

Studieretningsprojekt 2022

Elev id: 3x 06
Elev: Balder Westergaard Holst

Fag:	Vejleder:
Matematik A	Jens Christian Larsen Tlf.: 26279734 Email: jl@soroeakademi.dk
Informatik C	Kristian Kjeldgaard Hoppe Tlf.: 28825466 Email: kh@soroeakademi.dk

<p>Område:</p> <p>Store-O notation og sorteringsalgoritmer</p>
<p>Opgaveformulering:</p> <p>Gør rede for kompleksitetsklasserne givet ved Store-O notation, idet du giver eksempler på repræsentanter af forskellige klasser.</p> <p>Beskriv sorteringsproblemer generelt, og forklar algoritmerne for insertion- og merge-sort. Vis at insertion-sort har en værste-tilfælde-udførelse på $O(n^2)$.</p> <p>Implementer algoritmerne insertion- og merge-sort i Python og undersøg den faktiske udførelsestid af de to algoritmer på lister af tilfældige tal af forskellig størrelse. Vurder algoritmernes udførelsestid.</p> <p>Indfør begrebet træ, og bevis relevante sætninger om træer, især højden af et træ. Bevis, at en vilkårlig sorteringsalgoritme baseret på sammenligning, vil være nedadtil begrænset af i dens værste-tilfælde-udførelsestid med $n \cdot \lg(n)$ (Stirlings formel må antages).</p> <p>Insertion-sort har en bedste-tilfælde-udførelsestid på $O(n)$: Hvorfor er det ikke et modbevis til sætningen om at den nedre grænse for sorteringsalgoritmer er $n \cdot \lg(n)$?</p> <p>Omfang 15-20 ns.</p>

Sorteringsalgoritmer og O-notation

Matematik A og Informatik C

Vejledere: Jens Christian Larsen og Kristian Kjeldgaard Hoppe

Balder Westergaard Holst

27. marts 2022

Indhold

1	Indledning	3
2	Resume	4
3	Algoritmers Udførelsestid	5
3.1	Tid som Funktion af Argumentets Kardinalitet	5
4	Sorteringsalgoritmer	6
4.1	Hvad er sortering?	6
4.2	Insertionsort	7
4.2.1	Insertionsort Procedure	7
4.2.2	Egenskaber af Insertionsort	7
4.3	Mergesort	8
4.3.1	Mergesort Procedure	8
4.4	Analyse af Insertionsort	10
5	Binære Træer	11
6	Store-O og Bedste Tilfælde	12
7	Implementering og test af Algoritmerne	13
8	Konklusion	14

Figurer

3.1	Definition af $O(f(x))$, $\Omega(f(x))$ og $\Theta(f(x))$ [1, s. 26].	5
4.1	Eksempel på sortering af en liste	6
4.2	Procedure for at indsætte element først i listen. Elementet er markeret med rød , og tal der på allerede er sorterede er markeret med blå . Linjer refererer til koden i figur 4.4.	7
4.3	Procedure for at indsætte et element hvor det passer i den sorterede liste. Elementet er markeret med rød , og tal der på allerede er sorterede er markeret med blå . Linjer refererer til figur 4.4.	7
4.4	Pseudokode til insertionsort [1, s. 104].	8
4.5	Eksempel med delfunktionen <i>merge</i> i mergesort. Her kalder vi $\text{merge}([3,6,6], [4,5,7,9])$. I hvert trin sammenlignes de røde tal. Blå tal er en del af den færdige <i>c</i> liste, og lilla tal er de tal der sidst blev føjet til <i>c</i> . Læg mærke til at den endelige <i>c</i> liste er sorteret fordi listerne <i>a</i> og <i>b</i> på forhånd var sorterede. Linjer refererer til figur 4.7.	9
4.6	Hvordan <i>mergesort</i> først splitter listen op, og derefter samler den med <i>merge</i> (se figur 4.5). Farver indikerer de par af lister der sættes ind i <i>merge</i> -funktionen.	9
4.7	Pseudokode til Mergesort [1, s. 106].	10

1 | Indledning

Dette er min indledning pt.

2 | Resume

Dette er hvad jeg har skrevet og fundet ud af.

