Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 19/5-2017

Kursus navn: Signaler og lineære systemer i kontinuert tid Kursus nr.: 31605

Tilladte hjælpemidler: Ingen hjælpemidler. Ingen lommeregner.

Varighed: 4 timer.

Vægtning: For hvert spørgsmål angives højst et bogstav som svar. Korrekte svar giver 3 point, forkerte svar trækker 1 point fra, mens ubesvaret er neutralt.

Når opgaverne er besvaret overføres besvarelserne til skemaet på side 2.
Kun side 2 afleveres.

Danmarks Tekniske Universitet

Besvarelsesark for skriftlig eksamen

Kursusnummer: 31605

Studienummer: ____________________

Navn: ____________________

Underskrift: ____________________

Dato: 19/5-2017

Spørgsmål	Svar
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Oplysninger til brug under besvarelsen:

Impulsrespons

Et LTIC system med systemligning

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

$$Q(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0$$

$$P(D) = b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + ... + b_0$$

hvor $D = \frac{d}{dt}$, har impulsresponset

$$h(t) = P(D)[y_n(t)u(t)]$$

$$= b_n\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) \quad , \; m \leq n$$

hvor y_n er en løsning til den homogene ligning med begyndelsesbetingelser $D^{n-1}y_n(0) = 1$, $D^{n-2}y_n(0) = 0$, $D^{n-3}y_n(0) = 0$, ... , $y_n(0) = 0$. Den samlede løsning til systemligningen kan da skrives

$$y(t) = y_{\text{zi}}(t) + y_{\text{zs}}(t)$$

$$= y_{\text{zi}}(t) + h(t) * x(t)$$

Foldning er defineret ved

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Visse foldningsintegraler:

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$(f_1 * f_2)(t)$	
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}u(t)$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	
$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$	

Fouriertransformation af $f(t)$ er defineret ved

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t)\, dt \qquad\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$$

Laplacetransformation af $f(t)$ er defineret ved

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

Begyndelsesværditeoremet

Hvis $g(t)$ og dens afledede kan laplacetransformeres er

$$g(0^+) = \lim_{t \to 0^+} g(t) = \lim_{s \to \infty} sG(s)$$

forudsat at grænseværdien eksisterer.

Slutværditeoremet

$$g(\infty) = \lim_{t \to \infty} g(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

forudsat at $sG(s)$ udelukkende har poler i venstre halvplan.

Regneregler for RLC komponenter

Kondensator	$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$	$v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int^t i(\tau) d\tau$
Modstand	$i(t) = \dfrac{v(t)}{R}$	$v(t) = R\, i(t)$
Spole	$i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int^t v(\tau) d\tau$	$v(t) = L\,\dfrac{di}{dt}$

Fysisk form af et 2. ordens system:

Den "fysiske" form af et 2. ordens system kan i laplacedomænet skrives

$$H(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

hvor ζ er dæmpningsfaktoren og polerne ligger i

$$\sigma_d \pm j\omega_d = -\zeta\, \omega_n \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\, \omega_n$$

Visse laplace- og fouriertransformerede:

$f(t)$	$F(s)$	$F(\omega)$
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0^-)$	$j\omega\, F(\omega)$
$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	$(j\omega)^2 F(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$	$F(\omega)G(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F(s) * G(s)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$
1		$2\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$		$\frac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$r(t) = tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	eksisterer ikke
$\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{j\omega + a}\ ,\ a > 0$
$t\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}\ ,\ a > 0$
$\cos(bt)\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{j\omega}{-\omega^2+b^2} + \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - b) + \delta(\omega + b))$
$\sin(bt)\,u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\frac{b}{-\omega^2+b^2} + \frac{\pi}{2j}(\delta(\omega - b) - \delta(\omega + b))$
$\exp(-at)\cos(bt)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + b^2}\ ,\ a > 0$
$\exp(-at)\sin(bt)\,u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{b}{(j\omega + a)^2 + b^2}\ ,\ a > 0$
$\cos(\omega_0 t)$		$\pi(\,\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\,)$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = u(\frac{\tau}{2} - \lvert t \rvert)$		$\tau\ \mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$
$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) = (1 - 2\lvert t \rvert/\tau)u(\frac{\tau}{2} - \lvert t \rvert)$		$\frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4})$

Opgave 1

Lad $x(t)$ være input og $y(t)$ være output. Angiv hvilket af systemerne

A $\dot{y}(t) + ty(t) = x(t)$

B $\dot{y}(t) + y(t) = tx^2(t)$

C $\dot{y}(t) + y(t) = \sin(t)$

D $\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$

der er tidsinvariant. Det korrekte svar overføres til skemaet side 2.

