22050 Eksamen 2023 - self assessment

22050 Signaler og lineære systemer i kontinuert tid. August 2024.
Skriftlige eksamen med alle tilladte hjælpemidler.
4 timer.
Lukket internet.

I opgaverne kan det være nødvendigt at udregne talværdier for at afgøre, hvilken svarmulighed, der er sand. Vær opmærksom på, at små variationer i afrunding af decimaltal kan forekomme. Hvis dine udregnede tal afviger fra en svarmulighed på nogle af de mindst betydende cifre, kan du ikke på dette grundlag konkludere, at svarmuligheden er falsk.

En given svarmulighed kan indeholde en blanding af sande og falske udsagn. Svarmuligheder, som indeholder én eller flere falske udsagn, skal opfattes som falsk.
Opgaverne kan have flere svarmuligheder med kun sande udsagn. I dette tilfælde er det eneste pointgivende svar: "Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn".

Decimaltal skrives med decimalpunktum, fx. $\pi \approx 3.14159$

Hvor ikke andet er nævnt:

antages signaler at være reelle.
antages signaler at repræsentere elektriske spændinger.
antages symbolet x at repræsentere systemets indgangssignal og symbolet y at repræsentere systemets udgangssignal.
antages Laplace-transformationer at være unilateral.

Nomenklatur:
Eksamensopgaverne gør brug af den nomenklatur, der er brugt i undervisningsmaterialet uden systematisk definition af symbolernes betydning ved hver forekomst i opgaverne.

Systemligninger:
Hvis systemligninger gives på symbolsk form, antages det at de medtagne koefficienter er reelle, konstante og forskellig fra nul.

Enheder:
Koefficienters og konstante leds enheder er udeladt af hensyn til ligningernes overskuelighed, men skal antages at være korrekte.

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

Opgave 1. **Systemklassifikation.**

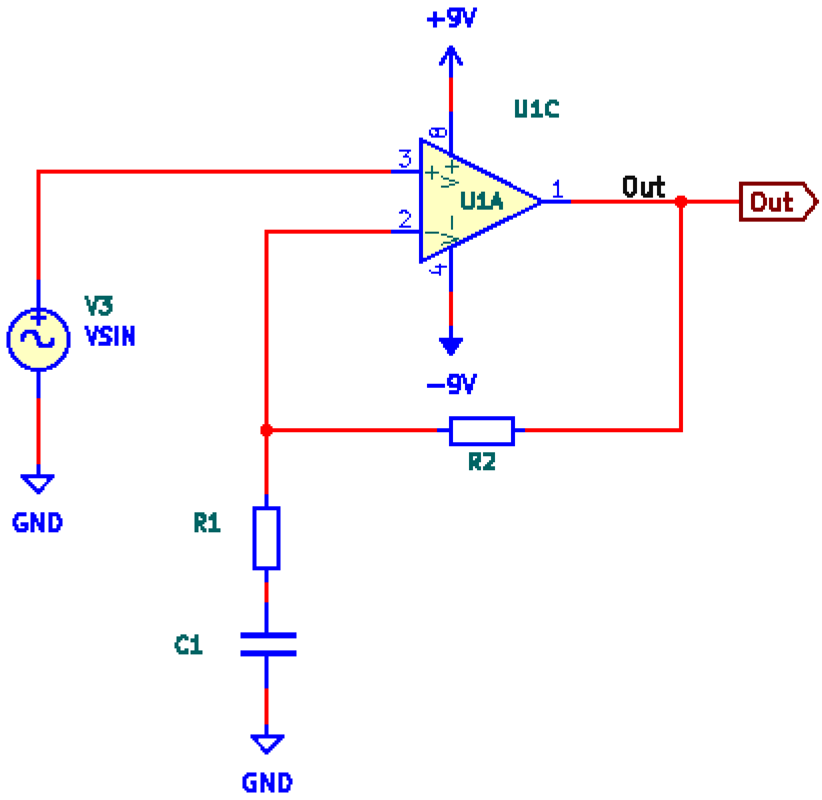
Lad $x(t)$ være input og $y(t)$ være output. Tidsvariablen t har enheden sekund (s). Alle koefficienter er relle og konstante. Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Afkryds det af nedenstående systemer, der imødekommer alle krav til at være et lineært, tidsinvariant og kausalt (LTIC) system.

Choose one answer

- 1: $\dot{y}(t) + a_0 \; t \; y(t) = b_0 \; x(t)$
- 2: $\dot{y}(t) + a_0 \; y(t) = b_0 \; x^2(t)$
- 3: $\dot{y}(t) + a_0 \; y(t) = b_0 \; x(t+2)$
- 4: Ingen af de foreslåede systemer er et LTIC system.