3 | Algoritmers Udførelsestid

3.1 Tid som Funktion af Argumentets Kardinalitet

Dette afsnit bygger primært på side 24 og 25 i bogen "*Algoritmer og Datastrukturer*" [1].

Når vi analyserer algoritmer, er det primære formål at skabe udsagn, der kort og præcist beskriver algoritmers opførsel. I vores tilfælde er vi interesserede i algoritmens udførelsestid. Vi lader \mathcal{I}_n være mængden af mulige argumenter til algoritmen, n være størrelsen af \mathcal{I}_n og I være en instans af \mathcal{I} (altså $I \in \mathcal{I}$). Vi kan

$$\begin{aligned}O(f(n)) &= g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) \\ \Omega(f(n)) &= g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n) \\ \Theta(f(n)) &= O(f(n)) \cup \Omega(f(n))\end{aligned}$$

Figur 3.1: Definition af $O(f(x))$, $\Omega(f(x))$ og $\Theta(f(x))$ [1, s. 26].

4 | Sorteringsalgoritmer

4.1 Hvad er sortering?

Sortering er helt lavpraktisk at sætte en mængde data en rækkefølge på baggrund af dataens attributter. Det kunne f.eks. være alfabetisk eller efter farve eller størrelse. Det er dog ikke entydigt hvilken sorteringsstrategi der ville være hurtigst. Disse sorterings-strategier kan også kaldes sorterings-algoritmer, det er ikke kun mennesker der kan benytte sorterings-algoritmer til f.eks. at sortere kort, men computere kan også, og de gør det for det meste også hurtigere. De næste to afsnit omhandler to forskellige sorterings-algoritmer, og deres måde at sortere en liste med tal.

Herfra vil jeg kun forholde mig til sortering af lister med tal, og sortere dem på baggrund af deres størrelse (se figur 4.1)

$$[4,2,5,3,1] \longrightarrow [1,2,3,4,5]$$

Figur 4.1: Eksempel på sortering af en liste

4.2 Insertionsort

Insertionsort er en af de mere simple sorteringsalgoritmer. Pseudokoden til algoritmen kan ses i figur 4.4. Det er ikke en tilfældighed at denne algoritme hedder insertionsort. Den fungerer nemlig ved at gennemgå hvert element i listen, og placere det hvor det passer ind i de elementer der allerede er sorterede. Dette er nok til dels den måde man f.eks. ville sortere sin hånd i Uno eller 500.

4.2.1 Insertionsort Procedure

At algoritmen gennemgår alle elementerne i listen kronologisk kan vi se allerede i linje 2, da algoritmen her begynder med en for-lykke, der tæller for hvert element i listen, dog starter den ved 2. element i listen. For at gøre koden mere læsbar sættes elementet som algoritmen er nået til ind i variabelen *e* i linje 3. Det næste algoritmen gør, er at checke om elementet har en mindre værdi end det første element i listen, hvis dette er sandt rykkes alt før elementet et tak til højre, og elementet sættes ind først i listen (se figur 4.2).

Forklaring	Eksempel	Linje
Liste hvor <i>e</i> < <i>liste</i> [0]	[5,7,9,4,6,5,2]	5
Rykker til venstre	[5,5,7,9,6,5,2]	6-8
Sætter elementet ind først	[4,5,7,9,6,5,2]	9

Figur 4.2: Procedure for at indsætte element først i listen. Elementet er markeret med **rød**, og tal der på allerede er sorterede er markeret med **blå**. Linjer refererer til koden i figur 4.4.

Vi er nu nået til linje 11. Hvis ikke elementet er mindre end det første element i listen sker følgende (se figur 4.3): Algoritmen ser på tallet før elementet og spørger: "er dette tal større end elementet". Hvis det er, rykkes det hen på elementets plads. Herefter stiller algoritmen samme spørgsmål, til tallet to pladser før elementet. Hvis dette tal er mindre and elementet placerer algoritmen elementet efter dette tal, hvis ikke stiller den samme spørgsmål til tallet 3 pladser før elementet og så videre. Det er vigtigt at pointere, at der altid vil være et tal der er mindre end elementet, da elementet ellers ville være blevet placeret først i liste af den første del af algoritmen (linje 5-10).