Opgave 2

Foldningen af en forskudt stepfunktion, $u(t-t_0)$, med en rampefunktion, $r(t) = tu(t)$, har værdien

A $u(t-t_0) * r(t) = u(t-t_0)$

B $u(t-t_0) * r(t) = (t-t_0)\ u(t-t_0) = r(t-t_0)$

C $u(t-t_0) * r(t) = \frac{1}{2}(t-t_0)^2\ u(t-t_0) = \frac{1}{2}r^2(t-t_0)$

D $u(t-t_0) * r(t) = \frac{1}{6}(t-t_0)^3\ u(t-t_0) = \frac{1}{6}r^3(t-t_0)$

Tip: Udregn først foldningen $u(t) * r(t)$ uden tidsforskydning. (Eksplicit eller ved tabelopslag.) Udfør dernæst tidsforskydningen.

Opgave 3

Et LTIC-system er beskrevet ved ligningen

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) + x(t)$$

hvor $x(t)$ betegner input og $y(t)$ er output. Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt?

A Systemet har frekvenskarakteristik $H(\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 1}$

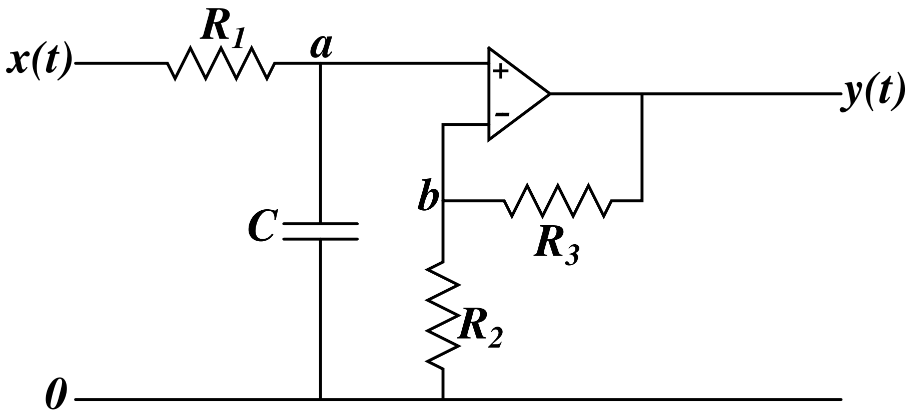
B Systemets impulsrespons er $h(t) = \delta(t) + \exp(-t)u(t)$

C Systemet er ustabilt.

D Systemets er marginalt stabilt.

Opgave 4

Betragt kredsløbet



Lad $x(t)$, $y(t)$, $a(t)$ og $b(t)$ betegne spændingerne i henholdsvis input, output, knudepunkt a og knudepunkt b. Hvilken af ligningerne

A $a = y$

B $C(\dot{x} - \dot{a}) = \dfrac{b-a}{R_2}$

C $a = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} y$

D $\dfrac{x-a}{R_1} = \dot{a}C$

er knudepunktsligning (Kirchoffs strømlov) for knudepunktet a.

Opgave 5

Kredsløbet i Opgave 4 er beskrevet ved ligningen

$$\dot{y} + \frac{1}{R_1 C} y = (1 + \frac{R_3}{R_2}) \frac{1}{R_1 C}\ x$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt?

A Systemet er et lavpasfilter med forstærkning $(1 + R_3/R_2)$

B Systemet er et højpasfilter med forstærkning $(1 + R_2/R_3)$

C Systemet har karakteristisk tid C/R_1

D Ingen af ovenstående.

Opgave 6

Hvis en funktion $f(t)$ er lige, d. v. s. $f(t) = f(-t)$, hvad opfylder den fouriertransformerede $F(\omega)$ da:

A $F(\omega)$ er reel, d. v. s. $F(\omega) = F(\omega)^*$.

B $F(\omega)$ er imaginær, d. v. s. $F(\omega) = -F(\omega)^*$.

C $F(\omega)$ er lige, d. v. s. $F(\omega) = F(-\omega)$.

D $F(\omega)$ er ulige, d. v. s. $F(\omega) = -F(-\omega)$.