Opgave 2. **Differentialligning fra kredsløb.**

Afkryds den differentialligning, der bedst passer til nedenstående kredsløb. Indgangssignalet betegnes $x(t)$ og udgangssignalet betegnes $y(t)$. Differentialligningerns koefficienter antages at være reelle og konstante.



Choose one answer

- 1: $\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$
- 2: $\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{x}(t)$
- 3: $\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{x}(t) + b_0 x(t)$
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

Opgave 3. **Impulsrespons.**

Et LTIC system med input $x(t)$ og output $y(t)$ er beskrevet ved ligningen

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 5y(t) = 5\ddot{x}(t);\ y(0_-) = 0;\ \dot{y}(0_-) = 0$$

Tidsvariablen t har enheden sekund (s).
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Hvad er systemets respons til en enhedsimpuls, dvs. når $x(t) = \delta(t)$?
Tal kan være afrundet.

Choose one answer

- 1: $h(t) = 5\delta(t) + \left(4.271e^{-1.382\,t} - 29.27e^{-3.618\,t}\right) u(t)$
- 2: $h(t) = \left(0.4472e^{-1.382\,t} - 0.4472e^{-3.618\,t}\right) u(t)$
- 3: $h(t) = \left(-0.6180e^{-1.382\,t} + 1.618e^{-3.618\,t}\right) u(t)$
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

Opgave 4. **Impuls- og rampesrespons.**

Et LTIC system har et enhedstrinrespons (også kaldet enhedssteprespons) givet ved udtrykket:

$$y_{step}(t) = (3 - 3e^{-t/4})u(t)$$

Tidsvariablen t har enheden sekund (s).
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Herom gives følgende sande eller falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Samme systems enhedsramperespons er $y_{ramp}(t) = r(t) = \left(3t - 12 + 12\, e^{-t/4}\right) u(t)$
- 2: Samme systems enhedsimpulsrespons er $h(t) = -\frac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$
- 3: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 4: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 5. **Foldning.**

Udgangssignalet $y(t)$ fra et LTIC system er givet ved foldningen:

$$y(t) = \left(3e^{-3t}u(t)\right) * \left(5\ t\ e^{-5t}u(t)\right).$$

hvor $*$ er foldningsoperatoren og $u(t)$ er enhedstrinpåvirkningen (også kaldet enhedsstepfunktionen).
Tidsvariablen t har enheden sekund (s).
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Afkryds det korrekte udtryk for $y(t)$. Benyt eventuelt tabelopslag.

Choose one answer

- 1: $y(t) = \left(\frac{15\ e^{-3\ t}}{64} - \frac{15\ e^{-11\ t}}{64} - \frac{15t\ e^{-11\ t}}{8}\right) u(t)$
- 2: $y(t) = \left(-\frac{15\ t\ e^{-5\ t}}{2} - \frac{15\ e^{-5\ t}}{4} + \frac{15\ e^{-3\ t}}{4}\right) u(t)$
- 3: $y(t) = 0$
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

Opgave 6. **Systemkarakteristik.**

Om et LTIC-system af anden orden gives følgende sande eller falske udsagn. Ligningens koefficienter antages at være reelle og konstante.

A. Hvis systemet har en differentialligning af formen $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{x}(t)$, er systemet et højpasfilter.
B. Hvis rødderne i systemets karakterligning er reelle og forskellige, er systemet overdæmpet.
C. Systemets zero-input respons er løsningen til en homogen differentialligning.
D. Hvis rødderne i systemets karakterligning har positiv realdel, er systemet stabilt.

Choose one answer

- 1: Udsagn A og B er sande.
- 2: Udsagn B og C er sande.
- 3: Udsagn A og D er sande.
- 4: Udsagn C og D er sande.
- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 7. **Fourier-rækken**.

Om den eksponentielle Fourier-række gives her en række sande eller falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Ekspansionen af den reelle funktion $x(t)$ ved brug af den eksponentielle Fourier-række er givet ved $x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$.

- 2: Funktionen ekspanderes i en vægtet sum af orthogonale basisfunktioner. Hvert led i summen har formen $D_n e^{jn\omega_0 t}$, hvor D_n er Fourier-koefficienten og $e^{jn\omega_0 t}$ er basisfunktionen.

