Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 22/5-2018

Kursus navn: Signaler og lineære systemer i kontinuert tid Kursus nr.: 31605

Tilladte hjælpemidler: Ingen hjælpemidler. Ingen lommeregner.

Varighed: 4 timer.

Vægtning: For hvert spørgsmål angives højst et bogstav som svar. Korrekte svar giver 3 point, forkerte svar trækker 1 point fra, mens ubesvaret er neutralt.

Når opgaverne er besvaret overføres besvarelserne til skemaet på side 2.
Kun side 2 afleveres.

Danmarks Tekniske Universitet

Besvarelsesark for skriftlig eksamen

Kursusnummer: 31605

Studienummer: ____________________

Navn: ____________________

Underskrift: ____________________

Dato: 22/5-2018

Spørgsmål	Svar
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Oplysninger til brug under besvarelsen:

Impulsrespons

Et LTIC system med systemligning

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

$$Q(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0$$

$$P(D) = b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + ... + b_0$$

hvor $D = \frac{d}{dt}$, har impulsresponset

$$\begin{aligned} h(t) &= P(D)[y_n(t)u(t)] \\ &= b_n\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) \quad , \ m \leq n \end{aligned}$$

hvor y_n er en løsning til den homogene ligning med begyndelsesbetingelser $D^{n-1}y_n(0) = 1$, $D^{n-2}y_n(0) = 0$, $D^{n-3}y_n(0) = 0$, ... , $y_n(0) = 0$. Den samlede løsning til systemligningen kan da skrives

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\text{zi}}(t) + y_{\text{zs}}(t) \\ &= y_{\text{zi}}(t) + h(t) * x(t) \end{aligned}$$

Foldning er defineret ved

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Visse foldningsintegraler:

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$(f_1 * f_2)(t)$	
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t)$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	
$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$	

Fouriertransformation af $f(t)$ er defineret ved

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)\,dt \qquad\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega$$

Laplacetransformation af $f(t)$ er defineret ved

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

Begyndelsesværditeoremet

Hvis $g(t)$ og dens afledede kan laplacetransformeres er

$$g(0^+) = \lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s)$$

forudsat at grænseværdien eksisterer.

Slutværditeoremet

$$g(\infty) = \lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

forudsat at $sG(s)$ udelukkende har poler i venstre halvplan.

Regneregler for RLC komponenter

Kondensator	$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$	$v(t) = \dfrac{1}{C}\int^{t} i(\tau)d\tau$
Modstand	$i(t) = \dfrac{v(t)}{R}$	$v(t) = R\,i(t)$
Spole	$i(t) = \dfrac{1}{L}\int^{t} v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\,\dfrac{di}{dt}$

Fysisk form af et 2. ordens system:

Den “fysiske” form af et 2. ordens system kan i laplacedomænet skrives

$$H(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

hvor ζ er dæmpningsfaktoren og polerne ligger i

$$\sigma_d \pm j\omega_d = -\zeta\,\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

Visse laplace- og fouriertransformerede:

$f(t)$	$F(s)$	$F(\omega)$
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0^-)$	$j\omega\, F(\omega)$
$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	$(j\omega)^2 F(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$	$F(\omega)G(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi j} F(s) * G(s)$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
1		$2\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$		$\frac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$r(t) = tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	eksisterer ikke
$\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{j\omega + a}$, $a > 0$
$t\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$, $a > 0$
$\cos(bt)\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{j\omega}{-\omega^2 + b^2} + \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - b) + \delta(\omega + b))$
$\sin(bt)\, u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\frac{b}{-\omega^2 + b^2} + \frac{\pi}{2j}(\delta(\omega - b) - \delta(\omega + b))$
$\exp(-at)\cos(bt)\, u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + b^2}$, $a > 0$
$\exp(-at)\sin(bt)\, u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{b}{(j\omega + a)^2 + b^2}$, $a > 0$
$\cos(\omega_0 t)$		$\pi(\, \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\,)$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = u(\frac{\tau}{2} - \|t\|)$		$\tau\ \mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$
$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) = (1 - 2\|t\|/\tau)u(\frac{\tau}{2} - \|t\|)$		$\frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4})$

Opgave 1

Lad $x(t)$ være input og $y(t)$ være output. Angiv hvilket af systemerne

A $\dot{y}(t) + y^2(t) = x(t)$

B $\dot{y}(t) + y(t) = tx^2(t)$

C $\dot{y}(t) + y(t) = \sin(t)x(t)$

D $\dot{y}(t) + y(t) = x(t) + 1$

der er lineært. Det korrekte svar overføres til skemaet side 2.