Råd: Brug definitionen af fouriertransformation.

Opgave 7

Et LTIC system har impulsresponset

$$h(t) = e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)$$

Hvilken af nedenstående er dets systemligning

A $(D^2 + 2D + 1)y(t) = x(t)$

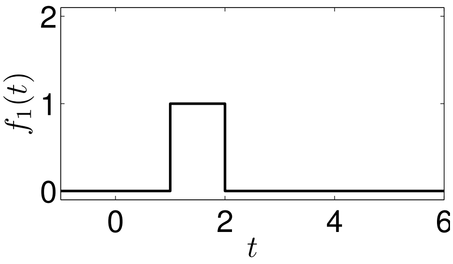
B $(D^2 + 2D + 1)y(t) = Dx(t)$

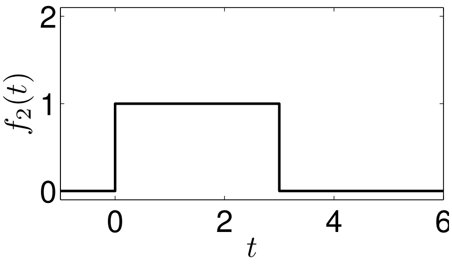
C $(D^2 - 2D + 1)y(t) = (D - 5)x(t)$

D Ingen af ovenstående.

Opgave 8

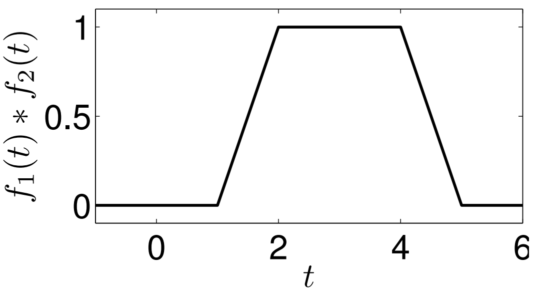
Funktionerne $f_1(t)$ og $f_2(t)$ har graferne



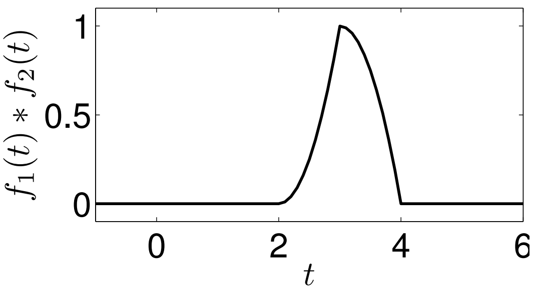


Hvilken af graferne nedenfor fremstiller foldningsintegralet $f_1(t) * f_2(t)$:

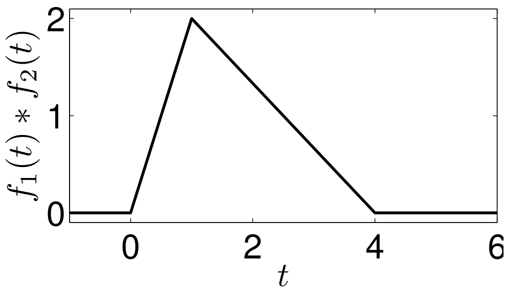
A



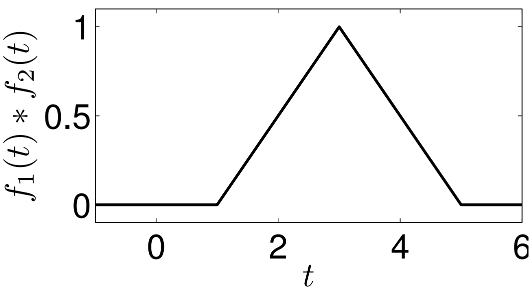
B



C



D



Opgave 9

Et 1. ordens system er beskrevet ved ligningen

$$\dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) \qquad , \; y(0^-) = -2$$

Hvad er impulsresponset for systemet

A $h(t) = 2\delta(t) + 2e^{t}u(t)$

B $h(t) = 2\delta(t) - 2e^{-t}u(t)$

C $h(t) = 2e^{-t}u(t)$

D $h(t) = 2e^{-t}\delta(t)$

Opgave 10

Hvad er zero-input responset for systemet i Opgave 9?