- 3: Hvis Fourier-rækken for et aperiodisk signal $x_a(t)$ udregnes for et tidsudsnit af endelig varighed T_0, vil det signal $x_p(t)$, der kan rekonstrueres fra samme Fourier-række, være periodisk med periodetiden T_0, dvs. $x_p(t) = x_p(t + T_0)$.

- 4: For en reel og lige funktion $x(t)$, dvs. $\Im(x(t)) = 0, x(t) = x(-t)$, gælder at koefficienterne D_n er imaginære (dvs. $\Re(D_n) = 0$) og en ulige funktion af index n (dvs. $D_n = -D_{-n}$).

- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 8. **Fourier-transformation**.

Fourier-transformationen af signalet $x(t)$ kan udtrykkes som:

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

hvor ω er vinkelfrekvensen målt i rad/s.

Om Fourier-transformationen gives her en række sande eller falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Fourier-transformationen eksisterer ikke for periodiske signaler.
- 2: Hvis signalet $x(t)$ er et reelt signal (dens imaginære del er nul), vil signalets Fourier-transformerede $X(\omega)$ være en reel funktion af vinkelfrekvensen. Da den imaginære del af $X(\omega)$ er nul, vil signalets fasevinkel være nul for alle vinkelfrekvenser, dvs. $\angle X(\omega) = 0$.
- 3: Fourier-transformationen af signalet $x(t) = e^{-at}u(t)$ eksisterer kun, hvis $a \geq 0$. a antages at være reel og konstant.
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 5: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 9. **Fourier-transformation**.

Signalet $x(t) = e^{-2\,t}u(t)$ har Fourier-transformationen $X(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$, hvor ω er vinkelfrekvensen i rad/s.

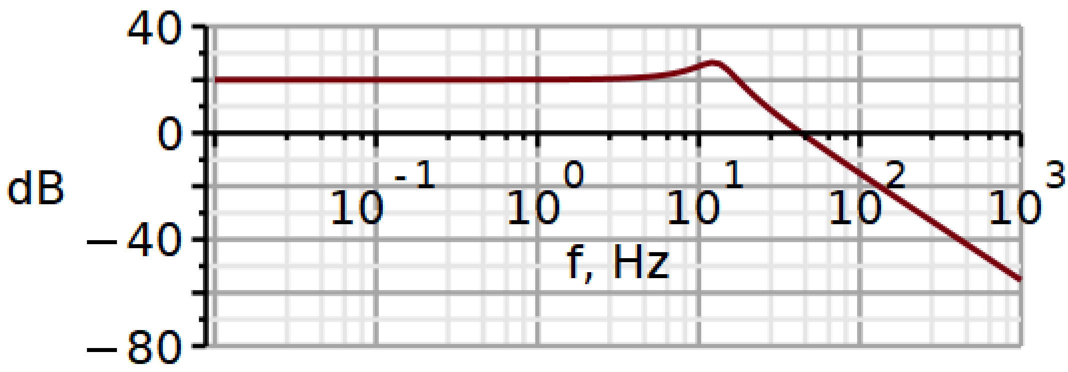
Tidsvariablen t har enheden sekund (s).
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Med udgangspunkt i dette transformationspar gives her en række sande eller falsk transformationspar.

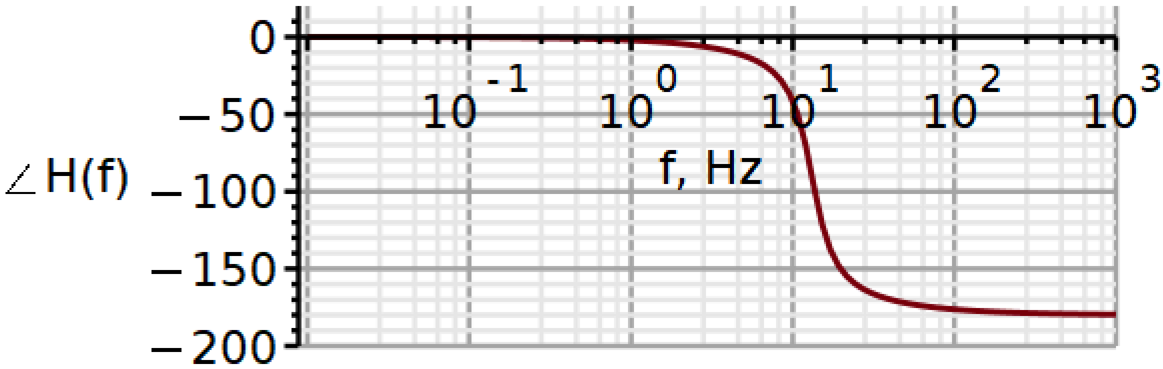
Choose one answer

- 1: Signalets differentierede med hensyn til tiden ($\dot{x}(t)$) har Fourier-transformationen $\frac{-j\omega}{2+j\omega}$
- 2: Signalet $x(3t)$ har Fourier-transformationen $\frac{3}{2+j\frac{\omega}{3}}$
- 3: Signalet $x(t)e^{j3\,t}$ har Fourier-transformationen $\frac{1}{2+j(\omega-3)}$
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 5: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 10. **Fourier-transformation.**