Forklaring	Eksempel	Linje
Liste hvor <i>e</i> >= <i>liste</i> [0]	[4,5,7,9,6,5,2]	11
Da $9 \geq 6$ rykkes tallet til højre	[4,5,7,9,9,5,2]	13-14
Da $7 \geq 6$ rykkes tallet til højre	[4,5,7,7,9,5,2]	13-14
Da $5 \not\geq 6$ sættes elementet ind efter 5	[4,5,6,7,9,5,2]	13 og 17

Figur 4.3: Procedure for at indsætte et element hvor det passer i den sorterede liste. Elementet er markeret med **rød**, og tal der på allerede er sorterede er markeret med **blå**. Linjer refererer til figur 4.4.

4.2.2 Egenskaber af Insertionsort

Insertionsort er en god sorteringsalgoritme, idet at proceduren er forholdsvis nem at forstå, men også at listen til venstre for det element algoritmen er nået til, altid vil være sorteret. Hvis man stopper en insertionsort-algoritme halvvejs gennem dens køretid, vil man altid have en liste hvor den første halvdel er sorteret og den anden halvdel usorteret. Dette er ikke en egenskal i den næste algoritme.

(se afsnit 4.4 for store-O analysen)

```

1      funktion insertionsort(liste) {
2          for i = 1 til i = n {           # her er n længden af listen
3              e = liste[i]                # dette er elementet i listen
4
5              if e < liste[0] {            # hvis elementet er større end det første element i listen
6                  for j = j til j = 0{
7                      liste[j] = liste[j-1] # ryk elementerne på pladserne 0 til j et tak frem
8                  }
9                  liste[0] = e             # sætter dette element forrest i listen
10             }
11             else{
12                 j = i                    # j er en nu tæller der starter på i
13                 while liste[j-1] > e {    # kør mens liste[j-1] er større end elementet
14                     liste[j] = liste[j-1] # ryk liste[j] et tak til højre
15                     j -= 1
16                 }
17                 liste[j] = element        # indsæt elementet hvor det passer ind
18             }
19         }
20         return(liste)                    # returnerer den sorterede liste
21     }

```

Figur 4.4: Pseudokode til insertionsort [1, s. 104].

4.3 Mergesort

Hvor insertionsort er en lykke-baseret algoritme, er mergesort rekursiv idet at den ikke benytter en lykke til at gentage instruktioner, men kalder sig selv i stedet. Dette leder til en fraktallignende sorteringsmetode, der deler problemet i mindre og mindre bidder.

4.3.1 Mergesort Procedure

Pseudokode til denne algoritme kan findes i figur 4.7.

Mergesortalgoritmen består af to funktioner. Lad os begynde med funktionen *merge*, da det er den mest simple. Funktionen tager to lister (*a* og *b*) som argumenter, og fletter dem sammen til en tredje liste (*c*) (se figur 4.5). Denne *c* liste dog ikke altid sorteret. Eksempelvis kunne dette være en returneret liste:

$$\text{merge}([1,2,4,8],[9,5,6,4,7]) \longrightarrow [1,2,4,8,9,5,6,4,7]$$

Her er resultatet en delvist sorteret liste bestående af flere sorterede dele. Altså kan vi ikke nøjes med *merge* for at sortere en liste. En vigtig egenskab af *merge* er at, den kan flette to sorterede lister sammen, til én samlet liste. Det kunne for eksempel være i dette tilfælde:

$$\text{merge}([1,3,4,8],[2,3,6,7,7]) \longrightarrow [1,2,3,3,4,6,7,7,8]$$

Her er begge argumenter (*a* og *b*) sorterede lister, der flettes sammen til én samlet sorteret liste.

