Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 22/5-2019

Kursus navn: Signaler og lineære systemer i kontinuert tid — Kursus nr.: 31605

Tilladte hjælpemidler: Ingen hjælpemidler. Ingen lommeregner.

Varighed: 4 timer.

Vægtning: For hvert spørgsmål angives højst et bogstav som svar. Korrekte svar giver 3 point, forkerte svar trækker 1 point fra, mens ubesvaret er neutralt.

Når opgaverne er besvaret overføres besvarelserne til skemaet på side 2.
Kun side 2 afleveres.

Danmarks Tekniske Universitet

Besvarelsesark for skriftlig eksamen

Kursusnummer: 31605

Studienummer: ____________________

Navn: ____________________

Underskrift: ____________________

Dato: 22/5-2019

Spørgsmål	Svar
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Oplysninger til brug under besvarelsen:

Impulsrespons

Et LTIC system med systemligning

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

$$Q(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0$$

$$P(D) = b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + ... + b_0$$

hvor $D = \frac{d}{dt}$, har impulsresponset

$$h(t) = P(D)[y_n(t)u(t)]$$

$$= b_n\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) \quad , \; m \leq n$$

hvor y_n er en løsning til den homogene ligning med begyndelsesbetingelser $D^{n-1}y_n(0) = 1$, $D^{n-2}y_n(0) = 0$, $D^{n-3}y_n(0) = 0$, ... , $y_n(0) = 0$. Den samlede løsning til systemligningen kan da skrives

$$y(t) = y_{\text{zi}}(t) + y_{\text{zs}}(t)$$

$$= y_{\text{zi}}(t) + h(t) * x(t)$$

Foldning er defineret ved

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Visse foldningsintegraler:

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$(f_1 * f_2)(t)$	
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}u(t)$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	
$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$	

Fouriertransformation af $f(t)$ er defineret ved

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t)\, dt \qquad\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$$

Laplacetransformation af $f(t)$ er defineret ved

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

Begyndelsesværditeoremet

Hvis $g(t)$ og dens afledede kan laplacetransformeres er

$$g(0^+) = \lim_{t \to 0^+} g(t) = \lim_{s \to \infty} sG(s)$$

forudsat at grænseværdien eksisterer.

Slutværditeoremet

$$g(\infty) = \lim_{t \to \infty} g(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

forudsat at $sG(s)$ udelukkende har poler i venstre halvplan.

Regneregler for RLC komponenter

Kondensator	$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$	$v(t) = \dfrac{1}{C}\int^t i(\tau) d\tau$
Modstand	$i(t) = \dfrac{v(t)}{R}$	$v(t) = R\, i(t)$
Spole	$i(t) = \dfrac{1}{L}\int^t v(\tau) d\tau$	$v(t) = L\dfrac{di}{dt}$

Fysisk form af et 2. ordens system:

Den “fysiske” form af et 2. ordens system kan i laplacedomænet skrives

$$H(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

hvor ζ er dæmpningsfaktoren og polerne ligger i

$$\sigma_d \pm j\omega_d = -\zeta\, \omega_n \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\, \omega_n$$

Visse laplace- og fouriertransformerede:

$f(t)$	$F(s)$	$F(\omega)$
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0^-)$	$j\omega\, F(\omega)$
$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	$(j\omega)^2F(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$	$F(\omega)G(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F(s) * G(s)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$
1		$2\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$		$\frac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$r(t) = tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	eksisterer ikke
$\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{j\omega + a}$, $a > 0$
$t\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$, $a > 0$
$\cos(bt)\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{j\omega}{-\omega^2+b^2} + \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - b) + \delta(\omega + b))$
$\sin(bt)\, u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\frac{b}{-\omega^2+b^2} + \frac{\pi}{2j}(\delta(\omega - b) - \delta(\omega + b))$
$\exp(-at)\cos(bt)\, u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega+a)^2+b^2}$, $a > 0$
$\exp(-at)\sin(bt)\, u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{b}{(j\omega+a)^2+b^2}$, $a > 0$
$\cos(\omega_0 t)$		$\pi(\,\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\,)$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = u(\frac{\tau}{2} - \lvert t\rvert)$		$\tau\ \mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$
$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) = (1 - 2\lvert t\rvert/\tau)u(\frac{\tau}{2} - \lvert t\rvert)$		$\frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4})$

Opgave 1

Lad $x(t)$ være input og $y(t)$ være output. Angiv hvilket af systemerne

A $\dot{y}(t) + y^2(t) = x(t)$

B $\dot{y}(t) + y(t) = x^2(t)$

C $\dot{y}(t) + y(t) = \frac{10}{3}x(t)$

D $\dot{y}(t) + y(t) = x(t) + 1$

der er et LTIC system. Det korrekte svar overføres til skemaet side 2.