Frekvenskarakteristikken er blevet målt på et ukendt system:





Fra amplitude- (øverst) og fasekarakteristikken (nederst) drages en række sande eller falske konklusioner om systemet. Det kan antages at systemet er LTIC. Tidsvariablen t har enheden sekund (s). Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.

Choose one answer

- 1: Systemets differentialligning er: $\ddot{y}(t) + 40\,\dot{y}(t) + 6800\,y(t) = x(t)$
- 2: Systemets differentialligning er: $\ddot{y}(t) + 40\dot{y}(t) + 6800\,y(t) = 3400\,x(t)$
- 3: Systemet er et 2. ordens lavpasfilter og karakterligningen har en dobbelt rod.
- 4: Systemet er et underdæmpet 2. ordens lavpasfilter med en DC-forstærkning på 10.
- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 11. **Unilateral Laplace-transformation.**

Det oplyses, at overføringsfunktionen for et LTIC system er

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+8s+25}$$

hvor s er den komplekse frekvensvariabel.
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Herom gives en række sande eller falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Systemet har en dæmpningsfaktor $\zeta = 4/5$.
- 2: Systemets overføringsfunktion har et enkelt nulpunkt i nul og et komplekst-konjugeret polpar i $-3 \pm 3j$
- 3: Overføringsfunktionens konvergensområde er $\mathrm{Re}(s) > -4$
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 5: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 12. **Unilateral Laplace-transformation.**

Betragt et 2. ordens LTIC system med overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+8s+25}$$

hvor s er den komplekse frekvensvariabel.
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Om dette system gives en række sande eller falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Den udæmpede resonansfrekvens $\omega_n = 25\mathrm{rad/s}$
- 2: Systemet er et højpasfilter med en pasbånd-forstærkning på 0.04.
- 3: Systemet er ustabilt.
- 4: Amplitudespekteret har en lokal resonanspeak.
- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 13. **Unilateral Laplace-transformation.**

Overføringsfunktionen for et LTIC system er

$$H(s) = \frac{1}{(s+3)^2+4^2} = \frac{1}{s^2+6s+25}$$

hvor kursiv s er den komplekse frekvensvariabel. Tidsvariablen t har enheden sekund (s).
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Hvad er systemets respons på enhedstrinpåvirkningen, d.v.s. indgangssignalet $x(t) = u(t)$?

Choose one answer

1: $y_{step}(t) = \left(\frac{1}{25} - \frac{e^{-3\,t}(4\cos(4\,t)+3\sin(4\,t))}{100}\right)u(t)$

2: $y_{step}(t) = \left(\frac{1}{100} - \frac{e^{-6\,t}(4\cos(5\,t)+3\sin(5\,t))}{25}\right)u(t)$

3: $y_{step}(t) = \left(\frac{1}{16} - \frac{e^{-4\,t}(3\cos(4\,t)+3\sin(4\,t))}{16}\right)u(t)$

4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

Opgave 14. **Unilateral Laplace-transformation.**

Et LTIC system har følgende differentialligning
$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 9y(t) = x(t); \dot{y}(0_-) = 2, y(0_-) = 2.$
Tidsvariablen t har enheden sekund (s). Den komplekse frekvensvariabel betegnes med kursiv s.
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Herom gives en række sande eller falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Systemets zero-state respons har den unilaterale Laplace-transformation $Y_{zs}(s) = \frac{1}{s^2+4s+9}X(s)$. Konvergensområdet for denne Laplace-transformation er defineret ved $\Re\{s\} > -3$.
- 2: Systemets zero-input respons har den unilaterale Laplace-transformation $Y_{zi}(s) = \frac{2s+10}{s^2+4s+9}$
- 3: Slutværditeoremet (Eng.: Final Value Theorem) fortæller os, at systemets zero-input respons har grænseværdien $\lim_{t\to\infty} y_{zi}(t) = 1/9$.
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 5: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 15. **Steprespons.**

Betragt et LTIC system beskrevet ved differentialligningen:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 16y(t) = 16x(t)$$

Tidsvariablen t har enheden sekund (s).
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.
Om enhedstrinresponset (også kaldet enhedsstepresponset) for dette system gives en række sande eller falske udsagn.

