22050 Signaler og lineære systemer i kontinuert tid, Maj 2025

- 22050 Signaler og lineære systemer i kontinuert tid. Maj 2025.
- Skriftlige eksamen med alle tilladte hjælpemidler.
- 4 timer.
- Lukket internet.
- Alle opgaver vægtes lige.

Eksamen eksaminerer i handlingsbaserede læringsmål. For at kunne opfylde et handlingsbaseret læringsmål skal den studerende demonstrere en sammenhængende, detaljeret og anvendelsesparat viden og demonstrere sikkerhed i udførelsen af færdigheder. Dette kræver, at en opgave afdækker flere uafhængige aspekter i læringsmålets emne, og at opgaven giver den studerende mulighed for at demonstrere detaljeringsgraden i sin viden og graden af sikkerhed i udførelsen af sine færdigheder. Derfor gælder:

1. Hver svarmulighed kan indeholde en blanding af sande og falske udsagn. En svarmulighed, som indeholder én eller flere falske udsagn, skal opfattes som falsk.
2. Hvis ingen anden svarmulighed kun indeholder sande udsagn, skal man vælge svarmuligheden "*Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn*".
3. Opgaverne kan have flere svarmuligheder med kun sande udsagn. I dette tilfælde er det eneste korrekte svar: "*Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn*". Systemet kan ikke give delpoint for at have afkrydset kun ét af flere korrekte udsagn.

- **Læsning og fortolkning af opgaver:**

1. Opgaverne dækker emner, der er adresseret i kurset og den information, der er givet i opgaverne, skal fortolkes i den kontekst, emnet har indgået i kurset. Dette gælder også de elektriske kredsløb, der er benyttet i opgaveregning.
2. Opgaver kan ligge inden for et emne dækket i kurset men adressere nye og fremmede problemstillinger, der ikke har været arbejdet med i kurset. Dette giver den studerende mulighed for at demonstrere evnen til at overflytte viden og færdigheder fra kendte problemstillinger til nye og ukendte problemstillinger.
3. Opgavetekster kan være formuleret kortfattet, med forkortelser og uden at nævne alle aspekter i problemstillingen. Et af formålene med dette er at give den studerende lejlighed til at demonstrere sin evne til at læse opgaven kritisk og fortolke opgaveformuleringen i den mest meningsfyldte kontekst oplevet i kurset.
4. Stavefejl anvendes ikke til at gøre et udsagn falsk.
5. Stavefejl, der ikke forhindrer afkodning af ordets og sætningens tiltænkte betydning, er ikke en hindring for besvarelse af opgaven eller bedømmelse af besvarelsen.
6. Nogle begreber navngives på flere forskellige måder, fx trinfunktion/stepfunktion. Denne variation i navngivning bruges ikke til at gøre et udsagn falsk.
7. I denne eksamen benyttes almindeligt brugte fagtekniske forkortelser, som antages kendt fra undervisningsmaterialet. Forkortelser bruges i deres mest kendte form og sprog.

- **Talformat, nomenklatur og enheder:**

1. Eksamensopgaverne gør i bredt omfang brug af den nomenklatur, der er brugt i undervisningsmaterialet uden konsekvent definition af symbolernes betydning. Afviger nomenklaturen i opgaven fra den, der er brugt i undervisningsmaterialet, fremgår symbolets betydning af opgaveteksten.

2. Ved brug af fasor-notation vil signalet $x(t)$ have en tilhørende fasor-notation $\mathbf{X}(\omega)$. I nogle tilfælde skrives blot $\mathbf{X}$. På tilsvarende vis med andre signaler.
3. Små variationer i afrunding af decimaltal kan forekomme. Hvis dine udregnede tal afviger fra en svarmulighed på nogle af de mindst betydende cifre, kan du ikke på dette grundlag konkludere, at svarmuligheden er falsk.
4. Den komplekse enhed i komplekse tal betegnes j.
5. 1000 rad/s = 1krads/s.
6. Decimaltal skrives med decimalpunktum, fx $\pi \approx 3.14159$
7. Hvis systemligninger gives på symbolsk form, antages det at de medtagne koefficienter er reelle, konstante og forskellig fra nul med mindre andet er nævnt.
8. Koefficienters og konstante leds enheder er udeladt af hensyn til ligningernes overskuelighed, men skal antages at være korrekte.
9. Fourier-transformation og invers Fourier-transformation kan skrives på kort form som henholdvist $\mathcal{F}\{\cdot\}$ og $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$.
10. Laplace-transformation og invers Laplace-transformation kan skrives på kort form som henholdvist $\mathcal{L}\{\cdot\}$ og $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$.

Hvor ikke andet er nævnt:

- antages tidssignaler at være reelle i tidsdomænet.
- antages signaler at repræsentere elektriske spændinger eller strømme.
- antages symbolet $x(t)$ at repræsentere systemets indgangssignal og symbolet $y(t)$ at repræsentere systemets udgangssignal.
- antages Laplace-transformationer at være unilateral og defineret ved: $X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$.

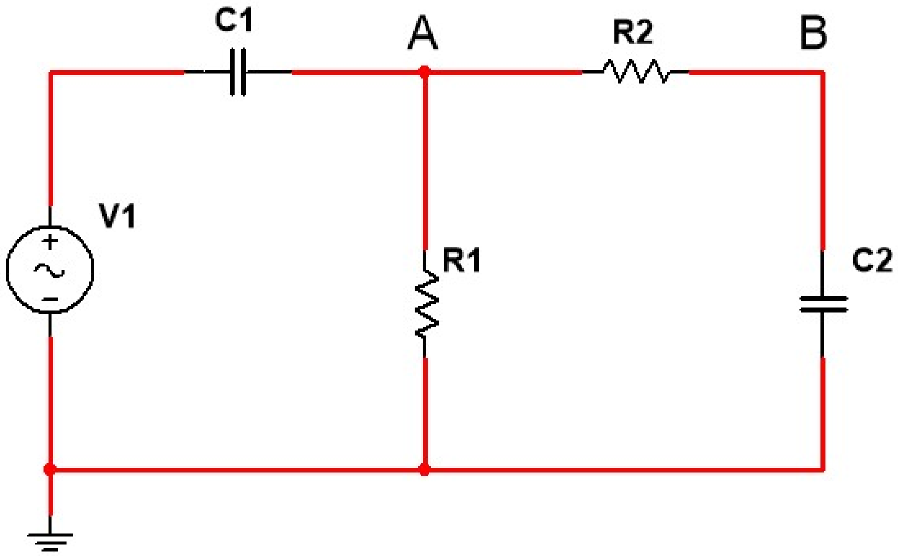
Scoringsalgoritme

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:

- Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
- Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
- Hvert rigtigt svar giver 1 point
- Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

Opgave 1. **Information fra et kredsløbsdiagram.**



Om kredsløbet vist i ovenstående figur gives følgende sande eller falske udsagn:

- [x] Knudepunktsligningen for knudepunkt B kan skrives som: $-\frac{V_B - V_A}{R_2} + C_2 \frac{dV_B}{dt} = 0$

- [ ] Differentialligningen for knudepunktsspændingen $V_B(t)$ kan skrives på formen:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \, \ddot{V}_B(t) + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \, \dot{V}_B(t) + y(t) = R_1 C_1 \, \dot{V}_1(t)$$

- [ ] Kredsløbet er et højpasfilter.

- [ ] Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn.

- [ ] Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 2. **Information i en differentiallignings form og koefficienter.**

Et system har indgangssignalet $x(t)$ og udgangssignalet $y(t)$.

Systemet kan beskrives ved følgende differentialligning:

$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 9y(t) = 18x(t)$;

og begyndelsesbetingelser:

$y(0_-) = 0, \dot{y}(0_-) = 0.$

Om systemet gives herunder en række sande eller falske udsagn.

- ○ Systemet har en frekvenskarakteristik som et båndpasfilter. Den største forstærkning i pasbåndet er 2.
- ✓ Systemet er lineært, tidsinvariant og kausalt.
- ○ Påtrykkes en enheds-stepfunktion på systemets indgang, dvs. $x(t) = u(t)$, vil der om systemets steprespons $y_{step}(t)$ gælde, at:
    - $y_{step}(0_+) = 0$.
    - det har en steady-state værdi: $\lim_{t \to \infty} y_{step}(t) = 2$
    - det har overshoot i sin indsvingning til steady-state.
- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 3. **Impulsrespons.**

Et LTIC system med input $x(t)$ og output $y(t)$ er beskrevet ved ligningen

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 16y(t) = 32\dot{x}(t);\ y(0_-) = 0;\ \dot{y}(0_-) = 0$$

- ○ Når man vil udlede et udtryk for systemets enheds-impulsrespons $h(t)$, kan man som første trin løse den homogen differentialligning med de hergivne begyndelsesbetingelser:

  $$\ddot{y}_n(t) + 8\dot{y}_n(t) + 16y_n(t) = 0;\ y_n(0_+) = 1;\ \dot{y}_n(0_+) = 0$$

  Løsningen $y_n(t)$ betegnes systemets naturlige respons.

- ○ Systemet er overdæmpet.

- ✔ Systemets enheds-impulsrespons: $h(t) = 32(1 - 4t)e^{-4t}u(t)$

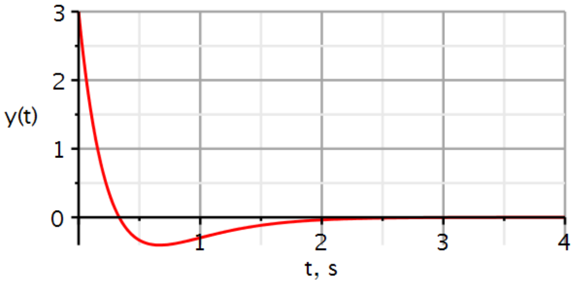
- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn.

- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

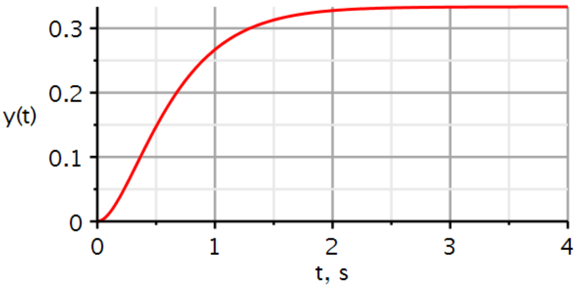
Opgave 4. **Steprespons.**

Herunder er vist enheds-steprespons fra tre LTIC systemer. Alle systemer er af anden orden.

A.



B.



C.

- Respons A er fra et højpasfilter. Respons B er fra et lavpasfilter. Respons C er fra et båndpasfilter.
- Respons A er fra et lavpasfilter. Respons B er fra et båndpasfilter. Respons C er fra et højpasfilter.
- Respons A er fra et båndpasfilter. Respons B er fra et højpasfilter. Respons C er fra et lavpasfilter.
- Respons A er fra et højpasfilter. Respons B er fra et båndpasfilter. Respons C er fra et lavpasfilter.
- Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn.

Opgave 5. **Foldning**.

Om foldning gives følgende sande eller falske udsagn:

- ○ $e^{-4t}u(t) * e^{-2t}u(-t) = \left(e^{-4t} + e^{-2t}\right)\frac{(u(t)+u(-t))}{2}$

- ● Et signal $x_1(t) = 0$ uden for tidintervallet $t_1 < t < t_2$.
  Et signal $x_2(t) = 0$ uden for tidsintervallet $t_3 < t < t_4$.

  Signalet $y(t) = x_1(t) * x_2(t) = 0$ uden for tidsintervallet
  $t_1 + t_3 < t < t_2 + t_4$.

- ○ For et LTIC system kan foldning bruges til at beregne zero-state responset men ikke zero-input responset.

- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 6. **Fourierrækker**

Om Fourierrække-ekspansion af et signal gives følgende sande eller falske udsagn:

Udsagn A.
Lad $f(n\omega_0 t)$ være en basisfunktion i en Fourierrække-ekspansion. Det indre produkt mellem to basisfunktioner er kun forskellig fra nul, hvis der er tale om det indre produkt af en basisfunktion med sig selv.