Mergesorts kompleksitet kommer dog først rigtigt til udtryk, når vi tager hele algoritmen i betragtning. Mergesortfunktionen tager en enkel liste som argument, og checker først om listen kun indeholder ét element. Hvis den gør, så returnerer den bare listen uændret. Dette giver intuitivt mening, da en liste med et enkelt element altid vil være sorteret. Hvis listen er *mere* end 1 lang, gør den det, som får hele algoritmen til at fungere: den deler listen på i to, og kalder sig selv på hver halvdel. Herefter sættes de to dele sammen igen af *merge*-funktionen. Det er dog ikke helt så enkelt som det lyder, idet at *mergesort* rekursivt kalder sig selv. Det leder til at algoritmen splitter listen op igen og igen, indtil der kun er et element i de mange lister. Herefter samler *merge* alle de små lister til en stor liste, hvor *merge* løbende sørger for at de lister

Forklaring	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Linje
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[3,6,6]	[4,5,7,9]	[]	18-21
Da $a[0] \not\leq b[0]$ føjes $b[0]$ til c	[6,6]	[4,5,7,9]	[3]	22-25
Da $a[0] \not\leq b[0]$ føjes $b[0]$ til c	[6,6]	[5,7,9]	[3,4]	22-25
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[6,6]	[7,9]	[3,4,5]	18-21
Da $a[0] \leq b[0]$ føjes $a[0]$ til c	[6]	[7,9]	[3,4,5,6]	18-21
Da $a.length = 0$ føjes b til c	[]	[7,9]	[3,4,5,6,6]	12-14
Returnerer c	[]	[]	[4,5,3,6,1,7,9]	13

Figur 4.5: Eksempel med delfunktionen *merge* i mergesort. Her kalder vi *merge*([3,6,6], [4,5,7,9]). I hvert trin sammenlignes de røde tal. Blå tal er en del af den færdige c liste, og lilla tal er de tal der sidst blev føjet til c . Læg mærke til at den endelige c liste er sorteret fordi listerne a og b på forhånd var sorteret. Linjer refererer til figur 4.7.

Funktion	Lister
<i>mergesort</i>	[3,6,4,7,2,7,5,2]
<i>mergesort</i>	[3,6,4,7] [2,7,5,2]
<i>mergesort</i>	[3,6] [4,7] [2,7] [5,2]
<i>merge</i>	[3] [6] [4] [7] [2] [7] [5] [2]
<i>merge</i>	[3,6] [4,7] [2,7] [2,5]
<i>merge</i>	[3,4,6,7] [2,2,5,7]
Færdig!	[2,2,3,4,5,6,7,7]

Figur 4.6: Hvordan *mergesort* først splitter listen op, og derefter samler den med *merge* (se figur 4.5). Farver indikerer de par af lister der sættes ind i *merge*-funktionen.

den samler er sorteret. De lister der er samlet af *merge*, vil altid være sorteret, da udgangspunktet er lister med et enkelt element. Disse enkelt-element-liste samles af *merge* til lister med to elementer der er sorteret. Og disse sorteret lister sættes sammen med andre sorteret lister. *merge* får altså i altid to sorteret lister som input, og spytter derfor altid en samlet sorteret liste ud som output.

tilfælde hvor med en liste med ulige længde?

```
1      funktion mergesort(liste) {
2          if liste.length == 1{
3              return(liste)
4          }
5          else {
6              return(merge(mergesort(liste[0 ... n/2]), mergesort(liste[n/2 + 1 ... n])))
7          }
8      }
9
10     funktion merge(a,b) {
11         c = []
12
13         while(true) {
14             if a.length == 0 {
15                 return(c + b)
16             }
17             elif b.length == 0 {
18                 return(c + a)
19             }
20             elif a[0] <= b[0] {
21                 tilføj a[0] til c
22                 fjern a[0] fra a
23             }
24             else {
25                 tilføj b[0] til c
26                 fjern b[0] fra b
27             }
28         }
29     }
```

Figur 4.7: Pseudokode til Mergesort [1, s. 106].

4.4 Analyse af Insertionsort

5 | Binære Træer

6 | Store-O og Bedste Tiilfælde

7 | Implementering og test af Algoritmerne

8 | Konklusion

Her er mine konkluderende sætninger

Litteraturliste

1. Dietzfelbinger, M. & Mehlhorn, K. *Algoritmer og datastrukturer* <https://github.com/thorehusfeldt/algoritmer-og-datastrukturer/blob/master/ad-book.pdf> ().