Opgave 2

Bestem integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 2) f(t - \tau) d\tau$$

Svarmuligheder

A $f(-2)$

B $f(-t + 2)$

C $f(t - 2)$

D $f(2)$

Det korrekte svar overføres til skemaet side 2.

Opgave 3

Et LTIC system har impulsreponset

$$h(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t}u(t)$$

Angiv systemets respons på inputtet

$$x(t) = u(t)$$

A $y_{\mathrm{zs}} = 2u(t)\,\mathrm{e}^{-2t}$

B $y_{\mathrm{zs}} = 2u(t)\,\mathrm{e}^{-t}$

C $y_{\mathrm{zs}} = 2u(t)\,(1 + \mathrm{e}^{-2t})$

D $y_{\mathrm{zs}} = 0$

Opgave 4

Et LTIC system har impulsresponset

$$h(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t}u(t)$$

Angiv systemets overføringsfunktion i laplacedomænet

A $H(s) = \dfrac{s}{s+2}$

B $H(s) = \dfrac{2}{s+2}$

C $H(s) = \dfrac{2s}{s+2}$

D Hverken A, B eller C.

Opgave 5

Et 1. ordens system er beskrevet ved ligningen

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) \qquad , \; y(0^-) = 3$$

Hvad er responset på $x(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{-3t} = t\,\mathrm{e}^{-3t}u(t)$ for systemet

A $\quad Y_{\mathrm{zs}}(s) = \dfrac{-4}{s+2} + \dfrac{4}{s+3} + \dfrac{6}{(s+3)^2}$

B $\quad Y_{\mathrm{zs}}(s) = \dfrac{-4}{s+2} + \dfrac{6}{s+3} + \dfrac{4}{(s+3)^2}$

C $\quad Y_{\mathrm{zs}}(s) = \dfrac{4}{s+2} + \dfrac{4}{s+3} + \dfrac{6}{(s+3)^2}$

D $\quad$ Ingen af ovenstående.

Opgave 6

Hvad er overføringsfunktionen i fourierdomænet systemet i Opgave 5?

A $\quad H(\omega) = \frac{2}{j\omega-2}$

B $\quad H(\omega) = \frac{2\,j\omega}{j\omega-2}$

C $\quad H(\omega) = \frac{2j\omega}{j\omega+2}$

D $\quad H(\omega)$ eksisterer ikke.

Opgave 7

Betragt et 2. ordens system med overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{s^2 + 7s}{(s+3)^2 + 4^2}$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt

A Systemet er overdæmpet.

B Systemet har dæmpningsfaktor $\zeta = \frac{4}{5}$.

C Systemet har poler i $p = -3 \pm 4j$.

D Systemet er et lavpasfilter.

Opgave 8

Overføringsfunktionen $H(s)$ for et LTIC system er

$$H(s) = \frac{s^2 + 7s}{(s+3)^2 + 4^2}$$

Hvad er systemets respons på en enhedstrinpåvirkningen $x(t) = u(t)$?

A $y_{\text{step}}(t) = (\mathrm{e}^{-3t}\cos(4t) + \mathrm{e}^{-3t}\sin(4t))u(t)$

B $y_{\text{step}}(t) = (\mathrm{e}^{-4t}\cos(3t) - \mathrm{e}^{-4t}\sin(3t))u(t)$

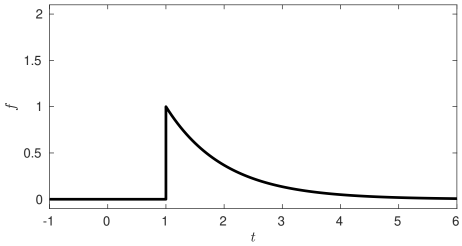
C $y_{\text{step}}(t) = \mathrm{e}^{-4t}\cos(3t)u(t)$

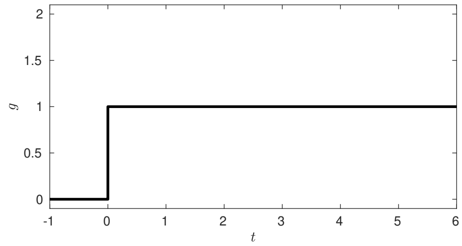
D $y_{\text{step}}(t) = \cos(4t)u(t)$

Tip: Brug tabellen over laplacetransformerede.