Udsagn B.
Ekspanderes et tidsudsnit $t_1 \leq t \leq t_1 + T_0$ af et reelt og aperiodisk signal $x(t)$ i en Fourierrække, vil resultatet af Fourierrække-ekspansion $\tilde{x}(t)$ være reelt og periodisk med periodetiden T_0 .

Udsagn C.
Om koefficienterne D_n i den kompleks-eksponentielle Fourierrække-ekspansion af et reelt og ulige signal $x(t)$ gælder: $|D_n| = -|D_{-n}|$.

Udsagn D.
Om koefficienterne D_n i den kompleks-eksponentielle Fourierrække-ekspansion af et reelt og lige signal $x(t)$ gælder: $D_n = D_{-n}$.

- ○ Udsagn A og B er sande.
- ○ Udsagn B og C er sande.
- ○ Udsagn A og D er sande.
- ○ Udsagn C og D er sande.
- ● Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 7. **Fourier-transformation**

Om Fourier-transformationen gives her en række sande eller falske udsagn.

- ○ Fourier-transformationen eksisterer kun for aperiodiske signaler. For periodiske signaler bruges i stedet Fourierrække-ekspansionen.
- ✔ Antag at signalet $x(t)$ er reelt og at dets Fourier-transformation eksisterer.
  Hvis signalet $x(t)$ er lige, vil Fourier-transformationens imaginære del være nul.
  Hvis signalet $x(t)$ er ulige, vil Fourier-transformationens reelle del være nul.
- ○ Fourier-transformationen af det reelle signal $x(t) = e^{at}u(t)$ eksisterer for alle værdier af a , hvor $|a| < \infty$.
- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 8. **Fourier-transformation**.

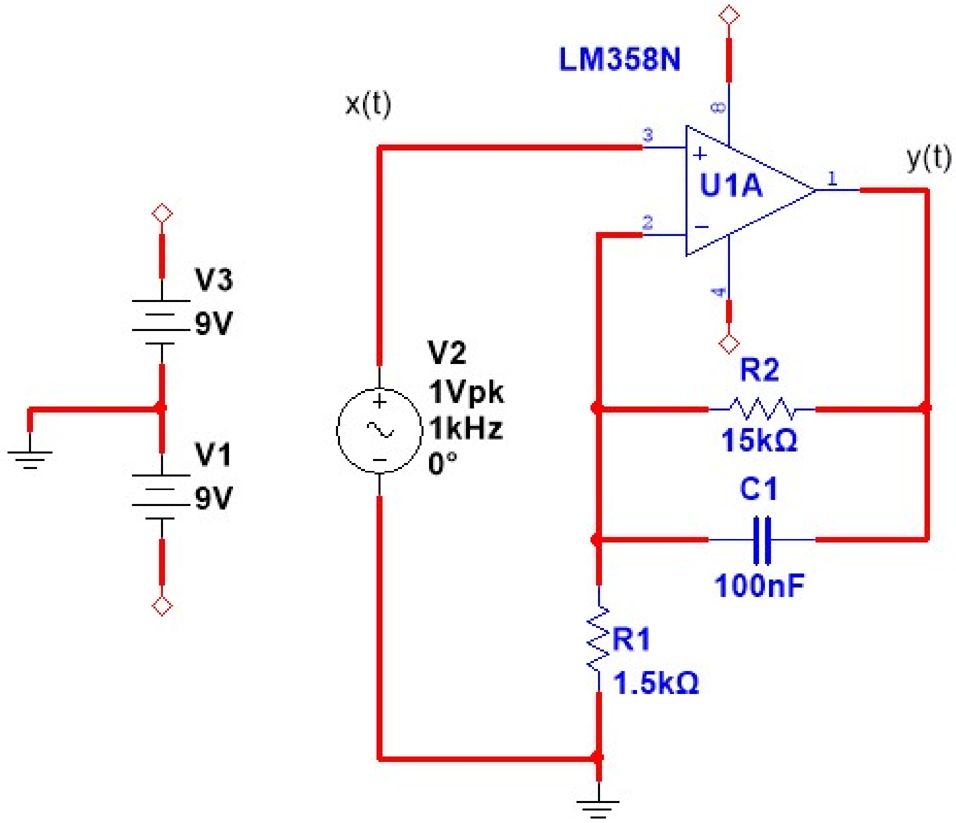
Signalet $x(t) = e^{-3t}u(t)$ har Fourier-transformationen $X(\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$.

Med udgangspunkt i dette transformationspar gives her en række sande eller falsk transformationspar.

- ○ $\dot{x}(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{3+j\omega}$
- ○ $x(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3+j2\omega}$.
- ✔ $x(t)e^{j2t} \leftrightarrow \frac{1}{3+j(\omega-2)}$.
- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 9. **Vekselstrømskredsløb**

Betragt følgende kredsløb, hvor indgangspændingen er $x(t)$ og udgangspændingen er $y(t)$.



Om dette kredsløb gives herunder en række sande eller falske udsagn.

- ○ Kredsløbet frekvenskarakteristik er givet ved:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = H(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{j\omega R_2 C_1 + 1}$$

- ✔ Når $\omega \longrightarrow \infty$, bliver kondensatorens indvirkning på kredsløbet ubetydeligt.

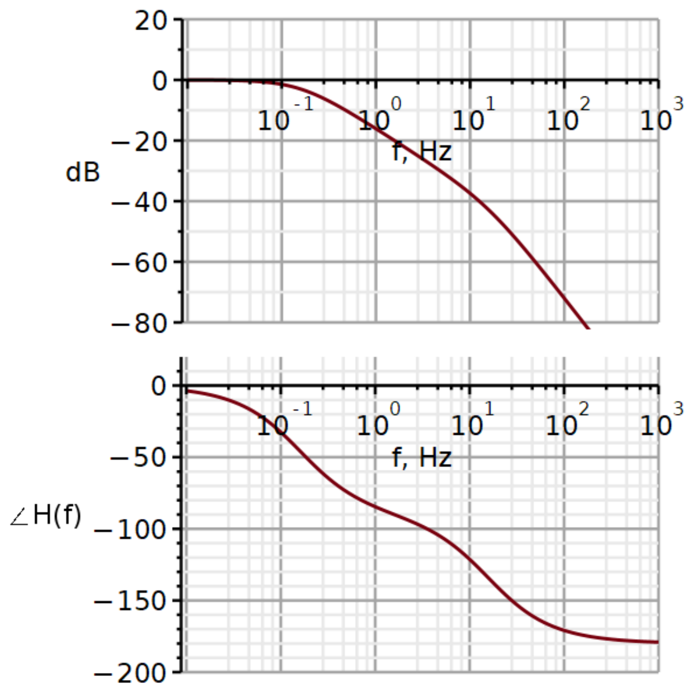
- ○ Kondensatorens impedans er: $j\omega C_1$

- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn.

- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 10. **Frekvenskarakteristik.**

Herunder er vist amplitude- og fasekarakteristikker målt på et lukket og forseglet LTIC system.



Om systemet og dets amplitude- og fasekarakteristikker gives herunder en række sande og falske udsagn.

- ○ De målte amplitude- og fasespektre kan hidrøre fra et system med følgende frekvenskarakteristik:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right)(j\omega) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

- ○ De målte amplitude- og fasespektre kan hidrøre fra et system, som er beskrevet ved en 3. ordens differentialligning.
- ○ Blandt systemets poler er der to, som er kompleks-konjugerede.
- ✔ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder udelukkende sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 11. **Laplace-transformation**

Om Laplace-transformationen gives følgende sande eller falske udsagn.

- ○ Hvis Laplace-transformationen af et LTIC systems impulsrespons eksisterer, er dette samtidigt et bevis på at Fourier-transformationen af impulsresponset også eksisterer.

- ○ Signalet $e^{5t}u(t)$ har et konvergensområde i s-planet, der har den lodrette linje $\sigma = -5$ som venstre grænseværdi.

- ○ Haves følgende:

  $Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$

  kan man udføre partialbrøkopsplitning og derefter finde den inverse Laplace-transformation af:

  $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$

  hvorved findes:

  $y(t) = \left(1 - e^{-t}\right) u(t)$.

- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

- ✔ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 12. **Laplace-transformation**

Om Laplace-transformationen gives følgende sande eller falske udsagn.

- ✔ Laplace-transformeres en differentialligning for et LTIC system, opnås et udtryk, der inkluderer systemets begyndelsesbetingelser oplyst i $t = 0_+$.

- ○ Foldning af to signaler i tidsdomænet er ækvivalent til at Laplace-transformere produktet af de to signalers invers-Laplace-transformerede.

- ○ Den Laplace-transformerede af et systems steprespons er systemets overføringsfunktion.

- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 13. **Laplace transformation**

Et signal $y(t)$ har Laplace-transformationen $Y(s) = \frac{2}{s(s+3)}$.

- ○ Givet transformationsparret $y(t) \leftrightarrow Y(s)$ haves også $y(t-3) \leftrightarrow \frac{2}{s(s+3)} e^{-3s}$.
- ○ Begyndelsesværdi-teoremet fortæller os at $y(0_+) = \frac{2}{3}$.
- ○ Slutværdi-teoremet fortæller os at $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- ✔ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 14. **Laplace-transformation.**

Et LTIC system har differentialligningen

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

Systemets begyndelsesbetingelser er $\dot{y}(0_-) = 2; y(0_-) = 2;$

- ○ Den Laplace-transformerede af systemets zero-input respons er:

  $$Y_{zi}(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

  Systemets zero-input respons i tidsdomænet er:

  $$y_{zi}(t) = (2-t)\, e^{-t} u(t)$$

- ○ Systemets enheds-steprespons har Laplace-transformationen:

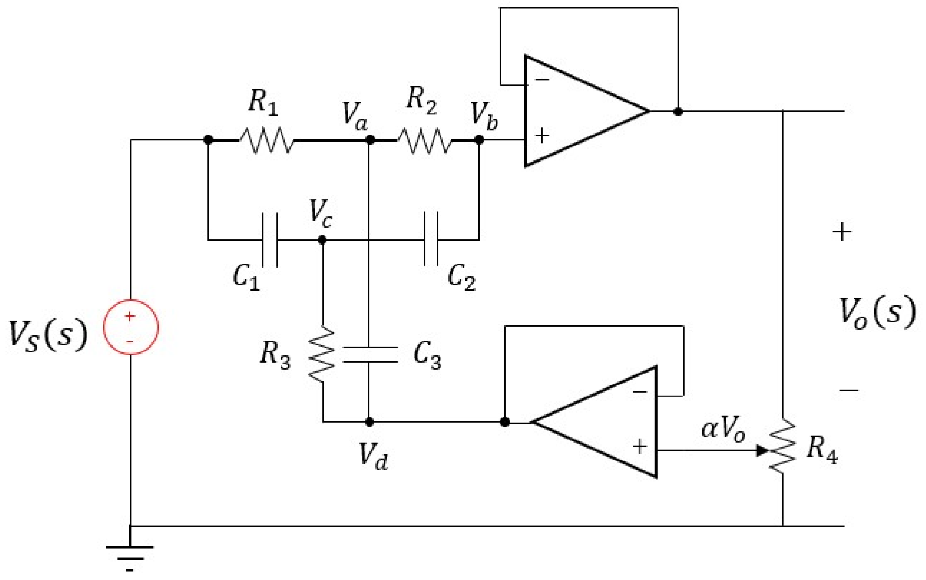
  $$Y_{zs}(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

  $$y_{step}(t) = \left(1 - (1+t)e^{-t}\right) u(t) \ .$$

- ✔ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 15. **Filter**

Herunder er vist et filterkredsløb.



Givet at: $R_1 = R_2 = 2R_3 = 2R$ og $C_1 = C_2 = \frac{C_3}{2} = \frac{C}{2}$

er det i kurset blevet vist at filterets overføringsfunktion har formen:

$$H(s) = \frac{s^2+a_0}{s^2+a_1 s+a_0}$$

hvor $a_0 = \frac{1}{(RC)^2}$ og $a_1 = \frac{4(1-\alpha)}{RC}$

Parameteren α er givet ved justering af midterbenet på potentiometer R_4 .