Bilag 1 - Algoritmer og Datageneration

Insertionsort Algoritmen

```
1 def insertionsort(l):
2     for i in range(1,len(l)):
3         element = l[i]
4
5         if element < l[0]:
6             for j in range(i,0,-1):
7                 l[j] = l[j-1]
8             l[0] = element
9         else:
10            j = i
11            while(l[j-1]>element):
12                l[j] = l[j-1]
13                j -= 1
14            l[j] = element
15    return(l)
```

Mergesort Algoritmen

```
1 def mergesort(l):
2     if len(l) <= 1:
3         return(l)
4     else:
5         return(merge(mergesort(l[:len(l)//2]),mergesort(l[len(l)//2:]))
6
7 def merge(a,b):
8     c = []
9     while True:
10        if (len(a) == 0):
11            return(c + b)
12        elif (len(b) == 0):
13            return(c + a)
14        elif (a[0] <= b[0]):
15            c.append(a[0])
16            a.pop(0)
17        else:
18            c.append(b[0])
19            b.pop(0)
```

Kode til test af algoritmerne

```
1 import random
2 import time
3 import pandas as pd
4 import os
5
6 import sys
7 sys.path.insert(1, './algoritmer')
8 from mergesort import *
9 from insertionsort import *
10
11 # Denne funktion timer køretiden af en funktion med input l og returnerer funktionen køretid i
12   milisekunder
13 def test(fun,l):
14     start_time = time.perf_counter()
15     fun(l)
16
17     return(time.perf_counter() - start_time)
18
19 # Denne funktion returnerer en liste af tilfældige tal mellem 0 og 1000, med n elementer
20 def createRandomList(n):
21     return([random.randint(0,1000) for i in range(n)])
22
23 # Laver en mappe i filsystemet hvis der ikke allerede er en med stien
24 def makeIfNeeded(dir_path):
25     if(os.path.isdir(dir_path) == False):
26         print(f"made dir: {dir_path}")
27         os.mkdir(dir_path)
28     return(dir_path)
29
30 # Finder det næste versionsnummer for til navngivning af fil på baggrund af indholdet i en folder
31 def newVersionNumber(dir_path,extention):
32     file_names = os.listdir(dir_path)
33     version = 0
34
35     thisfilename = f"{version}{extention}"
36
37     while(thisfilename in file_names):
38         version += 1
39         thisfilename = f"{version}{extention}"
40
41     return(thisfilename)
42
43 # Dette er funktionen der tester en liste med funktioner og gemmer deres køretider
44 def fullTest(functions):
45
46     # hvor mange datapunkter pr. n-værdi
47     trials = 10
48
49     data_dir = "../data/"
50     version_number = newVersionNumber(data_dir,"")
51
52     seed = time.time()
53     print(f"Seed: {seed}")
54
```

```
55     for function in functions:
56
57         # i denne liste gemmes antallet af elementer at den liste som algoritmen sorterer for hvert
           datapunkt.
58         ns = []
59         # i denne liste gemmes den tid det tager at sorterer listen med n elementer
60         times = []
61
62         # Bruger det samme seed til test at hver algoritme. på den måde er det de samme
           pseudo-tilfældige liste som algoritmerne sorterer
63         random.seed(seed)
64
65         # Vi laver testen et antal (trials) gange pr. n-værdi
66         for trial in range(0,trials):
67
68             # En lykke der køre et abitrært antal gange (jo højere en i-værdi jo højere maks antal
               elementer i listen)
69             for i in range(0,80):
70
71                 # Jeg bruger en potensfunktion til at fa flere datapunkter tættere på y-aksen og
                   færre lange operationer (pga. lange liste)
72                 n = round(pow(1.1,i))
73
74                 print(f"function=\"{function.__name__}\": Trial: [{trial+1}/{trials}] {i=},{n=}") #
                   lidt feedback
75
76                 # genererer en tilfældig liste
77                 l = createRandomList(n)
78
79                 # gem størrelsen af listen der skal sorteres
80                 ns.append(n)
81                 # gen den tid det tager at sortere listen
82                 times.append(test(function,l))
83
84
85         data = {
86             "n": ns,
87             "t": times
88         }
89
90         version_dir = makeIfNeeded(data_dir + version_number + "/")
91         algorithm_dir = makeIfNeeded(version_dir + function.__name__ + "/")
92         full_path = algorithm_dir + newVersionNumber(algorithm_dir, ".csv")
93
94         print(f"\ndata saved to \"{full_path}\"")
95
96         pd.DataFrame(data).to_csv(full_path,index = False)
97
98
99     if __name__ == "__main__":
100         functions = [mergesort,insertionsort]
101
102         fullTest(functions)
```