Opgave 9

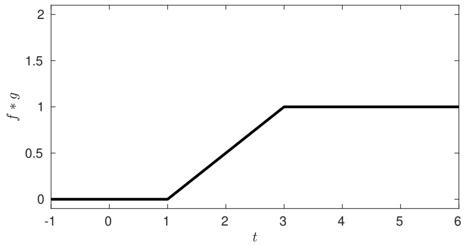
Funktionerne $f(t)$ og $g(t)$ har graferne



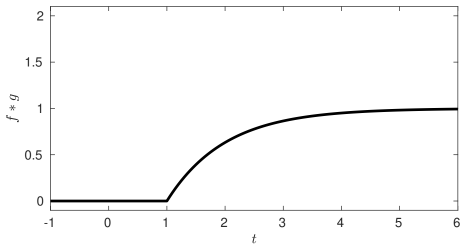


Hvilken af graferne nedenfor fremstiller foldningsintegralet $f * g$:

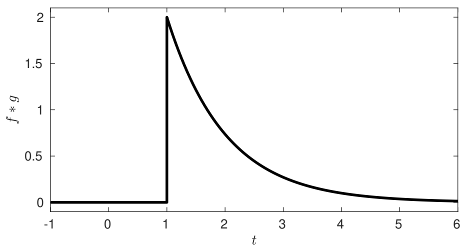
A



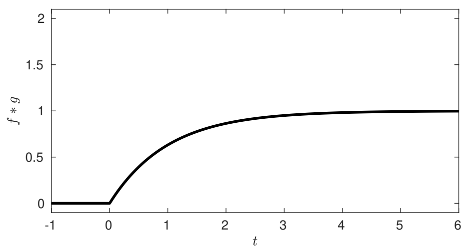
B



C



D



Opgave 10

Et LTIC-system er beskrevet ved ligningen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

hvor $x(t)$ betegner input og $y(t)$ er output. Hvilket af nedenstående udsagn er ***ikke*** korrekt?

A Systemet er marginalt stabilt.

B Systemets overføringsfunktion i laplacedomænet er $H(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$

C Systemet har frekvenskarakteristik $H(\omega) = \dfrac{1}{-\omega^2 + 1} + \dfrac{\pi}{2j}(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1))$

D Systemet har poler i ± 1.

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.

Opgave 11

Lad $F(s)$ betegne den unilateralt laplacetransformerede af

$$f(t) = 1 \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt?

A $F(s) = 2\pi\,\delta(s/j)$

B $F(s) = 2\pi\,\delta(js)$

C $F(s) = \dfrac{2}{s}$

D $F(s)$ er ikke defineret.

Tip: Læs spørgsmålet én gang til.

Opgave 12

Hvis en funktion $f(t)$ er antisymmetrisk, d. v. s. $f(t) = -f(-t)$, og samtidig er imaginær, d. v. s. $f(t) = -f(t)^*$, hvad opfylder den fouriertransformerede $F(\omega)$ da:

A $F(\omega)$ er antisymmetrisk og reel.

B $F(\omega)$ er symmetrisk og reel.

C $F(\omega)$ er antisymmetrisk og imaginær.

D $F(\omega)$ er symmetrisk og imaginær.

Råd: Brug definitionen af fouriertransformation.

Opgave 13

Et 2. ordens system har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 4s + 4}$$

Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt

A Systemet har poler i $p = \pm 2j$.

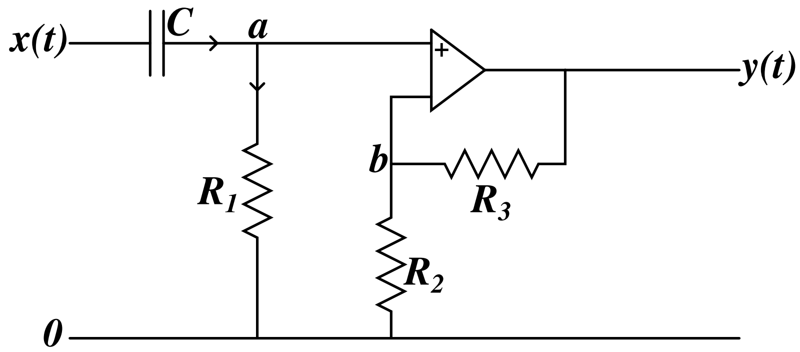
B Systemet er et lavpasfilter.