Herom gives følgende sande eller falske udsagn:

- Systemet blokerer DC signaler.
- Justeres potentiometeret R_4 , således at $\alpha = 3/4$, opnås en kvalitetsfaktor $Q = \frac{1}{2}$.
- ✔ Hvis $\frac{1}{4} < Q < \frac{1}{2}$, vil filteret have to reelle og forskellige poler. Hvis $Q > \frac{1}{2}$, vil filteret have et komplekst konjugeret polpar.
- Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

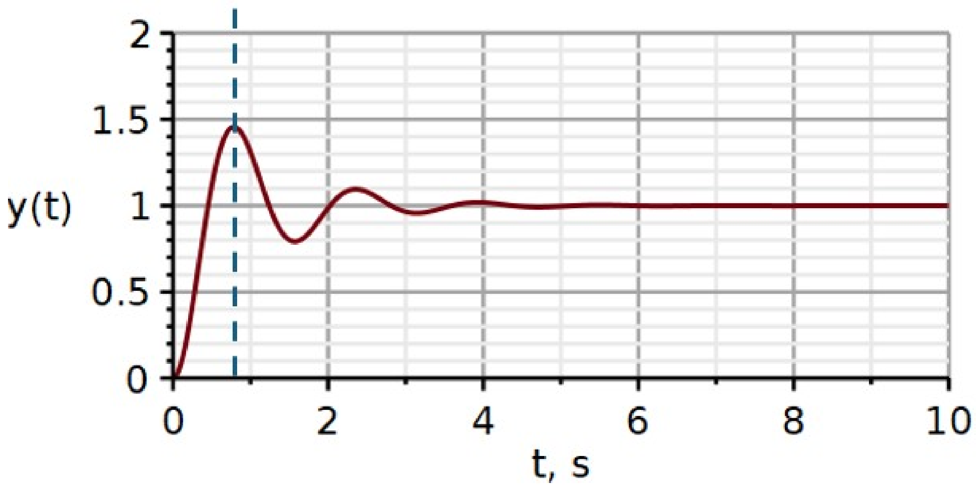
Opgave 16. **Systemidentifikation**

I din virksomhed modtages rutinemæssigt lukkede og forseglede elektriske kredsløb, der har ukendte egenskaber. Din kollega har foretaget nogle målinger i laboratoriet og givet dig et steprespons og et Bode-plot.

Der hersker dog forvirring om, hvorvidt stepresponset og Bode-plottet er fra samme system, eller om de ved en fejl stammer fra målinger på forskellige systemer.

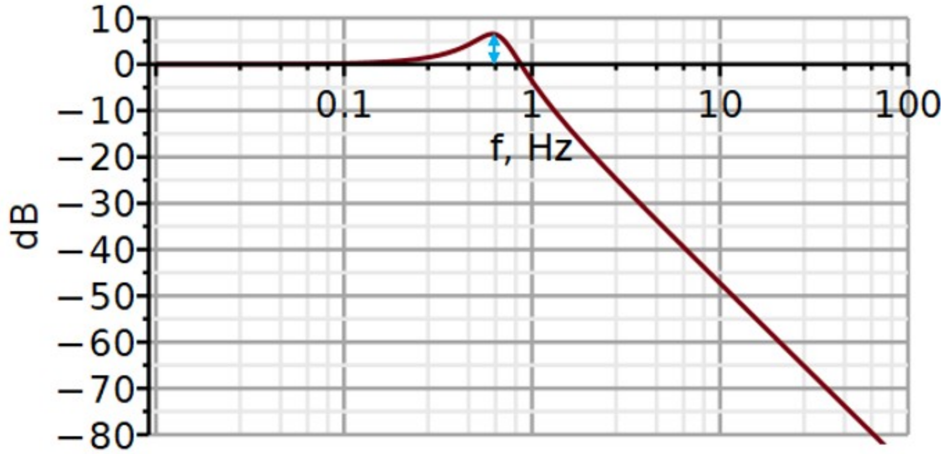
Her skal du antage, at både steprespons og Bode-plot stammer fra 2. ordens LTIC systemer.

A. Steprespons



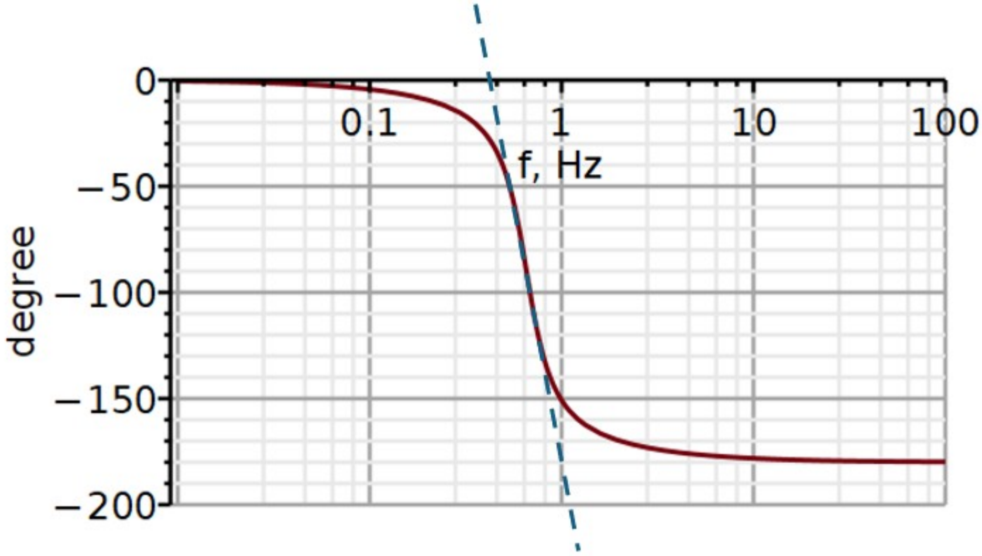
Procent overshoot kan aflæses til 45.59% og tidspunktet for første peak kan aflæses til 0.78543 s, begge tal afrundet.

B. Amplitudespektrum



Den lokale peak på amplitudespektret ligger i 0.62 Hz og har en amplitude på 6.5dB, begge tal afrundet.

C. Fasespektrum



Den indtegnede stiplede linje skærer 0° i 0.31Hz (afrundet).

I svarmulighederne herunder er foreslået en række sande og falske konklusioner.