A $y_{\text{zi}}(t) = 2e^{t}u(t)$

B $y_{\text{zi}}(t) = -2e^{-t}u(t)$

C $y_{\text{zi}}(t) = 4e^{-t}u(t)$

D $y_{\text{zi}}(t) = -4e^{-t}\delta(t)$

Opgave 11

Et LTIC-system er beskrevet ved ligningen

$$(D+1)y(t) = 2Dx(t) \qquad\qquad , \quad y(0^-) = -2$$

Hvad er systemets samlede respons på inputtet $x(t) = u(t)$?

A $y(t) = 0$

B $y(t) = u(t)$

C $y(t) = 2u(t)\exp(-t)$

D $y(t) = 4u(t)(1 - \exp(-2t))$

Tip: Det samlede respons er summen $y = y_{\text{zi}} + y_{\text{zs}}$.

Opgave 12

Det oplyses at overføringsfunktionen $H(s)$ for et system er

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt?

A Systemet har konvergensområdet $\mathrm{Re}(s) > -2$

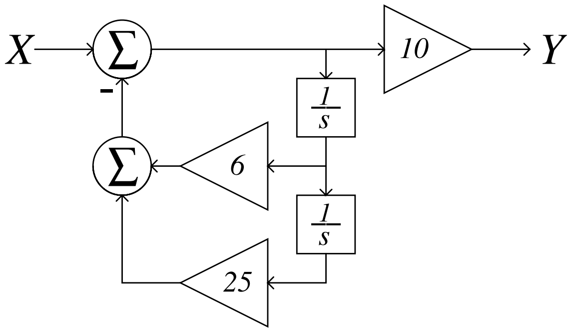
B Systemet er et højpasfilter med forstærkning 2

C Systemet er ustabilt

D Hverken A, B eller C

Opgave 13

Et 2. ordens LTIC system har diagrammet i figuren.



Hvad er systemets overføringsfunktion i laplacedomænet?

A $H(s) = \dfrac{s^2}{s^2+6s+25}$

B $H(s) = \dfrac{10s^2}{s^2+6s+25}$

C $H(s) = \dfrac{25}{s^2+6s+25}$

D $H(s) = \dfrac{250}{s^2+6s+25}$

Opgave 14

Et 2. ordens system har i Laplacedomænet overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)^2 + 1}$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt

A Systemet er et højpasfilter.

B Systemet er overdæmpet.

C Systemet har poler i $p = -1 \pm j$.

D Systemet har frekvenskarakteristik $H(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2 + 2}$

Opgave 15

Det oplyses at overføringsfunktionen $H(s)$ for et LTIC system er

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)^2 + 1} = \frac{2}{s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,s + 2}$$

Hvad er dæmpningsfaktoren for systemet?

A $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B $\zeta = \frac{1}{2}$

C $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\zeta = 1$

Opgave 16

Overføringsfunktionen $H(s)$ for et LTIC system er

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)^2+1}$$

Hvad er systemets respons på en forsinket impuls, d.v.s. responset på input $x(t) = \delta(t - t_0)$, hvor $t_0 > 0$?

A $y_{\text{zs}}(t) = \sin(t-t_0)\ u(t-t_0)$

B $y(t) = \sqrt{2}\ e^{-(t-t_0)} \sin(t-t_0)\ u(t)$

C $y(t) = 2\ e^{-(t-t_0)} \sin(t-t_0)\ u(t-t_0)$

D $y(t) = e^{-t} \sin(t)\ u(t)$

Tip: Bestem først responset uden tidsforsinkelse. (Brug evt. tabellen med Laplacetransformerede.) Udfør dernæst tidsforsinkelsen.

Opgave 17

Et 2. ordens filter har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\,\zeta\, s + 1}$$

hvor $\zeta = \frac{1}{2}$. Angiv værdien af output til tiden $t = +\infty$ når input er