Opgave 2

Et LTIC system har impulsreponset

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

Angiv systemets respons på inputtet

$$x(t) = u(t)$$

A $y_{\mathrm{zs}} = u(t)e^{-2t}$

B $y_{\mathrm{zs}} = 2u(t)e^{-t}$

C $y_{\mathrm{zs}} = u(t)(1 + e^{-2t})$

D $y_{\mathrm{zs}} = 0$

Opgave 3

Et LTIC system har impulsreponset

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

Angiv systemets overføringsfunktion i laplacedomænet

A $H(s) = \dfrac{s}{s+2}$

B $H(s) = \dfrac{2}{s+2}$

C $H(s) = \dfrac{2s}{s+2}$

D Hverken A, B eller C.

Opgave 4

Et 1. ordens system er beskrevet ved ligningen

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2x(t) \qquad , \ y(0^-) = 3$$

Hvad er impulsresponset for systemet

A $h(t) = \delta(t) + e^{t}u(t)$

B $h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$

C $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$

D Hverken A, B eller C.

Opgave 5

Hvad er zero-input responset for systemet i Opgave 4?

A $y_{\text{zi}}(t) = 3\,e^{t}u(t)$

B $y_{\text{zi}}(t) = 3\,e^{-2t}u(t)$

C $y_{\text{zi}}(t) = 3\,e^{-t/2}u(t)$

D $y_{\text{zi}}(t) = \frac{1}{3}\,e^{-2t}\delta(t)$

Opgave 6

Et LTIC-system er beskrevet ved ligningen

$$\ddot{y}(t) = 5x(t)$$

hvor $x(t)$ betegner input og $y(t)$ er output. Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt?

A Systemet er stabilt.

B Systemet har frekvenskarakteristik $H(\omega) = \dfrac{-5}{\omega^2}$

C Systemets impulsrespons er $h(t) = 5\,t\,u(t) = 5\,r(t)$

D Hverken A, B eller C.

Opgave 7

Dekomposition af systemet beskrevet ved afbildningen

$$x(t) \to y(t) \qquad , \; D^i y(0^-) = \alpha_i, \; i = 0, ..., (n-1)$$

betyder, at outputtet $y(t)$ kan opdeles som en sum

$$y(t) = y_{\text{zs}}(t) + y_{\text{zi}}(t)$$

hvor begyndelsesbetingelserne lige før påvirkningen $x(t)$ starter er

$$\begin{aligned} D^i y_{\text{zi}}(0^-) &= \alpha_i \qquad &, \; i = 0, ..., (n-1) \\ D^i y_{\text{zs}}(0^-) &= 0 \qquad &, \; i = 0, ..., (n-1) \end{aligned}$$

og y_{zi} ikke afhænger af den kausale påvirkning x.
Angiv tilstrækkelige betingelser for at dekompositionsprincippet gælder for afbildningen.

A Systemet er lineært.

B Systemet er kausalt.

C Systemet er lineært og kausalt.

D Systemet er tidsinvariant og kausalt.

Opgave 8

Hvis en funktion $f(t)$ er reel, d. v. s. $f(t) = f(t)^*$, hvad opfylder den fouriertransformerede $F(\omega)$ da:

A $F(\omega) = F(-\omega)^*$, d. v. s. lige realdel og ulige imaginærdel.

B $F(\omega)$ er imaginær, d. v. s. $F(\omega) = -F(\omega)^*$.

C $F(\omega)$ er lige, d. v. s. $F(\omega) = F(-\omega)$.

D Hverken A, B eller C.

Råd: Brug definitionen af fouriertransformation.

