemsnitligt være hurtigst, at bruge insertionsort, ved små n og mergesort ved store. Punktet der adskiller hvilken algoritme der er hurtigst er ca. $n = 37$. Dette punkt kan siges at svarer til n_0 fra afsnit 1, idet at mergesort gennemsnitligt altid er hurtigere efter punktet. Alligevel er det ikke helt sandt, da n_0 fra afsnit 1 forholder sig til værste-tilfælde-udførelsestiden, men vi kan i denne reelle kontekst bruge n_0 , som punktet hvorefter mergesort gennemsnitligt er hurtigst.



Figur 4.2: Sammenligning af insertionsort og mergesort. Til venstre ses grafen for de to algoritmer sammen med en regression. Regressionerne er henholdsvis en andengradsregression for insertionsort, og en $a \cdot n \cdot \log n$ -regression for mergesort.



Figur 4.3: Residualplot for modellerne i figur 4.2.



Figur 4.4: Dette er samme data som i figur 4.2, men zoomet ind til intervallet $n \leq 100$. Her er regressionerne erstattet af en linje der går mellem gennemsnittet af t for hver n . Det interessante ved grafen er, at man tydeligt kan se hvordan insertionsort gennemsnitligt er hurtigst, indtil $n \approx 37$ hvorefter mergesort er hurtigst.

4.5 Optimering af Mergesort

At insertionsort faktisk normalt er hurtigere end mergesort hvis $n < n_0$, betyder at den hurtigste måde at sortere en liste afhænger af listens længde: Er listen på under n_0 elementer? så brug insertionsort. Er listen over n_0 elementer? så er mergesort gennemsnitligt hurtigere. Dette kunne lede os til at lave en ny sorteringsalgoritme således:

```

1  def sort(liste) {
2      if liste.length <= 37 {
3          return(insertionsort(liste))
4      }
5      return(mergesort(liste))
6  }
```

Figur 4.5: Algoritme der bruger insertionsort hvis inputlisten er kortere end 37, og ellers mergesort.

Her bruger vi insertionsort hvis listens længde er under eller lig 37, og mergesort hvis ikke. Det er en forbedring af algoritmen, men kun hvis $n < 37$. Dog er der en endnu mere snedig måde at inkorporere denne ide. Hvis vi tænker tilbage på mergesorts procedure fra afsnit 2, ved vi at algoritmen deler en usorteret liste op indtil der kun er lister med enkle elementer tilbage. Funktionen *merge* sætter herefter listerne sammen igen, og sørger for at den samlede liste altid vil være sorteret, da den altid får sorterede lister som input. Vi ved dog nu at denne process, ikke er effektiv ved n -værdier under 37. Det er derfor en smart ide at bruge insertionsort til at sortere listerne når mergesort har opdelt listen i tilstrækkeligt små bidder. Koden for denne hybrid algoritme kan ses på figur 4.6. I stedet for at opdele listen helt til der kun er et enkelt element i hver deliste, stopper denne algoritme opdelingen så snart insertionsort kan sortere listen hurtigere. Det er

```

1  from insertionsort import *
2
3  n0 = 30
4
5  def hybrid(l):
6      if len(l) <= n0:
7          return(insertionsort(l))
8      else:
9          return(merge(hybrid(l[:len(l)//2]),hybrid(l[len(l)//2:]))))
10
11 def merge(a,b):
12     c = []
13     while True:
14         if (len(a) == 0):
15             return(c + b)
16         elif (len(b) == 0):
17             return(c + a)
18         elif (a[0] <= b[0]):
19             c.append(a[0])
20             a.pop(0)
21         else:
22             c.append(b[0])
23             b.pop(0)

```

Figur 4.6: Mergesort hvor lister mindre end 30 sorteres effektivt af insertionsort.