- [ ] Den udæmpede resonansfrekvens $\omega_n = 4.1231 \mathrm{rad/s}$. (afrundet)
Settling time $t_s = 3.9999$ s . (afrundet)

- [x] Systemet har følgende differentialligning: $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 17 = 17x(t)$.

  Stepresponset viser at systemet er underdæmpet, og Bode-plottet viser, at der er god grund til at konkludere, at der må være tale om et 2. ordens lavpasfilter.

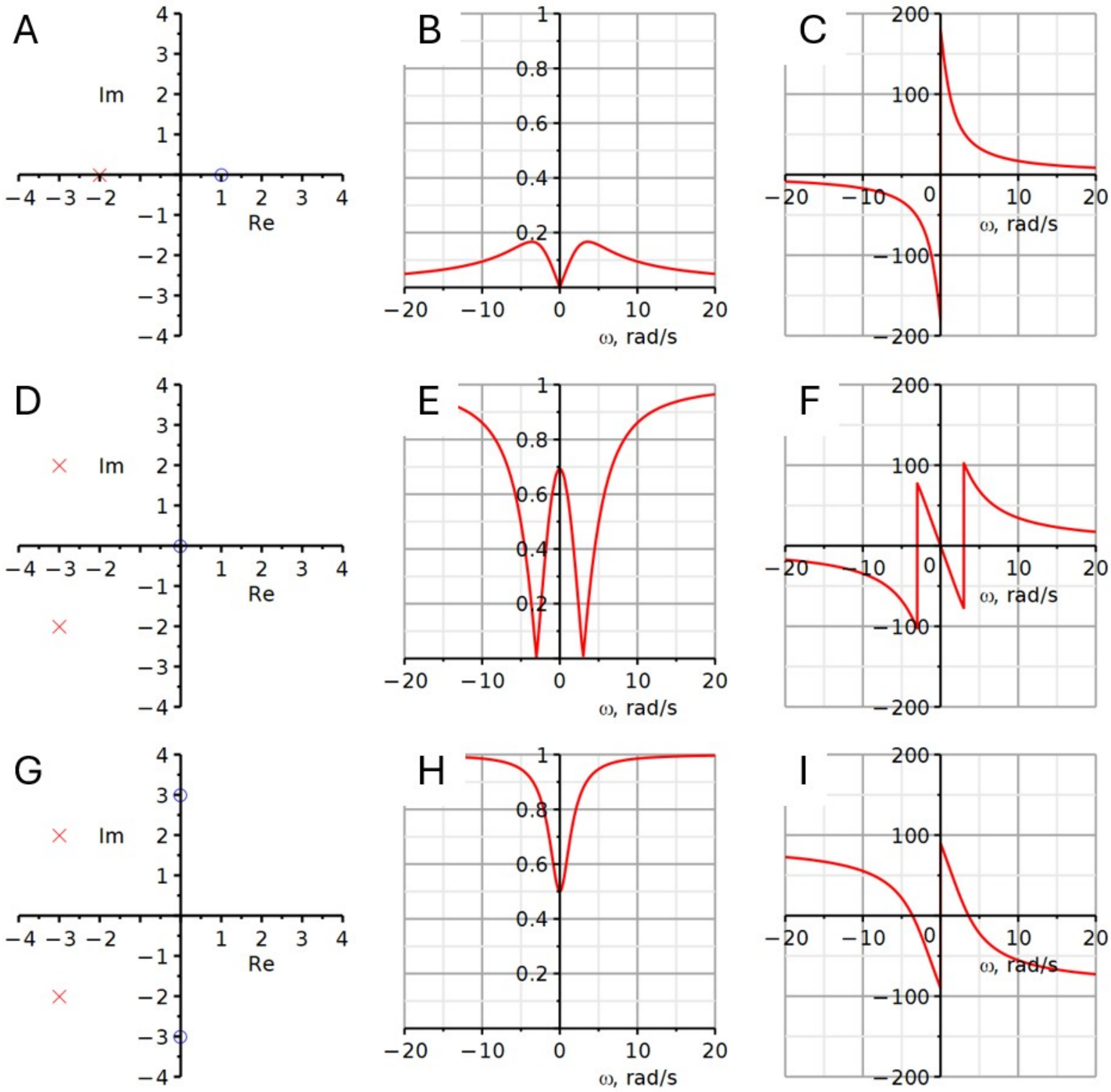
- [ ] Med udgangsunkt i de her givne aflæsninger kan det konkluderes, at steprespons, og amplitude- og fasespektrene ikke er målt på samme system.

- [ ] Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.

- [ ] Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 17. **Filterdesign ved placering af poler og nulpunkter**

Herunder vises tre sæt af pol-nulpunkt-diagrammer, amplitudespektre og fasespektre.



Poler er markeret med røde krydser og nulpunkter med blå cirkler.

Bemærk, hvis der er tale om repeterede poler eller nulpunkter, vil antallet af repetitioner være angivet med et tal i parentes ved siden af symbolet.

Desværre er der opstået rod i plottene. De ni plot er blevet lagt ud på bordet i en bestemt orden uden at vide, hvor mange forskellige systemer, der er repræsenteret i de viste plot.

Herunder gives der sande og falske udsagn om de viste plot.

Udsagn A.
Amplitudespektret i figur E har et dyk i forstærkning ved ca. 3 rad/s. Dette skyldes et polpar placeret på den imaginære akse i $(0 \pm j \cdot 3)$.

Udsagn B.
Hvis nulpunktet i figur A flyttede til $(-1 + j \cdot 0)$, ville det ikke ændre på systemets amplitudekarakteristik, men fasekarakteristikken ville få modsat fortegn.

Udsagn C.
Baseret på kvantitative aflæsninger på plottene er der grund til at antage at figur A, H og C er fra samme system.

Udsagn D.
Hvis der blev tilføjet yderligere et nulpunkt i $(0 + j \cdot 0)$ i figur D, ville man få et højpasfilter. Med denne tilføjelse vil højpasfilterets fasevinkel springe fra -180° til 180°, når frekvensen øges fra $\omega = 0_-$ til $\omega = 0_+$.