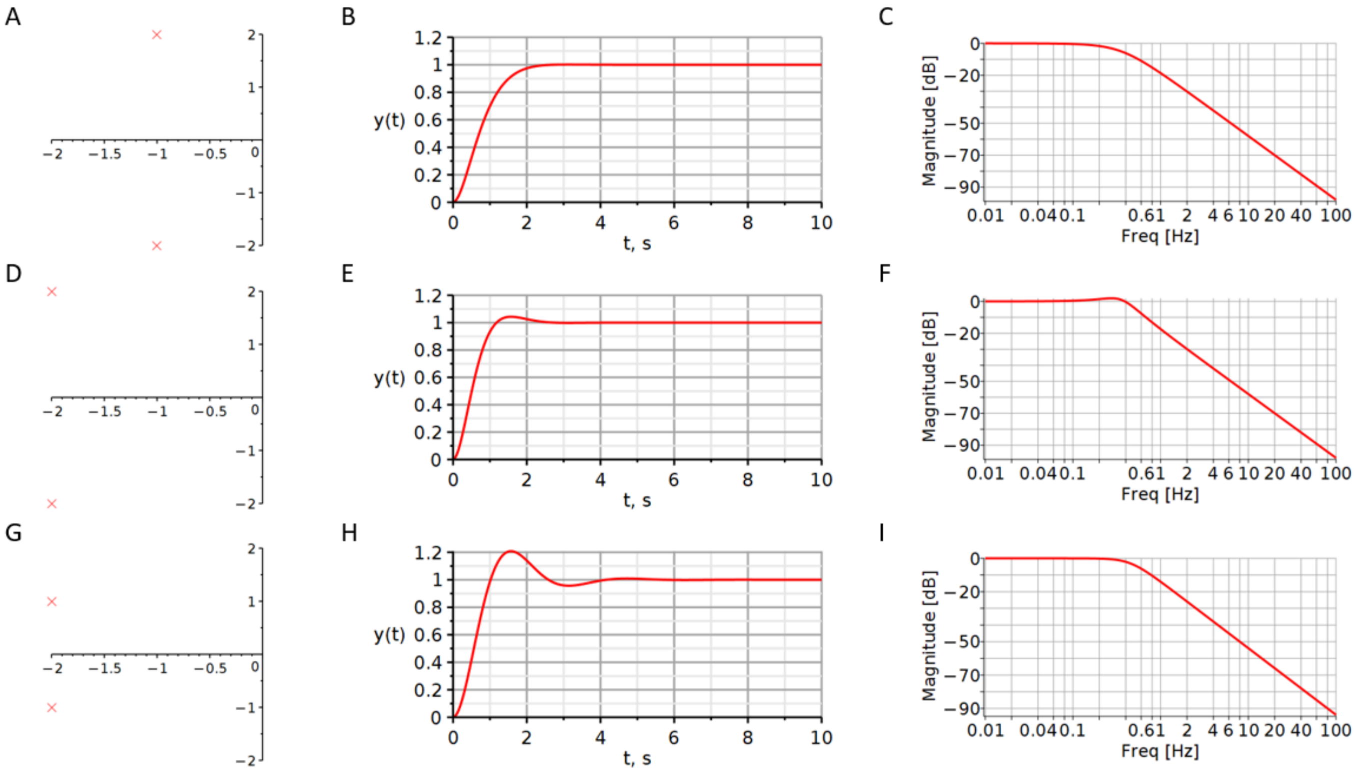
Choose one answer

- 1: Time to peak $t_p = 0.41\mathrm{s}$, rise time $t_r = 0.32\mathrm{s}$
- 2: Settling time $t_s = 4\mathrm{s}$, delay time $t_d = 0.29\mathrm{s}$, og procent overshoot $PO = 44.4\%$.
- 3: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 4: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 16. **Systemrelationer.**

I figuren herunder er vist et pol-nulpunkt diagram, et enhedstrinrespons og en amplitudekarakteristik for hvert af tre forskellige LTIC systemer. Det var meningen at de tre figurer fra samme system skulle vises i samme række. Uheldigvis er de ni figurer blevet blandet og placeret tilfældigt. I svarmulighederne herunder gives sande og falske forslag til, hvordan de ni figurer skal grupperes og tilknyttes de tre systemer.

Obs! Plot C og I er ikke identiske.