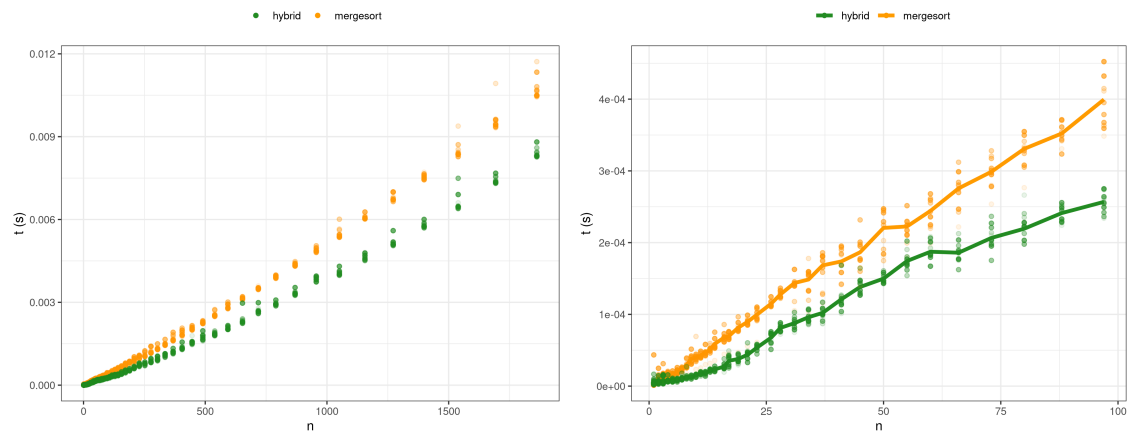
vigtigt at pointere, at algoritmernes udførelsestid er nogenlunde ens ved $n \approx 37$, og at det derfor ikke ville være hurtigere, at splitte listen op med mergesort, til alle dellisterne havde en længde på 37, og derefter sortere med insertionsort. For at sikre at insertionsort kun sorterer lister hvor den er hurtigst, splitter hybridalgoritmen inputtet, til dellisterne er højst 30 elementer lange (se linje 3 og 6 på figur 4.6).

4.5.1 Sammenligning af Optimerede Algoritmer

Udførelsestiderne er plottet på figur 4.7 på side 23.

Når man ser på grafen er det klart, at hybridalgoritmen gennemsnitligt er hurtigst, men ikke i samme grad som mergesort var insertionsort overlegen ved høje n . Det ligner på grafen, at hybridalgoritmen ligesom mergesort gennemsnitligt kører med $\Theta(n \cdot \log n)$. Vi kan dog ikke være sikker på hybridalgoritmens tidskompleksitet, da vi ikke har fortaget den teoretiske analyse af algoritmen. Hvad der er sikkert, er at hybridalgoritmen er hurtigere end mergesort på computeren som algoritmen er testet på. Det ser dog ud til at algoritmerne i hvert faldt gennemsnitligt, har nogenlunde samme vækstrate. En anden måde vi kan argumentere for at hybridalgoritmens tidskompleksitet i hvert fald ikke er mindre end $O(n \log n)$, er (som vi beviste i afsnit 3.5) at enhver sorteringsalgoritme der fungerer ved brug af sammenligninger, ikke kan have en mindre tidskompleksitet end $O(n \cdot \log n)$. Hybridalgoritmen har enten den samme eller værre tidskompleksitet end mergesort. Det der skaber forskellen må være en et mindre led i hybridalgoritmens $T(n)$ eller en konstant, der ganges på det dominerende led.

Nu ser det ud som om at hybridalgoritmen altid er det bedste valg ved store n , men det kan vi faktisk ikke være sikre på. Problemet er, at det eneste vi ved om hybridalgoritmens tidskompleksitet, er at algoritmen i værste fald er $\Omega(n \cdot \log n)$ ligesom alle andre sammenlignings-sorterings-algoritmer. Det betyder, at vi ikke



Figur 4.7: Reelle udførelsestider for mergesort og hybridalgoritme. Plottet til højre er samme plot som til venstre bare zoomet ind, og med en linje der gør mellem gennemsnit af t for hver n

ved om hybridalgoritmen ved et exceptionelt dårligt udfald, har en astronomisk lang udførelsestid. Der er altså ingen garanti for algoritmens udførelsestid. Mergesort på den anden side, ved vi har tidskompleksitet $\Omega(n \cdot \log n)$, hvilket garanterer udførelsestidens vækstrate. Selvfølgelig ville dette problem forsvinde, hvis det viste sig, at hybridalgoritmen også var $\Theta(n \cdot \log n)$, men da vi ikke ved det med sikkerhed, kan vi ikke være sikre på, at hybridalgoritmen altid er bedre ved store n -værdier. Hvis det derimod viste sig, at hybridalgoritmen havde en tidskompleksitet på $O(n^2)$ ligesom insertionsort (som den jo gør brug af), ville det betyde at algoritmen netop, ville have en ekstrem lang udførelsestid i værste tilfælde. Så ville den pæne graf på figur 4.7 være ret så ligegyldig, da et input med høj kardinalitet i værste tilfælde ville tage utrolig lang tid. Den lille mængde tid hybridalgoritmen i gennemsnit sparer, ville da ikke være risikoen for meget lange udførelsestider værd.