- ○ Udsagn A og B er sande.
- ○ Udsagn B og C er sande.
- ○ Udsagn A og D er sande.
- ✔ Udsagn C og D er sande.
- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 18. **Butterworth filter**

Om et Sallen-Key filter af typen Butterworth gives følgende sande eller falske udsagn.

Udsagn A.
Et Butterworth-filter er defineret som et specialtilfælde af følgende amplitudekarakteristik

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}}} \quad ; \quad \omega_p \text{ er pasbåndfrekvensen i rad/s.}$$

Når $\epsilon = \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^n$ opnås et Butterworth-filter

Med denne definition af parameteren ϵ opnås, at pasbåndfrekvensen bliver identisk med 3dB knækfrekvensen ω_c .

Butterworth-filterets egenskaber er alene defineret ved amplitudekarakteristikken. Det er således et af Butterworth-filteret vigtigste egenskaber, at det ikke ændrer på det filterede signals fasevinkel.

Udsagn B.
Butterworthfilterets poler er defineret ved:

$$s_k = e^{\frac{j\pi}{2n}(2k+n-1)} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots 2n$$

Disse poler ligger ligeligt fordelt på enhedscirklen. Polerne med indeks $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ligger i venstre halvplan og polerne med indeks $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ ligger i højre halvplan.

Butterworth-filterets overføringsfunktion er den funktion $H(s)$, hvorom der gælder:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$ og dens impulsrespons $h(t)$ er kausalt.

Om overføringsfunktionen $H(-s)$ gælder, at den repræsenterer den antikausale modpart til filteret $H(s)$, dens poler ligger i højre halvplan, og dens impulsrespons er givet ved $h(-t)$.

Udsagn C.
Et 5. ordens lavpasfilter af Butterworth typen ønskes implementeret som en seriekobling af ét førsteordens filter og to andenordens filtre begge hver især realiseret med et Sallen-Key kredsløb. Alle trin kan antages at have en DC-forstærkning $K = 1$.

Det ene trin (her navngivet Trin 1) har en kvalitetsfaktor $Q_1 = 1.61803$.
Det andet trin (her navngivet Trin 2) har en kvalitetsfaktor $Q_2 = 0.618036$.

Amplitudekarakteristikken for Trin 1 har en lokal peak tæt ved knækfrekvensen.
Amplitudekarakteristikken for Trin 2 har ingen lokal peak tæt ved knækfrekvensen.

Hvis kvalitetsfaktorerne skal være uafhængige af utilsigtede ændringer (fx drift på grund af temperaturændringer) i filtertrinenes modstandsværdier, skal de to modstande i hvert trin have parvis ens værdier.

Udsagn D.
Insisterer man på at gøre kvalitetsfaktorerne uafængige af forstærkningsparameteren K og af de to modstande i hvert af de to Sallen-Key kredsløb, skal der om kondensatorernes størrelsesforhold gælde:

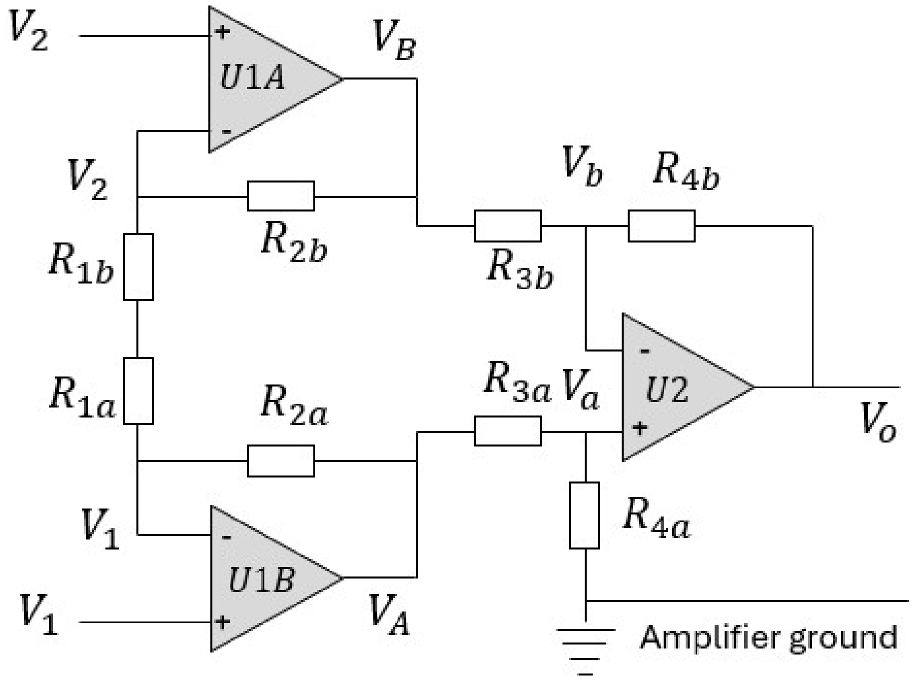
Trin 1: $\frac{C_2^{(1)}}{C_1^{(1)}} = 10.5$ (afrundet). Skal kondensatorværdier vælges fra E6 serien, er $C_2^{(1)}/C_1^{(1)} \approx 10/1$ bedste mulige størrelsesforhold.

Trin 2: $\frac{C_2^{(2)}}{C_1^{(2)}} = 1.53$ (afrundet). Skal kondensatorværdier vælges fra E6 serien, er $C_2^{(2)}/C_1^{(2)} \approx 1.5$ bedste mulige størrelsesforhold. Her er der to mulige kombinationer: $C_2^{(2)}/C_1^{(2)} = [1.5/1;\ 3.3/2.2]$

- [x] Udsagn A og B er sande.
- [ ] Udsagn B og C er sande.
- [ ] Udsagn A og D er sande.
- [ ] Udsagn C og D er sande.
- [ ] Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- [ ] Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 19. **Instrumenteringsforstærker**.

Herunder er vist en model af en instrumenteringsforstærker.