Opgave 9

Bestem den fouriertransformerede af

$$f(t) = \delta(t - t_0)$$

Angiv den korrekte værdi

A $F(\omega) = \exp(j\omega t_0)$

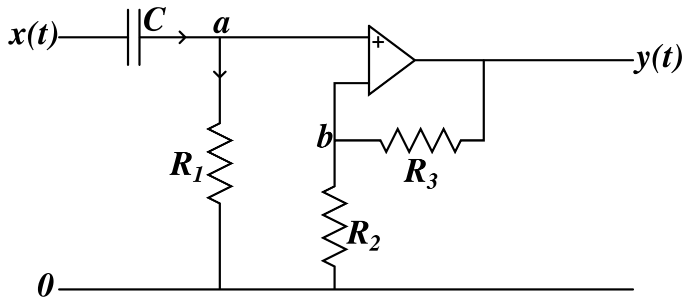
B $F(\omega) = 1$

C $F(\omega) = \exp(-j\omega t_0)$

D Hverken A, B eller C.

Opgave 10

Et filter har diagrammet



hvor spændingen $x(t)$ er input og spændingen $y(t)$ er output. Hvilket af nedenstående er *ikke* korrekt?

A Overføringsfunktionen i laplacedomænet er

$$H(s) = \frac{R_2 + R_3}{R_2} \; \frac{s}{1/(R_1 C) + s}$$

B Systemet er et højpasfilter.

C Systemet har forstærkningen

$$\frac{R_2 + R_3}{R_2}$$

D Knudepunktet a er i laplacedomænet beskrevet ved ligningen

$$C\,s\,(X(s) - A(s)) + C\,v_C(0^-) = \frac{A(s)}{R_1}$$

når spændingen $v_C(0^-)$ over kapacitoren til $t = 0^-$ medtages.

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.

Opgave 11

Et 1. ordens system er beskrevet ved ligningen

$$\dot{y}(t) + y(t) = 2x(t) \qquad , \; y(0^-) = 4$$

Hvad er impulsresponset for systemet

A $h(t) = 2\delta(t) + 2e^{t}u(t)$

B $h(t) = 2\delta(t) - 2e^{-t}u(t)$

C $h(t) = 2e^{-t}u(t)$

D $h(t) = 2e^{-t}\delta(t)$

Opgave 12

Hvad er zero-input responset for systemet i Opgave 11?

A $y_{\text{zi}}(t) = 2e^{t}u(t)$

B $y_{\text{zi}}(t) = -2e^{-t}u(t)$

C $y_{\text{zi}}(t) = 4e^{-t}u(t)$

D $y_{\text{zi}}(t) = 8e^{-t}u(t)$

Opgave 13

Et LTIC-system er beskrevet ved ligningen

$$(D+1)y(t) = 2x(t) \qquad , \quad y(0^-) = 4$$

Hvad er systemets samlede respons på inputtet $x(t) = 2u(t)$?