5 | Konklusion

Sorteringsalgoritmers reelle køretider er svære at regne med, selvom deres opgave lader til at være simpel. De sorterer data på baggrund af dataens attributter. For at klassificere algoritmernes opførsel inddeler vi dem i kompleksitetsklasser ved hjælp af store-O-analyse og værste-tilfælde-vækstrate. Binære træer kan bruges til at finde en generel nedre grænse for en sorteringsalgoritmes værste-tilfælde-vækstrate. Denne grænse er en værste-tilfælde-grænse, derfor har insertionsorts bedste-tilfælde-tidskompleksitet på $\Theta(n)$ ingen betydning. Sorteringsalgoritmerne insertionsort og mergesort, sorterer begge lister, men er gode til forskellige opgaver: mergesort er god til store input, hvilket forklares af dens tidskompleksitet på $\Theta(n \cdot \log n)$. Det viste sig i testen, at insertionsort i gennemsnit er hurtigere hvis $n < 37$, på computeren algoritmerne blev testet på. At insertionsort var langt værre til sortering af store lister, var ikke en overraskelse, da vi i afsnit 2.4, analyserede algoritmen, og kom frem til at algoritmen havde tidskompleksiteten $O(n^2)$. Det er en meget højere værste-tilfælde-vækstrate end mergesorts. På baggrund af denne analyse kunne de to algoritmer sammensættes til en hybridalgoritme, med det formål at optimere algoritmens udførelsestid. Hybridalgoritmen så ud til at være en optimeret version af mergesort, men vi ved ikke tilstrækkeligt om algoritmens tidskompleksitet, til at kunne bestemme, om den altid er et bedre valg end mergesort, som dataen ellers peger på.

Litteraturliste

1. Binary Search Trees: BST Explained with Examples. <https://www.freecodecamp.org/news/binary-search-trees-bst-explained-with-examples> (nov. 2019).
2. Dietzfelbinger, M. & Mehlhorn, K. *Algoritmer og datastrukturer* <https://github.com/thorehusfeldt/algoritmer-og-datastrukturer/blob/master/ad-book.pdf> ().
3. Farolino, D. Binary Tree Inductive Proofs. <https://blog.domfarolino.com/Binary-Tree-Inductive-Proofs/#perfect-binary-tree-proof-3> (jul. 2016).
4. Huang, S. *What is Big O Notation Explained: Space and Time Complexity* jan. 2020. <https://www.freecodecamp.org/news/big-o-notation-why-it-matters-and-why-it-doesnt-1674cfa8a23c>.
5. Jago, M. *Turing & The Halting Problem - Computerphile* (red. Riley, S.) aug. 2014. https://www.youtube.com/watch?v=macM_MtS_w4.
6. Know Thy Complexities! <https://www.bigocheatsheet.com>.
7. Leclaire, N. *Build a Linked List For Each Layer in a Binary Tree* mar. 2014. <https://nathanleclaire.com/blog/2014/03/01/build-a-linked-list-for-each-layer-in-a-binary-tree>.
8. Nayyar, R. S. Tree Data Structure. *Scaler Topics*. <https://www.scaler.com/topics/data-structures/tree-data-structure> (dec. 2021).
9. random — Generate pseudo-random numbers. <https://docs.python.org/3/library/random.html>.
10. *Sorting Algorithm* <https://www.programiz.com/dsa/sorting-algorithm>.
11. Thompson, J. Big O Notation Examples – Time Complexity and Algorithm Efficiency Explained. <https://www.freecodecamp.org/news/big-o-notation-examples-time-complexity-explained> (mar. 2021).
12. What is Python? Executive Summary. <https://www.python.org/doc/essays/blurb>.