Det kan vises at:

$$V_o(t) = \left(\frac{R_{3b}+R_{4b}}{R_{3b}}\right)\left(\frac{R_{4a}}{R_{3a}+R_{4a}}\right)V_A(t) - \frac{R_{4b}}{R_{3b}}V_B(t)\ .$$

hvor:

$$V_A(t) = \left(1 + \frac{R_{2a}}{R_{1a}+R_{1b}}\right)V_1(t) - \frac{R_{2a}}{R_{1a}+R_{1b}}V_2(t)$$

og

$$V_B(t) = \left(1 + \frac{R_{2b}}{R_{1a}+R_{1b}}\right)V_2(t) - \frac{R_{2b}}{R_{1a}+R_{1b}}V_1(t)$$

Under ideelle forhold gælder:

$R_{1a} = R_{1b} = R_G/2$, hvor R_G er den eksterne modstand til justering af forstærkning.
$R_{2a} = R_{2b};\ R_{3a} = R_{3b} = R_{4a} = R_{4b}$

Om denne forstærker gives herunder en række sande eller falske udsagn.

Udsagn A.
Det er instrumenteringsforstærkerens formål af forstærke en spændingsforskel $(V_1 - V_2)$ uden at trække strøm ud af de knudepunkter i kredsløbet, hvortil indgangsterminalerne er forbundne. I den viste forstærker er dette sikret ved at anbringe en inverterende operationsforstærker (U1A, U1B) foran hver indgang på en differensforstærker (U2).

Udsagn B.
Under de ovenfor nævnte ideelle forhold vil den differentielle forstærkning G_d være givet ved:

$$G_d = 1 + \frac{2R_{2a}}{R_G}$$

Udsagn C.

Der antages en enkel afvigelse fra de ideelle forhold, idet:

$R_{4b} = \alpha \cdot R_{4a}$, dvs. R_{4b} kan afvige fra R_{4a} .

I dette tilfælde kan det vises at common mode forstærkningen er givet ved:

$G_c = \frac{1-\alpha}{2}$.

Udsagn D.
En given instrumenteringsforstærker er designet til at have en differential-forstærkning på 1000. I lab påtrykkes forstærkeren en common mode spænding på 1Vdc. På forstærkerens udgang måles samtidigt en spænding på 50mVdc.

Det kan konkluderes, at signal/støj-forholdet på forstærkerens udgang er 86dB ved 0Hz.

- ○ Udsagn A og B er sande.
- ○ Udsagn B og C er sande.
- ● Udsagn A og D er sande.
- ○ Udsagn C og D er sande.
- ○ Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- ○ Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.

Opgave 20. **Sampling og analog-til-digital konvertering**

Herunder gives en række sande eller falske udsagn om sampling og analog-til-digital-konvertering.

Udsagn A.
Et signal med Fourier-transformationsparret $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ samples med tidsintervallet T mellem samples.

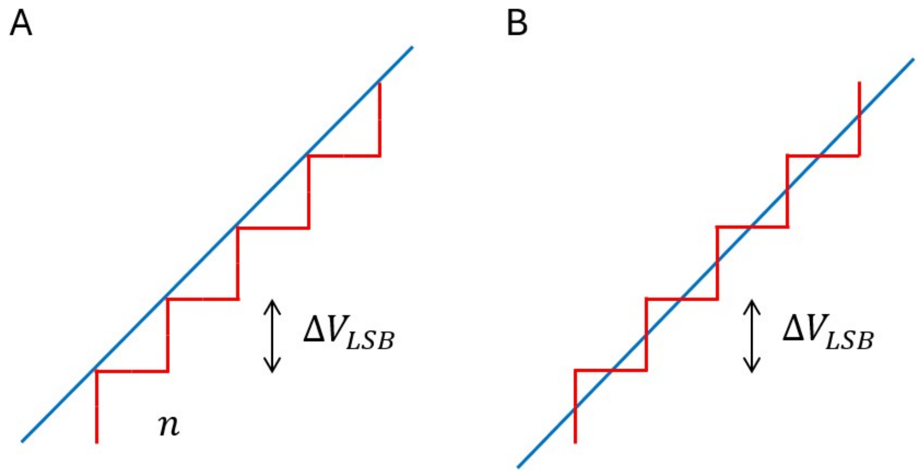
Det samplede signal $\tilde{x}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ har et frekvensspektrum beskrevet ved

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \ .$$

Det følger at frekvensspektret for det samplede signal er diskret med en afstand ω_s mellem frekvenskomposanterne på frekvensaksen.

Udsagn B.
Et signal $x(t)$ indeholder en enkel frekvenskomponent ved 4Hz. Hvis signalet samples med 6Hz, vil der i frekvensspektret for det samplede signal optræde en frekvenskomponent ved 2Hz.

Udsagn C.



Figur A viser relationen mellem det analoge signal (blå graf) og det digitale signal (røde trappetrinskurve) for ADC_A, der altid runder amplituden på den digitale sample nedad til nærmeste mulige heltal.
Figur B viser relationen mellem det analoge signal (blå graf) og det digitale signal (røde trappetrinskurve) for ADC_B, der runder amplituden på den digitale sample op eller ned til nærmeste mulige heltal.

Amplituden på kvantiseringsstøjen for ADC_A har en uniform statistisk fordelingsfunktion i intervallet $[0, \Delta V_{LSB}]$.
Amplituden på kvantiseringsstøjen for ADC_B har en uniform statistisk fordelingsfunktion i intervallet $[-\Delta V_{LSB}/2, \Delta V_{LSB}/2]$.
Det er muligt at reducere kvantiseringsstøjen ved at oversample med en faktor M og udregne en middelværdi af M samples. Udbyttet af oversampling er dog langt ringere for ADC_A end for ADC_B .

Udsagn D.
Et analogt signal lavpasfiltreres af et 4. ordens lavpasfilter med en 3dB knækfrekvens på 100Hz og digitaliseres herefter af en 12-bit ADC. Hvis filteret skal dæmpe signalet

så meget ved den halve samplingsfrekvens, at signalets amplitude ved denne frekvens er for lavt til at kunne registreres af ADC'en, skal samplingsfrekvensen være 1200Hz.

- [x] Udsagn A og B er sande.
- [ ] Udsagn B og C er sande.
- [ ] Udsagn A og D er sande.
- [ ] Udsagn C og D er sande.
- [ ] Ingen af de øvrige svarmuligheder indeholder kun sande udsagn.
- [ ] Der er mere end én svarmulighed, der udelukkende indeholder sande udsagn.