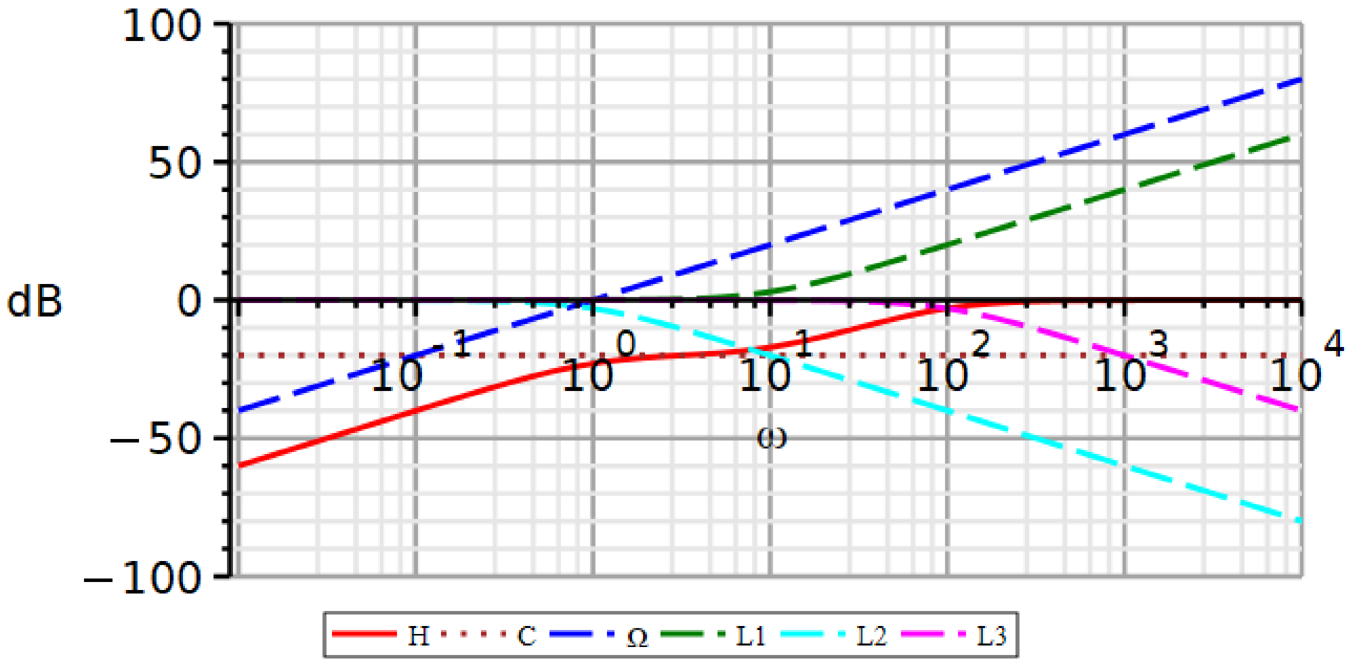
Choose one answer

- 1: System 1: {D, B, I}, System 2: {A, E, C}, System 3: {G, H, F}
- 2: System 1: {A, E, I}, System 2: {D, H, F}, System 3: {G, B, I}
- 3: System 1: {G, B, C}, System 2: {A, H, F}, System 3: {D, E, I}
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