$$x(t) = 2u(t)$$

A $y_{\text{zs}}(\infty) = -1$

B $y_{\text{zs}}(\infty) = +1$

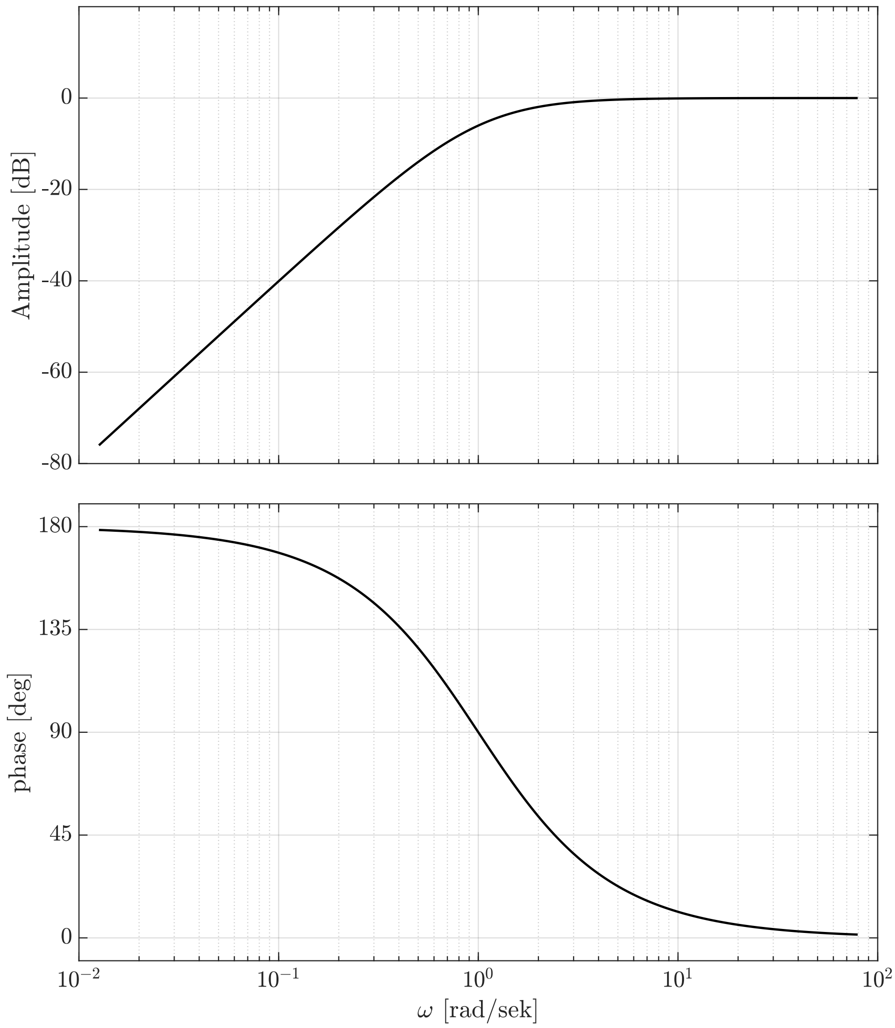
C $y_{\text{zs}}(\infty) = +2$

D Hverken A, B eller C.

Tip: Overvej om slutværditeoremet kan benyttes.

Opgave 18

Et LTIC-filter højpasfilter har bodeplottet



Hvilken af nedenstående er korrekt

A Filteret har forstærkning 100.