C Systemet er ustabilt.

D Systemet er kritisk dæmpet.

Opgave 14

Et filter har diagrammet



hvor spændingen $x(t)$ er input og spændingen $y(t)$ er output. Hvilket af nedenstående er ***ikke*** korrekt?

A Overføringsfunktionen i laplacedomænet er

$$H(s) = \frac{R_2 + R_3}{R_2} \frac{s}{1/(R_1C) + s}$$

B Impulsresponset er

$$h(t) = (1 + R_3/R_2) \left(\delta(t) - \frac{1}{R_1C} \, \mathrm{e}^{-t/(R_1C)} u(t) \right)$$

C Systemet har forstærkningen

$$\frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

D Dimensionen af impulsresponset er

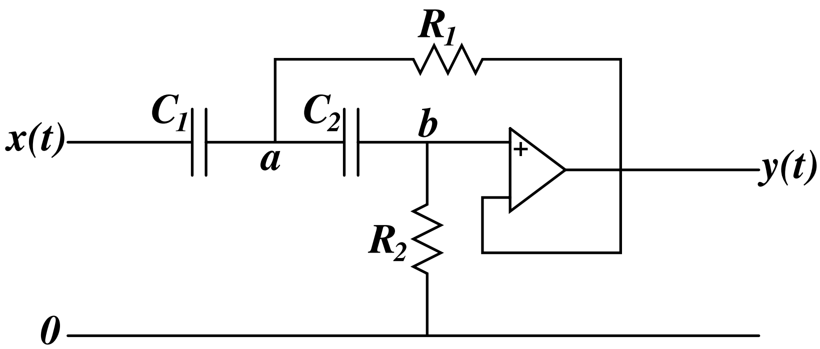
$$[h(t)] = \mathrm{s}^{-1} \qquad\qquad [H(s)] = 1$$

i henholdsvis tidsdomænet og laplacedomænet.

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.

Opgave 15

Betragt et Sallen-Key-filter



med forstærkning 1. Hvilket af nedenstående udsagn er ***ikke*** korrekt?

A Systemet er et højpasfilter.

B I Laplacedomænet kan knudepunktsligningen i knudepunkt **a** skrives

$$sC_1(X(s) - A(s)) = sC_2(A(s) - B(s)) + \frac{A(s) - Y(s)}{R_1}$$

C I Laplacedomænet kan knudepunktsligningen i knudepunkt **b** skrives

$$\frac{A(s) - B(s)}{R_2} = sC_2B(s)$$

D Systemets input påtrykkes en spænding $x(t) = 10\text{V}$ i en tid som er meget større end indsvingningstiden for systemet. Spændingen på output er da

$$y(\infty) = 0\text{V}$$

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.

Opgave 16

Et normaliseret lavpasfilter har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

hvor $0<\zeta\leq 1$. Hvilken af nedenstående substitutioner skal foretages for at opnå et højpasfilter med knækfrekvens i ω_n?

A s erstattes af $\dfrac{\omega_n^2}{s}$

B s erstattes af $\dfrac{1}{s} + \omega_n$

C s erstattes af $\dfrac{\omega_n}{s}$

D s erstattes af $\dfrac{s}{\omega_n}$

Opgave 17

Et filter har i laplacedomænet overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Hvad der værdien af impulsresponset umiddelbart efter 0.