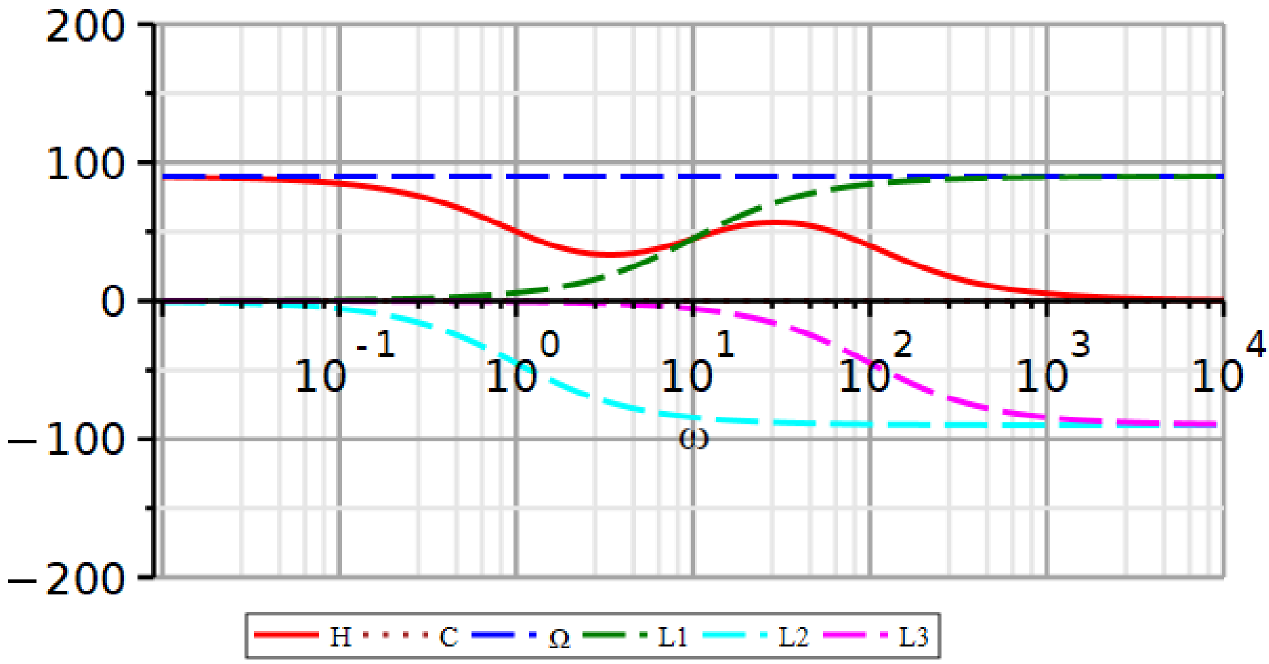
Opgave 17. **Bodeplot.**

Herunder er vist et Bodeplot for et LTIC system. Frekvensaksen er i rad/s for begge plot.
Koefficienters og konstante leds enheder er ikke medtaget men skal antages at være korrekte.

Amplitude:



Fase:



Herunder er givet sande eller falske forslag til, hvilken frekvenskarakteristik, der er vist i Bodeplottet.

Choose one answer

- 1: $H(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+10)}{(j\omega)^2(j\omega+100)}$
- 2: $H(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+100)}{(j\omega)(j\omega+10)}$
- 3: $H(j\omega) = \frac{(j\omega)(j\omega+10)}{(j\omega+1)(j\omega+100)^2}$
- 4: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

Opgave 18. **Filtre.**

Om analoge elektriske filterkredsløb gives her en række sande og falske udsagn.

Choose one answer

- 1: Et 2. ordens Sallen-Key lavpasfilter har altid en dæmpningsfaktor $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 2: Et 2. ordens Butterworth-filter har altid en dæmpningsfaktor $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, uanset om det er et lavpas- eller højpasfilter.
- 3: Amplitudekarakteristiken for et 2. ordens Butterworth-filter har en lokal peak nær resonansfrekvensen, uanset om det er et lavpas- eller højpasfilter.
- 4: Polerne i et Sallen-Key-filter skal altid ligge på den del af enhedscirklen, der ligger i s-planets venstre halvplan.
- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 19. **Sensitivitetsanalyse.**

En sensitivitetsanalyse kan afsløre, hvor mange procent en afhængig variable y ændrer sig, når en uafhængig variabel x øges i værdi med 1%.

Funktionen $y(x)$'s sensitivitet over for ændringer i den uafhængige variable x er her defineret som:

$$S_x^y = \frac{\partial y/y}{\partial x/x} = \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Her analyseres sensitiviteten på polplaceringerne for et 2. ordens LTIC system med overføringsfunktionen:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

hvor lille kursiv s er den komplekse frekvensvariabel.

Systemet antages at være underdæmpet og polkoordinaterne er givet ved $(\sigma, j\,\omega_d)$ og $(\sigma, -j\,\omega_d)$, hvor $\sigma = -\zeta\omega_n$ og $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