A $y(t) = 0$

B $y(t) = 2u(t)\exp(-t)$

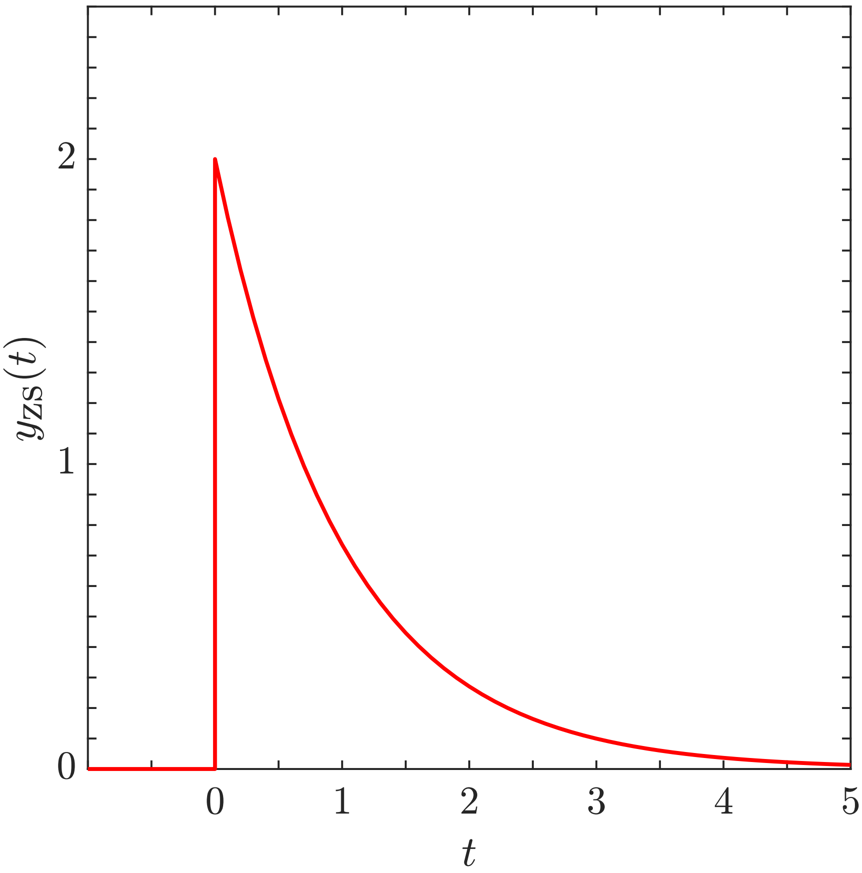
C $y(t) = 4u(t)\exp(-t)$

D $y(t) = 4u(t)$

Tip: Det samlede respons er summen $y = y_{\text{zi}} + y_{\text{zs}}$.

Opgave 14

Et 1. ordens system giver ved inputtet $x(t) = u(t)$ outputtet vist i figuren



Hvad er systemets overføringsfunktion i laplacedomænet?

A $H(s) = 2 - \dfrac{1}{s+1}$

B $H(s) = 2 - \dfrac{2}{s+1}$

C $H(s) = 1 + \dfrac{1}{s+1}$

D $H(s) = 1 + \dfrac{2}{s+1}$

Opgave 15

Det oplyses at overføringsfunktionen $H(s)$ for et system er

$$H(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt?

A Systemet har konvergensområdet $\mathrm{Re}(s) > 0$.

B Systemet har konvergensområdet $\mathrm{Re}(s) > -1$.

C Systemet er ustabilt.

D Hverken A, B eller C

Opgave 16

Et filter har i laplacedomænet overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s+2)}$$

Hvad der værdien af impulsresponset umiddelbart efter 0.