A $h(0^+) = -1$

B $h(0^+) = 0$

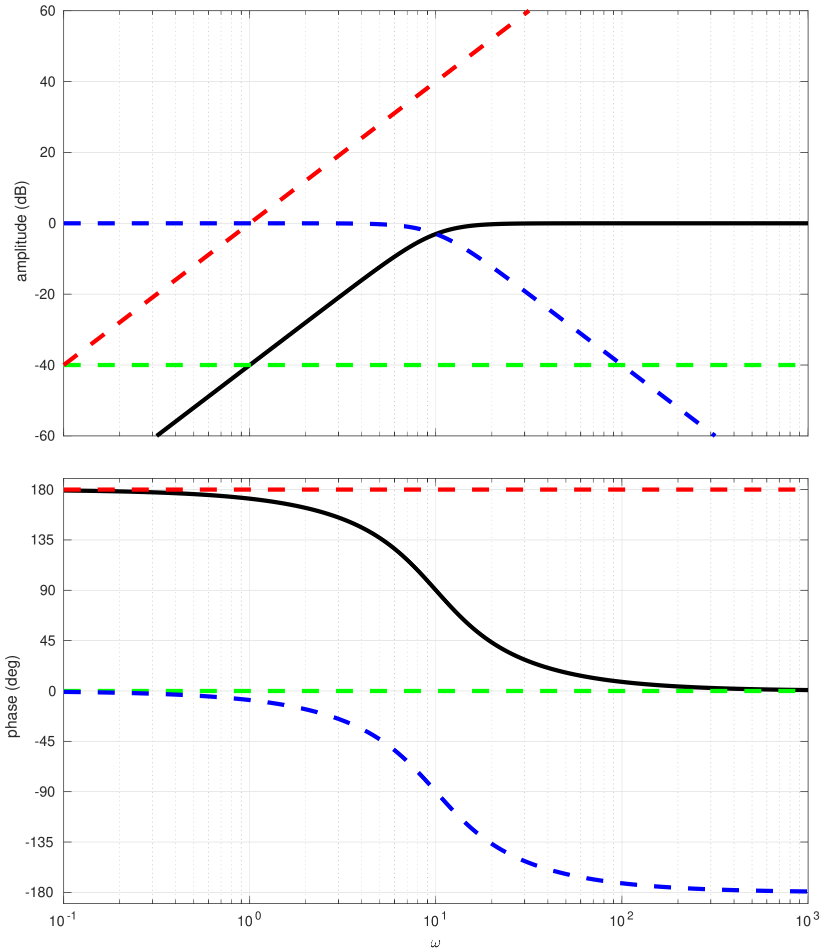
C $h(0^+) = 1$

D $h(0^+) = 3$

Tip: Overvej om begyndelsesværditeoremet kan anvendes. Hvis ikke, bestem da impulsresponset i tidsdomænet og aflæs værdien til tiden $t = 0^+$.

Opgave 18

Et 2. ordens system har Bode-plottet



hvor "sort" svarer til det fulde system og de øvrige (stiplede) kurver svarer til faktoriseringen af systemet. Angiv hvilken overføringsfunktion der svarer til det viste Bode-plot.

A $$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}}\,10s + 100}$$

B $$H(s) = \frac{s^2}{s^2 - 2\sqrt{\frac{1}{2}}\,10s + 100}$$

C $$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 100}$$

D $$H(s) = \frac{100}{(s+10)^2}$$

Opgave 19

Et LTIC system er beskrevet ved ligningen

$$(D^2 + 2D + 5)y(t) = 5x(t) \qquad , \ y(0^-) = 0, \ \dot{y}(0^-) = 0, \ x(t) = u(t)$$

Hvilket af nedenstående er ***ikke*** korrekt?

A Systemet har overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

B Det samlede output i laplacedomænet er

$$Y(s) = \frac{5}{\left((s+1)^2 + 2^2\right) s} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

C Det samlede output i tidsdomænet er

$$y(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t))u(t)$$

D Systemet har dæmpningsfaktor $\zeta = \frac{2}{5}$.

Bemærk: Der spørges om hvilken af svarmulighederne, som *ikke* er opfyldt.

Opgave 20

Et tracking-filter har i laplacedomænet overføringsfunktionen

$$T(s) = \frac{as + b}{(s+1)(s+2)} = \frac{as + b}{s^2 + 3s + 2}$$

Hvad kræves om konstanterne a og b, hvis den asymptotiske fejl på enhedsstepfunktionen ($f(t) = u(t)$) og et enhedsrampeinput ($f(t) = r(t) = tu(t)$) begge skal være 0.

A $a = 3$ og $b = 2$

B $a = -2$ og $b = -3$

C $a < 0$ og $b > 0$

D Ingen ovenstående.

Tip: For input $f(t)$ med tilhørende output $y(t)$ defineres den asymptotiske fejl som

$$e_f = \lim_{t \to \infty} (y(t) - f(t))$$

Overvej om slutværditeoremet kan bruges.