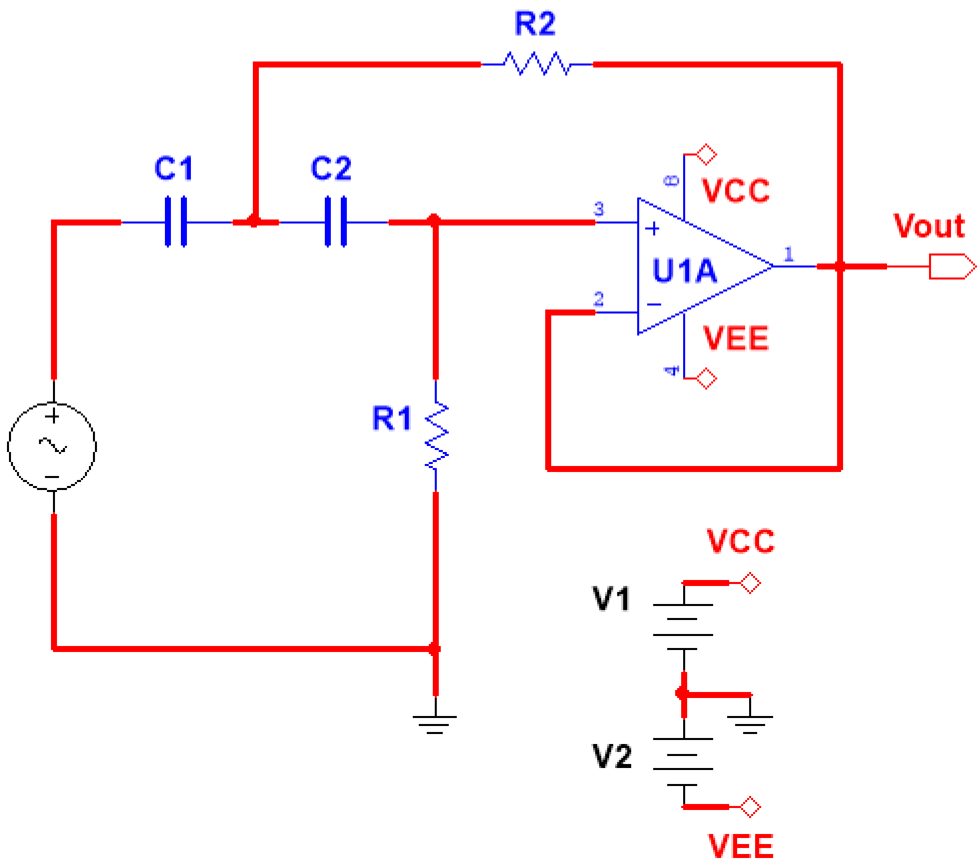
Herunder gives en række sande eller falske udsagn om polkoordinaternes følsomhed over for ændringer i dæmpningsfaktoren ζ og den udæmpede resonansfrekvens ω_n.

Choose one answer

- 1: $S_\zeta^\sigma = -1$
- 2: $S_{\omega_n}^\sigma = -1$
- 3: $\lim\limits_{\zeta\to 1} S_\zeta^{\omega_d} = \infty$
- 4: $\lim\limits_{\omega_n\to 0} S_{\omega_n}^{\omega_d} = 0$, med andre ord, når $\omega_n \to 0$, bliver ω_d gradvist mere og mere uafhængig af ω_n.
- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.

Opgave 20. **Filterdesign.**

Herunder er vist et Sallen-Key højpasfilter.



Følgende designkrav skal imødekommes:

- Kredsløbet skal realisere et højpasfilter af Butterworth-typen.
- Filteret skal designes således, at dets Q-værdi ikke afhænger af C1 og C2.
- Filterets 3dB knækfrekvens (f_{3dB}) må afvige fra 100 Hz med højest $\pm 5\%$.
- Modstande skal vælges fra E12 serien og kondensatorer fra E6 serien.

Herunder gives en række sande eller falske udsagn relateret til designprocessen.

Choose one answer

- 1: Overføringsfunktionen for et højpasfilter af Butterworth-typen kan fås fra et lavpasfilter af Butterworth-typen ved at udføre variabelsubstitutionen $s^{-1} \to s$ i lavpasfilterets overføringsfunktion.
- 2: Hvis højpasfilterets Q værdi skal være helt uafhængig af C1 og C2, skal vi sætte R1 = R2.
- 3: Hvis den normaliserede knækfrekvens $\hat{\omega}_c = 1\mathrm{rad/s}$ skaleres til den ønskede knækfrekvens ω_c med en faktor K_f, dvs. $\omega_c = K_f \hat{\omega}_c$, skal alle kondensatorer divideres med K_f og alle modstande ganges med K_f.

- 4: Forholdet R_1/R_2 skal være så tæt på 2 som muligt. Begge modstande skal vælges fra E12 serien. Et godt valg er $R_1 = 68\mathrm{k}\Omega$ og $R_2 = 33\mathrm{k}\Omega$. Hvis vi vælger $C_1 = C_2 = 33\mathrm{nF},$ fås $Q = 0.718$ og $f_{3dB} = 103.4\mathrm{Hz}$. Decimaltal er afrundet.

- 5: Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

- 6: Der er mere end én svarmulighed med kun sande udsagn.