Bilag 1 - Algoritmer og Datageneration

Insertionsort Algoritmen

```
1 def insertionsort(l):
2     for i in range(1,len(l)):
3         element = l[i]
4
5         if element < l[0]:
6             for j in range(i,0,-1):
7                 l[j] = l[j-1]
8                 l[0] = element
9         else:
10            j = i
11            while(l[j-1]>element):
12                l[j] = l[j-1]
13                j -= 1
14            l[j] = element
15    return(l)
```

Mergesort Algoritmen

```
1 def mergesort(l):
2     if len(l) <= 1:
3         return(l)
4     else:
5         return(merge(mergesort(l[:len(l)//2]),mergesort(l[len(l)//2:]))))
6
7 def merge(a,b):
8     c = []
9     while True:
10        if (len(a) == 0):
11            return(c + b)
12        elif (len(b) == 0):
13            return(c + a)
14        elif (a[0] <= b[0]):
```

```
15         c.append(a[0])
16         a.pop(0)
17     else:
18         c.append(b[0])
19         b.pop(0)
```

Kode til test af algoritmerne

```
1  import random
2  import time
3  import pandas as pd
4  import os
5
6
7  # Denne funktion timer køretiden af en funktion med input l og returnerer funktionen køretid i
   # milisekunder
8  def test(fun,l):
9      start_time = time.perf_counter()
10
11     fun(l)
12
13     return(time.perf_counter() - start_time)
14
15 # Denne funktion returnerer en liste af tilfældige tal mellem 0 og 1000, med n elementer
16 def createRandomList(n):
17     return([random.randint(0,1000) for i in range(n)])
18
19 # Laver en mappe i filsystemet hvis der ikke allerede er en med stien
20 def makeIfNeeded(dir_path):
21     if(os.path.isdir(dir_path) == False):
22         print(f"made dir: {dir_path}")
23         os.mkdir(dir_path)
24     return(dir_path)
25
26 # Finder det næste versionsnummer for til navngivning af fil på baggrund af indholdet i en folder
27 def newVersionNumber(dir_path,extention):
28     file_names = os.listdir(dir_path)
29     version = 0
30
31     thisfilename = f"{version}{extention}"
32
33     while(thisfilename in file_names):
34         version += 1
35         thisfilename = f"{version}{extention}"
36
```

```
37     return(thisfilename)
38
39 # Dette er funktionen der tester en liste med funktioner og gemmer deres køretider
40 def fullTest(functions):
41
42
43     data_dir = "../data/"
44     version_number = newVersionNumber(data_dir, "")
45
46     # hvor mange datapunkter pr. n-værdi
47     trials = 10
48
49     # Bruger tidspunkt som frø til pseudotilfældige tal.
50     seed = time.time()
51     print(f"Seed: {seed}")
52
53     for function in functions:
54
55         # i denne liste gemmes antallet af elementer at den liste som algoritmen sorterer for hvert
56         # datapunkt.
57         ns = []
58         # i denne liste gemmes den tid det tager at sorterer listen med n elementer
59         times = []
60
61         # Bruger det samme seed til test at hver algoritme. på den måde er det de samme
62         # pseudo-tilfældige liste som algoritmerne sorterer
63         random.seed(seed)
64
65         # Vi laver testen et antal (trials) gange pr. n-værdi
66         for trial in range(0, trials):
67
68             # En lykke der køre et abitrært antal gange (jo højere en i-værdi jo højere maks antal
69             # elementer i listen)
70             for i in range(0, 80):
71
72                 # Jeg bruger en potensfunktion til at fa flere datapunkter tættere på y-aksen og færre
73                 # lange operationer (pga. lange liste)
74                 n = round(pow(1.1, i))
75
76                 # lidt feedback
77                 print(f"function=\"{function.__name__}\": Trial: [{trial+1}/{trials}] {i=},{n=}")
78
79                 # genererer en tilfældig liste med længden n
80                 l = createRandomList(n)
81
82                 # gem størrelsen af listen der skal sorteres
83                 ns.append(n)
84
85                 # gem den tid det tager at sortere listen
```

```
81         times.append(test(function,1))
82
83
84         # gemmer data
85         data = {
86             "n": ns,
87             "t": times
88         }
89
90         version_dir = makeIfNeeded(data_dir + version_number + "/")
91         algorithm_dir = makeIfNeeded(version_dir + function.__name__ + "/")
92         full_path = algorithm_dir + newVersionNumber(algorithm_dir, ".csv")
93
94         print(f"\ndata saved to \"{full_path}\"\\n")
95
96         pd.DataFrame(data).to_csv(full_path, index = False)
```