A $h(0^+) = -3$

B $h(0^+) = 0$

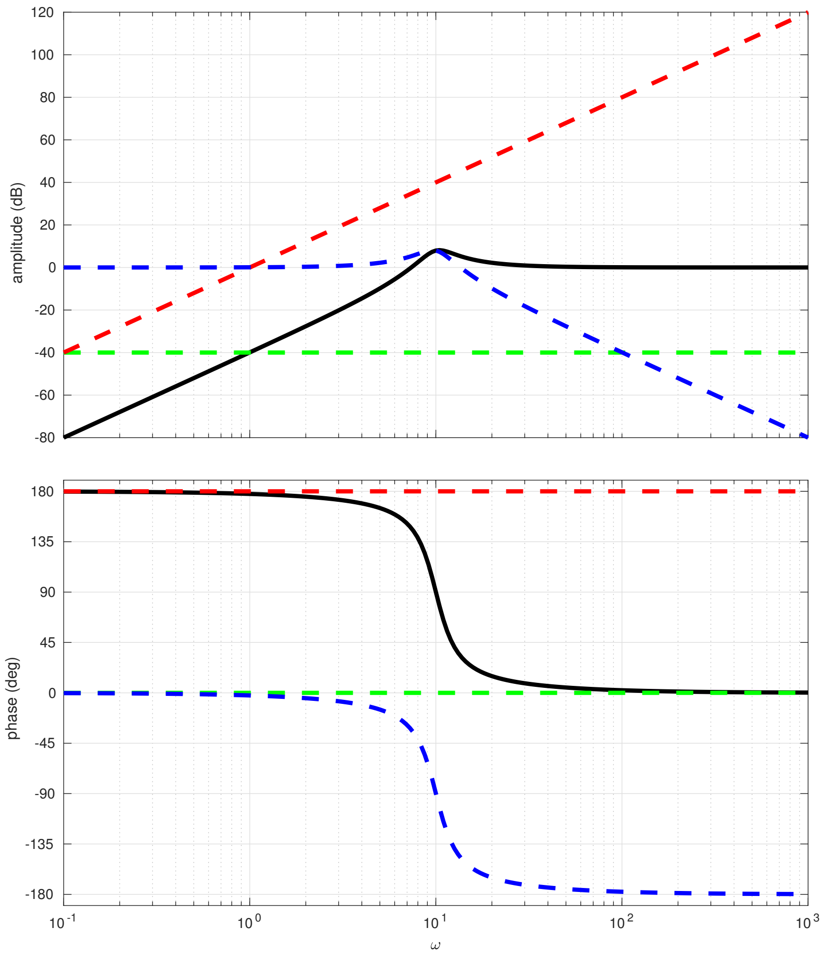
C $h(0^+) = 1$

D $h(0^+) = 3$

Tip: Overvej om begyndelsesværditeoremet kan anvendes. Hvis ikke, bestem da impulsresponset i tidsdomænet og aflæs værdien til tiden $t = 0^+$.

Opgave 17

Et 2. ordens system har Bode-plottet



hvor "sort" svarer til det fulde system og de øvrige (stiplede) kurver svarer til faktoriseringen af systemet. Angiv hvilken overføringsfunktion der svarer til det viste Bode-plot.