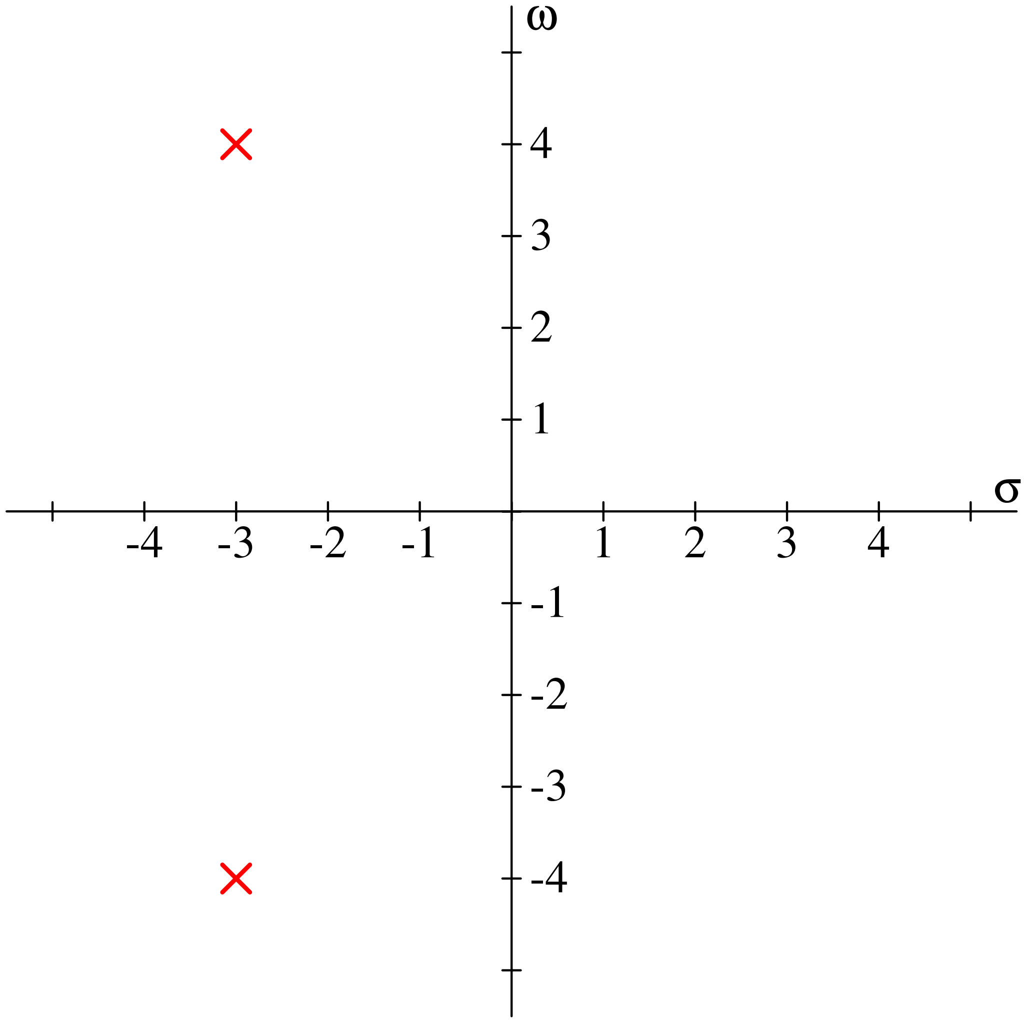
B Filteret har orden 4.

C $H(s) = \dfrac{101}{(s+1)^2 + 100}$

D $H(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)^2}$

Opgave 19

Figuren viser pol-nulpunktsdiagrammet for et LTIC system



med forstærkning 3. (Røde kryds angiver poler og der er ingen nulpunkter.) Hvad er den laplacetransformerede for systemet?

A Den laplacetransformerede eksisterer ikke.

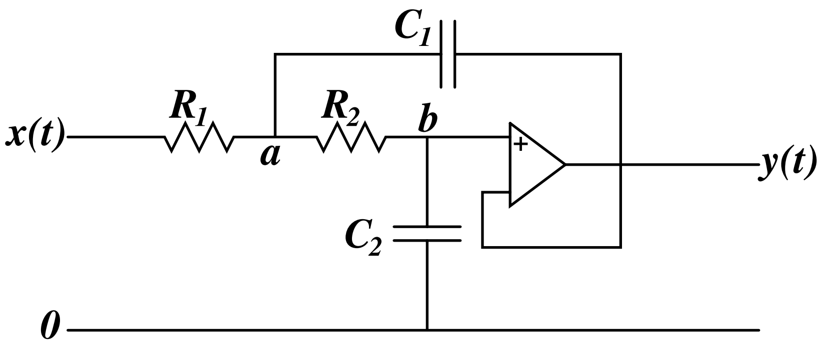
B $H(s) = \dfrac{3s^2}{(s+3)^2 + 4^2}$

C $H(s) = \dfrac{75}{s^2 + 2\frac{3}{5}5s + 5^2}$

D Ingen af ovenstående.

Opgave 20

Betragt et Sallen-Key-filter



med forstærkning 1. Hvilket af nedenstående udsagn er *ikke* korrekt?

A Systemet er et lavpasfilter.

B I Laplacedomænet kan knudepunktsligningen i knudepunkt **a** skrives

$$\frac{X(s) - A(s)}{R_1} = \frac{A(s) - B(s)}{R_2} + sC_1(A(s) - Y(s))$$

C I Laplacedomænet kan knudepunktsligningen i knudepunkt **b** skrives

$$\frac{A(s) - B(s)}{R_2} = sC_2B(s)$$

D Systemets input påtrykkes en spænding $x(t) = 10\text{V}$ i en tid som er meget større end indsvingningstiden for systemet. Spændingen på output er da

$$y(\infty) = 0\text{V}$$

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.