Bilag 2 - Databehandling og Plots

Kode til databehandling og generering af plots

```
1 library(ggplot2)
2 library(plyr)
3 #library(pubr)
4 #library(tikzDevice)
5
6 #working dir
7 setwd("/home/Balder/Documents/Skole/Gym/SRP/data/9")
8
9 #dir = "1"
10 algorithm_dirs = list.files()
11
12 M = NULL
13 for (j in 1:length(algorithm_dirs)){
14   algorithm_dir = algorithm_dirs[j]
15
16   files = list.files(algorithm_dir)
17
18   for (i in 1:length(files)){
19     file_path = paste(algorithm_dir,files[i],sep="/")
20     print(file_path)
21     m = read.csv(file_path,header=TRUE,sep=",")
22     m$Algorithm = algorithm_dirs[j]
23     M = rbind(M, m)
24   }
25 }
26
27
28 M$algorithm = factor(M$Algorithm)
29 summary(M)
30
31 # punktmængder for hver algoritme
32 m_merge = subset(M,M$algorithm=="mergesort")
33 m_insertion = subset(M,M$algorithm=="insertionsort")
```

```
34
35 # laver modeller
36 model_merge = nls(t~a*n*log2(n), data=m_merge, start=list(a=0.000001))
37 model_insertion = nls(t~a*n^2 + b*n + c, data=m_insertion, start=list(a=1,b=1,c=1))
38
39
40 # Sætter ny path til hvor outputtet skal være
41 setwd("/home/Balder/Documents/Skole/Gym/SRP/ing")
42
43 # gemmer r2-værdierne i to filer
44 writeLines(toString(round(with(m_merge,cor(t,n)),digits=3)),"r2-merge.txt")
45 writeLines(toString(round(with(m_insertion,cor(t,n)),digits=3)),"r2-insertion.txt")
46 print("r2 saved to files")
47
48
49 # laver modelerede v?rdier for hver n
50 m_merge$model = predict(model_merge)
51 m_insertion$model = predict(model_insertion)
52
53 m_merge$residual = resid(model_merge)
54 m_insertion$residual = resid(model_insertion)
55
56 # kombinerer de to
57 M = rbind(m_merge,m_insertion)
58
59 summary(M)
60
61
62 farve = c("#3a6ced","#ff9b00")
63
64
65 ggplot(M, aes(x=n, y=t, colour=Algorithm)) +
66   scale_color_manual(values = farve)+
67   labs(y="t (s)")+
68   geom_point(size=1.5,alpha=0.1,shape=19) +
69   geom_line(aes(x=n, y=model,color=Algorithm), size=2, alpha=0.6) +
70   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
71   theme_bw()+
72     theme(legend.position="none")
73
74   ggsave("toAlgoritmer.png",width=8,height=6,scale=0.7)
75
76 # laver zoomed
77 ggplot(subset(M,n <= 100), aes(x=n, y=t, colour=Algorithm)) +
78   labs(y="t (s)")+
79   scale_color_manual(values = farve)+
```

```
80   geom_point(size=1.5,alpha=0.1,shape=19) +
81   geom_line(aes(x=n, y=model,color=Algorithm), size=2, alpha=0.6) +
82   theme(legend.position = c(.9, .9)) + # virker ikke!!
83   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
84   theme_bw()
85
86 ggsave("toAlgoritmerZoomed.png",width=8,height=6,scale=0.7)
87
88
89
90
91
92
93 ggplot(M, aes(x=log10(model), y=residual, colour=Algorithm)) +
94   geom_hline(yintercept = 0)+
95   scale_color_manual(values = farve)+
96   geom_point(size=1.5,alpha=0.2,shape=19) +
97   labs(x="Log10 af Modellens Forudsigelse", y="residualer") +
98   facet_wrap(~algorithm,scales="free",ncol=1) +
99   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
100  theme_bw() +
101    theme(legend.position="top",legend.title = element_blank())
102
103
104  ggsave("toAlgoritmerResidual.png",width=8,height=6,scale=0.7)
105
106
107
108
109
110 # Laver ges data.frame
111 f = function(x) {
112   data.frame(
113     t = mean(x$t)
114   )
115 }
116
117 gns = ddply(subset(M,n <= 100), .(Algorithm, n), f)
118
119 ggplot(subset(M,n <= 100), aes(x=n, y=t, colour=Algorithm)) +
120   labs(y="t (s)")+
121   scale_color_manual(values = farve)+
122   geom_point(size=1.5,alpha=0.08,shape=19) +
123   geom_line (size=1.5, data=gns) +
124   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
125   theme_bw() +
```

```
126     theme(legend.position="top",legend.title = element_blank())
127
128     ggsave("toAlgoritmerZoomedGns.png",height=6, width=9)
```