A $H(s) = \dfrac{s^2}{(s+10)^2}$

B $H(s) = \dfrac{s^2}{s^2+4s+100}$

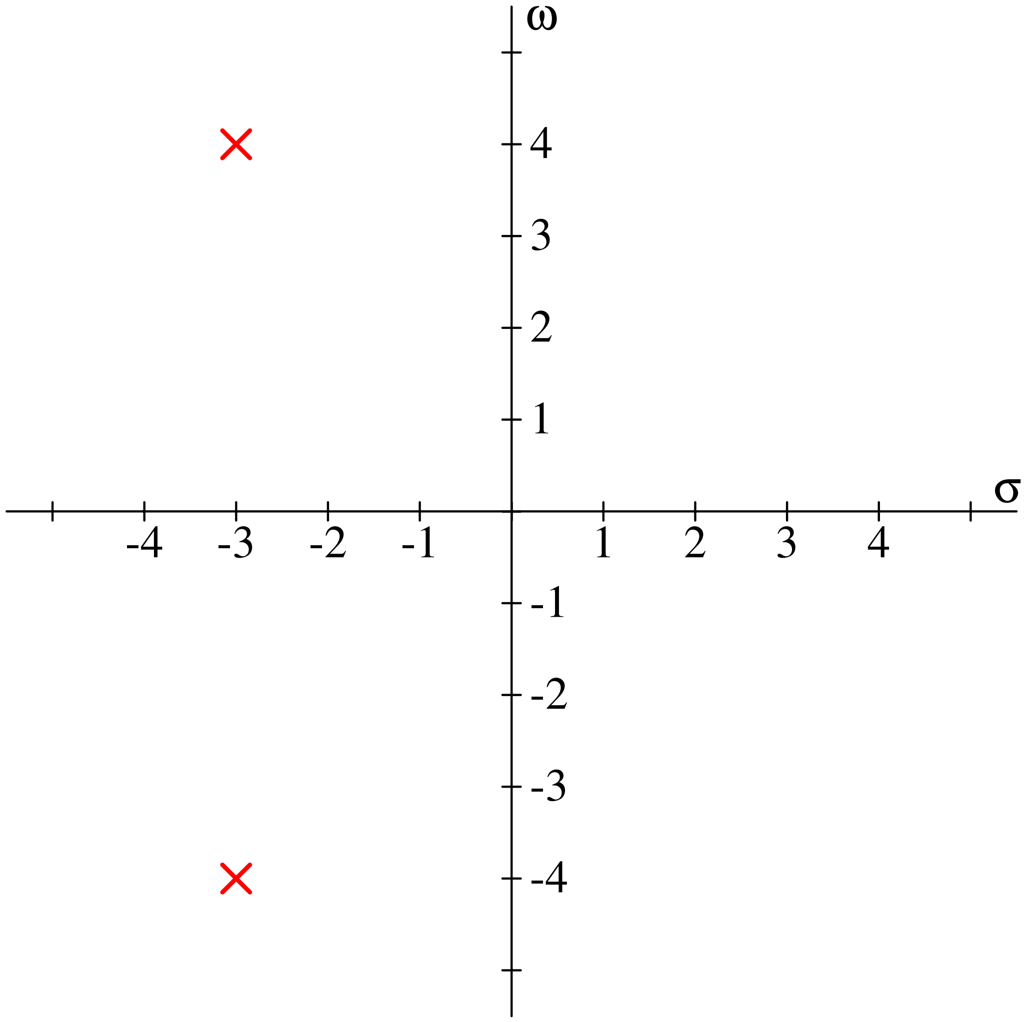
C $H(s) = \dfrac{s^2}{s^2-4s+100}$

D $H(s) = \dfrac{s^2}{s^2+16s+100}$

Tip: Bestem eventuelt dæmpningsfaktoren, ζ, for systemerne.

Opgave 18

Figuren viser pol-nulpunktsdiagrammet for et LTIC system



med forstærkning 1. Røde kryds angiver poler og der er ingen nulpunkter. Hvilket af nedenstående er korrekt.

A Systemet er et all-pass filter, d.v.s. at alle frekvenser forstærkes lige meget.

B Knækfrekvensen i systemet er 3.

C Systemet har overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

D Hverken A, B eller C.

Opgave 19

Et LTIC system er beskrevet ved ligningen

$$(D^2 + 2D + 5)y(t) = D^2x(t) \qquad , \; y(0^-) = 0, \; \dot{y}(0^-) = 0, \; x(t) = 5u(t)$$

Hvilket af nedenstående er *ikke* korrekt?

A Systemet har overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 5}$$

B Det samlede output i laplacedomænet er

$$Y(s) = 5\,\frac{s}{(s+1)^2 + 2^2}$$

C Det samlede output i tidsdomænet er

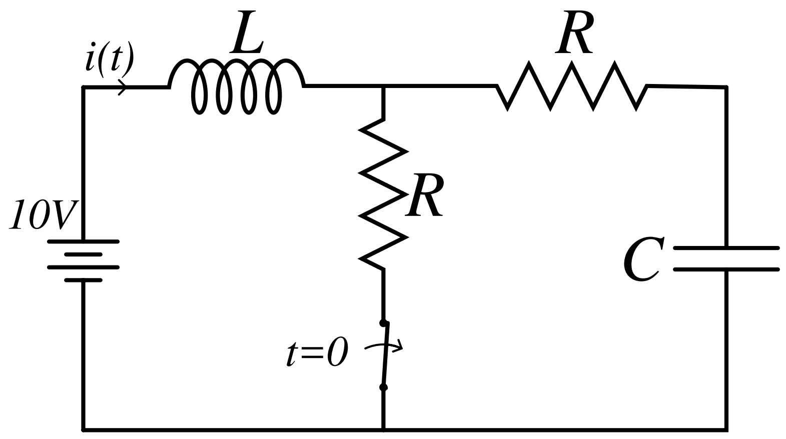
$$y(t) = e^{-t}(5\cos(2t) - \tfrac{5}{2}\sin(2t))u(t)$$

D Systemet har dæmpningsfaktor $\zeta = \frac{1}{2}$.

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.

Opgave 20

Betragt kredsløbet



hvor $L = 1\,\mathrm{H}$, $R = 2\,\Omega$, $C = \frac{1}{5}\,\mathrm{F}$ og $i(t)$ angiver strømmen i kredsløbet. Efter at have været forbundet i lang tid afbrydes kontakten til tiden $t = 0$. Hvilket af nedenstående udsagn er *ikke* korrekt?

A I laplacedomænet er strømmen givet ved

$$I(s) = \frac{i_L(0^-)s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

B Strømmen gennem spolen lige før kontakten afbrydes er

$$i_L(0^-) = 5\mathrm{A}$$

C Strømmen i kredsløbet lang tid efter kontakten afbrydes er

$$i(\infty) = 0\mathrm{A}$$

D Strømmen i kredsløbet lige efter kontakten afbrydes er

$$i(0^+) = 10\mathrm{A}$$

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.
Tip: Husk at batteriet repræsenteres ved $10\mathrm{V}\,u(t)$, når systemet betragtes fra $t = 0$.