Bilag 2 - Databehandling og Plots

Kode til databehandling og generering af plots

```
1 library(ggplot2)
2 #library(tikzDevice)
3
4 #working dir
5 setwd("/home/Balder/Documents/Skole/Gym/SRP/data/5")
6
7
8 #import data
9 dataset <- read.csv("mergesort/0.csv",header=TRUE,sep=",")
10
11 #dir = "1"
12 algorithm_dirs = list.files()
13
14 M = NULL
15 for (j in 1:length(algorithm_dirs)){
16   algorithm_dir = algorithm_dirs[j]
17
18   files = list.files(algorithm_dir)
19
20   for (i in 1:length(files)){
21     file_path = paste(algorithm_dir,files[i],sep="/")
22     print(file_path)
23     m = read.csv(file_path,header=TRUE,sep=",")
24     m$Algorithm = algorithm_dirs[j]
25     M = rbind(M, m)
26   }
27 }
28
29
30 M$algorithm = factor(M$Algorithm)
31 summary(M)
32
33 # punktmængder for hver algoritme
34 m_merge = subset(M,M$algorithm=="mergesort")
35 m_insertion = subset(M,M$algorithm=="insertionsort")
36
37 # laver modeller
38 model_merge = nls(t~a*n*log2(n), data=m_merge, start=list(a=0.000001))
39 model_insertion = nls(t~a*n^2 + b*n + c, data=m_insertion, start=list(a=1,b=1,c=1))
40
41
42 # Sætter ny path til hvor outputtet skal være
43 setwd("/home/Balder/Documents/Skole/Gym/SRP/img")
```

```
44
45 # gemmer r2-værdierne i to filer
46 writeLines(toString(round(with(m_merge,cor(t,n)),digits=3)),"r2-merge.txt")
47 writeLines(toString(round(with(m_insertion,cor(t,n)),digits=3)),"r2-insertion.txt")
48 print("r2 saved to files")
49
50
51 # laver modelerede v?rdier for hver n
52 m_merge$model = predict(model_merge)
53 m_insertion$model = predict(model_insertion)
54
55 m_merge$residual = resid(model_merge)
56 m_insertion$residual = resid(model_insertion)
57
58 # kombinerer de to
59 M = rbind(m_merge,m_insertion)
60
61 summary(M)
62
63
64 ggplot(M, aes(x=n, y=t, colour=Algorithm)) +
65   geom_point(size=1.5,alpha=0.1,shape=19) +
66   geom_line(aes(x=n, y=model,color=Algorithm), size=2, alpha=0.6) +
67   labs(title="To Sorteringsalgoritmer") +
68   theme(legend.position = c(.9, .9)) + # virker ikke!!
69   guides(colour = guide_legend(override.aes = list(alpha = 1))) + # lav legend alpha 1
70   theme_bw()
71
72 ggsave("toAlgoritmer.png")
73
74 ggplot(M, aes(x=log10(model), y=residual, colour=Algorithm)) +
75   geom_point(size=1.5,alpha=0.1,shape=19) +
76   labs(title="Residualer") +
77   facet_wrap(~algorithm,scales="free",ncol=1) +
78   theme_bw() +
79   theme(legend.position="none")
80 ggsave("toAlgoritmerResidual.png")
81
82 C = data.frame(
83   Algorithm = unique(M$Algorithm),
84   R2 = c(with(m_merge, cor(t,n)), with(m_insertion, cor(t,n)))
85 )
86
87 write.table(C, "r2.txt", quote=FALSE,sep="\t", row.names=FALSE)
```
